Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 8.

Алгоритм унификации.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором (НОУ) выражений E_1 и E_2, если

1. θ — унификатор выражений E_1 и E_2, т. е. $E_1\theta = E_2\theta$;
2. для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ, для которой верно равенство

$$\eta = \theta\rho$$

Задача унификации

состоит в том, чтобы для двух выражений E_1 и E_2 выяснить, являются ли эти выражения унифицируемыми, и, в случае их унифицируемости, вычислить наиболее общий унификатор E_1 и E_2.

Алгоритм унификации

Начнем с самой простого варианта задачи унификации.

Как найти НОУ выражений E_1 и E_2, если одно из этих выражений — переменная, т. е. $E_1 = x \in Var$?

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x,t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x,t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- $\theta = \{x/t\}$ — унификатор выражений x и t.
  Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).
- Каков бы ни был унификатор η выражений x и t, верно
  $$\eta = \{x/t\}\eta.$$
  Возьмем произвольную переменную y, $y \in Var$.
  Если $y = x$, то $x\{x/t\}\eta = t\eta = x\eta$. (почему?) А если $y \neq x$, то $y\{x/t\}\eta = y\eta$.
  Таким образом, для любой переменной y верно $y\{x/t\}\eta = y\eta$, т. е. $\{x/t\}\eta = \eta$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

2. Случай $x \in Var_t$.
Для любой подстановки θ длина терма $x\theta$ превосходит длину терма $t(x)\theta$.
Поэтому $x\theta \neq t\theta$ для любой подстановки θ, т. е. $НОУ(x, t) = \emptyset$.

$\square$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.

Пусть $E_1 = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $E_2 = P(s_1, s_2, \dots, s_n)$.
Для решения задачи унификации сопоставим паре атомов E_1, E_2 систему уравнений

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

и будем решать задачу унификации для систем уравнений.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Определение

Подстановка θ называется унификатором системы уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}: \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

если для любого i, $1 \le i \le n$, термы $t_i\theta$ и $s_i\theta$ одинаковы.

Фактически, унификатор $\theta = \{x_1/r_1, \dots, x_k/r_k\}$ — это решение системы уравнений $\mathcal{E}$ в свободной алгебре термов (эрбрановской интерпретации).

Соответствующим образом определяется и наиболее общий унификатор системы уравнений (определение дать самостоятельно).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c,x) = f(y,g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c,g(c)) = f(c,g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c,y) = f(y,g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

Алгоритм унификации

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c,x) = f(y,g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c,g(c)) = f(c,g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c,y) = f(y,g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

Алгоритм унификации

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c,x) = f(y,g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c,g(c)) = f(c,g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c,y) = f(y,g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \textbf{Почему?}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Определение

Система уравнений $\mathcal{E}$ называется приведенной , если

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

и при этом

- $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq Var$,
- все переменные $x_1, \dots, x_n$ попарно различные,
- $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \bigcup_{i=1}^{n} Var_{s_i} = \emptyset$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Система уравнений $\mathcal{E}_1$ является приведенной, а $\mathcal{E}_2$ — нет.

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(c) \end{cases} \qquad \mathcal{E}_2 : \begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Лемма (о приведенной системе)

Если система уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

является приведенной, то подстановка $\{x_1/s_1, x_2/s_2, \dots, x_n/s_n\}$ является наиболее общим унификатором системы $\mathcal{E}$.

Доказательство

Самостоятельно. С использованием леммы о связке.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.
Найти унификатор — это значит решить систему уравнений. Решать систему будем методом исключения переменных (как в «обычной» алгебре). Исключив все переменные, получим решение (приведенную систему). Важно, чтобы все системы уравнений, которые мы будем строить в процессе «исключения переменных» были равносильны исходной системе.

Определение

Системы уравнений $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_1$ называются равносильными , если $HOY(\mathcal{E}_1) = HOY(\mathcal{E}_2)$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Описание алгоритма унификации
(Алгоритм Мартелли–Монтанари).

Это — недетерминированный алгоритм, состоящий из 6 правил, которые можно применять в любом порядке до тех пор, пока

- либо ни одно из правил применить невозможно (построена приведенная система уравнений),
- либо применяется правило, устанавливающее невозможность унификации.

Исходная система $\mathcal{E}_0$; $i = 0$;
while применимо одно из 6 правил **do**
    выбрать правило R, применимое к E_i;
    $\mathcal{E}_{i++} = R(\mathcal{E}_i)$
od

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(1) уравнение $f(t'_1, t'_2, \ldots, t'_k) = f(s'_1, s'_2, \ldots, s'_k)$ замещается совокупностью уравнений $t'_1 = s'_1,\ t'_2 = s'_2,\ \ldots,\ t'_k = s'_k$;

(2) если в системе есть уравнение $f(t'_1, \ldots, t'_k) = g(s'_1, \ldots, s'_m)$, где $f, g \in Func \cup Const$, $f \neq g$, то система уравненний не имеет решений: СТОП: "Нет унификатора";

(3) уравнение $s = x$, где $x \in Var$, $s \notin Var$, замещается уравнением $x = s$;

(4) уравнение $s = s$ удаляется из системы;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(5) если в системе есть уравнение $x = s$, причем
- $x \in Var$,
- $x \notin Var_s$, и
- переменная x **встречается в каких-либо других уравнениях системы**,

то ко всем **другим** уравнения системы применяется подстановка $\{x/s\}$;

(6) если в системе есть уравнение $x = s$, причем $x \neq s$, $x \in Var_s$, то система уравненний не имеет решений: СТОП: “Нет унификатора".

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \quad \overset{(3)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y, f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y, f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \stackrel{(3)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \stackrel{(5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ f(x,c) = f(z,z) \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ f(x,c) = f(z,z) \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ f(x,c) = f(z,z) \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases} \overset{(5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(z,c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ f(x,c) = f(z,z) \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(z,c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z,c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u,v) = f(z,c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z,c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u,v) = f(z,c) \end{cases} \overset{(5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c,c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u,v) = f(c,c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c,c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u,v) = f(c,c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \quad \xRightarrow{(5)} \quad \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases} \quad \xRightarrow{(1)} \quad \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$ — **приведенная система**

Алгоритм унификации

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \left\{ \begin{array}{l} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{array} \right. \overset{(1,3,5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_8 : \left\{ \begin{array}{l} y = f(c,c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{array} \right.$$

$$\theta = \{x/c, y/f(c,c), z/c, u/c, v/c\} \in HOY(\mathcal{E}_0)$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \stackrel{(1)}{\Longrightarrow}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \quad \overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \overset{(5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y,v) = f(x,y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \overset{(5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y,v) = f(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y,v) = f(x,y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u,v) = f(x,y) \end{cases} \overset{(5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y,v) = f(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y,v) = f(x,y) \end{cases} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y,v) = f(x,y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

Алгоритм унификации

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y,v) = f(x,y) \end{cases} \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y,g(x)) = f(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y,g(x)) = f(x,y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ {\color{red} g(x) = x} \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \quad \xrightarrow{(3)} \quad \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \overset{(3)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases} \overset{(6)}{\Longrightarrow}$$ **СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.**

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \stackrel{(3)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases} \stackrel{(6)}{\Longrightarrow}$$ **СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.**

Система уравнений

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

не имеет решения (унификатора).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Теорема (об унификации)

Какова бы ни была система уравнений $\mathcal{E}$,

1. алгоритм унификации Мартелли-Монтанари всегда завершает работу;
2. если система уравнений $\mathcal{E}$ унифицируема , то в результате работы алгоритма унификации будет построена приведенная система уравнений, равносильная исходной системе $\mathcal{E}$;
3. если система уравнений $\mathcal{E}$ неунифицируема , то в результате работы алгоритма унификации будет выдано сообщение СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Уравнение $x = t$, где $x \in Var, x \notin Var_t$, будем называть приведенным уравнением системы $\mathcal{E}$, если переменная x не содержится ни в каких других уравнениях системы $\mathcal{E}$.
Переменную x в этом случае будем называть приведенной переменной системы $\mathcal{E}$

Каждой системе уравнений $\mathcal{E}$ сопоставим **характеристику** $H(\mathcal{E}) = \langle h_1(\mathcal{E}), h_2(\mathcal{E}), h_3(\mathcal{E})\rangle$, — упорядоченную тройку натуральных чисел, в которой

1. $h_1(\mathcal{E})$ — общее число **неприведенных** переменных, содержащихся в системе $\mathcal{E}$;
2. $h_2(\mathcal{E})$ — общее число функц. символов и констант, содержащихся в **левых частях** уравнений системы $\mathcal{E}$;
3. $h_3(\mathcal{E})$ — общее число уравнений в системе $\mathcal{E}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

На множестве упорядоченных троек натуральных чисел введем отношение лексикографического порядка :

$$\langle M_1, M_2, M_3\rangle \succ \langle N_1, N_2, N_3\rangle$$
$$\Updownarrow$$
$$N_1 < M_1$$
$$\text{или } N_1 = M_1 \text{ и } N_2 < M_2$$
$$\text{или } N_1 = M_1, N_2 = M_2 \text{ и } N_3 < M_3.$$

Пример.

$$\langle 2, 11, 2\rangle \succ \langle 2, 10, 5578\rangle \succ \langle 1, 1001, 78\rangle$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Вспомогательная лемма.

В множестве троек натуральных чисел **не существует** бесконечно убывающей последовательности

$$\langle k_1, m_1, n_1\rangle \succ \langle k_2, m_2, n_2\rangle \succ \dots \succ \langle k_i, m_i, n_i\rangle \succ \langle k_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1}\rangle \succ \dots$$

Доказательство вспомогательной леммы.

Самостоятельно.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Идея доказательства вспомогательной леммы.

Предположим, что у Вас есть 1 000 000 руб. в произвольных купюрах. Сыграем в игру. Правила игры таковы.

1. Вы даете мне денежную купюру и взамен получаете право потребовать от меня любую сумму в купюрах меньшего достоинства.
2. Если Вы вручаете мне купюру наименьшего достоинства, то взамен не получаете ничего.

Докажите, что игра всегда будет оканчиваться тем, что Вы остаетесь без денег.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (1)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n) \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_1 = s_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succeq h_1(\mathcal{E}''), \; h_2(\mathcal{E}') \succ h_2(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (3)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ s = x \\ \dots \end{cases} \quad \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ x = s \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succeq h_1(\mathcal{E}''), \; h_2(\mathcal{E}') \succ h_2(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (4)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ s = s \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(4)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succeq h_1(\mathcal{E}''),\ h_2(\mathcal{E}') \succeq h_2(\mathcal{E}''),\ h_3(\mathcal{E}') \succ h_3(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (5)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} = s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succ h_1(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Значит, правила (1), (3, (4), (5) не могут применяться бесконечно долго.
Значит, рано или поздно либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило. В любом случае работа алгоритма унификации завершится.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) получается система уравнений, равносильная исходной, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow \mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'', \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Это, очевидно, верно для правил (1), (3, (4) (убедитесь сами).

Покажем, что правило (5) также приводит к равносильной системе.

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \ldots \\ x = s_j \\ \ldots \\ t_n = s_n \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \ldots \\ x = s_j \\ \ldots \\ t_n\{x/s_j\} = s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Предположим, что θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}'$, т. е.

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases}$$

Т. к. $x\theta \equiv s_j\theta$, $x \notin Var_{s_j}$, согласно лемме о связке $\theta = \{x/s_j\}\theta$.
Следовательно,

$$\begin{cases} t_1\{x/s_j\}\theta \equiv s_1\{x/s_j\}\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\}\theta \equiv s_n\{x/s_j\}\theta \end{cases}$$

Значит, θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}''$. Аналогично доказывается, что всякий унификатор системы $\mathcal{E}''$ является унификатором системы $\mathcal{E}'$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Как мы показали, рано или поздно при работе алгоритма либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило.

Если к системе применяется правило (2), то в системе есть уравнение $f(s_1, \dots, s_n) = g(t_1, \dots, t_m)$, $f \neq g$. Очевидно, для любой подстановки θ верно $f(s_1, \dots, s_n)\theta \neq g(t_1, \dots, t_m)\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Если к системе применяется правило (6), то в системе есть уравнение $x = s$, $x \in Var_s$. Согласно лемме о связке для любой подстановки θ верно $x\theta \neq s\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Значит, выдача сообщения СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА означает, что система неунифицируема.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Если к системе уравнений неприменимо ни одно правило, то

- в левых частях уравнений содержатся только переменные (иначе применимы правила (1), (2) или (3));
- ни одна переменная из левой части больше нигде не содержится (иначе применимы правила (4), (5) или (6)).

Значит, построенная система уравнений является приведенной и имеет унификатор, который вычисляется по лемме о приведенной системе . $\square$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 8.