Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР:
Владимир Анатольевич Захаров

zakh@cs.msu.su

Программа курса

http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html

Лекция 1.

Что изучает логика?
Логика в информатике.
Структура курса.
Исторические сведения.
Логические парадоксы.

Что изучает логика?

ЛОГИКА — междисциплинарная отрасль наук, изучающая

- законы причинно-следственной связи в окружающем мире;
- проявление причинно-следственных законов в рациональном мышлении человека;
- отражение причинно-следственных законов в языках (естественных и искусственных).

Что изучает логика?

ФОРМАЛЬНАЯ ЛОГИКА

изучает **формы** , в которых проявляются законы причинно-следственных связей, вне зависимости от содержания (смысла) тех явлений (предметов), к которым эти законы относятся.

Что изучает логика?

Поясняющий пример.

$P1$: Каждый металл — проводник.

$P2$: Ртуть — металл.

Значит, ртуть — проводник.

Закон физики (?)

Что изучает логика?

Поясняющий пример.

*P*1: В каждом южном городе летом тепло.

*P*2: Сочи — южный город.

Значит, в Сочи летом тепло.

Закон географии (?)

Что изучает логика?

Поясняющий пример.

*P*1: Каждый преступник должен быть наказан.

*P*2: У. б. Л. — преступник.

Значит, У. б. Л. должен быть наказан.

Закон юриспруденции (?)

Что изучает логика?

Поясняющий пример.

Общая форма всех этих законов

$P1$: Каждый предмет, обладающий свойством R, обладает свойство Q.

$P2$: Предмет c обладает свойством R.

Значит, предмет c обладает свойством Q.

Закон формальной логики (!!!)

Что изучает логика?

Поясняющий пример.

Общая форма всех этих законов

$P1$: $\forall x\ (R(x)\ \rightarrow Q(x))$.

$P2$: $R(c)$.

$Q(c)$.

Закон формальной логики (в символьном виде)

Логика в информатике

Вернемся к примеру.

Это — исходные знания (база знаний).

*P*1: Каждый металл — проводник.

*P*2: Ртуть — металл.

А это — новые знания.

Ртуть — проводник.

Откуда взялись новые знания???

Логика в информатике

Применение закона формальной логики.

Логический закон:

$P1$: $\forall x\ (R(x)\ \rightarrow Q(x))$.

$P2$: $R(c)$.

$Q(c)$.

Интерпретация:

$R(x)$ — «предмет x — металл »;

$Q(x)$ — «предмет x — проводник»;

c — «ртуть».

Логика в информатике

Еще одно применение закона формальной логики.

Логический закон:

$P1$: $\forall x\ (R(x)\ \rightarrow Q(x))$.

$P2$: $R(c)$.

$Q(c)$.

Другая интерпретация:

$R(x)$ — «предмет x — южный город »;

$Q(x)$ — «предмет x — теплый летом»;

c — «Сочи».

Логика в информатике

Логика не позволяет получать новую информацию!!!

Знания — это форма представления информации в виде формальных высказываний.
Законы формальной логики преобразуют одни высказывания в другие.
Таким образом, законы формальной логики позволяют преобразовывать информацию из одной формы представления в другую.

Законы формальной логики — это инструмент преобразования информации.

Логика в информатике

Основная задача формальной логики.

База знаний: $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$.

Предложение: ψ.

Задача (неформальная): выяснить, является ли предложение ψ следствием утверждений базы знаний Γ.

Задача (формальная): проверить, что ψ выводится из Γ по законам формальной логики.

Логика в информатике

Приложение 1.

Экспертные системы.

База знаний Γ — база знаний экспертной системы.
Предложение ψ — запрос к базе знаний.
Аппарат логического вывода — ядро экспертной системы.

Приложение 2.

Автоматизация научных исследований.

База знаний Γ — система аксиом математической теории.
Предложение ψ — математическое утверждение.
Аппарат логического вывода — ядро автоматической системы доказательства теорем.

Логика в информатике

Приложения 1, 2.

Для этого нужно уметь:

- Разработать формальный язык для представления знаний.
- Создать систему необходимых законов формальной логики.
- Проверить корректность логических законов.
- Проверить полноту построенной системы логических законов.
- Разработать алгоритм проверки выводимости одних предложений из других по заданным законам.

Этим мы займемся в первой части курса.

- Оптимизировать построенный алгоритм (сделать его практически пригодным).

Этим мы займемся во второй части курса.

Логика в информатике

Приложение 3.

Программирование.

Вычисление программы — последовательное преобразование интерпретатором одних состояний данных в другие согласно заданному алгоритму .

Логический вывод (доказательство) — последовательное построение по законам формальной логики одних утверждений из других, исходя из заданной базы знаний .

База знаний Г — программа.
Предложение ψ — вызов программы.
Аппарат логического вывода — интерпретатор программ.

Но вычисление программы завершается результатом, однако, не всякое доказательство является «результативным» (конструктивным).

Логика в информатике

Приложение 3.

Пример.

Задача. Существуют ли такие два иррациональных числа α и β, что α^β — рациональное число?

Решение.

1. Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рациональное число, то $\alpha = \beta = \sqrt{2}$.
2. Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — иррациональное число, то $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\beta = \sqrt{2}$.

□

Мы доказали, что α и β существуют, но не смогли их **вычислить**. Это **неконструктивное** доказательство.

Чтобы логическое доказательство могло играть роль вычисления, оно должно быть конструктивным.

Логика в информатике

Приложение 3.

Для этого нужно уметь:

- Разработать формальный язык для представления программ в виде логических утверждений.
- Сделать логическое доказательство конструктивным, чтобы оно могло играть роль вычисления.
- Проверить вычислительную корректность этого способа доказательства.
- Проверить алгоритмическую полноту этого способа доказательства.
- Сделать этот способ программирования удобным для пользования.

Этим мы займемся в третьей части курса.

Логика в информатике

Приложение 4.

Программы могут быть правильными и неправильными.
Правильная программа — это такая программа, поведение которой удовлетворяет заданным требованиям (спецификации) корректности.
Проверить правильность программы — значит доказать, что программа удовлетворяет требованиям корректности.
Для доказательства правильности программ могут быть использованы методы логики.

Логика в информатике

Приложение 4.

Для этого нужно уметь:

- Разработать формальный язык для описания требований правильности программ.
- Разработать правила логического доказательства правильности программ.
- Разработать алгоритм (метод) применения этих правил для доказательства правильности программ относительно заданных спецификаций.

Этим мы займемся в четвертой части курса.

Исторические сведения

384 д.н.э.

322 д.н.э.

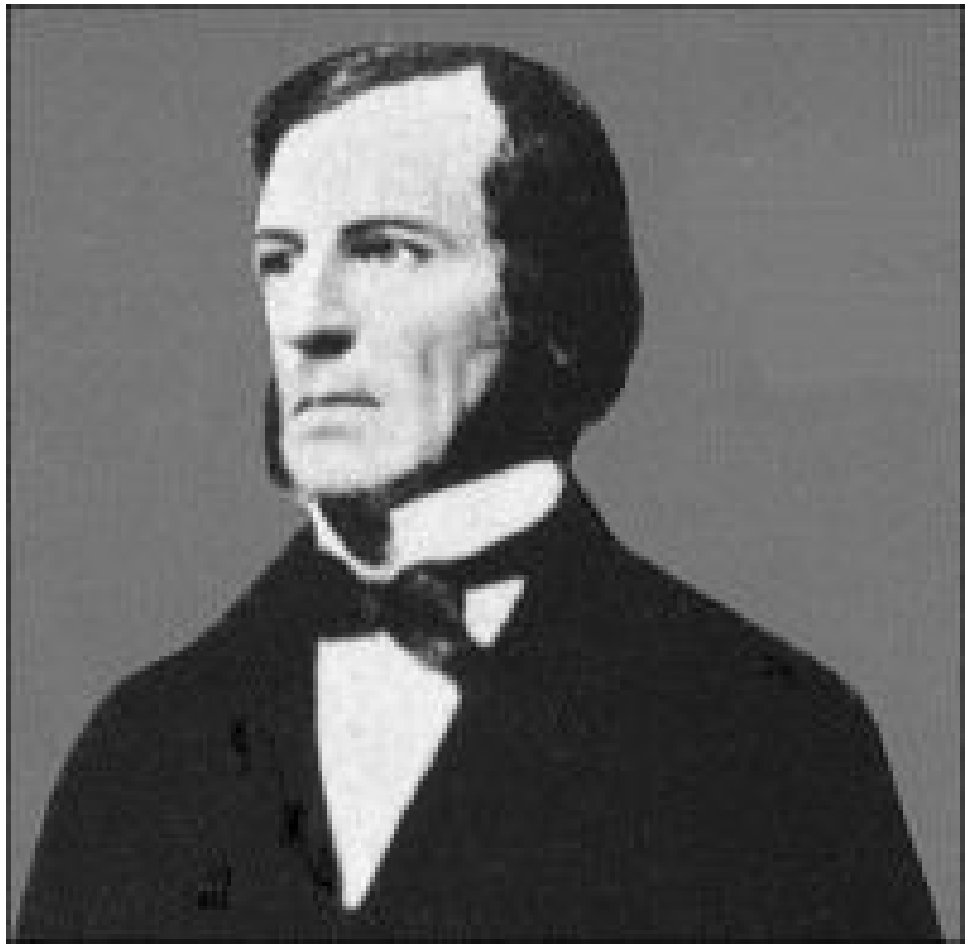
АРИСТОТЕЛЬ

Исторические сведения

1646  1716

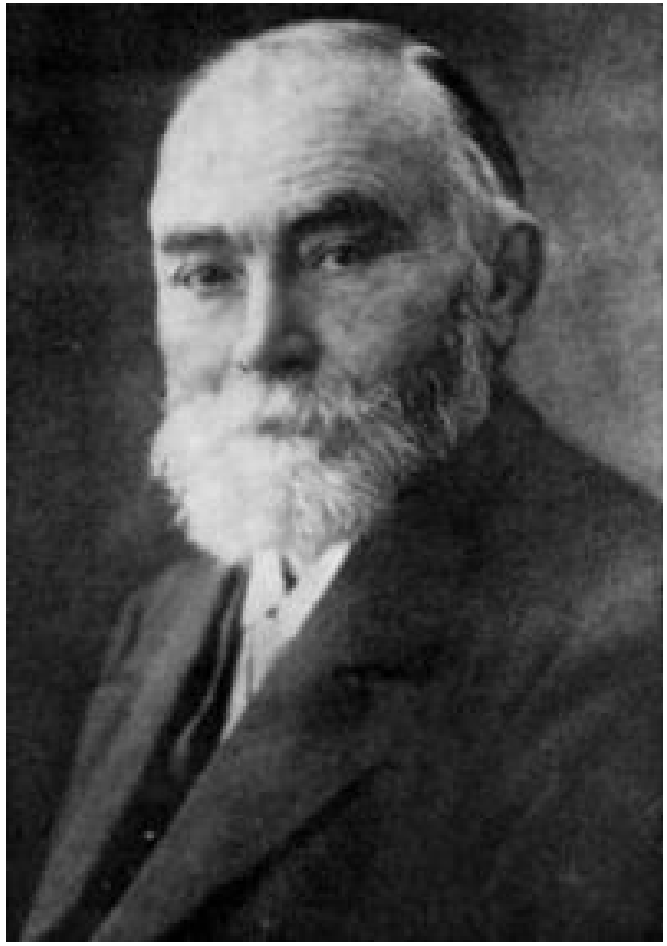
ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ФОН ЛЕЙБНИЦ

Исторические сведения

1815  1864

ДЖОРДЖ БУЛЬ

Исторические сведения

1848  1925

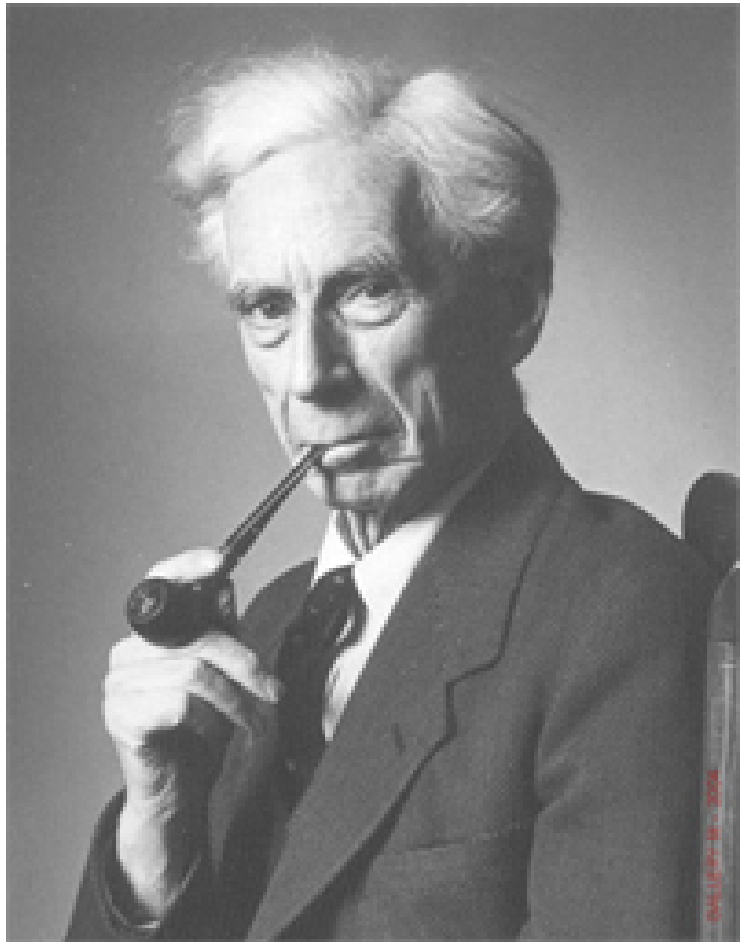
ГОТТЛОБ ФРЕГЕ

Исторические сведения

1862  1943

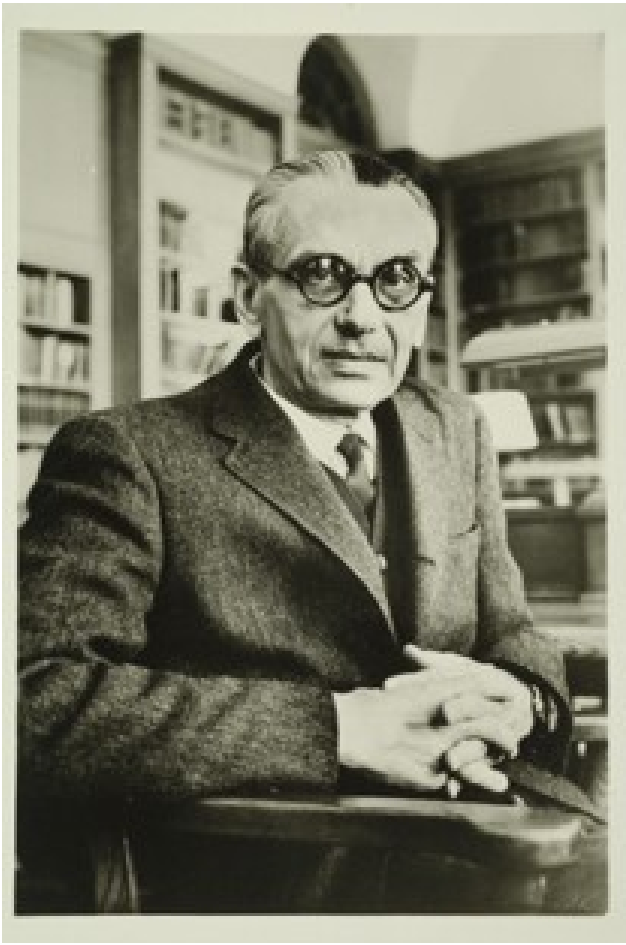
ДАВИД ГИЛЬБЕРТ

Исторические сведения

1872  1970

БЕРТРАН РАССЕЛ

Исторические сведения

1906  1978

КУРТ ГЕДЕЛЬ

Исторические сведения

1902  1983

АЛЬФРЕД ТАРСКИЙ

Исторические сведения

1908  1931

ЖАК ЭРБРАН

Исторические сведения

1909  1945

ГЕРХАРД ГЕНЦЕН

Исторические сведения

1941

АЛАН КОЛМЕРОЭ

Исторические сведения

1956

МИХАИЛ ЗАХАРЬЯЩЕВ

Логические парадоксы.

Парадоксы - движущая сила логики.

Противоречивые парадоксы (антиномии) заставляют задумываться над такими вопросами, как

- Что такое истинное утверждение?
- Что такое доказуемое утверждение?
- В какой мере можно формализовать наши знания?

Логические парадоксы.

Парадокс о крокодиле

Крокодил схватил ребенка.

Мать ребенка просит крокодила:
«Верни мне ребенка! »

Крокодил отвечает:
«Я верну тебе ребенка, если ты угадаешь, исполню ли я твою просьбу. »

«Не исполнишь », — говорит женщина.

Вернет ли крокодил ребенка матери?

Логические парадоксы.

Парадокс лжеца

УТВЕРЖДЕНИЕ,
КОТОРОЕ НАПИСАНО НА
ЭТОМ
СЛАЙДЕ, — ЛОЖНОЕ.

Логические парадоксы.

Парадокс лжеца

Истинно или ложно предъявленное вам утверждение?

Логические парадоксы.

Парадокс утренней звезды

Венера видна ранним вечером, и поэтому ее называют вечерней звездой.

Венера видна ранним утром, и поэтому ее называют утренней звездой.

Означает ли это, что вечерняя звезда видна ранним утром?

Логические парадоксы.

Парадокс морской битвы

Некий флотоводец обратился к прорицателю с вопросом, состоится ли завтра морская битва. Прорицатель ответил: «Битва завтра состоится».
На следующий день случился шторм, и флот не смог выйти в море. Разгневанный флотоводец потребовал от прорицателя вернуть деньги, поскольку его прогноз оказался ложным.
Прорицатель ответил:«Твои моряки вчера купили на рынке свежее молоко. Сегодня это молоко уже не свежее, но они не просят вернуть им деньги обратно. Мой прогноз тоже был верным вчера, и ты не вправе жаловаться на то, что он неверен сегодня».

Прав ли прорицатель?

Парадоксы неизбежны.

Но их влияние можно ограничить.

Для этого нужны математические модели логических законов.

Так появилась

Математическая логика

РЕЙМОНД С. СМАЛЛИАН. "Как же называется эта книга?"

У Порции (героини комедии "Венецианский купец") было три шкатулки: из золота, серебра и свинца. В одной из шкатулок хранился портрет Порции. Поклоннику предлагалось выбрать шкатулку, и если он был достаточно умен, чтобы выбрать шкатулку с портретом, то получал право назвать Порцию невестой. На крышках шкатулок были надписи:

На золотой	На серебряной	На свинцовой
Портрет в этой шкатулке	Портрет не в этой шкатулке	Портрет не в золотой шкатулке

Своему поклоннику Порция пояснила, что из трех высказываний на крышках шкатулок, по крайней мере два ложны.

Какую шкатулку следует выбрать поклоннику Порции?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 1.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР:
Владимир Анатольевич Захаров

zakh@cs.msu.su

http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html

Лекция 2.

Классическая логика предикатов первого порядка
Синтаксис. Термы и формулы. Семантика. Интерпретация. Выполнимость формул.

ПРЕДИКАТ

латинский термин («предвидеть, предсказывать»), обозначающий член предложения — сказуемое.

Студент **слушает** **лектора**

Субъект *Предикат* *Объект*

В более общем смысле предикат — это свойство, атрибут предмета, отношение между предметами, событиями, явлениями.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные переменные $Var = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$;

Предметные константы $Const = \{c_1, c_2, \ldots, c_l, \ldots\}$;

Функциональные символы $Func = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots, f_r^{(n_r)}, \ldots\}$;

Предикатные символы $Pred = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \ldots, P_s^{(m_s)}, \ldots\}$.

Тройка $\langle Const, Pred, Func \rangle$ называется сигнатурой алфавита.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные константы — это имена предметов;

Функциональные символы обозначают операции над предметами;

Предикатные символы обозначают отношения между предметами.

Пример.

Константы $0,\ 1,\ \pi, \ldots;$

Функциональные символы $+,\ \times,\quad \mathrm{mod}\ , \ldots;$

Предикатные символы $=,\ <, \ldots.$

АЛФАВИТ

Логические связки и кванторы.

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ)	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	$\rightarrow$.

Квантор всеобщности	(«для каждого»)	$\forall$
Квантор существования	(«хотя бы один»)	$\exists$

Знаки препинания.

Разделитель	,
Скобки	( )

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Определение терма.

Терм — это

x	, если $x \in Var$	x — переменная;
c	, если $c \in Const$	c — константа;
$f^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$	, если $f^{(n)} \in Func$ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы	составной терм.

$Term$ — множество термов заданного алфавита.

Var_t — множество переменных, входящих в состав терма t.

$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — запись обозначающая терм t, у которого $Var_t \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Если $Var_t = \emptyset$, то терм t называется **основным термом**.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры термов.

x_2	т. к. $x_2 \in \mathit{Var}$;
c_1	т. к. $c_1 \in \mathit{Const}$;
$f^{(2)}(x_2, c)$	т. к. $f^{(2)} \in \mathit{Func}$, $x_2, c \in \mathit{Term}$;
$\times(x, +(1, \exp(2, y)))$	т. к. $\times, +, \exp \in \mathit{Func}$, $1, 2 \in \mathit{Const}$, $x, y \in \mathit{Var}$;
$x \times (1 + 2^y)$	инфиксная форма записи термов;
$f(c_1, g(h(c_1), c_2))$	основной терм.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Определение формулы.

Формула — это

атомарная формула

$P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, если $P^{(m)} \in Pred$, $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \subseteq Term$;

составная формула

$(\varphi \& \psi)$, если φ, ψ — формулы;
$(\varphi \vee \psi)$
$(\varphi \to \psi)$
$(\neg\varphi)$

$(\forall x \varphi)$, если $x \in Var$, φ — формула.
$(\exists x \varphi)$

Form — множество всех формул заданного алфавита.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$	«значения термов $t_1, t_2, \ldots, t_m$ находятся в отношении $P^{(m)}$»;
$(\varphi \& \psi)$	«φ и ψ»;
$(\varphi \vee \psi)$	«φ или ψ»;
$(\varphi \to \psi)$	«если φ, то ψ»;
$(\neg\varphi)$	«неверно, что φ»;
$(\forall x \varphi)$	«для любого значения x верно φ»;
$(\exists x \varphi)$	«существует такое значение x, для которого верно φ».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры формул.

$P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))$

т. к. $P^{(2)} \in Pred$, $x_1, f(c, x_2) \in Term$;

$R^{(1)}(x_1)$

т. к. $R^{(1)} \in Pred$, $x_1 \in Term$;

$(\neg R^{(1)}(x_1))$

$((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))$

$(\exists x_2((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

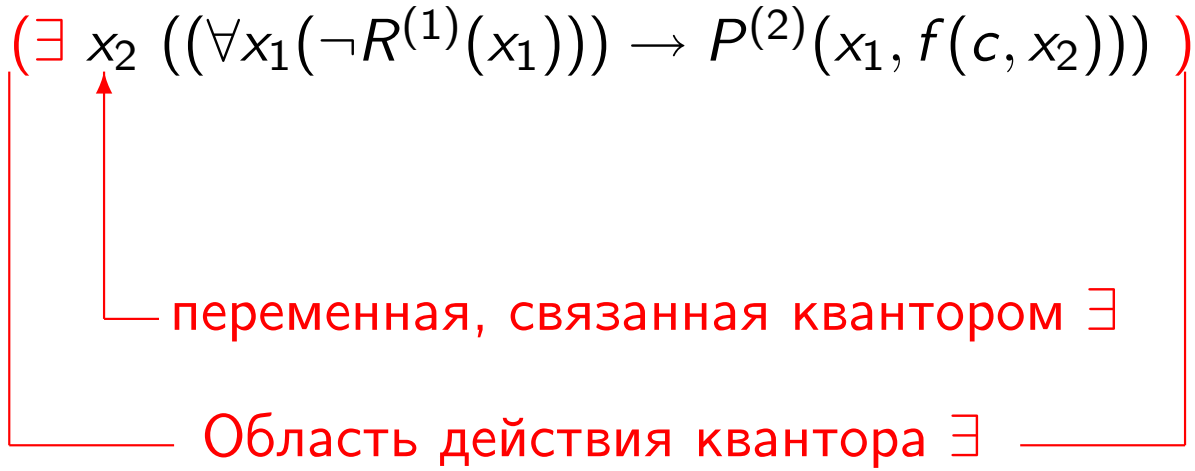
Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

Область действия квантора $\exists$

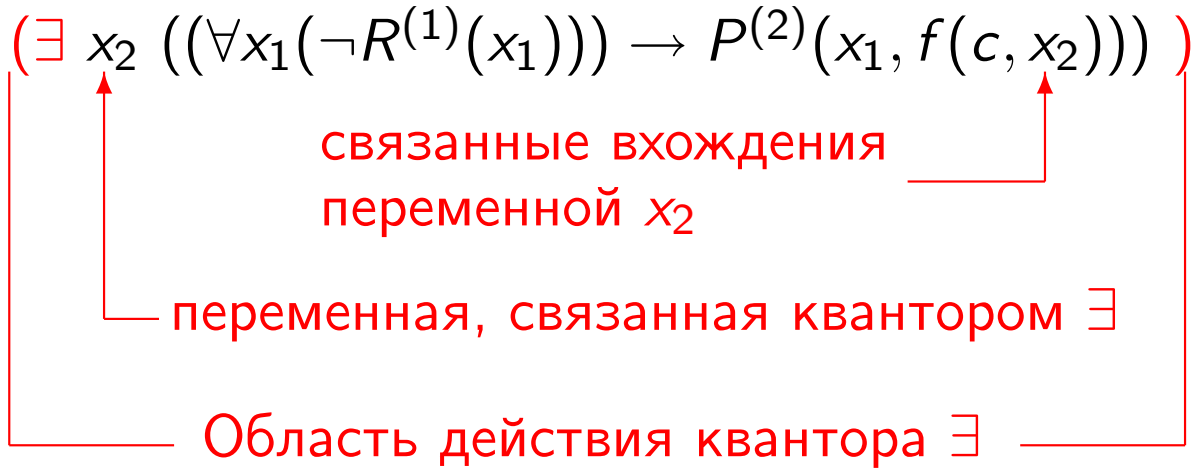
СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.



СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

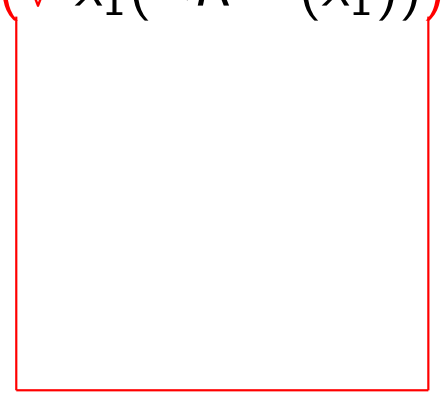
Свободные и связанные переменные.



СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

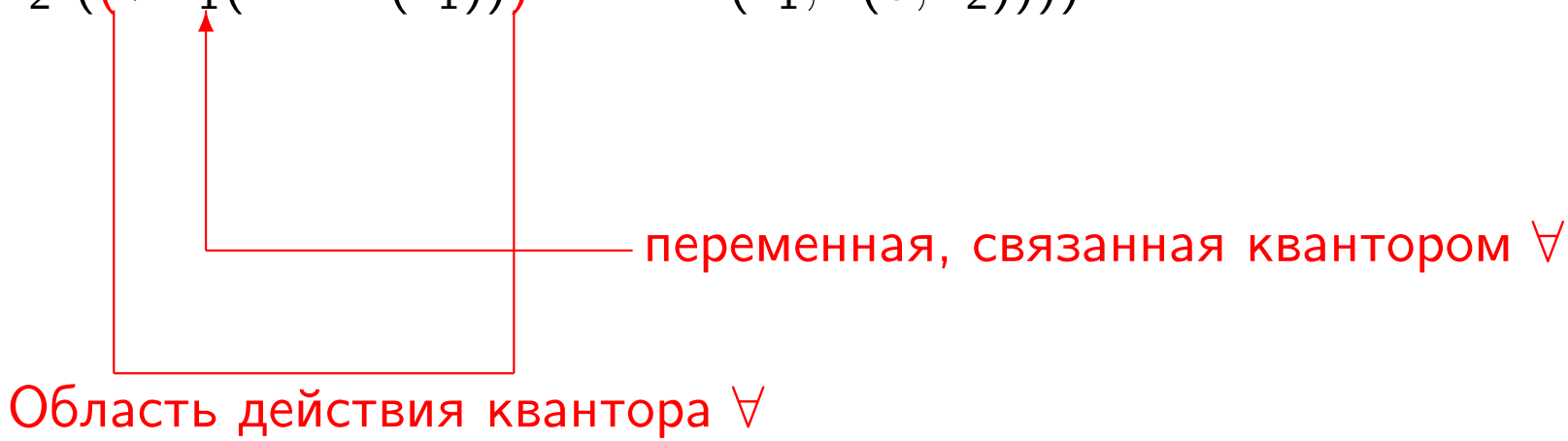


Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

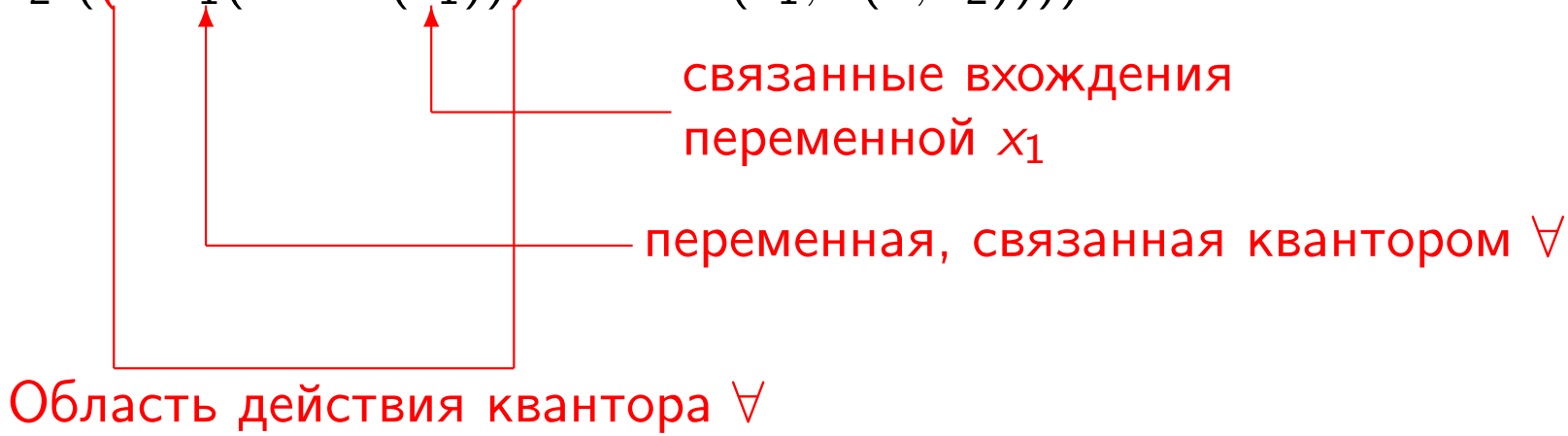
$$(\exists\, x_2\ ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$



СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

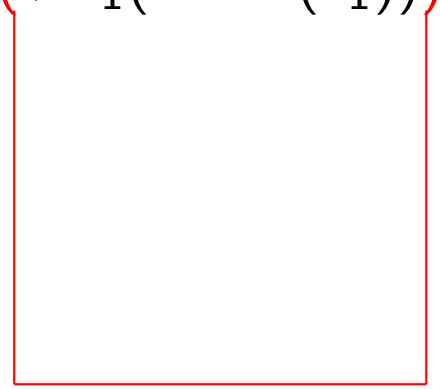
$$(\exists\, x_2\ ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$



СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

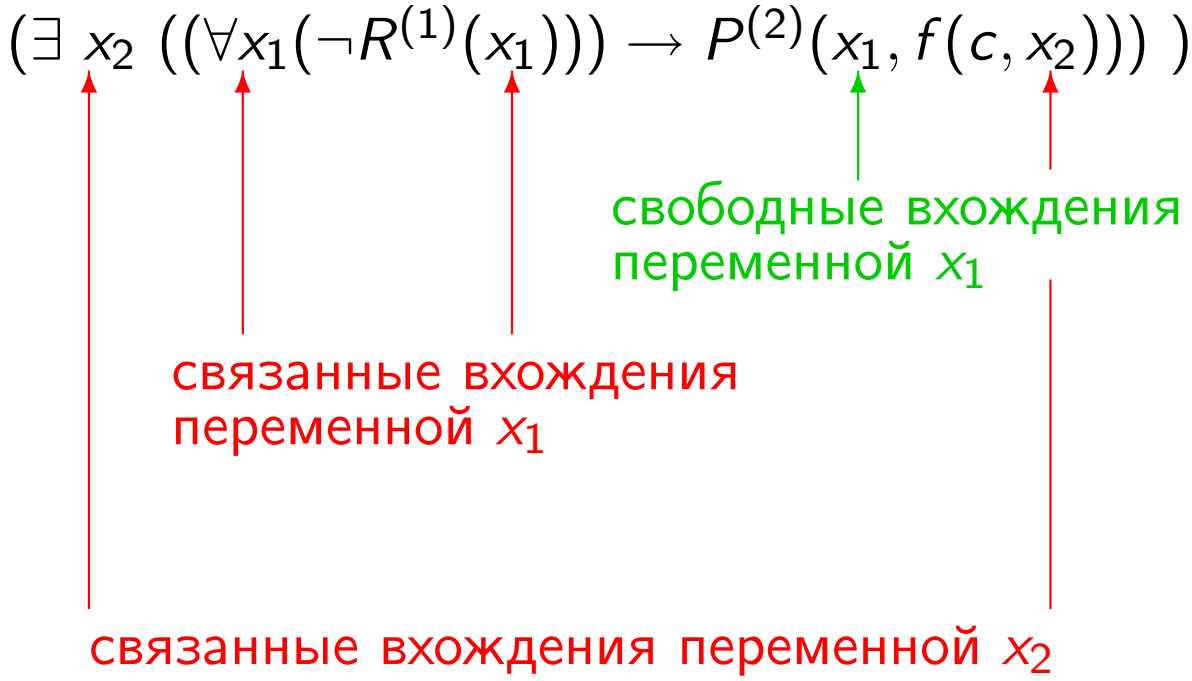


свободные вхождения переменной x_1

Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.



СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним.

Вхождение переменной в области действия квантора, связывающего эту переменную, называется **связанным** .

Вхождение переменной в формулу, не являющееся связанным, называется **свободным** .

Переменная называется **свободной** , если она имеет свободное вхождение в формулу.

Пример .

$$\varphi = (\exists\, x_2\, ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

Формула φ имеет единственную свободную переменную x_1.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Var_φ — множество свободных переменных формулы φ.

$$\varphi = P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad Var_\varphi = \bigcup_{i=1}^{m} Var_{t_i};$$

$$\varphi = (\psi_1 \& \psi_2) \qquad Var_\varphi = Var_{\psi_1} \cup Var_{\psi_2};$$
$$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$$
$$\varphi = (\psi_1 \to \psi_2)$$

$$\varphi = (\neg\psi) \qquad Var_\varphi = Var_\psi;$$

$$\varphi = (\forall x \psi) \qquad Var_\varphi = Var_\psi \setminus \{x\}.$$
$$\varphi = (\exists x \psi)$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — запись, обозначающая формулу φ, у которой $Var_\varphi \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Если $Var_\varphi = \emptyset$, то формула φ называется **замкнутой формулой** , или **предложением** .

CForm — множество всех замкнутых формул.

Соглашение о приоритете логических операций

В порядке убывания приоритета связки и кванторы располагаются так:

$$\neg,\ \forall,\ \exists$$
$$\&$$
$$\vee$$
$$\rightarrow$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример правильного восстановления скобок

$$\forall x_1\ \neg P(x_1)\ \&\ \exists x_2 R(x_1, x_2)\ \rightarrow\ \exists x_1\ (\neg P(x_1) \vee P(x_2))$$

$$(\forall x_1\ (\neg P(x_1)))\ \&\ (\exists x_2\ R(x_1, x_2))\ \rightarrow\ (\exists x_1\ ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))$$

$$((\forall x_1\ (\neg P(x_1)))\ \&\ (\exists x_2 R(x_1, x_2)))\ \rightarrow\ (\exists x_1\ ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))$$

$$(((\forall x_1\ (\neg P(x_1)))\ \&\ (\exists x_2 R(x_1, x_2)))\ \rightarrow\ (\exists x_1\ ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2))))$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Алфавит

Константы

0 — константа, действительное число ноль;

Функциональные символы

$h^{(2)}(x, y)$ — «абсолютная разность чисел x и y»;

Предикатные символы

$R^{(1)}(x)$ — «x — действительное число»;

$N^{(1)}(x)$ — «x — натуральное число»;

$S^{(1)}(x)$ — «x — последовательность действительных чисел»;

$E^{(3)}(x, y, z)$ — «x — это y-ый член последовательности z»;

$<^{(2)}(x, y)$ — «число x меньше числа y».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Формула $limit(x, y)$

$limit(x, y)$ — «число x — предел последовательности действительных чисел y».

$$limit(x, y):$$

$$\begin{aligned} R(x) \,\&\, S(y) \,\&\, \forall z(R(z) \,\&\, <(0, z) \;\rightarrow \\ \exists u(N(u) \,\&\, \forall v(N(v) \,\&\, <(u, v) \;\rightarrow \\ \exists w(E(w, v, y) \,\&\, <(h(w, x), z))))) \end{aligned}$$

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Семантика — это свод правил, наделяющих значением (смыслом) синтаксические конструкции языка.

В языке логики предикатов значением термов являются функции, а значением формул — отношения (предикаты).

Значения термов и формул определяются на основе алгебраических систем .

Алгебраические системы, используемые в таком качестве, называются интерпретациями .

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Интерпретация сигнатуры $\langle Const, Func, Pred\rangle$ — это алгебраическая система $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred}\rangle$, где

- D_I — непустое множество, которое называется областью интерпретации , предметной областью , или универсумом ;
- $\overline{Const} : Const \to D_I$ — оценка констант , сопоставляющая каждой константе c элемент (предмет) $\bar{\mathbf{c}}$ из области интерпретации;
- $\overline{Func} : Func^{(n)} \to (D_I^n \to D_I)$ — оценка функциональных символов , сопоставляющая каждому функциональному символу $f^{(n)}$ местности n всюду определенную n-местную функцию $\bar{\mathbf{f}}^{(n)}$ на области интерпретации;
- $\overline{Pred} : Pred^{(m)} \to (D_I^m \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\})$ — оценка предикатных символов , сопоставляющая каждому предикатному символу $P^{(m)}$ местности m всюду определенное m-местное отношение $\bar{\mathbf{P}}^{(m)}$ на области интерпретации.

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Пример

Сигнатура $Const = \{c_1, c_2\}, Func = \{f^{(1)}\}, Pred = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$.

Интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$:

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $\mathbf{c_1} = d_1,\ \mathbf{c_2} = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Значение терма

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, терм $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \ldots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I.

Значение $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ терма $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе $d_1, d_2, \ldots, d_n$ определяется рекурсивно.

- Если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$, то
  $$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] = d_i;$$
- Если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$, то
  $$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] = \bar{\mathbf{c}};$$
- Если $t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(t_1, \ldots, t_k)$, то
  $$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] = \bar{\mathbf{f}}(t_1[d_1, d_2, \ldots, d_n], \ldots, t_k[d_1, d_2, \ldots, d_n]).$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

Значение формул в интерпретации определяется при помощи отношения выполнимости $\models$.

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \ldots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I.

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе $d_1, d_2, \ldots, d_n$ определяется рекурсивно.

- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(t_1, \ldots, t_m)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\bar{\mathbf{P}}(t_1[d_1, d_2, \ldots, d_n], \ldots, t_m[d_1, d_2, \ldots, d_n]) = \mathbf{true};$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 \& \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} I \models \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] \\ I \models \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] \end{cases}$$

- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 \vee \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$I \models \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

или

$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 \to \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$I \not\models \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
$$\text{или}$$
$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \neg\psi$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$I \not\models \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \forall x_0\ \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

  $I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$

  $\Longleftrightarrow$

  для **любого** элемента d_0, $d_0 \in D_I$, имеет место

  $I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n]$

- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \exists x_0\ \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

  $I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$

  $\Longleftrightarrow$

  для **некоторого** элемента d_0, $d_0 \in D_I$, имеет место

  $I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация

$$I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$$

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $\mathbf{c_1} = d_1,\ \mathbf{c_2} = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

Формула

$$\varphi = \forall x_1\ (P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))))$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \Rightarrow I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \;\Rightarrow\; I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$

$I \models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \;\Rightarrow\; I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$

$I \models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$

$I \models \exists x_2(R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2)))[d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \;\Rightarrow\; I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$

$I \models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$

$I \models \exists x_2(R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2)))[d_1]$

$$I \models P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \not\models P(x_1)[d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \not\models P(x_1)[d_2]$

$$I \models P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2)\&\neg P(f(x_2)))[d_2]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$

$I \not\models \exists x_2\ (R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2)))[d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$

$I \not\models \exists x_2\ (R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2)))[d_3]$

$$I \not\models P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_3]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Итак, мы имеем

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))[d_1]$$
$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))[d_2]$$
$$I \not\models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))[d_3]$$

Значит,

$$I \not\models \forall x_1 \, (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 2.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 3.

Выполнимые и общезначимые формулы. Модели. Логическое следование. Проблема общезначимости. Семантические таблицы.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется выполнимой в интерпретации I, если существует такой набор элементов $d_1, \ldots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется истинной в интерпретации I, если для любого набора элементов $d_1, \ldots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется выполнимой , если есть интерпретация I, в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется общезначимой (или тождественно истинной), если эта формула истинна в любой интерпретации.

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется противоречивой (или невыполнимой), если она не является выполнимой.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

$P(x_1)\&\neg P(x_2)$,
$\forall x P(x) \to \exists x P(x)$,
$\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ — выполнимые формулы.

$I_1 \ : \ D_I = \{d_1, d_2\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false}$

$I_1 \models \ P(x_1)\&\neg P(x_2)[d_1, d_2], \qquad I_1 \models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x).$

$I_2 \ : \ D_I = \{d\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d) = \mathbf{true}$

$I_2 \models \ \exists x P(x) \to \forall x P(x)$

Формулы $P(x_1)\&\neg P(x_2)$, $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ необщезначимые.

$I_2 \not\models \ P(x_1)\&\neg P(x_2)[d, d], \qquad I_1 \not\models \ \exists x P(x) \to \forall x P(x).$

Формула $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ является общезначимой.

Но почему? И как в этом убедиться?

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Выполнимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний. Каждая выполнимая формула несет определенную информацию.

Общезначимые формулы — это трюизмы, банальности, тавтологии, не несущие никакой информации.

Какую же роль играют общезначимые формулы?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq \mathit{CForm}$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ.

Пример

$I \ : \ D_I = \{d_1, d_2\}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true}, \ \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false}$

I — модель для множества формул $\Gamma = \{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$.

Замечание

А какая интерпретация является моделью пустого множества формул $\Gamma = \emptyset$?

Правильный ответ: любая интерпретация . Почему ?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — «x — квадрат»;

$S(x)$ — «x — шар»;

$B(x)$ — «x — черный предмет»;

$W(x)$ — «x — белый предмет»;

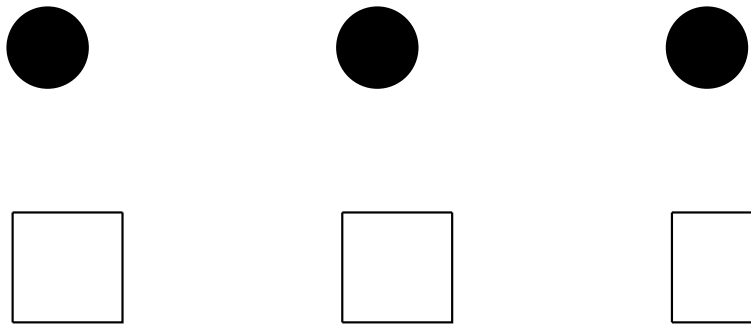
$U(x, y)$ — «предмет x лежит под предметом y».

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

Модель /



~~$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$~~

Каждый предмет является белым кубом
и лежит под каким-то черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

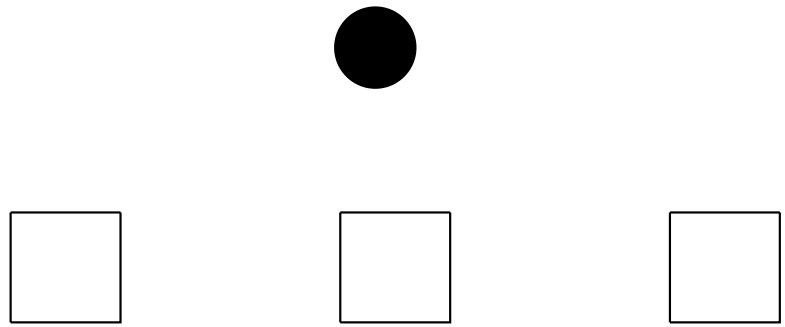
$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель I

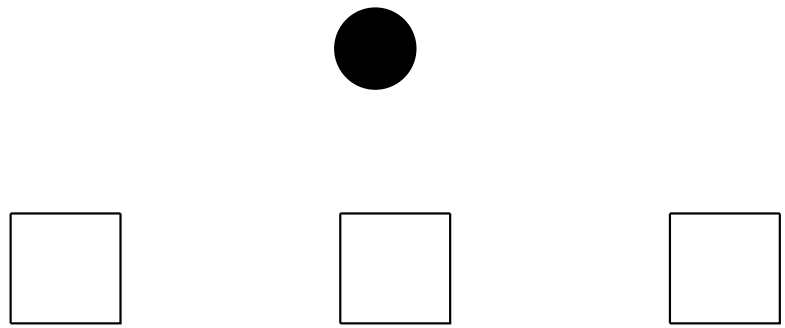


МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель $\mathcal{I}$



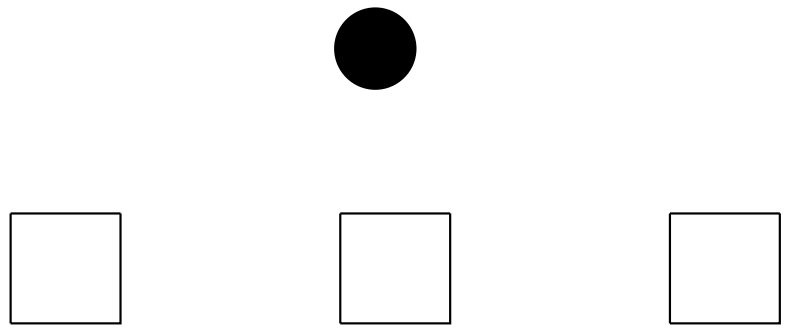
$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x) \rightarrow \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель I



$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x) \rightarrow \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Какой-то предмет либо не является белым кубом, либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\,(W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\,(B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель J

~~$$\exists x\,(W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \forall y\,(B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$~~

Какой-то предмет либо не является белым кубом, либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Общий принцип правильного построения формул.

Каждый предмет, наделенный атрибутом A, обладает свойством B:

$$\forall x\ (A(x)\ \rightarrow\ B(x))$$

Некоторый предмет, наделенный атрибутом A, обладает свойством B:

$$\exists x\ (A(x)\ \&\ B(x))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Определение

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, и φ — замкнутая формула. Формула φ называется логическим следствием множества предложений (базы знаний) Γ, если каждая модель для множества формул Γ является моделью для формулы φ, т. е.

$$\text{для любой интерпретации } I\text{:} \quad I \models \Gamma \implies I \models \varphi$$

Логические следствия — это «производные» знания, которые неизбежно сопутствуют «базовым» знаниям Γ, находятся в причинно-следственной зависимости от предложений Γ. Одна из главных задач (и одновременно наиболее характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это извлечение логических следствий из баз знаний.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Обозначения

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

А какие формулы являются логическими следствиями пустой базы знаний $\Gamma = \emptyset$? Правильный ответ: общезначимые .

Поэтому для обозначения общезначимости формулы φ будем использовать запись $\models \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \mathit{CForm}$, $\varphi \in \mathit{CForm}$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Если $I \not\models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$, то $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Если $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$, то $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$, т. е. I — модель для Γ.

Поскольку $\Gamma \models \varphi$, получаем $I \models \varphi$. Значит, $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Таким образом, для любой интерпретации I имеет место $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$ — общезначимая формула.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \mathit{CForm}$, $\varphi \in \mathit{CForm}$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ, т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$.

Так как $\models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$, верно $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $I \models \varphi$.

Так как I — произвольная модель для Γ, приходим к заключению $\Gamma \models \varphi$.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Общезначимые формулы — это каналы причинно-следственной связи, по которым передаются знания, представленные в виде логических формул, преобразуясь при этом из одной формы в другую.

Практически важно уметь определять эти каналы и настраивать их на извлечение нужных знаний.

- База знаний — множество предложений Г;
- Запрос к базе знаний — предложение φ;
- Получение ответа на запрос — проверка логического следствия $\Gamma \models \varphi$.

Если Г — конечное множество, то проверка логического следствия сводится к проверке общезначимости формулы

$$\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Таким образом, возникает проблема общезначимости формул:

Для заданной формулы φ проверить ее общезначимость:

$$\models \varphi?$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Утверждение.

Для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ верно, что

1. $\models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \iff \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$;
2. $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — } \textbf{выполнимая}$$
$$\iff$$
$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — } \textbf{выполнимая};$$
3. $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — } \textbf{выполнима в любой интерпретации}$$
$$\iff$$
$$\models \exists x_1 \ldots \exists x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Доказательство

Самостоятельно. Это просто.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Как же решать проблему общезначимости

$$\models \varphi \quad ?$$

Может быть проверять все интерпретации по очереди ?

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Нет, такой подход заведомо обречен на неудачу. Почему?
Потому, что верно

Утверждение.

Существует такая замкнутая формула φ, которая истинна в любой интерпретации I с конечной предметной областью D_I, но не является общезначимой .

$$\forall x \neg R(x,x) \;\&\; \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \& R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x,y).$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект **y** — начальник субъекта **x**»;

1). $\forall x \neg R(x, x)$: «никто не командует самим собой»;

2). $\forall x \forall y \forall z\ (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z))$: «начальник моего начальника — мой начальник»;

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$: «кто-то никому не подчиняется».

В каждой компании с конечным множеством сотрудников, в которой действуют законы 1) и 2), выполняется и закон 3).

Значит, наша формула истинна во всех интерпретациях с конечной предметной областью.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

Но наша формула не является общезначимой.

$R(x, y)$: «натуральное число **y** больше натурального числа **x**»

1). $\forall x \neg R(x, x)$;

2). $\forall x \forall y \forall z \ (R(x, y) \& R(y, z) \ \rightarrow \ R(x, z))$;

выполняются на множестве натуральных чисел.

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$ на множестве натуральных чисел не выполняется: неверно, что существует максимальное натуральное число.

□

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Не только перебор всех интерпретаций, но даже проверку истинности формулы в интерпретации с бесконечной предметной областью осуществить затруднительно.

Значит, необходимо придумать более изощренный способ проверки.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x))\ \rightarrow\ (\forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ R(x))\ .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\,(P(x) \to R(x)) \to (\forall x\,P(x) \to \forall x\,R(x))\,.$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\,(P(x) \to R(x)) \to (\forall x\,P(x) \to \forall x\,R(x))\,.$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\Big|\; I \not\models \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x))\ \to\ (\forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$I \models\ \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x)) \quad \Big| \quad \begin{array}{l} I \not\models \varphi \\ I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\,(P(x) \to R(x)) \to (\forall x\,P(x) \to \forall x\,R(x))\,.$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} I \models \forall x\,(P(x) \to R(x)) & I \not\models \varphi \\ I \models \forall x\,P(x) & I \not\models \forall x\,P(x) \to \forall x\,R(x) \\ & I \not\models \forall x\,R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x))\ \to\ (\forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} I \models\ \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x)) & I \not\models \varphi \\ I \models\ \forall x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x) \\ & I \not\models\ \forall x\ R(x) \\ & I \not\models\ R(x)[d] \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x))\ \to\ (\forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} I \models\ \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x)) & I \not\models \varphi \\ I \models\ \forall x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x) \\ & I \not\models\ \forall x\ R(x) \\ & I \not\models\ R(x)[d] \\ I \models (P(x)\ \to R(x))[d] & \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x))\ \to\ (\forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l}
I \models\ \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x)) & I \not\models \varphi \\
I \models\ \forall x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x) \\
 & I \not\models\ \forall x\ R(x) \\
I \models (P(x)\ \to R(x))[d] & I \not\models\ R(x)[d] \\
I \models P(x)[d] &
\end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x))\ \to\ (\forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l}
I \models\ \forall x\ (P(x)\ \to\ R(x)) & I \not\models \varphi \\
I \models\ \forall x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ R(x) \\
 & I \not\models\ \forall x\ R(x) \\
I \models (P(x)\ \to R(x))[d] & I \not\models\ R(x)[d] \\
I \models P(x)[d] & \\
I \models R(x)[d] &
\end{array}$$

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\,(P(x) \to R(x)) \to (\forall x\,P(x) \to \forall x\,R(x)).$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l}
I \models \forall x\,(P(x) \to R(x)) & I \not\models \varphi \\
I \models \forall x\,P(x) & I \not\models \forall x\,P(x) \to \forall x\,R(x) \\
 & I \not\models \forall x\,R(x) \\
I \models (P(x) \to R(x))[d] & I \not\models R(x)[d] \\
I \models P(x)[d] & \\
I \models R(x)[d] &
\end{array}$$

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

Значит, $\models \varphi$.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\Big|\ I \not\models \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{r|l} I \models\ \exists x\ (P(x) & I \not\models \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x)) \\ & I \not\models\ \forall x\ P(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x)) \\ I \models\ \exists x\ (P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \\ I \models\ P(x)[d_1] & \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x)) \\ I \models\ \exists x\ (P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \\ I \models\ P(x)[d_1] & \\ & I \not\models\ P(x)[d_2] \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x)) \\ I \models\ \exists x\ (P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \\ I \models\ P(x)[d_1] & \\ & I \not\models\ P(x)[d_2] \end{array}$$

Противоречия нет.
$I = \langle D_I, \overline{Pred} \rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$,
$I \not\models \varphi$.

Следовательно, $\not\models \varphi$.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Попробуем систематизировать этот способ проверки общезначимости формул.

- Общезначимость формулы доказываем «от противного», пытаясь построить контрмодель.
- Контрмодель строим, указывая, какие формулы должны в ней выполняться, а какие нет. Требования (не)выполнимости формул, предъявляемые к контрмодели, сводим в таблицу и последовательно их уточняем.
- Если требования, которые предъявляются к контрмодели, оказываются несовместными, значит, проверяемая формула неопровержима, т. е. общезначима.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, $\Gamma, \Delta\ \subseteq Form$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$ называется выполнимой , если существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \ldots, d_n \in D_I$ свободных переменных, для которых

- $I \models\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ для любой формулы φ, $\varphi \in \Gamma$,
- $I \not\models\ \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ для любой формулы ψ, $\psi \in \Delta$.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Примеры

Семантическая таблица

$$T = \langle\ \{\exists x\ P(x),\ \neg P(y)\}\ ;\ \{\forall x P(x),\ P(x)\ \&\ \neg P(x)\}\ \rangle$$

выполнима. Ее выполнимость подтверждает интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Pred}\rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$, и набор d_1, d_2 значений свободных переменных $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Семантическая таблица

$$T = \langle\ \emptyset\ ;\ \{\exists y \forall x R(x, y)\ \rightarrow\ \forall x \exists y R(x, y)\}\ \rangle$$

невыполнима. Почему?

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Теорема (о табличной проверке общезначимости)

$\models \varphi \iff$ **таблица** $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle$ **невыполнима.**

Доказательство. $\models \varphi \iff$ для любой интерпретации I и для любого набора $d_1, \ldots, d_n \in D_I$ значений свободных переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[d_1, \ldots, d_n] \iff$ таблица $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle$ невыполнима ни в одной интерпретации.

□

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой .

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой множества Γ, Δ состоят только из **атомарных** формул, называется атомарной .

Утверждение

Незакрытая атомарная таблица выполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таким образом, для доказательства общезначимости $\models \varphi$ достаточно разработать систему правил, позволяющих преобразовывать семантическую таблицу $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle$ к закрытым таблицам.

Доказательства такого вида называются логическим выводом . Если в выводе участвуют семантические таблицы, то логический вывод называется табличным .

Чтобы табличный вывод был корректным, правила преобразования таблиц (правила табличного вывода) должны сохранять выполнимость семантических таблиц.

Поэтому начнем с разработки правил табличного вывода и проверки их корректности.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 3.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

zakh@cs.msu.su

http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html

Лекция 4.

Подстановки.
Табличный вывод.
Корректность табличного вывода.

ПОДСТАНОВКИ

Подстановка — это всякое отображение $\theta : Var \to Term$, сопоставляющее каждой переменной некоторый терм. Подстановки нужны для того, чтобы иметь возможность переходить от общих утверждений $\forall x \forall y P(x, y)$ к их частным вариантам $P(f(z), c)$.

Множество $Dom_\theta = \{x : \theta(x) \neq x\}$ называется областью подстановки . Если область подстановки — это конечное множество переменных, то такая подстановка называется конечной. Множество конечных подстановок обозначим Subst .

Если $\theta \in Subst$ и $Dom_\theta = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то подстановка θ однозначно определяется множеством пар

$$\{x_1/\theta(x_1), x_2/\theta(x_2), \ldots, x_n/\theta(x_n)\}.$$

Каждая пара $x_i/\theta(x_i)$ называется связкой .

ПОДСТАНОВКИ

Для заданного логического выражения E и подстановки θ запись $E\theta$ обозначает результат применения подстановки θ к E, который определется так:

Если $E = x,\ x \in Var$, то $E\theta = \theta(x)$;

Если $E = c,\ c \in Const$, то $E\theta = c$;

Если $E = f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, то $E\theta = f(t_1\theta, t_2\theta, \ldots, t_n\theta)$;

Если $E = P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, то $E\theta = P(t_1\theta, t_2\theta, \ldots, t_n\theta)$;

Если $E = \varphi\&\psi$, то $E\theta = \varphi\theta\ \&\ \psi\theta$
(аналогично для формул $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\neg\varphi$);

Если $E = \forall x_0\ \varphi$, то $E\theta = \forall x_0\ (\varphi\theta')$, где η — новая подстановка, удовлетворяющая условию

$$\theta'(x) = \begin{cases} x_0, & \text{если } x = x_0, \\ \theta(x), & \text{если } x \neq x_0, \end{cases}$$

(аналогично для формул $\exists x_0\ \varphi$).

ПОДСТАНОВКИ

Пример

$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists y P(y)$

$\theta = \{ x/g(x,c),\ y/x,\ z/f(z) \}$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists y P(y)$

К свободным вхождениям переменных применяется θ

$\varphi\theta : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x)) \rightarrow R(f(g(x,c))) \vee \exists y P(y)$

ПОДСТАНОВКИ

В результате применения некоторых подстановок смысл утверждений (формул) может значительно исказиться.

«Если у каждого есть дед, то у субъекта x тоже есть дед»

$\varphi(x)$: $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(x, y)$

Очевидно, $\models \varphi(x)$

Применим к $\varphi(x)$ подстановку $\theta = \{ x/y \}$

$\varphi(x)\theta$: $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$

«Если у каждого есть дед, то есть и такие, которые приходятся дедом самим себе»

Очевидно, $\not\models \varphi(x)\theta$

Как странно: общее утверждение $\varphi(x)$ верно, а его частный случай $\varphi(x)\theta$ — нет.

ПОДСТАНОВКИ

Переменная x называется свободной для терма t в формуле $\varphi(x)$, если любое свободное вхождение переменной x в формуле $\varphi(x)$ не лежит в области действия ни одного квантора, связывающего переменную из множества Var_t.

Подстановка $\theta = \{ x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ называется правильной для формулы φ, если для любой связки x_i/t_i переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ.

Пример

Переменная y **не является** свободной для терма $f(x, z)$ в формуле φ

$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists y P(y)$

А вот для терма $f(y, z)$ переменная y в формуле φ свободна.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода имеют вид

$$\frac{T_0}{T_1} \quad \text{или} \quad \frac{T_0}{T_1 \mid T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы. Прочтение правила таково:

Таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или T_2).

В тех случаях, когда таблица T_0 редуцируется в пару таблиц T_1, T_2, будем говорить, что правило имеет альтернативы.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$$L\& \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi | \Delta \rangle} \qquad R\& \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi | \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle} \qquad R\vee \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\to \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \to \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle} \qquad R\to \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \to \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi | \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg \quad \frac{\langle \Gamma, \neg \varphi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi \rangle} \qquad R\neg \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \neg \varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi | \Delta \rangle}$$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$L\forall$ $$\frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} | \Delta \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(x)$

$R\forall$ $$\frac{\langle \Gamma | \Delta, \forall x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi(x)\{x/c\} \rangle}$$

константа c не содержится в формулах из Γ, Δ и в формуле $\varphi(x)$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$L\exists$ $$\frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle}$$

константа c не содержится в формулах из Γ, Δ и в формуле $\varphi(x)$

$R\exists$ $$\frac{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(x)$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если в правиле табличного вывода $L\forall$ не придерживаться правильных подстановок, то **выполнимая таблица**

$$- L\forall : \frac{\langle\ \forall x \exists y R(x,y) \mid \exists y R(y,y)\ \rangle}{\langle\ \forall x \exists y R(x,y),\ \exists y R(y,y) \mid \exists y R(y,y)\ \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу** .

Причина в том, что переменная **x** несвободна для терма **y** в формуле $\exists y R(x,y)$.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если в правиле табличного вывода $L\exists$ подставить «несвежую» константу, то **выполнимая таблица**

$$- L\exists : \frac{\langle\ \exists x\ P(x) \mid P(c)\ \rangle}{\langle\ P(c) \mid P(c)\ \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу** .

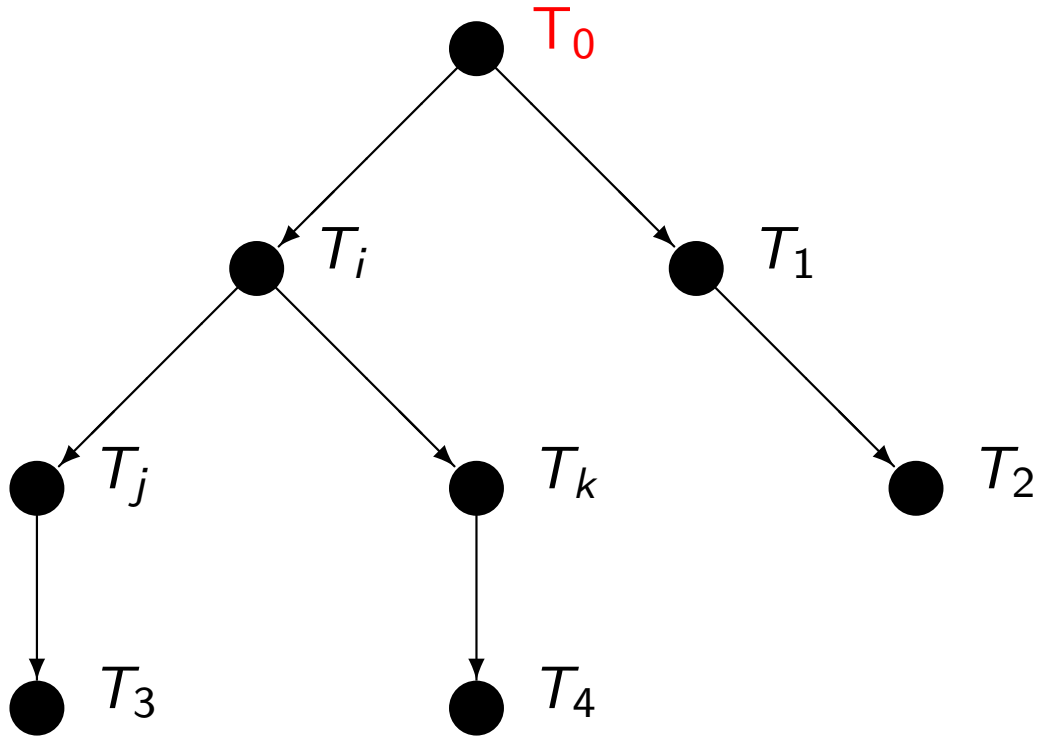
Причина в том, что константа, подставляемая вместо переменной **x**, должна быть отлична от всех ранее использованных констант.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, вершинами которого служат семантические таблицы и при этом

1) корнем дерева является таблица T_0;



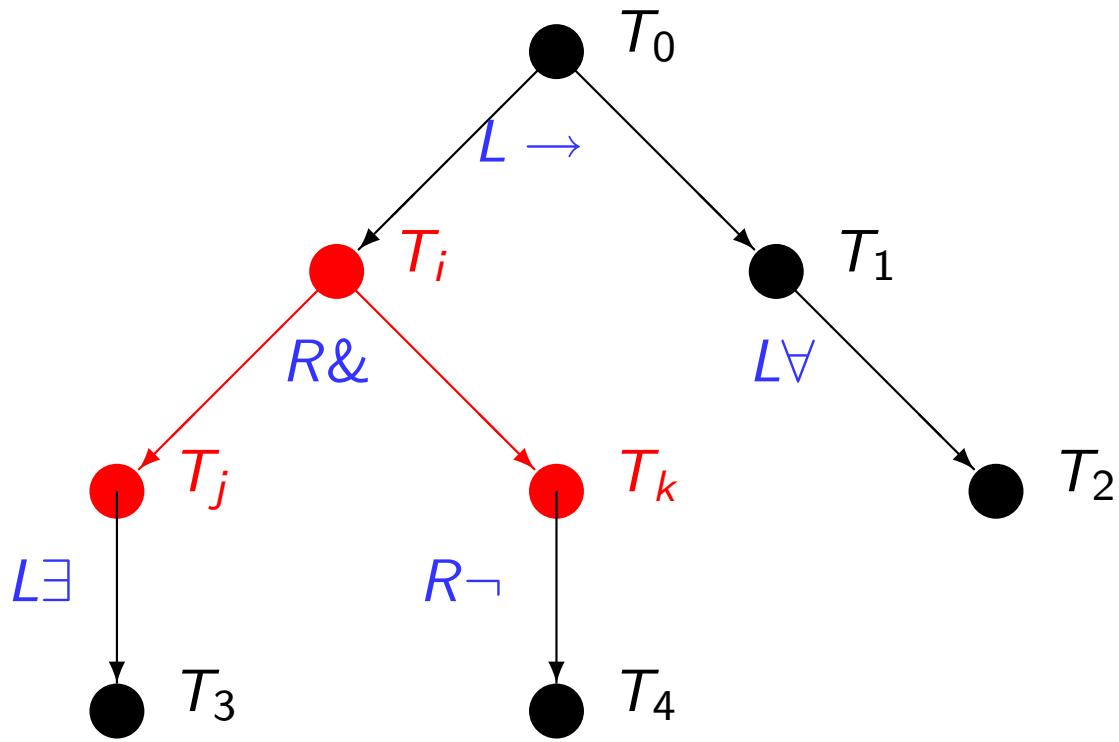
ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

2) из вершины T_i исходят дуги в вершины T_j (T_k)

$\Longleftrightarrow$

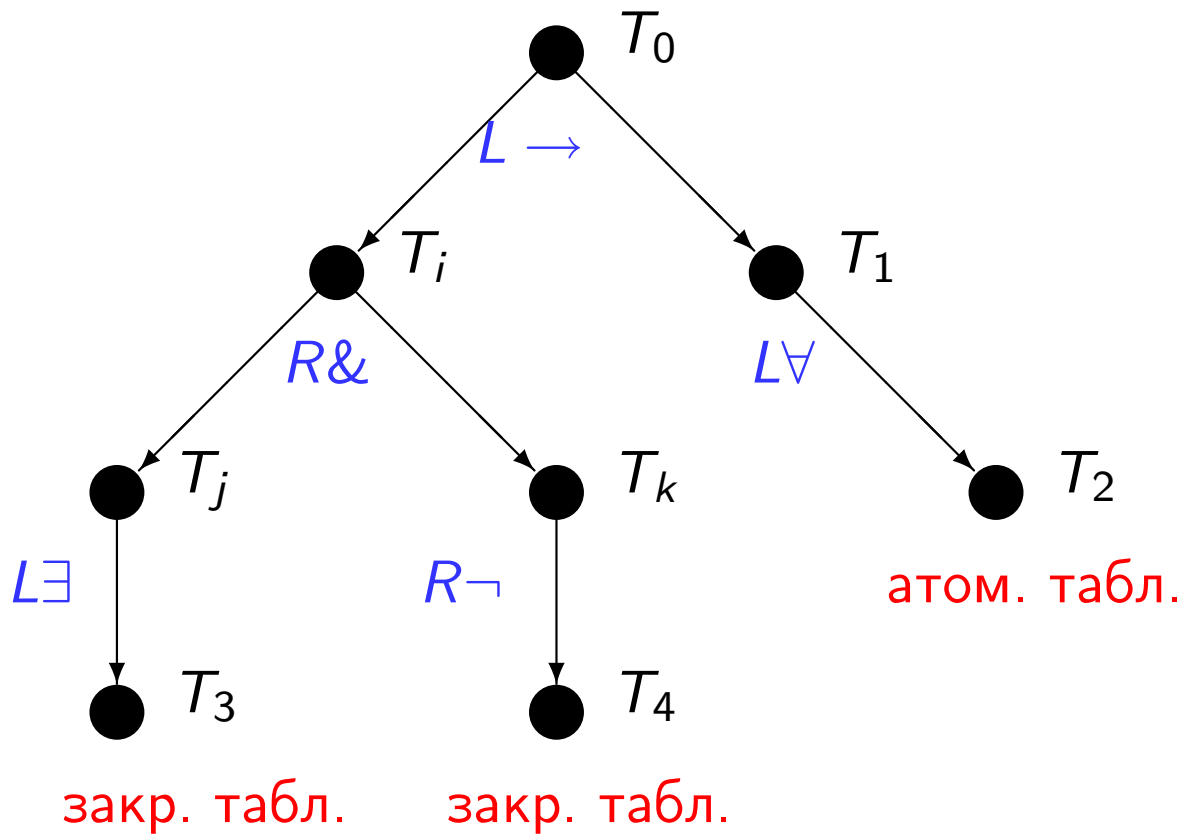
$\dfrac{T_i}{T_j,\ (T_k)}$ — правило табличного вывода;



ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

3) листьями дерева могут быть только закрытые и атомарные таблицы.



ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

Табличный вывод будем называть успешным (или табличным опровержением), если дерево вывода — конечное, и все листья дерева — закрытые таблицы.

Существование успешного вывода означает, что корневая семантическая таблица T_0 невыполнима.

Если $T_0 = \langle \emptyset \mid \varphi \rangle$, то это означает, что $\models \varphi$.

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R \to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R \to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R \to)$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_5 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), P(c) \to B(c), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_5 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), P(c) \to B(c), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$(L\to)$$

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c)\rangle \qquad T_7 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c), P(c)\rangle$$
$$\forall x P(x), B(c), P(c) \qquad\qquad \forall x P(x), P(c)$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_5 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), P(c) \to B(c), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$$(L\to)$$

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c), P(c) \rangle$$

$$\forall x P(x), B(c), P(c) \qquad \forall x P(x), P(c)$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall x(P(x) \to B(x)) \to (\forall x P(x) \to \forall x B(x))\ \rangle$$

$(R \to)$

$$T_1 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)) \mid \forall x P(x) \to \forall x B(x)\ \rangle$$

$(R \to)$

$$T_2 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid \forall x B(x)\ \rangle$$

$(R\forall)$

$$T_3 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x) \mid B(c)\ \rangle$$

$(L\forall)$

$$T_4 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$(L\forall)$

$$T_5 = \langle\ \forall x(P(x) \to B(x)), P(c) \to B(c), \forall x P(x), P(c) \mid B(c)\ \rangle$$

$(L \to)$

$T_6 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c) \rangle$
$\forall x P(x), B(c), P(c)$

закрытая таблица

$T_7 = \langle \forall x(P(x) \to B(x)), \mid B(c), P(c) \rangle$
$\forall x P(x), P(c)$

закрытая таблица

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \to \forall x P(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \exists x P(x) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \to \forall x P(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R \to)$$

$$T_1 = \langle\ \exists x P(x) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_2 = \langle\ P(c_1) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \to \forall x P(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \exists x P(x) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_2 = \langle\ P(c_1) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ P(c_1) \mid P(c_2)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \exists x(P(x) \to \forall x P(x))\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\to)$$

$$T_1 = \langle\ \exists x P(x) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_2 = \langle\ P(c_1) \mid \forall x P(x)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_3 = \langle\ P(c_1) \mid P(c_2)\ \rangle$$

атомарная таблица

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R \rightarrow)$$

$$T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R \rightarrow)$$

$$T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (L\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R \rightarrow)$$

$$T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (L\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R\exists)$$

$$T_3 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R\rightarrow)$$

$$T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (L\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R\exists)$$

$$T_3 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (L\exists)$$

$$T_4 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R\rightarrow)$$

$$T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (L\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R\exists)$$

$$T_3 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (L\exists)$$

$$T_4 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow \quad (R\forall)$$

$$T_5 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid P(c_2,c_4), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$T_0 = \langle\ \emptyset \mid \forall y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\rightarrow)$$

$$T_1 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\exists)$$

$$T_3 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), \exists x P(x,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_4 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid \forall y P(c_2,y), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_5 = \langle\ \forall y \exists x P(x,y), P(c_3,c_1) \mid P(c_2,c_4), \exists x \forall y P(x,y)\ \rangle$$

$$\Big\downarrow$$

$$\infty$$

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Лемма о корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода
$L\&, R\&, L\vee, R\vee, L\to, R\to, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2).

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\to$: $\dfrac{\langle \Gamma, \varphi\to\psi|\Delta\rangle}{\langle \Gamma,\psi|\Delta\rangle, \langle\Gamma|\varphi,\Delta\rangle}$.

Таблица $\langle \Gamma, \varphi\to\psi|\Delta\rangle$ выполнима $\iff$
существует интерпретация I и набор $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1,\ldots,d_n\rangle$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I\models\Gamma[\bar{\mathbf{d}}],\\ I\not\models\Delta[\bar{\mathbf{d}}],\\ I\models(\varphi\to\psi)[\bar{\mathbf{d}}]\end{cases}\iff\begin{cases} I\models\Gamma[\bar{\mathbf{d}}],\\ I\not\models\Delta[\bar{\mathbf{d}}],\\ I\models\psi[\bar{\mathbf{d}}]\text{ или }I\not\models\varphi[\bar{\mathbf{d}}]\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases} I\models\Gamma[\bar{\mathbf{d}}],\\ I\not\models\Delta[\bar{\mathbf{d}}],\\ I\models\psi[\bar{\mathbf{d}}]\end{cases}\text{ или }\begin{cases} I\models\Gamma[\bar{\mathbf{d}}],\\ I\not\models\Delta[\bar{\mathbf{d}}],\\ I\not\models\varphi[\bar{\mathbf{d}}]\end{cases}\iff$$

одна из таблиц $T_1 = \langle\Gamma,\psi|\Delta\rangle$ или $T_2 = \langle\Gamma|\varphi,\Delta\rangle$ выполнима.

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Аналогично доказывается корректность остальных 7 правил для логических связок

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle}$.

Таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$ выполнима $\iff$ существует интерпретация I и набор $d_1, \ldots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \ldots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \ldots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \ldots, d_n] \end{cases}$$

Пусть $d_0 = t[d_1, \ldots, d_n]$. Тогда

$I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \ldots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \ldots, d_n] \Rightarrow$

$\Rightarrow I \models \varphi[t[d_1, \ldots, d_n], d_1, \ldots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi\{x_0/t\}[d_1, \ldots, d_n]$.

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации I.

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что переменная x_0 свободна для терма t в формуле φ ?

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle}$.

Очевидно, что выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$ влечет выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$

Допустим, что выполнима таблица $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$. Тогда существует интерпретация I и набор $d_1, \ldots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \ldots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \ldots, d_n], \\ I \models (\exists x \varphi)[d_1, \ldots, d_n] \end{cases}$$

Выполнимость $\exists x \varphi[d_1, \ldots, d_n]$ означает, что существует такой элемент $d_0 \in D_I$, что $I \models \varphi[d_0, d_1, \ldots, d_n]$.

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию J, которая отличается от I, только тем, что в J константа c имеет другое значение, а именно $\bar{c} = d_0$.

Тогда $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \ldots, d_n]$.

Кроме того, $J \models \Gamma[d_1, \ldots, d_n]$ и $J \not\models \Delta[d_1, \ldots, d_n]$.

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации J.

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что константа c не входит в состав формул из Γ, Δ и формулы φ ?

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема корректности табличного вывода

Если для семантической таблицы T_0 существует успешный табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима.

Доказательство

Следует из

- определения табличного вывода,
- леммы о корректности правил табличного вывода,
- и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц.

Следствие

Если для таблицы $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ |\varphi\ \rangle$ можно построить успешный табличный вывод, то $\models \varphi$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 4.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

zakh@cs.msu.su

http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html

Лекция 5.

Полнота табличного вывода. Теорема Левенгейма-Сколема. Теорема компактности Мальцева. Автоматическое доказательство теорем.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема полноты табличного вывода

Если семантическая таблица T_0 невыполнима, то для T_0 существует успешный табличный вывод.

Доказательство.

Проведем для упрощенного частного случая таблицы T_0, в которой

- имеется лишь конечное число формул,
- все формулы замкнутые,
- в формулах нет функциональных символов.

Пусть $T_0 = \langle\ \Gamma_0 \mid \Delta_0\ \rangle$ — невыполнимая таблица. Будем строить табличный вывод для T_0, руководствуясь следующей стратегией.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

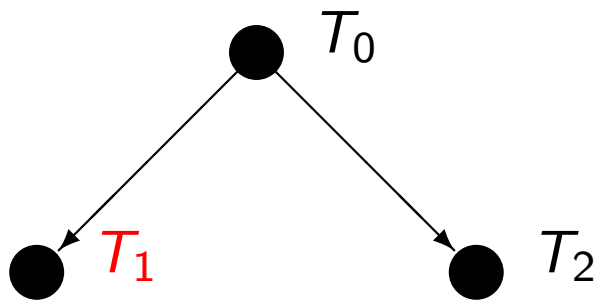
1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.

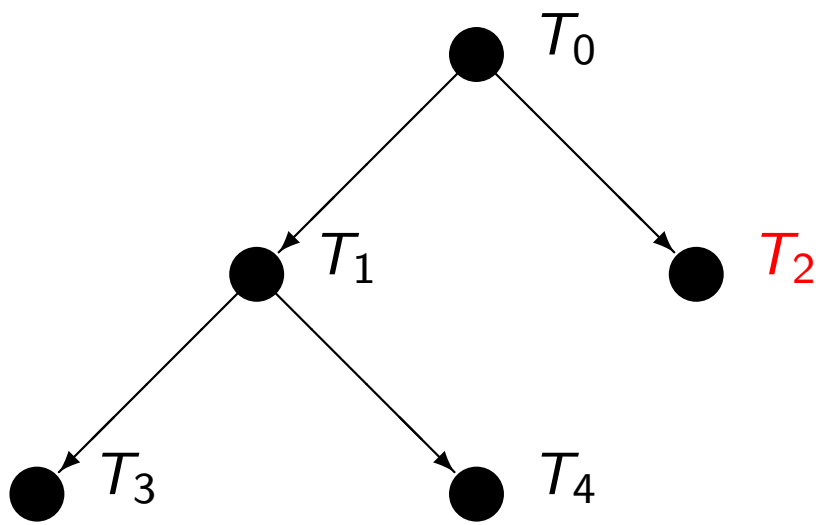
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



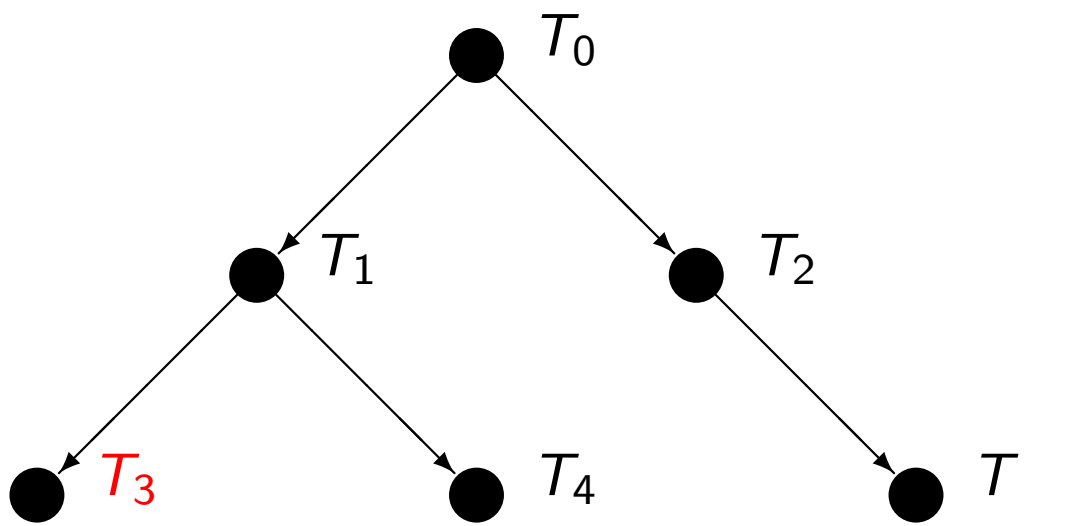
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



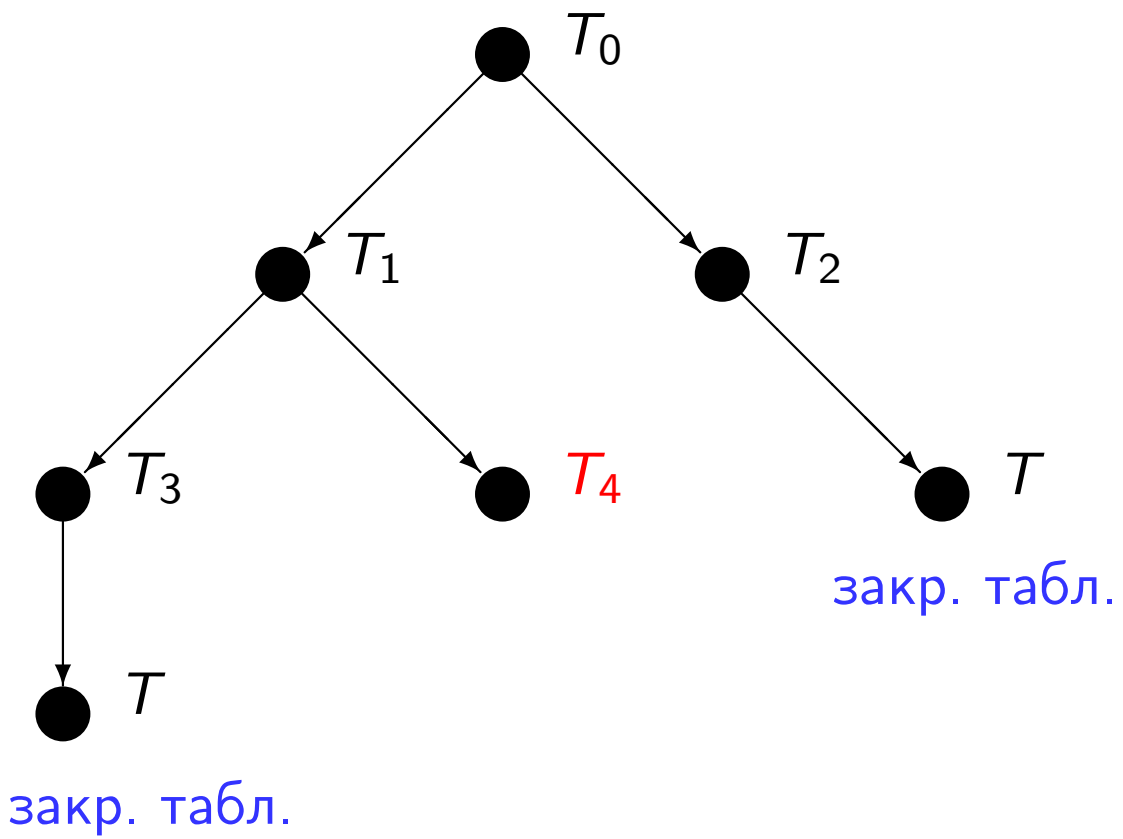
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



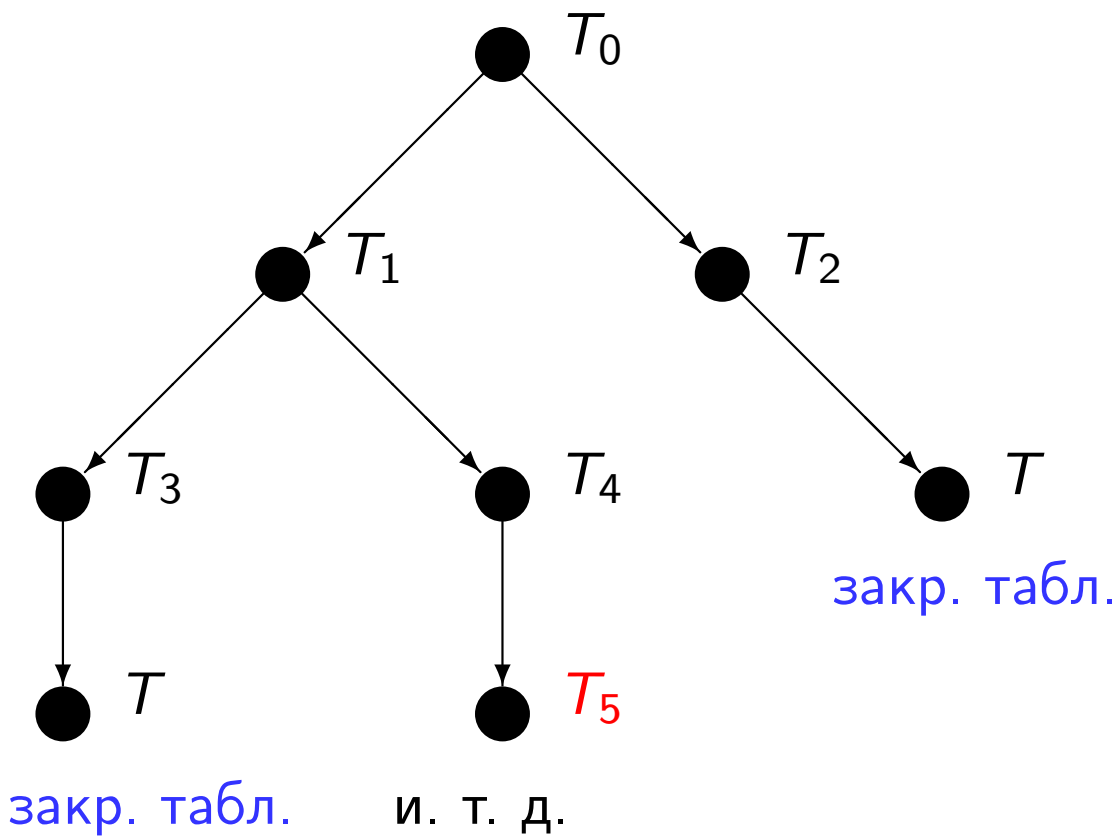
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi, \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi, \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi, \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi'\ \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi, \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi, \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\vee)$$

$$T_2 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2\ \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi, \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\vee)$$

$$T_2 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2\ \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi, \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\vee)$$

$$T_2 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2\ \rangle$$

$$(L\to)$$

$$T_3 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi', \psi_2 \mid \Delta, \chi_1, \chi_2\ \rangle \quad T_4 = \langle \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2, \psi_1\ \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

2). Таблицы состоят из **упорядоченных** множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi, \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta\ \rangle$$

$$\Big\downarrow\ (R\vee)$$

$$T_2 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2\ \rangle$$

$$(L\to)$$

$$T_3 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi', \psi_2 \mid \Delta, \chi_1, \chi_2\ \rangle \quad T_4 = \langle \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2, \psi_1\ \rangle$$

и. т. д.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle\ \exists x\varphi(x), \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \qquad L_0 = \{c', c''\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle\ \exists x\varphi(x), \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \qquad L_0 = \{c', c''\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle\ \exists x\varphi(x), \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \qquad L_0 = \{c', c''\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \qquad L_1 = \{c', c'', c_1\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle\ \exists x\varphi(x), \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \qquad L_0 = \{c', c''\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \qquad L_1 = \{c', c'', c_1\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle\ \exists x\varphi(x), \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c', c''\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c', c'', c_1\}$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2)\ \rangle, \quad L_2 = \{c', c'', c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle\ \exists x\varphi(x), \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c', c''\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\exists)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c', c'', c_1\}$$

$$\Big\downarrow\ (R\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2)\ \rangle, \quad L_2 = \{c', c'', c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle\ \exists x\varphi(x), \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c', c''\}$$

$$\Big|\ (L\exists)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c', c'', c_1\}$$

$$\Big|\ (R\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2)\ \rangle, \quad L_2 = \{c', c'', c_1, c_2\}$$

$$(L\to)$$

$$T_3 = \langle\ \Gamma, \varphi(c_1), \psi_2 \mid \Delta, \chi(c_2)\ \rangle \qquad T_4 = \langle \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2), \psi_1\ \rangle$$

$$L_3 = \{c', c'', c_1, c_2\} \qquad L_4 = \{c', c'', c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T. Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0. В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle\ \exists x\varphi(x), \psi_1 \to \psi_2, \Gamma \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c', c''\}$$

$$\Big|\ (L\exists)$$

$$T_1 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c', c'', c_1\}$$

$$\Big|\ (R\forall)$$

$$T_2 = \langle\ \psi_1 \to \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2)\ \rangle, \quad L_2 = \{c', c'', c_1, c_2\}$$

$$(L\to)$$

$$T_3 = \langle\ \Gamma, \varphi(c_1), \psi_2 \mid \Delta, \chi(c_2)\ \rangle \qquad T_4 = \langle \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2), \psi_1\ \rangle$$

$$L_3 = \{c', c'', c_1, c_2\} \qquad L_4 = \{c', c'', c_1, c_2\}$$

и. т. д.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi(x), \Gamma \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi(x), \Gamma \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi(x), \Gamma \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi(x), \Gamma \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi(x), \Gamma \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow\ (R\exists)$$

$$T_2 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x\chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2)\ \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi(x), \Gamma \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow\ (R\exists)$$

$$T_2 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x\chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2)\ \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T.

$$T_0 = \langle\ \forall x\varphi(x), \Gamma \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow\ (L\forall)$$

$$T_1 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y\chi(y), \Delta\ \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$$\Big\downarrow\ (R\exists)$$

$$T_2 = \langle\ \Gamma, \forall x\varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x\chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2)\ \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

и. т. д.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Предположим, что указанная стратегия не приводит к построению успешного вывода для невыполнимой таблицы $T_0 = \langle\ \Gamma_0 \mid \Delta_0\ \rangle$. Тогда в дереве вывода либо существует бесконечная ветвь, не содержащая закрытых таблиц

$$T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow T_n \longrightarrow T_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

либо существует ветвь, оканчивающаяся незакрытой атомарной таблицей

$$T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow \ldots$$

Будем полагать, что в последнем случае последовательность таблиц также бесконечна.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

На основе бесконечной последовательности незакрытых таблиц $T_0, T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}, \ldots$, каждая из которых имеет вид $T_n = \langle\ \Gamma_n \mid \Delta_n\ \rangle$ построим три множества:

1). $\Gamma_\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$ — множество всех формул из левых частей таблиц,

2). $\Delta_\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Delta_i$ — множество всех формул из правых частей таблиц,

3). $L_\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} L_{T_i}$ — множество всех констант из списков констант, ассоциированных с таблицами из бесконечной ветви.

Используя множества Γ_ω, Δ_ω, L_ω, построим интерпретацию I_ω, в которой будет выполняться каждая таблица последовательности.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

$$I_\omega = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Pred} \rangle$$

$D_I = L_\omega$

предметная область состоит из всех константных символов, входящих в состав формул из Γ_ω и Δ_ω,

$\overline{Const} \ : \ Const \ \rightarrow \ L_\omega$

значением $\bar{\mathbf{c}}$ каждой константы c (как символа из алфавита) является ее собственное изображение c (как элемент множества L_ω), т. е. $\bar{\mathbf{c}} = c$,

$\overline{Pred} \ : \ Pred \rightarrow ({L_\omega}^n \ \rightarrow \ \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\})$

для каждого предикатного символа $P^{(n)}$ и набора элементов $c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}$ из L_ω

$$\overline{\mathbf{P}}(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \mathbf{true} \iff P(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \in \Gamma_\omega.$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Покажем, что

любая формула φ, $\varphi \in \Gamma_\omega$, выполнима в интерпретации I_ω,

любая формула ψ, $\psi \in \Delta_\omega$, невыполнима в интерпретации I_ω.

Доказательство проведем при помощи индукции по числу логических операций (связок и кванторов) в формуле.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Базис индукции

φ, ψ — атомарные формулы.

Во всех таблицах T_i содержатся только замкнутые формулы (почему ?).
Поэтому формулы φ, ψ имеют вид $P(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$.

Если $\varphi \in \Gamma_\omega$, то $\overline{\mathbf{P}}(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \mathbf{true}$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Если $\psi \in \Delta_\omega$, то $\psi \notin \Gamma_\omega$ (почему ?).
Значит, $\overline{\mathbf{P}}(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) = \mathbf{false}$, и поэтому $I_\omega \not\models \psi$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Предположим, что утверждение верно для всех формул, имеющих не более n связок и кванторов. Рассмотрим формулы φ, ψ, содержащие $n+1$ связку и квантор.

Если $\varphi = \varphi_1 \to \varphi_2 \in \Gamma_\omega$, то есть такая таблица $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$, что $\varphi_1 \to \varphi_2 \in \Gamma_i$.
Согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, $j \geq i$, что $\varphi_1 \to \varphi_2$ — первая формула в списке формул Γ_j. Поэтому либо $\varphi_1 \in \Delta_{j+1}$, либо $\varphi_2 \in \Gamma_{j+1}$.

В первом случае, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \not\models \varphi_1$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Во втором случае, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \models \varphi_2$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Итак, в обоих случаях получаем $I_\omega \models \varphi_1 \to \varphi_2$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Аналогичные рассуждения применимы и для других связок.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Если $\varphi = \forall x \varphi_1(x) \in \Gamma_\omega$, то формула $\forall x \varphi_1(x)$ бесконечно часто встречается в левых частях таблиц $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$ (почему ?).
Поэтому правило $(L\forall)$ применяется к формуле $\forall x \varphi_1(x)$ бесконечно часто.
Тогда, согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, для любой константы c, $c \in L_\omega$, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, что $\varphi_1(c) \in \Gamma_j$.

Значит, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \models \varphi_1(c)$ для любой константы c, $c \in L_\omega$.

Так как $D_I = L_\omega$, приходим к заключению о том, что $I_\omega \models \forall x \varphi_1(x)$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Если $\varphi = \forall x \varphi_1(x) \in \Delta_\omega$, то есть такая таблица $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$, что $\forall x \varphi_1(x) \in \Delta_i$.
Согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, $j \geq i$, что $\forall x \varphi_1(x)$ — первая формула в списке формул Δ_j. Поэтому существует такая константа c, $c \in L_\omega$, что $\varphi_1(c) \in \Delta_{j+1}$.

Согласно индуктивному предположению, это означает, что $I_\omega \not\models \varphi_1(c)$, и поэтому $I_\omega \not\models \forall x \varphi_1(x)$.

Аналогичные рассуждения применимы и для формул с квантором $\exists$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Таким образом,

любая формула φ, $\varphi \in \Gamma_\omega$, выполнима в интерпретации I_ω,

любая формула ψ, $\psi \in \Delta_\omega$, невыполнима в интерпретации I_ω.

Поскольку, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_\omega$ и $\Delta_0 \subseteq \Delta_\omega$, приходим к заключению о том, что

$$I_\omega \models \Gamma_0, \quad I_\omega \not\models \Delta_0.$$

Это означает, что таблица T_0 выполнима в интерпретации I_ω вопреки условию о невыполнимости T_0.

Источник полученного противоречия — предположение о невозможности построить успешный вывод, руководствуясь описанной стратегией. Значит, предложенная стратегия позволяет построить успешный вывод для всякой невыполнимой таблицы.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Это было упрощенное доказательство теоремы полноты.
А насколько существенны те упрощения, которые были объявлены в начале доказательства? А именно,

- Какие изменения нужно внести в структуру данных, представляющих таблицы, чтобы доказательство можно было распространить и на таблицы, содержащие бесконечные множества формул?
- Какие изменения нужно внести в стратегию построения табличного вывода, чтобы построить успешный вывод для невыполнимой таблицы, формулы которой содержат сложные термы?
- Какие изменения нужно внести в определение интерпретации I_ω, чтобы доказательство можно было применить к таблицам, содержащим незамкнутые формулы?

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема Геделя (о полноте)

Если формула φ общезначима, то существует успешный табличный вывод для таблицу $T_\varphi = \langle \emptyset | \varphi \rangle$.

Доказательство

Следует из теоремы полноты.

Итак, формула φ общезначима

$$\Longleftrightarrow$$

для таблицы T_φ существует успешный вывод.

И в доказательстве теоремы полноты показано, **как** построить этот вывод.

ТЕОРЕМА ЛЕВЕНГЕЙМА-СКОЛЕМА

Теорема

Формула φ выполнима $\iff$ φ имеет модель с конечной или счетно-бесконечной предметной областью.

Доказательство

Если φ выполнима, то для таблицы $T^*_\varphi = \langle \varphi | \emptyset \rangle$ нельзя построить успешный вывод. Применим стратегию из доказательства теоремы полноты. Т. к. T^*_φ выполнима, получим дерево с ветвью, в которой нет закрытых таблиц.

$$T^*_\varphi = T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow T_n \longrightarrow T_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

Для этой ветви построим интерпретацию I_ω , в которой

- $D_i = L_\omega = \{c_1, c_2, \ldots\}$ — конечное или счетно-бесконечное множество констант из таблиц последовательности;
- выполнимы все таблицы T_i (в т.ч. и T^*_φ).

ТЕОРЕМА КОМПАКТНОСТИ МАЛЬЦЕВА

Теорема

$\Gamma \models \varphi \iff$ **существует такое конечное подмножество** Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, **что** $\Gamma' \models \varphi$.

Доказательство

1. $\Gamma \models \varphi \iff$ таблица $T = \langle \Gamma | \varphi \rangle$ невыполнима (почему?)
2. Таблица $T = \langle \Gamma | \varphi \rangle$ невыполнима $\iff$ существует успешный вывод для T (почему?)
3. успешный вывод — это конечное дерево, и поэтому существует лишь конечое множество формул Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, к которым применяются правила вывода.
4. Но тогда для таблицы $T = \langle \Gamma' | \varphi \rangle$ существует точно такой же успешный вывод.
5. Значит, $\Gamma' \models \varphi$.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

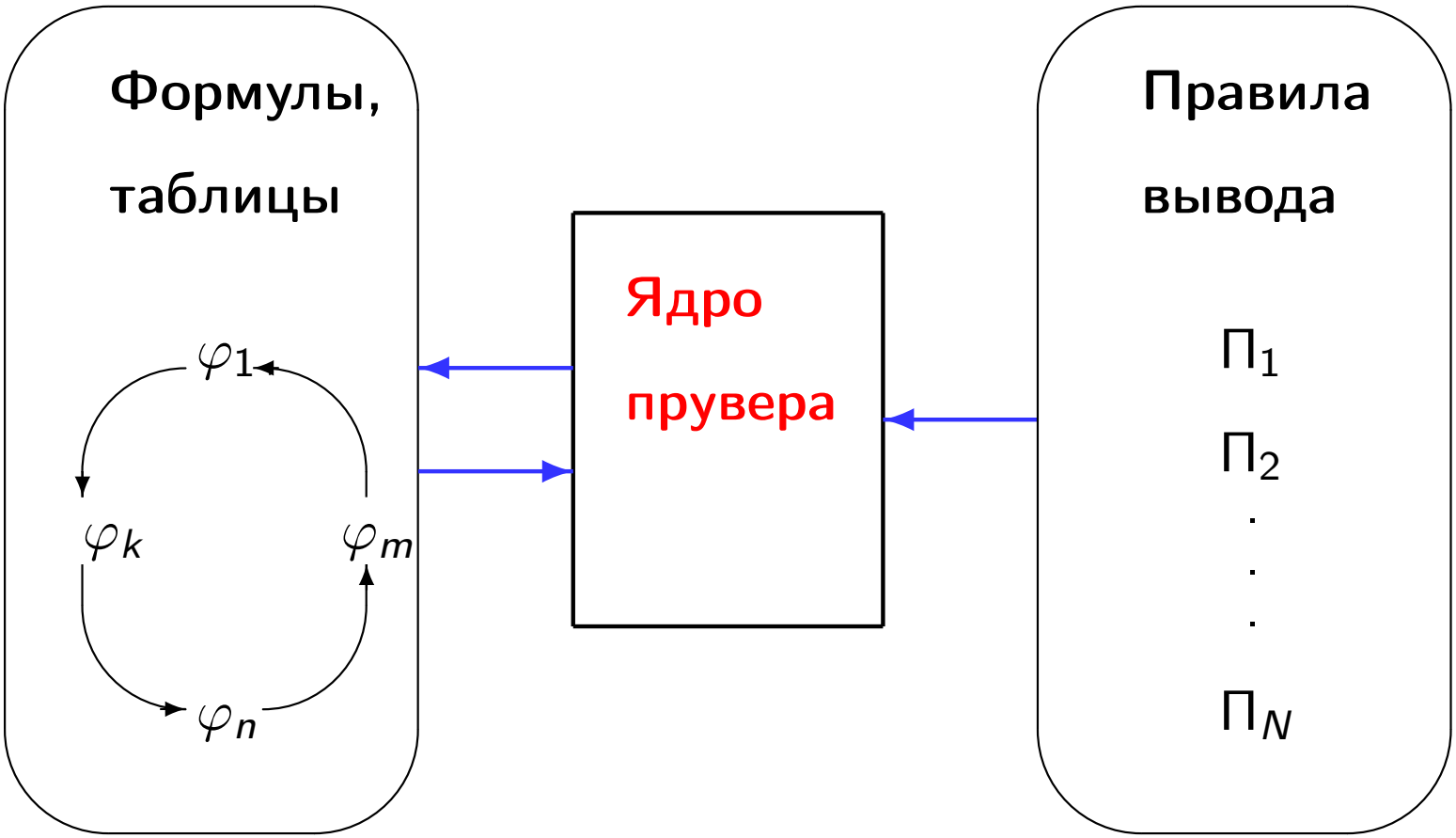
Стратегия построения табличного вывода, использованная в доказательстве теоремы полноты — это алгоритм построения доказательства истинности утверждений, выраженных формулами логики предикатов.
Автоматические системы построения доказательств (логических выводов) называются **пруверами** . От пруверов требуются следующие качества:

- корректность (абсолютно необходимо)
- полнота (очень-очень желательно)
- эффективность (желательно)

Первый прувер (крайне неэффективный) был разработан в 1957 в США (Newell, Simon, Show)

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Общая схема прувера



АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Наш прувер (табличный вывод) корректен и полон. Но насколько он эффективен?

В алгоритме построения дерева табличного вывода применяется двойной переборный поиск:

- выбор формулы , к которой нужно применить правило ввода,
- выбор правила , которое нужно применять к формуле.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина.	В Киеве дядька.
Растет(бузина, огород)	$\exists y$(Дядька(y)& Живет(y, Киев))

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина. Растет(бузина, огород)	В Киеве дядька. $\exists y$(Дядька(y)& Живет(y, Киев))
Все в огороде посадил дядька. $\forall x$(Растет(x, огород) $\rightarrow$ $\exists y$(Посадил(y, x)&Дядька(y)));	

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина. Растет(бузина, огород)	В Киеве дядька. $\exists y$(Дядька(y)& Живет(y, Киев))
Все в огороде посадил дядька. $\forall x$(Растет(x, огород) $\rightarrow$ $\exists y$(Посадил(y, x)&Дядька(y)));	
Бузину посадил киевлянин. $\forall x$(Посадил(x, бузина) $\rightarrow$ Живет(x, Киев));	

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Наиболее критичный этап потроения табличного вывода — выбор нужного правила. Это касается правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$.

$$L\forall \quad \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} | \Delta \rangle}$$

$$R\exists \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

поскольку выбор терма t правилами не оговаривается. Простой перебор всех термов практически невозможен. (почему ?)

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Потому что термов очень-очень много. Если есть один двухместный функциональный символ $f^{(2)}$ и две константы c_1, c_2, то с их помощью можно построить более 10^{1000} основных термов высоты 10. Это количество значительно превосходит число наносекунд, прошедших с момента Большого Взрыва.
Значит, нужно придумать способ, позволяющий быстро и точно вычислять тот терм, который нужно подставлять вместо переменных, связанных кванторами.
Эту задачу в 1964 г. сумели решить Дж. Робинсон (метод резолюций) и С. Маслов (обратный метод ε-термов).

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 5.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

zakh@cs.msu.su

http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html

Лекция 6.

Общая схема метода резолюций.
Равносильные формулы.
Теорема о равносильной замене.
Предваренная нормальная форма.
Сколемовская стандартная форма.
Системы дизъюнктов.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi\,?$$

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости.

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi_0 = \neg\varphi$$

φ общезначима $\iff$ φ_0 противоречива.

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ).

$$\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, (D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_N)$$

φ_0 равносильна φ_1, т. е. $I \models \varphi_0 \Leftrightarrow I \models \varphi_1$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ).

$$\varphi_1 \rightsquigarrow \varphi_2 = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \ldots \forall x_{i_k} \, (D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_N)$$

φ_1 противоречива $\iff$ φ_2 противоречива.

Этап 4. Построение системы дизъюнктов.

$$\varphi_2 \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1, \; D_2, \; \ldots, D_N\},$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \cdots \vee L_{im_i}$.

φ_2 противоречива $\iff$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 5. Резолютивный вывод тождественно ложного (противоречивого) дизъюнкта $\square$ из системы S_φ.

Правило резолюции *Res* : $\dfrac{D_1 = D_1' \vee L,\ D_2 = D_2' \vee \neg L}{D_0 = D_1' \vee D_2'}$.

Дизъюнкт D_0 называется резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2.

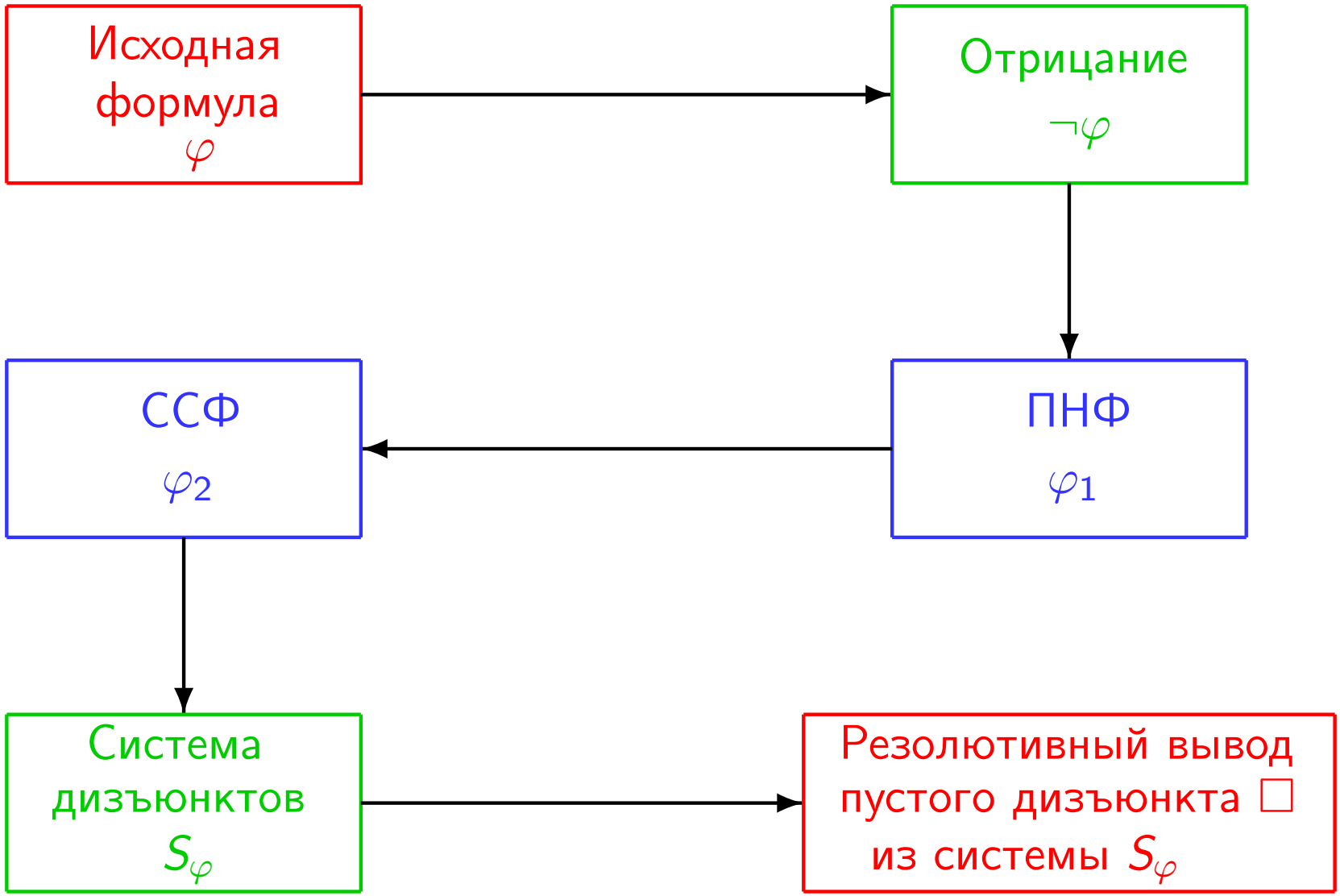
Резольвенты строят, пока не будет получен пустой дизъюнкт $\square$.
Это возможно в случае $D_1 = L$, $D_2 = \neg L$:

$$\frac{D_1 = L,\ D_2 = \neg L}{D_0 = \square}$$

Система дизъюнктов S_φ противоречива $\Leftrightarrow$ из S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ИТОГ. Формула φ общезначима $\Leftrightarrow$ из системы дизъюнктов S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Введем вспомогательную логическую связку эквиваленции $\equiv$. Выражение $\varphi \equiv \psi$ — это сокращенная запись формулы $(\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$.

Определение

Формулы φ и ψ будем называть равносильными , если формула $\varphi \equiv \psi$ общезначима, т. е. $\models (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$.

Утверждение.

1. Отношение равносильности — это отношение эквивалентности.
2. Если формула φ общезначима (выполнима) и равносильна ψ, то формула ψ также общезначима (выполнима), т. е.

$$\models \varphi \text{ и } \models \varphi \equiv \psi \implies \models \psi$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры равносильных формул

1. Удаление импликации. $\models \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$,
2. Переименование переменных.
   $\models \overset{\forall}{\exists} x\, \varphi(x) \equiv \overset{\forall}{\exists} y\, \varphi(y)$,
   здесь формула $\varphi(x)$ не содержит свободных вхождений переменной y, а формула $\varphi(y)$ не содержит свободных вхождений переменной x.
3. Продвижение отрицания.
   $\models \neg\neg\varphi \equiv \varphi$,
   $\models \neg(\varphi \overset{\&}{\vee} \psi) \equiv \neg\varphi \overset{\vee}{\&} \neg\psi$,
   $\models \neg\overset{\forall}{\exists} x\varphi \equiv \overset{\exists}{\forall} x\neg\varphi$,

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры равносильных формул

4. Вынесение кванторов.
   $\models \overset{\forall}{\exists} x\varphi(x)\&\psi \equiv \overset{\forall}{\exists} x(\varphi(x)\&\psi)$,
   $\models \overset{\forall}{\exists} x\varphi(x) \vee \psi \equiv \overset{\forall}{\exists} x(\varphi(x) \vee \psi)$,
   здесь формула ψ не содержит свободных вхождений переменной x,
5. Законы булевой алгебры.
   $\models \varphi \overset{\&}{\vee} \psi \equiv \psi \overset{\&}{\vee} \varphi$,
   $\models \varphi \overset{\&}{\vee} (\psi \overset{\&}{\vee} \chi) \equiv (\varphi \overset{\&}{\vee} \psi) \overset{\&}{\vee} \chi$,
   $\models \varphi\&(\psi \vee \chi) \equiv (\varphi\&\psi) \vee (\varphi\&\chi)$,
   $\models \varphi \vee (\psi\&\chi) \equiv (\varphi \vee \psi)\&(\varphi \vee \chi)$,
   $\models \varphi \overset{\&}{\vee} \varphi \equiv \varphi$,

Доказать равносильность методом семантических таблиц.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Запись $\varphi[\psi]$ означает, что формула φ содержит подформулу ψ. Запись $\varphi[\psi/\chi]$ обозначает формулу, которая образуется из формулы φ заменой некоторых (не обязательно всех) вхождений подформулы ψ на формулу χ.

Теорема

$$\models \psi \equiv \chi \quad \Longrightarrow \quad \models \varphi[\psi] \equiv \varphi[\psi/\chi]$$

Доказательство

Индукцией по числу связок и кванторов в формуле φ

Базис. $\varphi[\psi] = \psi$. Очевидно.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Индуктивный переход. $\varphi[\psi] = \forall x \varphi_1[\psi](x)$.

По индуктивному предположению, если $\models \psi \equiv \chi$, то в любой интерпертации I и для любого элемента $d \in D_I$ верно

$$I \models \varphi_1[\psi](d) \to \varphi_1[\psi/\chi](d)$$
$$I \models \varphi_1[\psi/\chi](d) \to \varphi_1[\psi](d)$$

Значит,

$$I \models \forall x(\varphi_1[\psi](x) \to \varphi_1[\psi/\chi](x))$$
$$I \models \forall x(\varphi_1[\psi/\chi](x) \to \varphi_1[\psi](x))$$

Как следует из примера $\models \forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$ (см. Лекция 3),

$$I \models \forall x \varphi_1[\psi](x) \to \forall x \varphi_1[\psi/\chi](x))$$
$$I \models \forall x \varphi_1[\psi/\chi](x) \to \forall x \varphi_1[\psi](x))$$

(Остальные случаи формулы φ — самостоятельно.)

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$\models \forall x P(x) \to \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$

Поскольку $\models \varphi \to \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \to \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

Поскольку $\models \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \to \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

Поскольку $\models \exists x\ \varphi(x) \equiv \exists y\ \varphi(y)$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$\models \forall x P(x) \to \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$

$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$

$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$

$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y) \equiv \exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$

Поскольку $\models \exists x \varphi(x) \vee \psi \equiv \exists x (\varphi(x) \vee \psi)$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \to \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y) \equiv \exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$$

Таким образом, вопрос об общезначимости $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ сводится к вопросу об общезначимости $\exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Определение

Замкнутая формула φ называется предваренной нормальной формой (ПНФ) , если

$$\varphi \;=\; Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \; M(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где

- $Q_1 x_1 \;\; Q_2 x_2 \;\; \ldots \;\; Q_n x_n$ — кванторная приставка , состоящая из кванторов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$,
- $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — матрица — бескванторная конъюнктивная нормальная форма (КНФ), т. е.

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_1 \;\&\; D_2 \;\&\ldots\&\; D_N,$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \cdots \vee L_{ik_i}$ — дизъюнкты , состоящие из литер $L_{ij} = A_{ij}$ или $L_{ij} = \neg A_{ij}$, где A_{ij} — атомарная формула.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\forall x \exists y \exists z \forall u \ (P(x) \ \& \ \neg R(x,u) \ \& \ (\neg P(y) \ \vee \ R(x,z))),$$

кванторная приставка: $\forall x \exists y \exists z \forall u$

матрица: $P(x) \ \& \ \neg R(x,u) \ \& \ (\neg P(y) \ \vee \ R(x,z))$

дизъюнкты: $D_1 = P(x)$,
$D_2 = \neg R(x,u)$,
$D_3 = \neg P(y) \ \vee \ R(x,z)$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Теорема о ПНФ

Для любой замкнутой формулы φ существует равносильная предваренная нормальная форма ψ.

Доказательство

Замкнутую формулу φ можно привести к ПНФ применением равносильных преобразований. Покажем, как это надо делать на примере формулы

$$\varphi = \neg\ \exists x(\ (P(x)\ \&\ (\forall x P(x) \to \exists y R(x,y)))\ \to\ \exists y R(x,y)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

1. Переименование переменных.
Применяем равносильности $\models \overset{\forall}{\exists} x\ \varphi(x) \equiv \overset{\forall}{\exists} y\ \varphi(y)$

$$\varphi = \neg\ \exists \mathbf{x}(\ (P(\mathbf{x})\ \&\ (\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \to \exists y R(\mathbf{x}, y)))\ \to\ \exists y R(\mathbf{x}, y)\ )$$

$$\neg\ \exists x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\forall x_2 P(x_2) \to \exists \mathbf{y} R(x_1, \mathbf{y})))\ \to\ \exists \mathbf{y} R(x_1, \mathbf{y})\ )$$

$$\neg\ \exists x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\forall x_2 P(x_2) \to \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \to\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.
Применяем равносильность $\models \ \varphi \to \psi \ \equiv \ \neg\varphi \vee \psi$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

$$\neg\ \exists x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\forall x_2 P(x_2) \to \exists y_1 R(x_1, y_1))) \to \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

$$\neg\ \exists x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\forall x_2 P(x_2) \to \exists y_1 R(x_1, y_1))) \to \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

Применяем равносильности

$\models \neg\neg\varphi \equiv \varphi,$

$\models \neg(\varphi \overset{\&}{\vee} \psi) \equiv \neg\varphi \overset{\vee}{\&} \neg\psi,$

$\models \neg \overset{\forall}{\exists} x\varphi \equiv \overset{\exists}{\forall} x\neg\varphi$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \neg(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \neg(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \neg\neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \neg\exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \neg(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \neg\neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \neg\exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \neg(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \neg\neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \neg\exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

Применяем равносильности

$\models \overset{\forall}{\exists} x\varphi(x)\&\psi \equiv \overset{\forall}{\exists} x(\varphi(x)\&\psi)$,

$\models \overset{\forall}{\exists} x\varphi(x) \vee \psi \equiv \overset{\forall}{\exists} x(\varphi(x) \vee \psi)$,

$\models \varphi \overset{\&}{\vee} \psi \equiv \psi \overset{\&}{\vee} \varphi$.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ \exists \mathbf{x_2} (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ \exists \mathbf{x_2} (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \exists \mathbf{x_2} (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ \exists \mathbf{x_2}(\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \exists \mathbf{x_2}(P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \exists \mathbf{x_2}(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

и так далее...

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ \exists \mathbf{x_2}(\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \exists \mathbf{x_2}(P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \exists \mathbf{x_2}(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

и так далее...

$$\forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)))\ \&\ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

5. Приведение матрицы к конъюнктивной нормальной форме. Применяем законы булевой алгебры.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

5. Приведение матрицы к конъюнктивной нормальной форме.

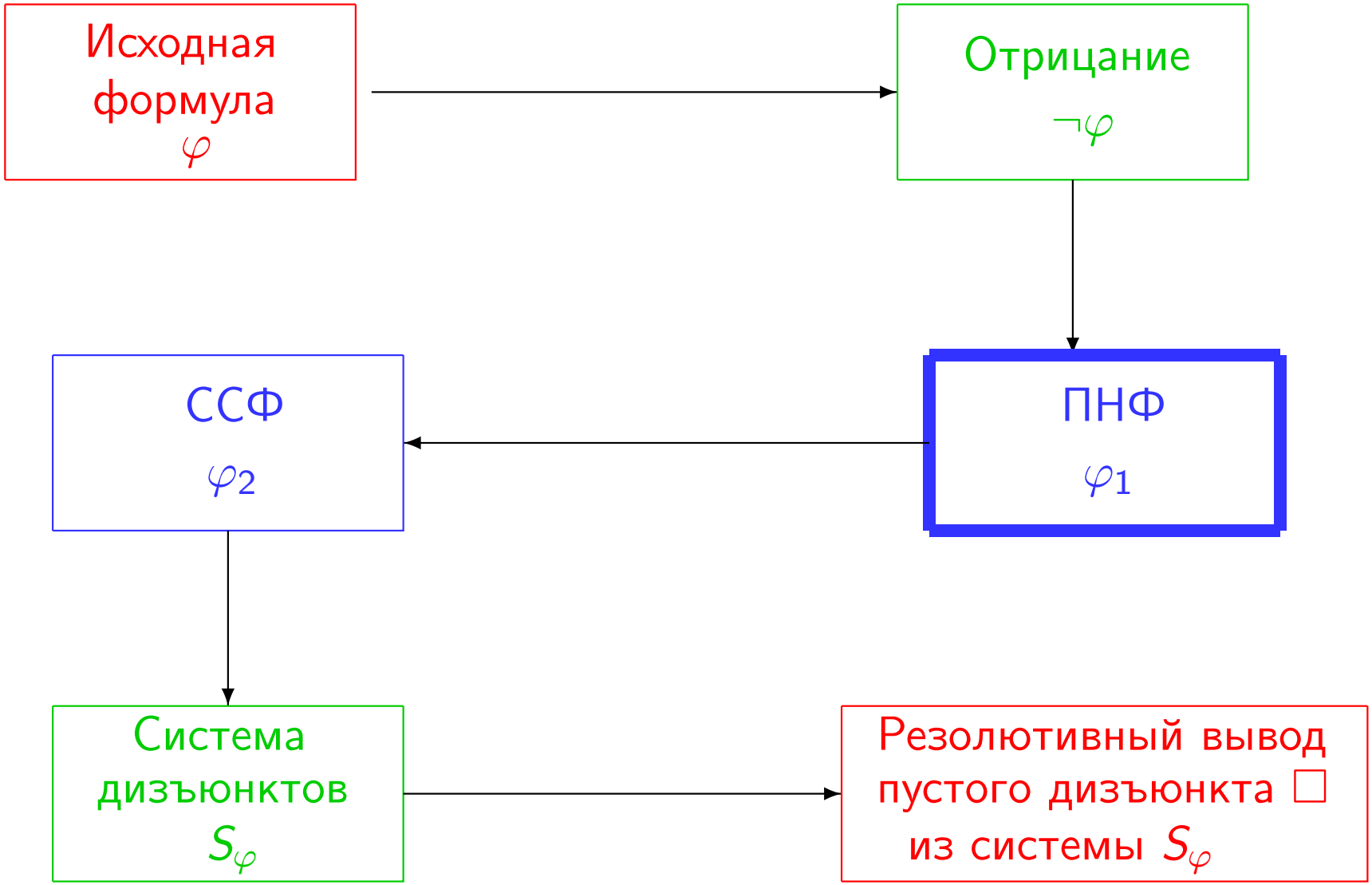
$$\psi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \,\&\, (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \,\&\, \neg R(x_1, y_2)\ )$$

В результате получаем формулу ψ, которая

- является предваренной нормальной формой,
- равносильна исходной формуле φ.

□

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Определение

Предваренная нормальная форма вида

$$\varphi \;=\; \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \ldots \forall x_{i_m}\; M(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}),$$

в которой кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$, называется сколемовской стандартной формой (ССФ) .

Примеры ССФ

$$\forall x_1 \forall y_2 (P(x_1) \;\&\; (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1))) \;\&\; \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$R(c_1, f(c_1, c_2)) \vee P(c_2)$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Теорема о ССФ

Для любой замкнутой формулы φ существует такая сколемовская стандартная форма ψ, что

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \text{ выполнима}.$$

Доказательство

Воспользуемся леммой об удалении кванторов существования .

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Лемма об удалении кванторов существования

Пусть $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \exists x_{k+1}\ \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1})$ **— замкнутая формула,** $k \geq 0$**, и** k**-местный функциональный символ** $f^{(k)}$ **не содержится в формуле** φ**.**
Тогда формула φ **выполнима в том и только том случае, когда выполнима формула**

$$\psi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k\ \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)).$$

Доказательство леммы.

($\Leftarrow$) Пусть I — модель для ψ.
Тогда для любого набора $d_1, d_2, \ldots, d_k \in D_I$ имеет место
$I \models\ \varphi_0[d_1, d_2, \ldots, d_k, f^{(k)}(d_1, d_2, \ldots, d_k)]$,
т. е. для любого набора $d_1, d_2, \ldots, d_k \in D_I$ существует такой элемент $d_{k+1} = f^{(k)}(d_1, d_2, \ldots, d_k)$, что
$I \models\ \varphi_0[d_1, d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}]$.
Это означает, что $I \models\ \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \exists x_{k+1} \varphi_0$.

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство леммы об удалении $\exists$.

($\Rightarrow$) Пусть I — модель для φ. Тогда для любого набора $d_1, d_2, \ldots, d_k \in D_I$ существует такой элемент $d_{k+1} \in D_I$, что $I \models \varphi_0[d_1, d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}]$.
Пусть $\bar{\mathbf{f}} : D_I^k \to D_I$ — это некоторая функция, вычисляющая для каждого набора $d_1, d_2, \ldots, d_k \in D_I$ такой элемент $d_{k+1} = \bar{\mathbf{f}}(d_1, d_2, \ldots, d_k)$, что
$I \models \varphi_0[d_1, d_2, \ldots, d_k, d_{k+1}]$.
Рассмотрим интерпретацию I', которая отличается от I только тем, что оценкой функционального символа $f^{(k)}$ является функция $\mathbf{f}$.
Тогда для любого набора $d_1, d_2, \ldots, d_k$ верно
$I' \models \varphi_0[d_1, d_2, \ldots, d_k, f^{(k)}(d_1, d_2, \ldots, d_k)]$. (почему?)
Это означает, что
$I' \models \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \; \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k))$. $\square$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Продолжение доказательства теоремы об ССФ

Удаляем по очереди кванторы существования с помощью леммы.

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x_{k+1} \forall x_{k+2} \ldots \forall x_m \exists x_{m+1} \ldots \varphi_0(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2} \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots)$$

$$\varphi' = \forall x_1 \ldots \forall x_k \; \forall x_{k+2} \ldots \forall x_m \exists x_{m+1} \ldots \varphi_0(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k), x_{k+2} \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots)$$

$$\varphi'' = \forall x_1 \ldots \forall x_k \; \forall x_{k+2} \ldots \forall x_m \ldots \varphi_0(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k), x_{k+2} \ldots x_m, g(x_1, \ldots, x_k, x_{k+2}, \ldots, x_m), \ldots)$$

и. т. д.

При этом выполнимость формул сохраняется. □

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2) \ )$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2) \ )$$

$$\varphi' = \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2) \ )$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2) \ )$$

$$\varphi' = \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2) \ )$$

$$\varphi'' = \forall x_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1))) \ \& \ \neg R(x_1, y_2) \ )$$

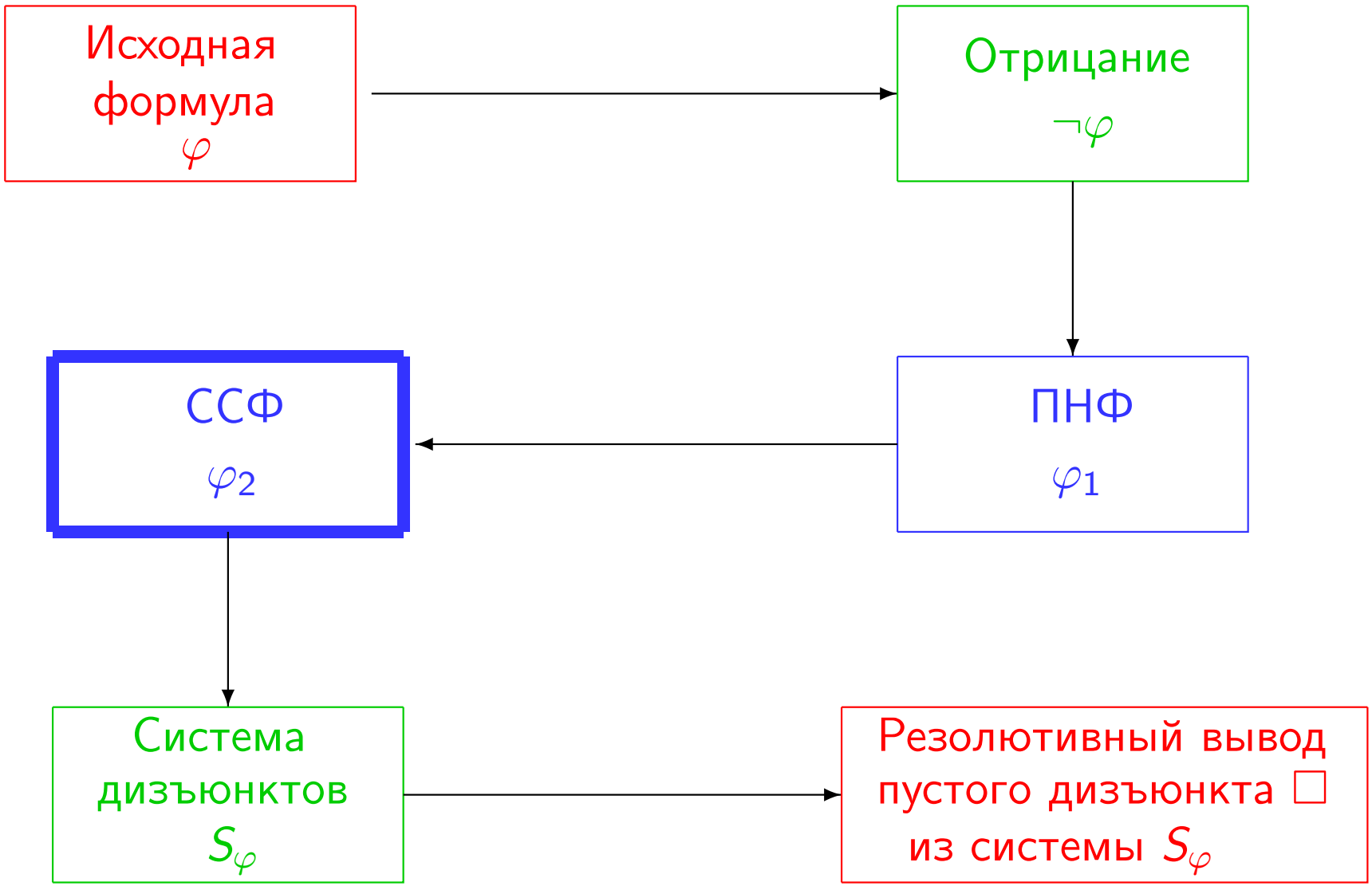
φ выполнима $\iff$ φ'' выполнима.

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Терм $f^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$, который подставляется вместо удаляемой переменной x_{k+1}, связанной квантором $\exists$, называется сколемовским термом .
Если $k = 0$, то терм называется сколемовской константой .

Процедура удаления кванторов $\exists$ называется сколемизацией .

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Утверждение

$$\models \forall x(\varphi \& \psi) \equiv \forall x\varphi \& \forall x\psi$$

Иначе говоря, кванторы $\forall$ можно равномерно распределить по сомножителям (дизъюнктам) КНФ.

Теорема

Сколемовская стандартная форма

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \, (D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \ldots \,\&\, D_N)$$

невыполнима тогда и только тогда, когда множество формул

$$S_\varphi = \{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_1, \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_2, \ldots, \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_N\}$$

не имеет модели.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Каждая формула множества S_φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m (L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_k)$$

и называется дизъюнктом .
В дальнейшем (по умолчанию) будем полагать, что все переменные дизъюнкта связаны кванторами $\forall$, и кванторную приставку выписывать **не будем**.

Каждый дизъюнкт состоит из литер $L_1, L_2, \ldots, L_k$.
Литера — это либо атом, либо отрицание атома.

Особо выделен дизъюнкт, в котором **нет ни одной литеры**. Такой дизъюнкт называется пустым дизъюнктом и обозначается $\square$. Пустой дизъюнкт $\square$ тождественно ложен (почему?).

Потому что $\models L_1 \vee \cdots \vee L_k \equiv L_1 \vee \cdots \vee L_k \vee \mathbf{false}$, и поэтому при $k = 0$ имеем $\models \square \equiv \mathbf{false}$.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Систему дизъюнктов, не имеющую моделей, будем называть невыполнимой , или противоречивой системой дизъюнктов.

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi\,?$$

φ общезначима $\iff$ $\varphi_0 = \neg\varphi$ невыполнима.

φ_0 невыполнима $\iff$ ПНФ φ_1 невыполнима.

φ_1 невыполнима $\iff$ ССФ φ_2 невыполнима.

φ_2 невыполнима $\iff$ система дизъюнктов S_φ невыполнима.

Итак, проверка общезначимости $\models \varphi\,?$ сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ: ПРИМЕР

Исходная формула:

$$\varphi = \exists x(\ (P(x)\ \&\ (\forall x P(x) \to \exists y R(x,y)))\ \to\ \exists y R(x,y)\ )$$

Ее отрицание:

$$\varphi_0 = \neg\ \exists x(\ (P(x)\ \&\ (\forall x P(x) \to \exists y R(x,y)))\ \to\ \exists y R(x,y)\ )$$

Предваренная нормальная форма для φ_0:

$$\varphi_1 = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee R(x_1,y_1))\ \&\ \neg R(x_1,y_2)\ )$$

Сколемовская стандартная форма:

$$\varphi_2 = \forall x_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1,g(x_1)))\ \&\ \neg R(x_1,y_2)\ )$$

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ: ПРИМЕР

Система дизъюнктов:

$$
\begin{aligned}
S_\varphi \quad = \{ & \\
& D_1 = P(x_1), \\
& D_2 = \neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1)), \\
& D_3 = \neg R(x_1, y_2) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}
\end{aligned}
$$

Задача:

как проверить противоречивость произвольной системы дизъюнктов?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 6.

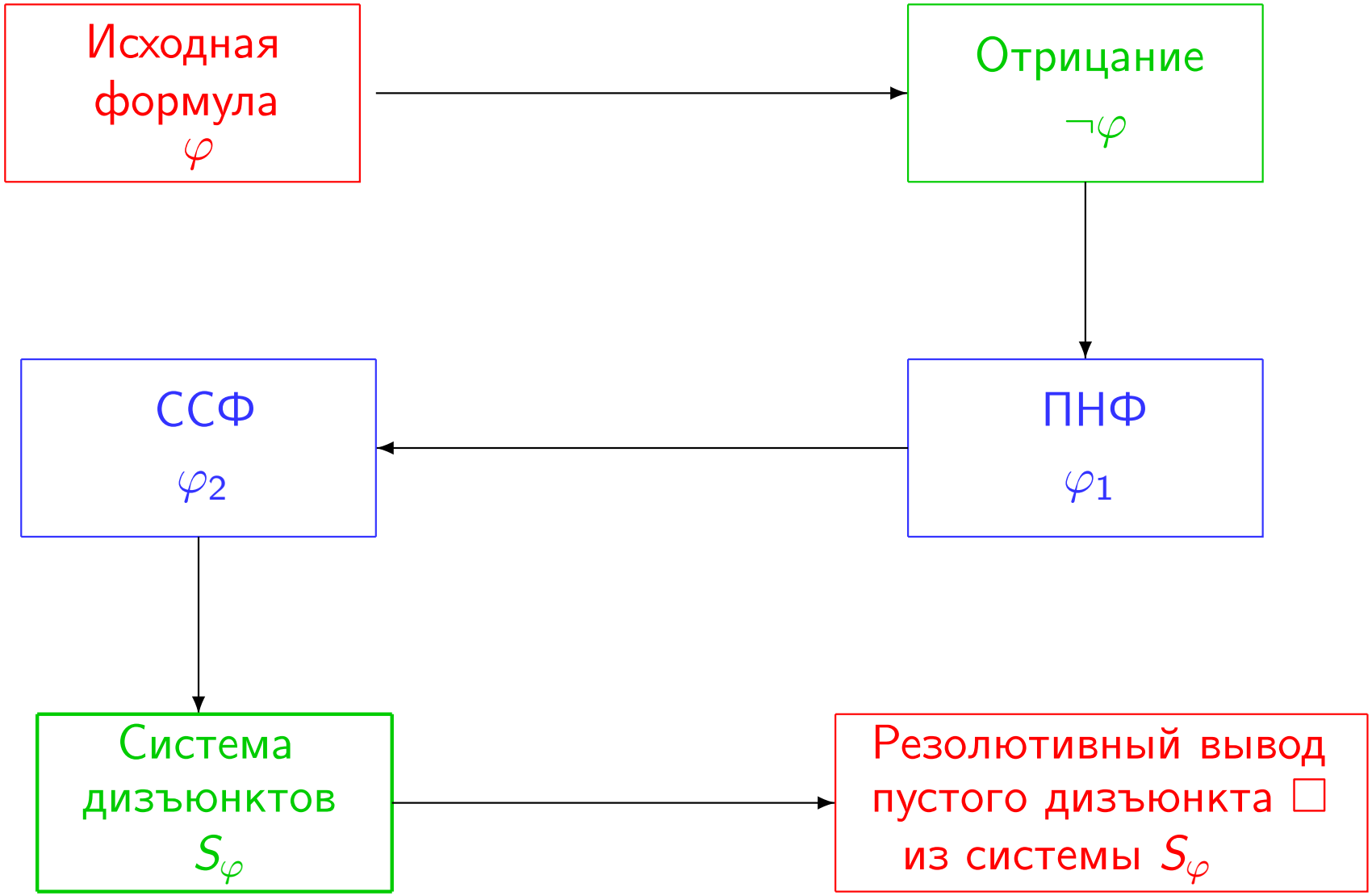
Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 7.

Эрбрановские интерпретации. Теорема Эрбрана. Задача унификации.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Проверка общезначимости формулы φ сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ.

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости: $\varphi \rightsquigarrow \varphi_0 = \neg\varphi$

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ).

$$\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, (D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_N)$$

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ).

$$\varphi_1 \rightsquigarrow \varphi_2 = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \ldots \forall x_{i_k} \, (D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_N)$$

Этап 4. Построение системы дизъюнктов.

$$\varphi_2 \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1, \; D_2, \; \ldots, D_N\},$$

φ общезначимая $\Longleftrightarrow$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Система дизъюнктов $S = \{D_1,\ D_2,\ \ldots, D_N\}$ противоречива тогда и только тогда, когда

для каждой интерпретации I

в системе S **найдется** такой дизъюнкт

$$D_i = \forall x_1 \ldots \forall x_n\ (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})$$

и в предметной области D_I **найдется** такой набор элементов

$$d_1, \ldots, d_n,$$

для которых имеют место

$$I \not\models L_{1i}[d_1, \ldots, d_n],\ I \not\models L_{2i}[d_1, \ldots, d_n],\ \ldots,\ I \not\models L_{k_i i}[d_1, \ldots, d_n].$$

А можно ли сократить множество рассматриваемых интерпретаций?

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Эрбрановские интерпретаций (H-интерпретации, названные так по имени французского метематика Herbrand) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат **свободные алгебры**.

Предметная область эрбрановских интерпретаций называется **эрбрановским универсумом** (H-**универсумом**).

Определение H-универсума

Пусть задана некоторая сигнатура $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$.
Тогда эрбрановским универсумом σ называется множество термов $H_\sigma = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} H_i$, где

$$i = 0 \;\; H_0 = \begin{cases} Const, \text{ если } Const \neq \emptyset, \\ \{c\}, \text{ если } Const = \emptyset \text{ (эрбрановская константа)}; \end{cases}$$

$$i \to i+1 \;\; H_{i+1} = H_i \cup \{f^{(k)}(t_1, \ldots, t_k) \;:\; f^{(k)} \in Func,\; t_1, \ldots, t_k \in H_i\}.$$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Эрбрановский универсум — это множество всех термов, которые можно построить из констант и функциональных символов заданной сигнатуры. Термы эрбрановского универсума не содержат переменных и называются основными термами .

Пример

Пусть $Const = \emptyset$, $Func = \{f^{(1)}, g^{(2)}\}$. Тогда

$i = 0$ $H_0 = \{c\}$ (эрбрановская константа, т.к. $Const = \emptyset$);

$i = 1$ $H_1 = \{c,\ f(c),\ g(c,c)\}$;

$i = 2$ $H_2 = \{c, f(c), g(c,c),$
$f(f(c)), f(g(c,c)), g(f(c),c), g(c,f(c)),$
$g(f(c),f(c)), g(c,g(c,c)), g(g(c,c),c),$
$g(g(c,c),g(c,c)), g(f(c),g(c,c)), g(g(c,c),f(c))\}$;

$i = 3$ и. т. д.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Определение H-интерпретации

Эрбрановская интерпретация $I_H = \langle H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred} \rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ состоит из

- **стандартной** предметной области — эрбрановского универсума H_σ;
- **стандартной** оценки констант: $\overline{Const}_H(c) = c$, т. е. значением каждого константного символа c является его собственное изображение;
- **стандартной** оценки функциональных символов: $\overline{Func}_H(f^{(n)}) = \mathbf{f} : \mathbf{f}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, т. е. каждый функциональный символ f играет роль конструктора термов эрбрановского универсума;
- **произвольной** оценки предикатных символов.

Таким образом, разные H-интерпретации отличаются только истолкованием предикатных символов.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Преимущества эрбрановских интерпретаций.

- Не нужно заботиться о выборе области интерпретации — у всех H-интерпретаций одна и та же предметная область — H-универсум.
- Не нужно заботиться об оценке функциональных символов — у всех H-интерпретаций одна и та же стандартная оценка *Const* и *Func*.
- И, как будет показано, для проверки противоречивости систем дизъюнктов достаточно ограничиться рассмотрением H-интерпретаций.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Теорема о H-интерпретациях

Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда S имеет эрбрановскую модель, т.е. выполнима хотя бы в одной H-интерпретации.

Доказательство

($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Пусть $S = \{D_1, \ldots, D_N\}$, и $I = \langle \mathcal{D}_I, \overline{Const}_I, \overline{Func}_I, \overline{Pred}_I \rangle$ — некоторая модель для S, т. е. для любого дизъюнкта $D_i = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})$ из S и для любого набора элементов $d_1, \ldots, d_n$ из $\mathcal{D}_I$ имеет место

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})[d_1, \ldots, d_n].$$

Покажем, что существует H-интерпретация J_H, в которой выполняется каждый дизъюнкт D_i из S.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Пусть σ — сигнатура системы дизъюнктов S. Рассмотрим эрбрановский универсум H_σ и отображение

$$\alpha \ : \ H_\sigma \ \to \ \mathcal{D}_I,$$

которое каждому основному терму $t \in H_\sigma$ сопоставляет элемент $\alpha(t) = d_t \in \mathcal{D}_I$, равный значению терма t в интерпретации I.

Оценку $\overline{Pred}_H$ предикатных символов в H-интерпретации J определим так:

для любого предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \ldots, t_m \in H_\sigma$ положим

$$\overline{P}_H(t_1, \ldots, t_m) = \textbf{true} \iff \overline{P}_I(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_m)) = \textbf{true}.$$

Эта оценка однозначно определяет H-интерпретацию J_H

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Тогда для любого функционального символа f, предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \ldots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$\alpha(f(t_1, \ldots, t_m)) = \overline{f}_I(\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_m)),$$

$$J_H \models P[t_1, \ldots, t_m] \iff I \models P[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_m)]$$

Отображение α — это гомоморфизм интерпретации J_H в интерпретацию I.

Значит, для **любого** дизъюнкта $D' = \forall x_1 \ldots \forall x_m \, (L_1 \vee \cdots \vee L_k)$ и любого набора основных термов $t_1, \ldots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$J_H \models (L_1 \vee \cdots \vee L_k)[t_1, \ldots, t_m]$$

$$\iff$$

$$I \models (L_1 \vee \cdots \vee L_k)[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_m)]$$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Итак, для любого дизъюнкта
$D_i = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})$ из S и любого набора основных термов $t_1, \ldots, t_n \in H_\sigma$ имеем

$$J_H \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})[t_1, \ldots, t_n]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)].$$

Поскольку

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_n)],$$

все дизъюнкты из S выполнимы в построенной эрбрановской интерпретации J_H. $\square$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Следствие

Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда S невыполнима ни в одной эрбрановской интерпретации.

Значит, для проверки противоречивости систем дизъюнктов достаточно исследовать только эрбрановские интерпретации.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Как задавать H-интерпретации?

Эрбрановские интерпретации полностью определяются оценкой предикатных символов. Значит, достаточно указать оценку всех предикатных символов.

Пусть $P^{(m)} \in Pred$, и $t_1, \ldots, t_m \in H_\sigma$ — набор основных термов. Тогда формула $P^{(m)}(t_1, \ldots, t_m)$ называется основным атомом . Множество всех основных атомов называется эрбрановским базисом и обозначается B_H.

Всякая H-интерпретация I задается подмножеством B^I истинных основных атомов:

$$B^I = \{P^{(m)}(t_1, \ldots, t_m) \ : \ I \models P^{(m)}(t_1, \ldots, t_m), \{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq H\}.$$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Примеры

- $B^I = \emptyset$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно ложны.

$$I \models P^{(m)}[t_1, \ldots, t_m] \iff P^{(m)}(t_1, \ldots, t_m) \in \emptyset.$$

- $B^I = B_H$ соответствует интерпретации I, в которой все $\overline{P}$ тождественно истинны.
- Пересечение $B^{I_1} \cap B^{I_2}$ задает интерпретацию, в которой истинны те и только те отношения, которые истинны в обоих интерпретациях I_1 и I_2.

  Значит, это очень удобный способ задания интерпретаций, позволяющий проводить над ними теоретико-множественные операции.

В дальнейшем все H-интерпретации мы будем ассоциировать с подмножествами эрбрановского базиса B_H.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Вернемся к системам дизъюнктов

Пусть имеется дизъюнкт $D = \forall x_1 \ldots \forall x_m \, (L_1 \vee \cdots \vee L_k)$ и набор основных термов $t_1, \ldots, t_m$ из эрбрановского универсума H_σ.

Тогда дизъюнкт $D' = (L_1 \vee \cdots \vee L_k)\{x_1/t_1, \ldots, x_m/t_m\}$, полученный из D подстановкой основных термов $t_1, \ldots, t_m$ вместо всех переменных дизъюнкта D называется основным примером дизъюнкта D.

Пример

$D = \forall x_1 \forall x_2 \, (\neg R(x_1, x_2) \vee P(h(x_1)))$ — дизъюнкт,

$D' = \neg R(g(c'), c'') \vee P(h(g(c'))) = D\{x_1/g(c'), x_2/c''\}$ — основной пример.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Система дизъюнктов $S = \{D_1,\ D_2,\ \ldots, D_N\}$ противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

для каждой H-интерпретации I в S найдется такой дизъюнкт $D_i = (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \cdots \vee L_{k_i i})$ и такой набор основных термов $t_1, \ldots, t_m$, для которых имеют место

$$I \not\models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \ldots L_{k_i i})[t_1, \ldots, t_m]$$

$$\Longleftrightarrow$$

для каждой H-интерпретации I существует основной пример $D' = D_i\{x_1/t_1, \ldots, x_m/t_m\}$ дизъюнкта из системы S, для которого

$$I \not\models D'.$$

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Рассмотрим множество основных примеров дизъюнктов

$$\mathcal{G}_S = \{D' : \begin{array}{l} D' \text{ — основной пример дизъюнкта из } S, \\ \text{существует эрбрановская интерпретация } I \subseteq B_H : \\ I \not\models D'\}. \end{array}$$

Тогда система дизъюнктов S противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

система основных примеров $\mathcal{G}_S$ противоречива.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Вспомним теорему компактности Мальцева

Множество замкнутых формул T имеет модель тогда и только тогда, когда каждое **конечное** подмножество T', $T' \subseteq T$, имеет модель.

Таким образом, множество основных примеров дизъюнктов $\mathcal{G}_S$ противоречиво

$$\Longleftrightarrow$$

существует **конечное** противоречивое подмножество $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}_S$.

И в результате проведенных рассуждений мы приходим к

Теореме Эрбрана .

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_N\}$ противоречива

$$\Longleftrightarrow$$

существует конечное противоречивое множество $\mathcal{G}'$ основных примеров дизъюнктов системы S.

В чем состоит главная особенность теоремы Эрбрана?

Основной пример дизъюнкта не содержит **предметных переменных**, и поэтому является простой **булевой формулой**

Таким образом проблема общезначимости формул логики предикатов (сложная проблема!!!) сводится к проблеме выполнимости булевой формулы (простой проблеме??!!).

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Маленькое лукавство.

Увы, теорема Эрбрана не сообщает нам ничего о том, КАКИЕ основные примеры дизъюнктов образуют это противоречивое множество $\mathcal{G}'$.

Нам нужно придумать механизм поиска этого противоречивого множества $\mathcal{G}'$.

Дэвис и Патнем предложили использовать компьютер для перебора всех эрбрановских интерпретаций в поиске противоречивой системы основных примеров дизъюнктов. Но Дж. Робинсон поступил хитрее...

Из дизъюнктов системы S нужно устранять потенциальные противоречия, пока не будут устранены все источники противоречия или не будет получено неустранимое (явное) противоречие.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Если в системе S содержатся дизъюнкты $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$, то, очевидно, S противоречива (явное противоречие).

А если в S есть дизъюнкты $D_1 = D_1' \vee L$ и $D_2 = D_2' \vee \neg L$, то $I \models D_1$ и $I \models D_2$ влечет $I \models D_1' \vee D_2'$. Значит, добавление дизъюнкта $D_0 = D_1' \vee D_2'$ к S не нарушает ее выполнимости. Зато устраняется потенциальное противоречие L и $\neg L$.

Правило вывода, разрешающее противоречия,

$$\frac{D_1' \vee L,\ D_2' \vee \neg L}{D_1' \vee D_2'}$$

называется правилом резолюции . Это правило можно применять до тех пор, пока не возникнет неустранимое противоречие $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$. Это и будет служить признаком противоречивости системы S.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Ну, а если $D_1 = P(x)$ и $D_2 = \neg P(f(y))$, то как быть тогда? Ведь здесь нет явного противоречия.

Противоречие здесь скрытое. Дизъюнкты D_1 и D_2 имеют основные примеры

$$P(f(c)) = D_1\{x/f(c)\} \text{ и } \neg P(f(c)) = D_2\{y/c\},$$

которые образуют противоречие. Значит, D_1 и D_2 тоже противоречивы. Но как отыскать это скрытое противоречие?

Нужно постараться привести литеры $P(x)$ и $P(f(y))$ к общему виду. Приведение выражений к общему виду называется унификацией .

Нам нужен алгоритм унификации!

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Приведение двух атомов A' и A'' к общему виду достигается применением такой подстановки θ, для которой $A'\theta = A''\theta$. Значит, для решения задачи унификации придется изучить алгебраические свойства подстановок.

Воспоминания

Подстановка — это отображение $\theta : Var \rightarrow Term$.

Конечная подстановка $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$.

$E\theta$ — применение подстановки θ к выражению E.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Композиция подстановок

Пусть $\theta, \eta \in \mathit{Subst}$. Композиция подстановок $\theta\eta$ — это подстановка μ, которая определяется следующим соотношением:

$$\mu(x) = (x\theta)\eta \text{ для любой } x \in \mathit{Var}.$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$, $\eta = \{y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$. Тогда подстановка

$$\begin{aligned} \mu \quad = \quad & \{x_1/t_1\eta, \ldots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\} - \\ & \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\}. \end{aligned}$$

является композицией $\theta\eta$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Доказательство

$$\begin{aligned}\mu \quad = \quad & \{x_1/t_1\eta, \ldots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i \ : \ y_i \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\} - \\ & \{x_j/t_j\eta \ : \ x_j = t_j\eta\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта.

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.
Если $t_j\eta \neq x_j$, то $x_j \in Dom_\mu$, и $x_j\mu = t_j\eta$.
Если $t_j\eta = x_j$, то $x_j \notin Dom_\mu$, и $x_j\mu = x_j$.
В любом случае $x_i(\theta\eta) = x_i\mu$.

2. $z = y_i \in Dom_\eta \setminus Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (y_i\theta)\eta = y_i\eta = s_i$,
и $z\mu = s_i$.

3. $z = y_i \notin Dom_\eta \cup Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = z$ и $z\mu = z$. □

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\theta\eta \quad =$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\theta\eta \quad =$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\theta\eta \quad = \quad \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \ \cup \ \{u/c\}$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\begin{aligned} \theta\eta &= \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/c\} \\ &\quad \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ z/z,\ u/c\} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$\theta = \{x/f(x,c),\ y/g(u),\ z/y\}$,
$\eta = \{x/g(y),\ y/z,\ u/c\}$.

$$\begin{aligned} \theta\eta &= \{x/f(x,c)\eta,\ y/g(u)\eta,\ z/y\eta\} \cup \{u/c\} \\ &\quad \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ z/z,\ u/c\} \\ &\quad \{x/f(g(y),c),\ y/g(c),\ u/c\} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Определение

Пусть E_1 и E_2 — два логических выражения (термы, атомы, формулы и др.)

Подстановка θ называется унификатором выражений E_1 и E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$.

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором (НОУ) выражений E_1 и E_2, если

1. θ — унификатор выражений E_1 и E_2;
2. для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ, для которой верно равенство

$$\eta = \theta\rho$$

$НОУ(E_1, E_2)$ — множество наиболее общих унификаторов выражений E_1 и E_2.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$E_1 = P(f(x_1), x_2)$
$E_2 = P(y_1, c)$

$\eta = \{x_1/f(c),\ x_2/c,\ y_1/f(f(c))\}$ — унификатор E_1 и E_2, т.к.

$$E_1\eta = P(f(f(c)), c) = E_2\eta.$$

$\theta = \{x_2/c,\ y_1/f(x_1)\}$ — наиболее общий унификатор E_1 и E_2, т.к.

$$E_1\theta = P(f(x_1), c) = E_2\theta,$$
$$\eta = \theta\{x_1/f(c)\}.$$

Выражения E_1 и E_2 унифицируемы , и $\theta \in НОУ(E_1, E_2)$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$E_1 = R(f(x_1), x_1)$
$E_2 = R(y_1, f(y_1))$

Выражения E_1 и E_2 не имеют унификаторов, и $HOУ(E_1, E_2) = \emptyset$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Задача унификации

состоит в том, чтобы для двух выражений E_1 и E_2 выяснить,
являются ли эти выражения унифицируемыми,
и, в случае их унифицируемости, вычислить
наиболее общий унификатор.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 7.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 8.

Алгоритм унификации.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором (НОУ) выражений E_1 и E_2, если

1. θ — унификатор выражений E_1 и E_2, т. е. $E_1\theta = E_2\theta$;
2. для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ, для которой верно равенство

$$\eta = \theta\rho$$

Задача унификации

состоит в том, чтобы для двух выражений E_1 и E_2 выяснить, являются ли эти выражения унифицируемыми, и, в случае их унифицируемости, вычислить наиболее общий унификатор E_1 и E_2.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Начнем с самой простого варианта задачи унификации.

Как найти НОУ выражений E_1 и E_2, если одно из этих выражений — переменная, т. е. $E_1 = x \in Var$?

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- $\theta = \{x/t\}$ — унификатор выражений x и t.
  Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).
- Каков бы ни был унификатор η выражений x и t, верно
  $$\eta = \{x/t\}\eta.$$
  Возьмем произвольную переменную y, $y \in Var$.
  Если $y = x$, то $x\{x/t\}\eta = t\eta = x\eta$. (почему?) А если $y \neq x$, то $y\{x/t\}\eta = y\eta$.
  Таким образом, для любой переменной y верно $y\{x/t\}\eta = y\eta$, т. е. $\{x/t\}\eta = \eta$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

2. Случай $x \in Var_t$.
Для любой подстановки θ длина терма $x\theta$ превосходит длину терма $t(x)\theta$.
Поэтому $x\theta \neq t\theta$ для любой подстановки θ, т. е. $НОУ(x, t) = \emptyset$.

□

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.

Пусть $E_1 = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, $E_2 = P(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.
Для решения задачи унификации сопоставим паре атомов E_1, E_2 систему уравнений

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \ldots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

и будем решать задачу унификации для систем уравнений.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Определение

Подстановка θ называется унификатором системы уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}: \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

если для любого i, $1 \leq i \leq n$, термы $t_i\theta$ и $s_i\theta$ одинаковы.

Фактически, унификатор $\theta = \{x_1/r_1, \dots, x_k/r_k\}$ — это решение системы уравнений $\mathcal{E}$ в свободной алгебре термов (эрбрановской интерпретации).

Соответствующим образом определяется и наиболее общий унификатор системы уравнений (определение дать самостоятельно).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c, g(c)) = f(c, g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c, g(c)) = f(c, g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \qquad \mathcal{E}_1\theta : \begin{cases} f(c, g(c)) = f(c, g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

Почему?

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Определение

Система уравнений $\mathcal{E}$ называется приведенной , если

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

и при этом

- $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq Var$,
- все переменные $x_1, \dots, x_n$ попарно различные,
- $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} Var_{s_i} = \emptyset$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Система уравнений $\mathcal{E}_1$ является приведенной, а $\mathcal{E}_2$ — нет.

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(c) \end{cases} \qquad \mathcal{E}_2 : \begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Лемма (о приведенной системе)

Если система уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

является приведенной, то подстановка $\{x_1/s_1, x_2/s_2, \dots, x_n/s_n\}$ является наиболее общим унификатором системы $\mathcal{E}$.

Доказательство

Самостоятельно. С использованием леммы о связке.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.

Найти унификатор — это значит решить систему уравнений. Решать систему будем методом исключения переменных (как в «обычной» алгебре). Исключив все переменные, получим решение (приведенную систему). Важно, чтобы все системы уравнений, которые мы будем строить в процессе «исключения переменных» были равносильны исходной системе.

Определение

Системы уравнений $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_1$ называются равносильными , если $НОУ(\mathcal{E}_1) = НОУ(\mathcal{E}_2)$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Описание алгоритма унификации (Алгоритм Мартелли–Монтанари).

Это — недетерминированный алгоритм, состоящий из 6 правил, которые можно применять в любом порядке до тех пор, пока

- либо ни одно из правил применить невозможно (построена приведенная система уравнений),
- либо применяется правило, устанавливающее невозможность унификации.

Исходная система $\mathcal{E}_0$; $i = 0$;
`while` применимо одно из 6 правил `do`
    выбрать правило R, применимое к E_i;
    $\mathcal{E}_{i++} = R(\mathcal{E}_i)$
`od`

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(1) уравнение $f(t'_1, t'_2, \ldots, t'_k) = f(s'_1, s'_2, \ldots, s'_k)$ замещается совокупностью уравнений $t'_1 = s'_1,\ t'_2 = s'_2,\ \ldots,\ t'_k = s'_k$;

(2) если в системе есть уравнение $f(t'_1, \ldots, t'_k) = g(s'_1, \ldots, s'_m)$, где $f, g \in Func \cup Const$, $f \neq g$, то система уравненний не имеет решений: СТОП: “Нет унификатора";

(3) уравнение $s = x$, где $x \in Var,\ s \notin Var$, замещается уравнением $x = s$;

(4) уравнение $s = s$ удаляется из системы;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(5) если в системе есть уравнение $x = s$, причем
- $x \in Var$,
- $x \notin Var_s$, и
- переменная x **встречается в каких-либо других уравнениях системы**,

то ко всем **другим** уравнения системы применяется подстановка $\{x/s\}$;

(6) если в системе есть уравнение $x = s$, причем $x \neq s$, $x \in Var_s$, то система уравненний не имеет решений: СТОП: “Нет унификатора".

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x,c) = y \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ y = f(z,z) \\ f(u,v) = y \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x,c) \\ f(x,c) = f(z,z) \\ f(u,v) = f(x,c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6: \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7: \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7: \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ f(u, v) = f(c, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_8: \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_8: \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$ — **приведенная система**

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x,c),y) = f(y,f(z,z)) \\ f(u,v) = y \end{cases} \overset{(1,3,5)}{\Longrightarrow} \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c,c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$

$$\theta = \{x/c, y/f(c,c), z/c, u/c, v/c\} \in HOУ(\mathcal{E}_0)$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases} \xrightarrow{(6)} \text{СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases} \xrightarrow{(6)} \text{СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.}$$

Система уравнений

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

не имеет решения (унификатора).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Теорема (об унификации)

Какова бы ни была система уравнений $\mathcal{E}$,

1. алгоритм унификации Мартелли-Монтанари всегда завершает работу;
2. если система уравнений $\mathcal{E}$ унифицируема , то в результате работы алгоритма унификации будет построена приведенная система уравнений, равносильная исходной системе $\mathcal{E}$;
3. если система уравнений $\mathcal{E}$ неунифицируема , то в результате работы алгоритма унификации будет выдано сообщение СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Уравнение $x = t$, где $x \in Var, x \notin Var_t$, будем называть приведенным уравнением системы $\mathcal{E}$, если переменная x не содержится ни в каких других уравнениях системы $\mathcal{E}$. Переменную x в этом случае будем называть приведенной переменной системы $\mathcal{E}$

Каждой системе уравнений $\mathcal{E}$ сопоставим **характеристику** $H(\mathcal{E}) = \langle h_1(\mathcal{E}), h_2(\mathcal{E}), h_3(\mathcal{E})\rangle$, — упорядоченную тройку натуральных чисел, в которой

1. $h_1(\mathcal{E})$ — общее число **неприведенных** переменных, содержащихся в системе $\mathcal{E}$;
2. $h_2(\mathcal{E})$ — общее число функц. символов и констант, содержащихся в **левых частях** уравнений системы $\mathcal{E}$;
3. $h_3(\mathcal{E})$ — общее число уравнений в системе $\mathcal{E}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

На множестве упорядоченных троек натуральных чисел введем отношение лексикографического порядка :

$$\langle M_1, M_2, M_3\rangle \succ \langle N_1, N_2, N_3\rangle$$
$$\Updownarrow$$
$$N_1 < M_1$$
$$\text{или } N_1 = M_1 \text{ и } N_2 < M_2$$
$$\text{или } N_1 = M_1, N_2 = M_2 \text{ и } N_3 < M_3.$$

Пример.

$$\langle 2, 11, 2\rangle \succ \langle 2, 10, 5578\rangle \succ \langle 1, 1001, 78\rangle$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Вспомогательная лемма.

В множестве троек натуральных чисел **не существует** бесконечно убывающей последовательности

$$\langle k_1, m_1, n_1 \rangle \succ \langle k_2, m_2, n_2 \rangle \succ \cdots \succ \langle k_i, m_i, n_i \rangle \succ \langle k_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1} \rangle \succ \ldots$$

Доказательство вспомогательной леммы.

Самостоятельно.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Идея доказательства вспомогательной леммы.

Предположим, что у Вас есть 1 000 000 руб. в произвольных купюрах. Сыграем в игру. Правила игры таковы.

1. Вы даете мне денежную купюру и взамен получаете право потребовать от меня любую сумму в купюрах меньшего достоинства.
2. Если Вы вручаете мне купюру наименьшего достоинства, то взамен не получаете ничего.

Докажите, что игра всегда будет оканчиваться тем, что Вы остаетесь без денег.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (1)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n) \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_1 = s_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succeq h_1(\mathcal{E}''), \; h_2(\mathcal{E}') \succ h_2(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (3)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ s = x \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ x = s \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succeq h_1(\mathcal{E}''), \; h_2(\mathcal{E}') \succ h_2(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (4)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ s = s \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(4)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succeq h_1(\mathcal{E}''), \; h_2(\mathcal{E}') \succeq h_2(\mathcal{E}''), \; h_3(\mathcal{E}') \succ h_3(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (5)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} = s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succ h_1(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Значит, правила (1), (3, (4), (5) не могут применяться бесконечно долго.
Значит, рано или поздно либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило. В любом случае работа алгоритма унификации завершится.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3, (4), (5) получается система уравнений, равносильная исходной, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow \mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'', \qquad \textbf{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Это, очевидно, верно для правил (1), (3, (4) (убедитесь сами).

Покажем, что правило (5) также приводит к равносильной системе.

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} = s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Предположим, что θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}'$, т. е.

$$\begin{cases} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{cases}$$

Т. к. $x\theta \equiv s_j\theta$, $x \notin Var_{s_j}$, согласно лемме о связке $\theta = \{x/s_j\}\theta$.
Следовательно,

$$\begin{cases} t_1\{x/s_j\}\theta \equiv s_1\{x/s_j\}\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\}\theta \equiv s_n\{x/s_j\}\theta \end{cases}$$

Значит, θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}''$. Аналогично доказывается, что всякий унификатор системы $\mathcal{E}''$ является унификатором системы $\mathcal{E}'$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Как мы показали, рано или поздно при работе алгоритма либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило.

Если к системе применяется правило (2), то в системе есть уравнение $f(s_1, \ldots, s_n) = g(t_1, \ldots, t_m),\ f \neq g$. Очевидно, для любой подстановки θ верно $f(s_1, \ldots, s_n)\theta \not\equiv g(t_1, \ldots, t_m)\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Если к системе применяется правило (6), то в системе есть уравнение $x = s,\ x \in Var_s$. Согласно лемме о связке для любой подстановки θ верно $x\theta \not\equiv s\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Значит, выдача сообщения СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА означает, что система неунифицируема.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Если к системе уравнений неприменимо ни одно правило, то

- в левых частях уравнений содержатся только переменные (иначе применимы правила (1), (2) или (3));
- ни одна переменная из левой части больше нигде не содержится (иначе применимы правила (4), (5) или (6)).

Значит, построенная система уравнений является приведенной и имеет унификатор, который вычисляется по лемме о приведенной системе . □

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 8.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 9.

Резолютивный вывод. Корректность резолютивного вывода. Применение метода резолюций.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

О терминологии.

Пусть задано выражение E и подстановка θ.

Подстановка $\theta : \mathbf{Var} \to \mathbf{Var}$ называется переименованием , если θ — биекция.

Выражение $E\theta$ называется примером выражения E.

Если $Var_{E\theta} = \emptyset$, то пример $E\theta$ называется основным примером выражения E.

Если θ — переименование, то пример $E\theta$ называется вариантом выражения E.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример

Пусть $E = P(x, f(y)) \vee \neg R(y, c)$.

$\theta = \{x/u, y/z, u/x, z/y\}$ — переименование.

$E' = E\{x/g(d), y/z\} = P(g(d), f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — пример E.

$E'' = E\{x/g(d), y/c\} = P(g(d), f(c)) \vee \neg R(c, c)$ — основной пример E.

$E''' = E\{x/u, y/z\} = P(u, f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — вариант E.

В частности, пустая (тождественная) подстановка является переименованием.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Правило резолюции.

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1$ и $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$ — два дизъюнкта.

Пусть $\theta \in НОУ(L_1, L_2)$.

Тогда дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee D_2')\theta$ называется резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2.

Пара литер L_1 и $\neg L_2$ называется контрарной парой .

Правило резолюции

$$\frac{D_1' \vee L_1,\ D_2' \vee \neg L_2}{(D_1' \vee D_2')\theta}, \quad \theta \in НОУ(L_1, L_2)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$D_1 = P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))$

$D_2 = Q(x) \vee R(y, x) \vee \neg P(g(z, y), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z, y), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z,y), z)$

$$HOY\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z,y), z)$

$$HOY\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} x = g(z,y) \\ f(y) = z \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y))$, $\neg P(g(z,y), z)$

$$HOY\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} x = g(z,y) \\ f(y) = z \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = g(f(y), y) \\ z = f(y) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z,y), z)$

$$HOY\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} x = g(z,y) \\ f(y) = z \end{cases} \quad \xrightarrow{(3),(5)} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = g(f(y), y) \\ z = f(y) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z,y), z)$

$$HOY\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \Big(\underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'} \vee \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'}\Big)\theta$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z, y), z)$

$$HOY\Big(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)\Big) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \neg R(g(g(f(y),y),y),f(f(y))) \vee Q(g(f(y),y)) \vee R(y, g(f(y),y)).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$HOY\Big(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\Big)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y,x) \vee \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)$

$$HOY\Big(R(g(x,z), f(z)), R(y,x)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x,z) = y \\ f(z) = x \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y,x) \vee \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)$

$$HOY\Big(R(g(x,z), f(z)), R(y,x)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x,z) = y \\ f(z) = x \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = g(f(z), z) \\ x = f(z) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y,x) \vee \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)$

$$HOY\Big(R(g(x,z), f(z)), R(y,x)\Big) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z),z)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x,z) = y \\ f(z) = x \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = g(f(z),z) \\ x = f(z) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y,x) \vee \underbrace{\neg P(g(z,y),z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)$

$$HOY\Big(R(g(x,z), f(z)), R(y,x)\Big) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z),z)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \Big(\underbrace{P(x, f(y))}_{D_1''} \vee \underbrace{Q(x) \vee \neg P(g(z,y),z)}_{D_2''}\Big)\eta$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$HOY\Big(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\Big) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\}$$

Резольвента

$$D_0 = P(f(z), f(g(f(z), z))) \vee Q(f(z)) \vee \neg P(g(z, g(f(z), z)), z).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Правило склейки.

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1 \vee L_2$ — дизъюнкт.

Пусть $\eta \in НОУ(L_1, L_2)$.

Тогда дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee L_1)\eta$ называется склейкой дизъюнкта D_1.

Пара литер L_1 и L_2 называется склеиваемой парой .

Правило склейки

$$\frac{D_1' \vee L_1 \vee L_2}{(D_1' \vee L_1)\eta}, \quad \eta \in НОУ(L_1, L_2)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$D_1 = P(x) \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases} \xrightarrow{(1),(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = c \\ z = f(c) \\ x = c \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases} \quad \overset{(1),(3),(5)}{\longrightarrow} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = c \\ z = f(c) \\ x = c \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

Склейка

$$D_0 = \Big(\underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x))\Big)\eta$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

Склейка

$$D_0 = P(c) \vee R(c, f(c), f(c)).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Определение резолютивного вывода.

Пусть $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — система дизъюнктов.

Резолютивным выводом из системы дизъюнктов S называется конечная последовательность дизъюнктов

$$D'_1, D'_2, \ldots, D'_i, D'_{i+1}, \ldots, D'_n,$$

в которой для любого i, $1 \leq i \leq n$, выполняется одно из трех условий:

1. либо D'_i — **вариант** некоторого дизъюнкта из S;
2. либо D'_i — резольвента дизъюнктов D'_j и D'_k, где $j, k < i$;
3. либо D'_i — склейка дизъюнкта D'_j, где $j < i$.

Дизъюнкты $D'_1, D'_2, \ldots, D'_n$ считаются резолютивно выводимыми из системы S.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример резолютивного вывода.

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}$$

$D_1 = P(x, f(y)) \vee R(y)$,
$D_2 = \neg R(y)$,
$D_3 = \neg P(f(x), z) \vee \neg P(y, y)$.

Резолютивный вывод из S

1. $D_1' = P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$, вариант дизъюнкта D_1
2. $D_2' = \neg R(y_2)$, вариант дизъюнкта D_2
3. $D_3' = P(x_3, f(y_3))$, резольвента дизъюнктов D_1', D_2'
4. $D_4' = \neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$, вариант дизъюнкта D_3
5. $D_5' = \neg P(f(x_5), f(x_5))$, склейка D_4'
6. $D_6' = \square$, резольвента дизъюнктов D_3' и D_5'

Здесь $\square$ — пустой дизъюнкт , **тождественная ложь**.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример резолютивного вывода.

А почему пустой дизъюнкт $\square$ — это тождественная ложь?

А потому, что каждый дизънкт $D = L_1 \vee \cdots \vee L_n$ равносилен утверждению $L_1 \vee \cdots \vee L_n \vee \mathbf{false}$.

Поэтому резольвентой дизъюнктов $D_1 = L \vee \mathbf{false}$ и $D_2 = \neg L \vee \mathbf{false}$ будет дизъюнкт $D_0 = \mathbf{false}$.

Этот дизъюнкт не содержит ни одной литеры, и поэтому называется пустым дизънктом .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Обратите внимание на то, что я постоянно переименовываю переменные так, чтобы каждый дизъюнкт резолютивного вывода содержал свою **индивидуальную** систему переменных!

Резолютивный вывод из S

1. $D'_1 = P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$
2. $D'_2 = \neg R(y_2)$
3. $D'_3 = P(x_3, f(y_3))$
4. $D'_4 = \neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$
5. $D'_5 = \neg P(f(x_5), f(x_5))$
6. $D'_6 = \square$

Зачем это нужно?

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Все дело в том, что все переменные дизъюнктов связаны кванторами $\forall$, и поэтому их имена можно достаточно произвольно изменять, полностью сохраняя смысл формул. Однако, случайное совпадение имен переменных (коллизия) может привести к тому, что резольвенту дизъюнктов построить не удастся.

Пусть $S = \{D_1 = P(x), D_2 = \neg P(f(x))\}$.

1. $D_1' = P(x)$
2. $D_2' = \neg P(f(x))$
3. $HOУ\Big(P(x), P(f(x))\Big) = \emptyset$,

и поэтому D_1', D_2' не имеют резольвенты.

1. $D_1'' = P(x_1)$
2. $D_2'' = \neg P(f(x_2))$
3. $D_3'' = \square$

резольвента D_1'', D_2''.

Итак, наш девиз:

НОВЫЙ ДИЗЪЮНКТ — НОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Резолютивный вывод называется успешным (или, по другому, резолютивным опровержением), если этот вывод оканчивается пустым дизъюнктом $\square$.

В чем же состоит успех такого резолютивного вывода и что при этом опровергнуто?

Успешный вывод — это свидетельство того, что система дизъюнктов S **противоречива** и опровергнуто предположение о ее выполнимости!

Но это придется обосновать.

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема корректности резолютивного вывода

Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$, то S — противоречивая система дизъюнктов.

Доказательство теоремы

Пустой дизъюнкт тождественно ложен, т.е. не имеет моделей. Покажем, что каждый дизъюнкт, резолютивно выводимый из S, является логическим следствием S. Тогда

$$S \models \square,$$

и это означает, что S также не имеет моделей, т.е. является противоречивой системой.

Остается доказать две леммы.

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма 1.

Если D_0 — резольвента дизъюнктов D_1 и D_2, то $D_1, D_2 \models D_0$

Доказательство леммы 1.

$D_1 = D_1' \vee L_1, \;\; D_2 = D_2' \vee \neg L_2, \;\; \theta \in НОУ(L_1, L_2), \;\; D_0 = (D_1' \vee D_2')\theta$

Таким образом, $L_1\theta = L_2\theta = L_0$.

Поэтому мы получаем следующие соотношения

$$D_1, D_2 \models D_1\theta, \qquad D_1, D_2 \models D_2\theta$$
$$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L_1\theta, \qquad D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_2\theta$$
$$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L_0, \qquad D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_0$$
$$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee L_0, \qquad D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee \neg L_0$$
$$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta$$
$$D_1, D_2 \models D_0$$

Вот и все. □

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма 2.

Если D_0 — склейка дизъюнкта D, то $D \models D_0$.

Доказательство леммы 2.

Самостоятельно.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Пример.

Рассмотрим формулу φ

$$\forall x \quad \Big(\forall y \exists v \forall u \quad \Big((A(u,v) \to B(y,u)) \& (\neg \exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\Big) \quad \to \exists y B(x,y)\Big)$$

Задача

Проверить, верно ли, что $\models \varphi$.

Решение

Методом резолюций.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 1. Покажем, что формула $\varphi_1 = \neg\varphi$ противоречивая.

$$\varphi_1 = \neg\forall x \Big(\forall y\exists v\forall u \Big((A(u,v) \to B(y,u)) \,\&\, (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\Big) \to \exists y B(x,y)\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Исходная формула

$$\neg\forall x \quad \Big(\forall y\exists v\forall u \quad \Big((A(u,v) \to B(y,u)) \;\&\; (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\Big) \quad \to \exists y B(x,y)\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Переименование переменных

$$\neg\forall x \quad \Big(\forall y'\exists v\forall u \quad \Big((A(u,v) \to B(y',u)) \,\&\, (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\Big) \quad \to \exists y'' B(x,y'')\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Удаление импликаций

$$\neg\forall x \quad \Big(\neg\forall y'\exists v\forall u \quad \Big((\neg A(u,v) \vee B(y',u)) \,\&\, (\neg\neg\exists w A(w,u) \vee \forall z A(z,v))\Big) \quad \vee \exists y'' B(x,y'')\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Продвижение отрицаний

$$\exists x \quad \Big(\forall y' \exists v \forall u \quad \Big((\neg A(u,v) \vee B(y',u)) \;\&\; (\exists w A(w,u) \vee \forall z A(z,v)) \Big) \quad \& \; \forall y'' \neg B(x,y'') \Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Вынесение кванторов

$$\varphi_2 = \exists x \forall y' \exists v \forall u \exists w \forall z \forall y'' \left(\begin{array}{l} (\neg A(u, v) \vee B(y', u)) \,\& \\ (A(w, u) \vee A(z, v)) \,\& \\ \neg B(x, y'') \end{array} \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 3. Приведем φ_2 к ССФ φ_3.

$$\varphi_3 = \quad \forall y' \quad \forall u \quad \forall z \forall y'' \quad \Big(\quad (\neg A(u, f(y')) \vee B(y', u)) \;\&\; (A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y'))) \;\&\; \neg B(c, y'') \quad \Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 4. Формирование системы дизъюнктов S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1),$
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2')),$
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3')),$
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4'))),$
5. $D_5' = \neg B(c, y_5''),$
6. $D_6' = \square\ .$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$, (вариант D_1)
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$, (вариант D_2)
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$, (склейка D_2')
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$, (резольвента D_1' и D_3')
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$, (вариант D_3)
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$. (резольвента D_4' и D_5')

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Заключение. Успешный резолютивный вывод из S_φ означает, что S_φ — противоречивая система дизъюнктов.

Значит, $\varphi_1 = \neg\varphi$ — невыполнимая формула.

Значит, φ — общезначимая формула,

$$\models \varphi.$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вопрос полноты

А можно ли таким способом проверять общезначимость любых формул?

Этот вопрос может быть уточнен так:

1. Верно ли, что для любой общезначимой формулы φ можно построить успешный резолютивный вывод из соответствующей системы дизъюнктов S_φ?
2. Верно ли, что в том случае, когда формулы φ необщезначима (система дизъюнктов S_φ выполнима), мы сможем каким-то образом обнаружить невозможность построения успешного резолютивного вывода?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 9.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 10.

Полнота резолютивного вывода. Применение метода резолюций.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема о полноте резолютивного вывода

Если S — противоречивая система дизъюнктов, то из S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

Доказательство.

Если S — противоречивая система дизъюнктов, то согласно теореме Эрбрана существует конечная противоречивая система S' **основных** примеров дизъюнктов из S. Поэтому мы

1. Вначале покажем, что из противоречивой системы основных примеров дизъюнктов S' можно резолютивно вывести пустой дизъюнкт $\square$.

2. А затем на основе этого вывода построим резолютивный вывод пустого дизъюнкта из самой системы S.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма об основных примерах дизъюнктов

Если S' — конечная противоречивая система основных примеров дизъюнктов, то из S' резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

Доказательство леммы.

Индукцией по числу N различных основных атомов в системе дизъюнктов S'.

Базис ($N = 0$). Система S' противоречива. Значит, $S' \neq \emptyset$.

Но в S' нет ни одного атома. Значит, в S' содержится только пустой дизъюнкт $\square$. И он резолютивно выводим из S'.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Индуктивный переход ($N+1 \rightarrow N$). Рассмотрим произвольный основной атом A_0, входящий в состав дизъюнктов из S', и разобьем систему S' на три части:

1. $S'_1 = \{D \ : \ D \in S', \ D = \widehat{D}_1 \vee A_0\}$;
2. $S'_2 = \{D \ : \ D \in S', \ D = \widehat{D}_2 \vee \neg A_0\}$.
3. $S'_3 = \{D \ : \ D \in S', \ A_0 \notin D\}$;

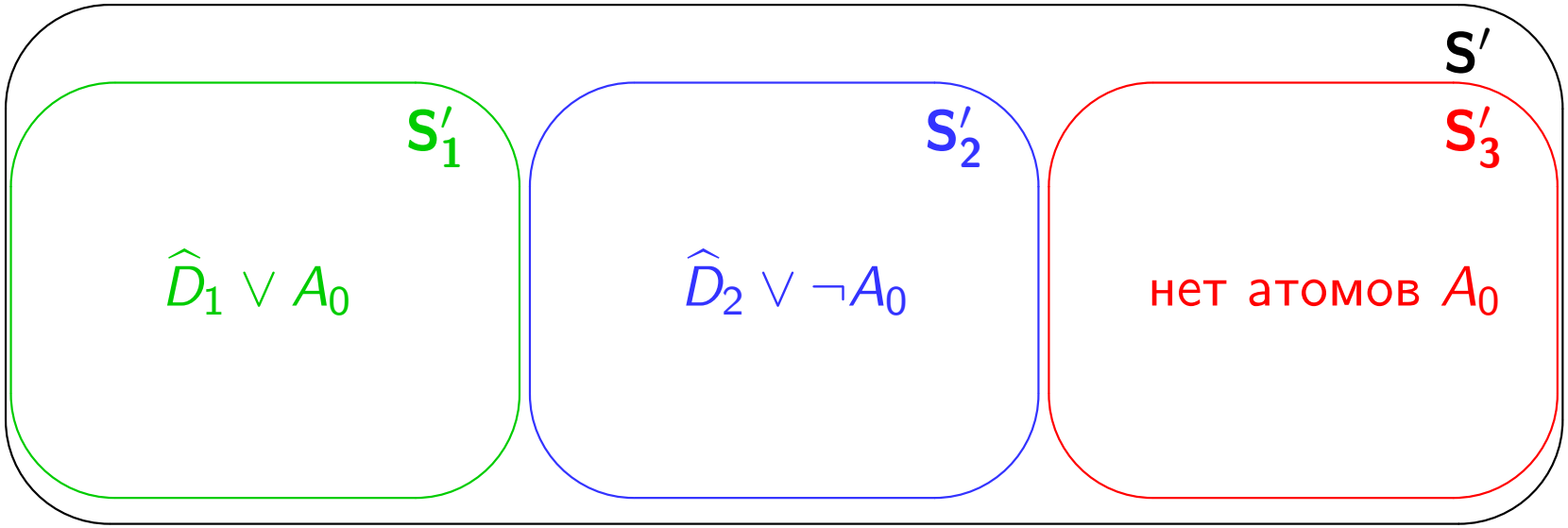
Построим все резольвенты по контрарной паре $A_0, \ \neg A_0$

$$S'_0 = \{\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \ : \ D_1 = \widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1, \ D_2 = \widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2\}$$

и покажем, что множество дизъюнктов $S'' = S'_0 \cup S'_3$ противоречиво.

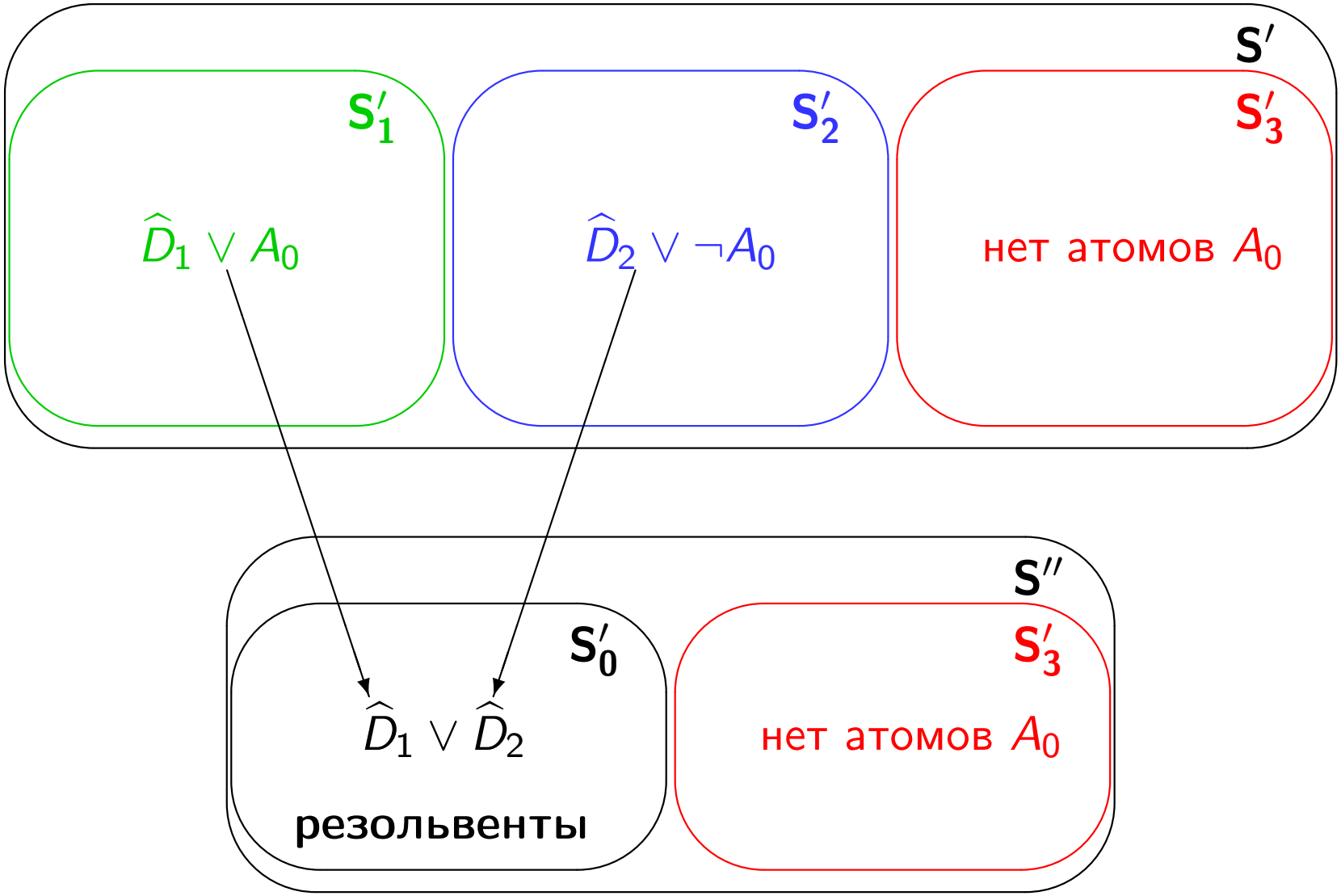
ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию I.
Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).
Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. S' противоречивая система, верно $I \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$.

Т. к. $I \models A_0$ и $S'_1 = \{D \ : \ D \in S', \ D = \widehat{D} \vee A_0\}$, верно $I \models S'_1$.

Значит, $I \not\models S'_2 \cup S'_3$.

Возможны два варианта.

Вариант 1. $I \not\models S'_3$.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию I.
Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).
Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. S' противоречивая система, верно $I \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$.

Т. к. $I \models A_0$ и $S'_1 = \{D \ : \ D \in S', \ D = \widehat{D} \vee A_0\}$, верно $I \models S'_1$.

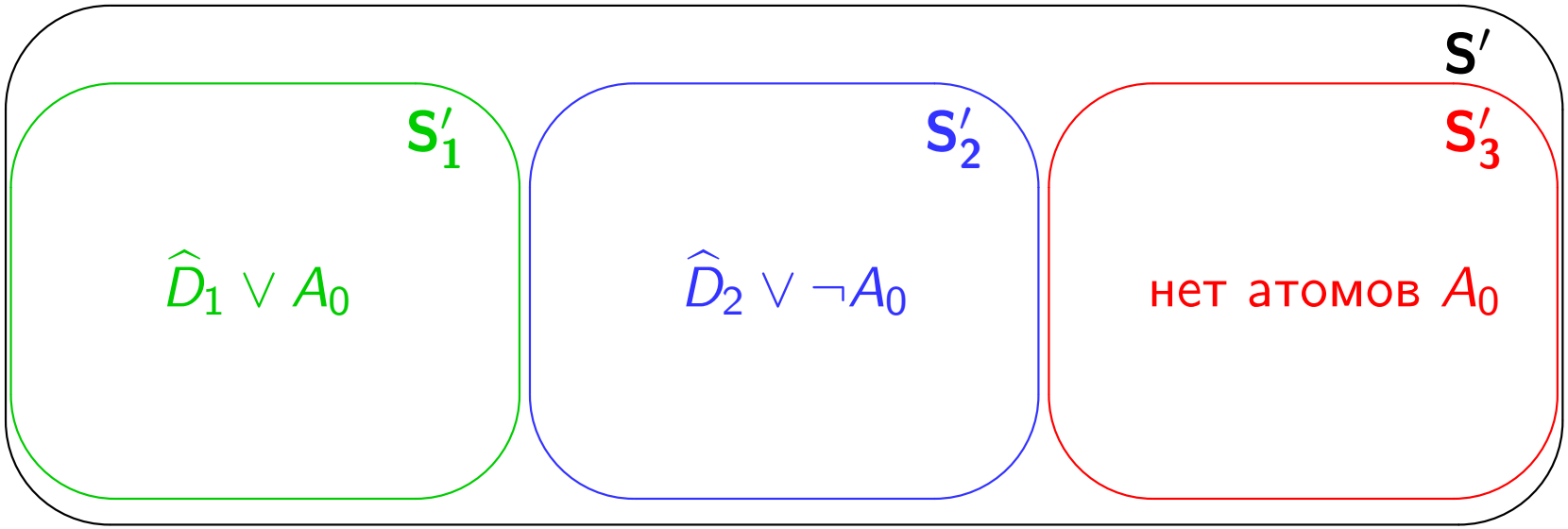
Значит, $I \not\models S'_2 \cup S'_3$.

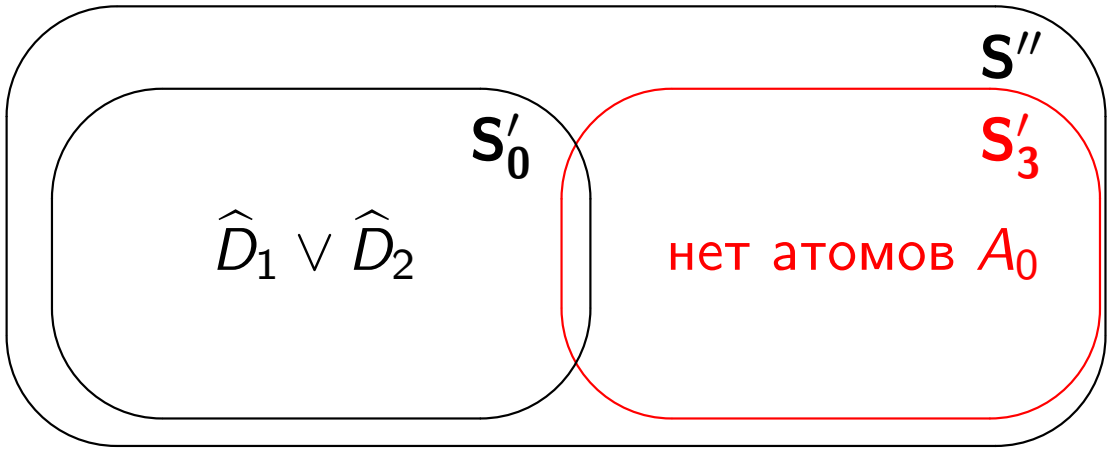
Возможны два варианта.

Вариант 1. $I \not\models S'_3$. Тогда $I \not\models S''$, что и требовалось.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

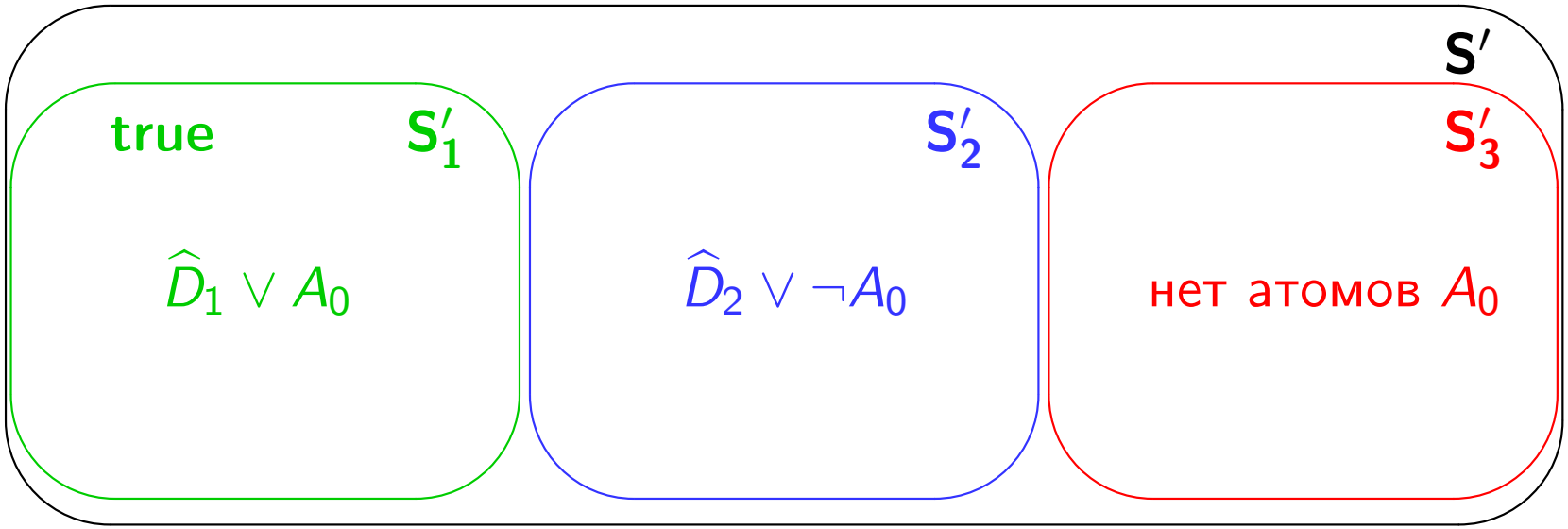
$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$

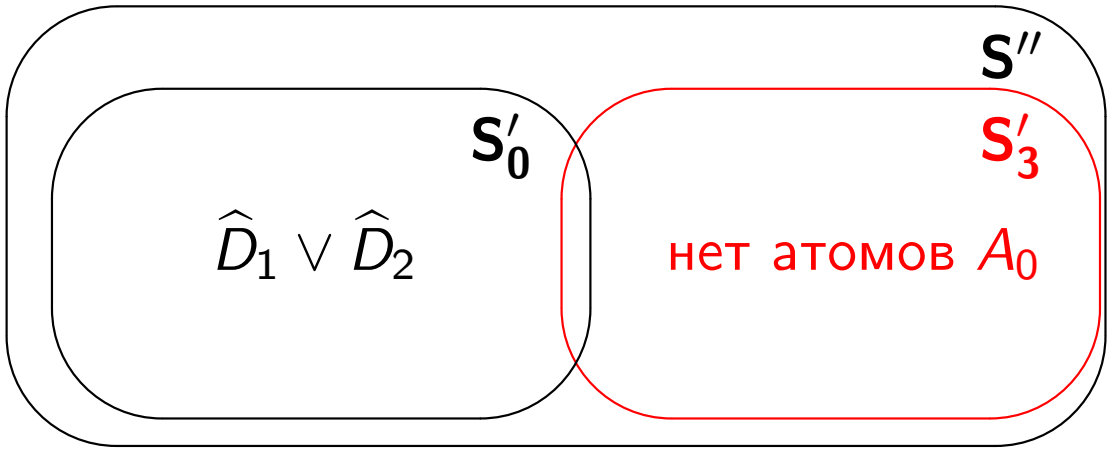




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

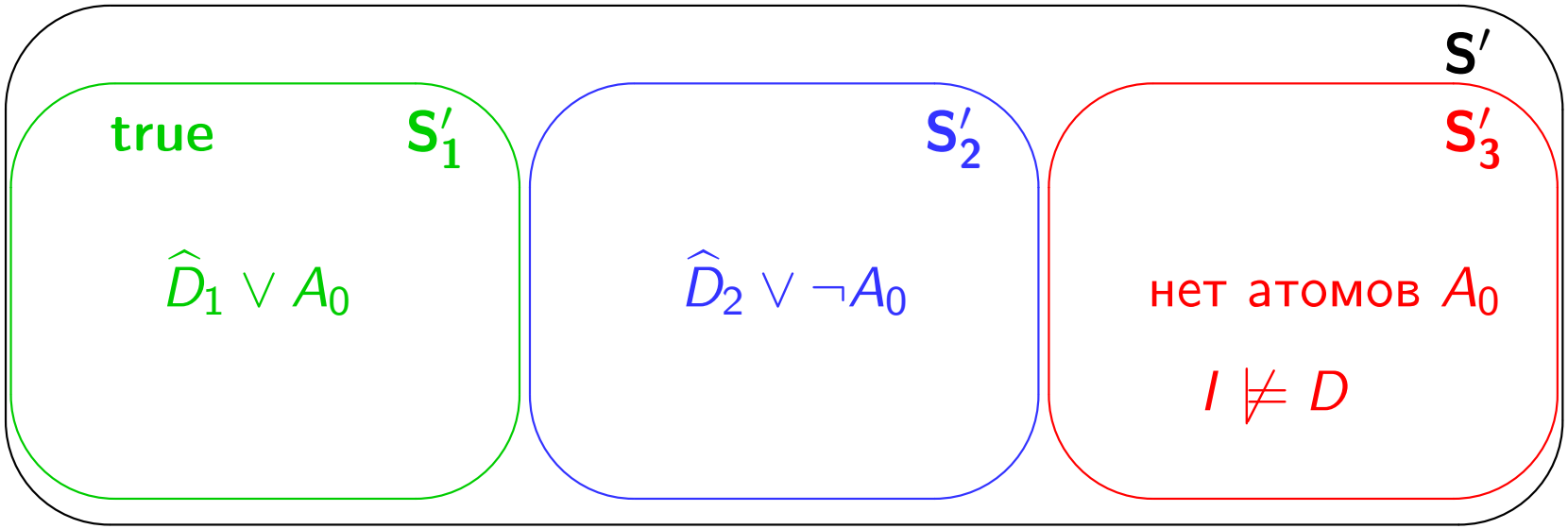
$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$

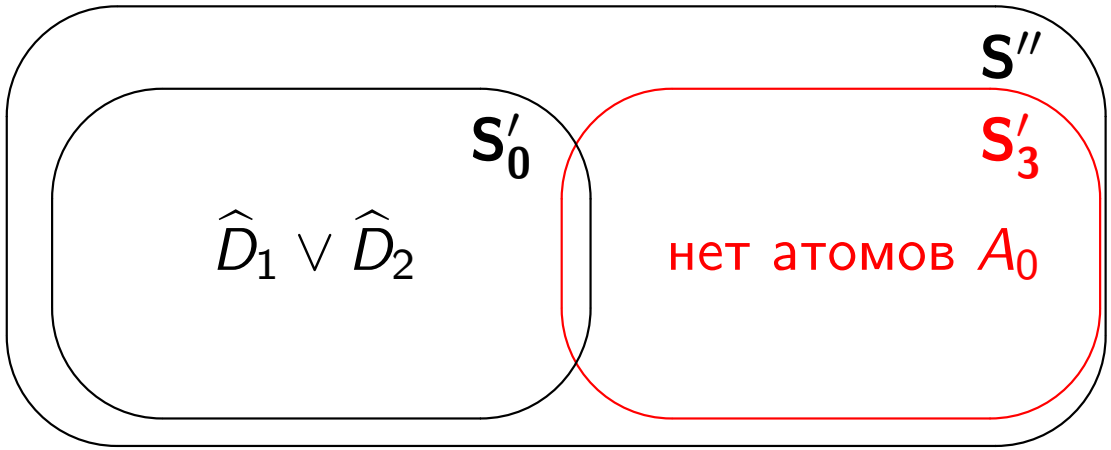




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

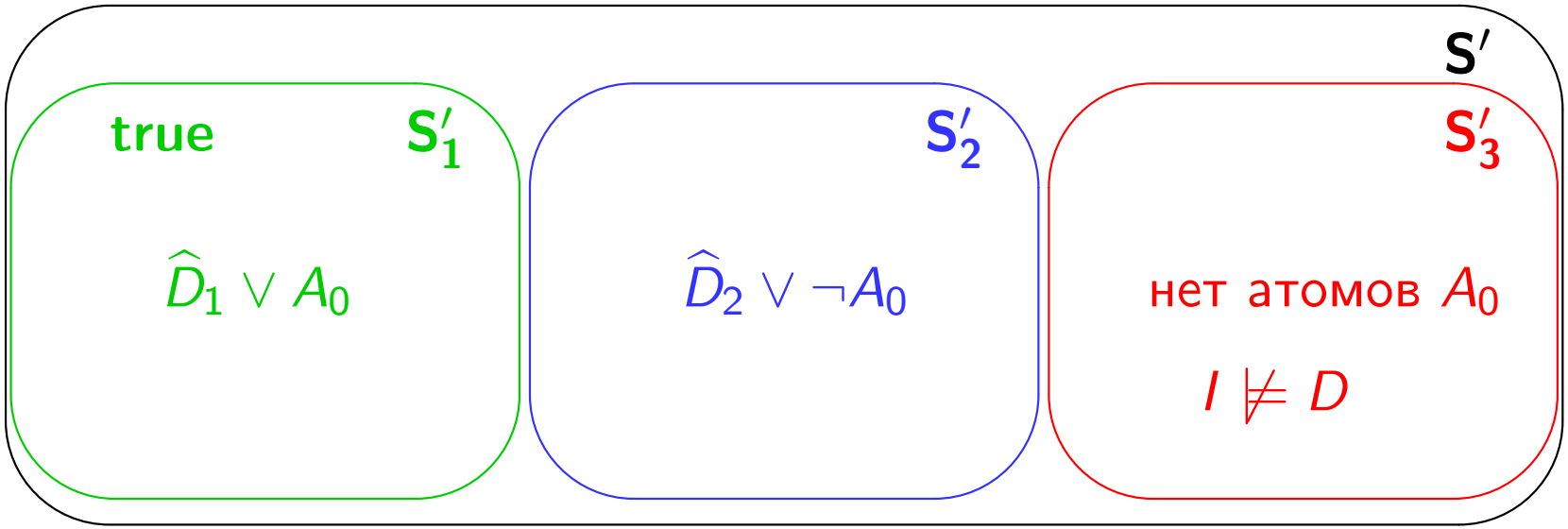
$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 1.**

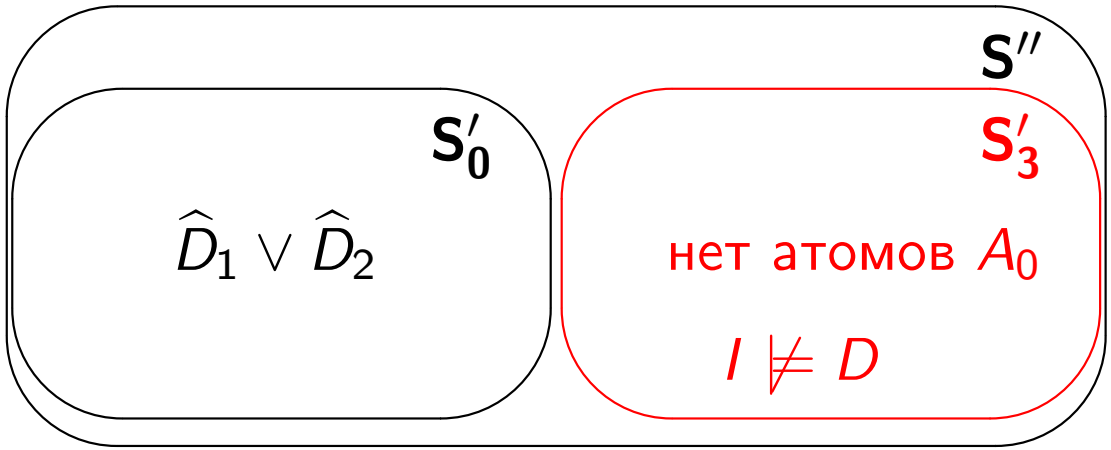




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 1.**





ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Вариант 2. $I \not\models S'_2$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$, что $I \not\models \widehat{D}_2 \vee \neg A_0$. Следовательно, $I \not\models \widehat{D}_2$ (почему?).

Рассмотрим теперь интерпретацию I', которая отличается от I только тем, что $I' \not\models A_0$.

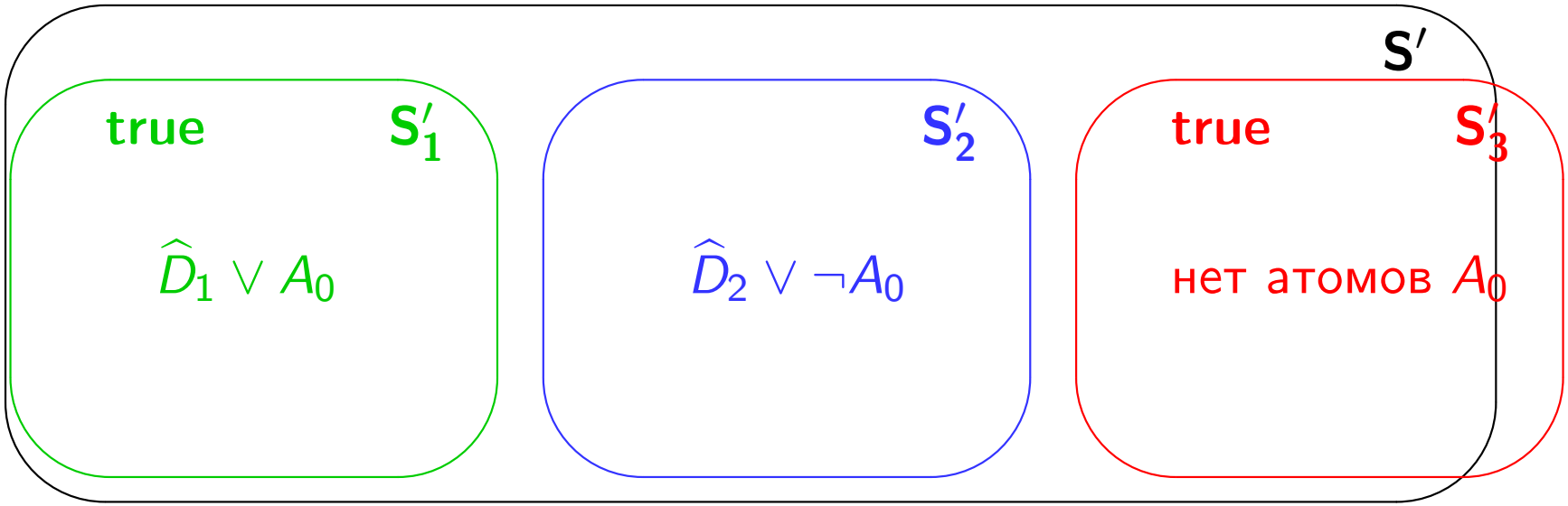
Т. к. $I' \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$ (ведь S' противоречивая),
$I' \models S'_2$ (ведь $S'_2 = \{D : D \in S',\ D = \widehat{D} \vee \neg A_0\}$ и $I' \models \neg A_0$),
$I' \models S'_3$ (а иначе мы бы имели вариант 1, ведь $A_0 \notin S'_3$),

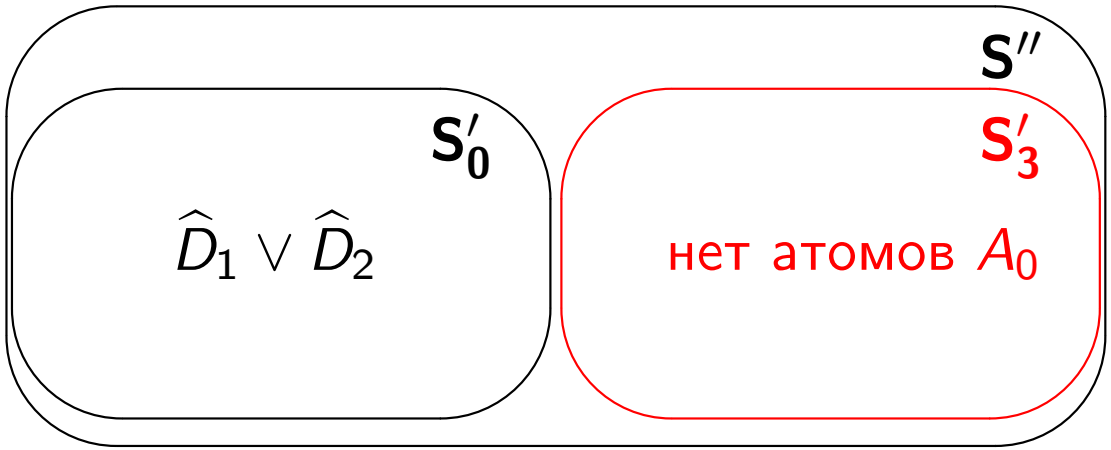
верно $I' \not\models S'_1$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, что $I' \not\models \widehat{D}_1 \vee A_0$. Следовательно, $I' \not\models \widehat{D}_1$. А поскольку $A_0 \notin \widehat{D}_1$, а I отличается от I' только на атоме A_0, верно $I \not\models \widehat{D}_1$.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

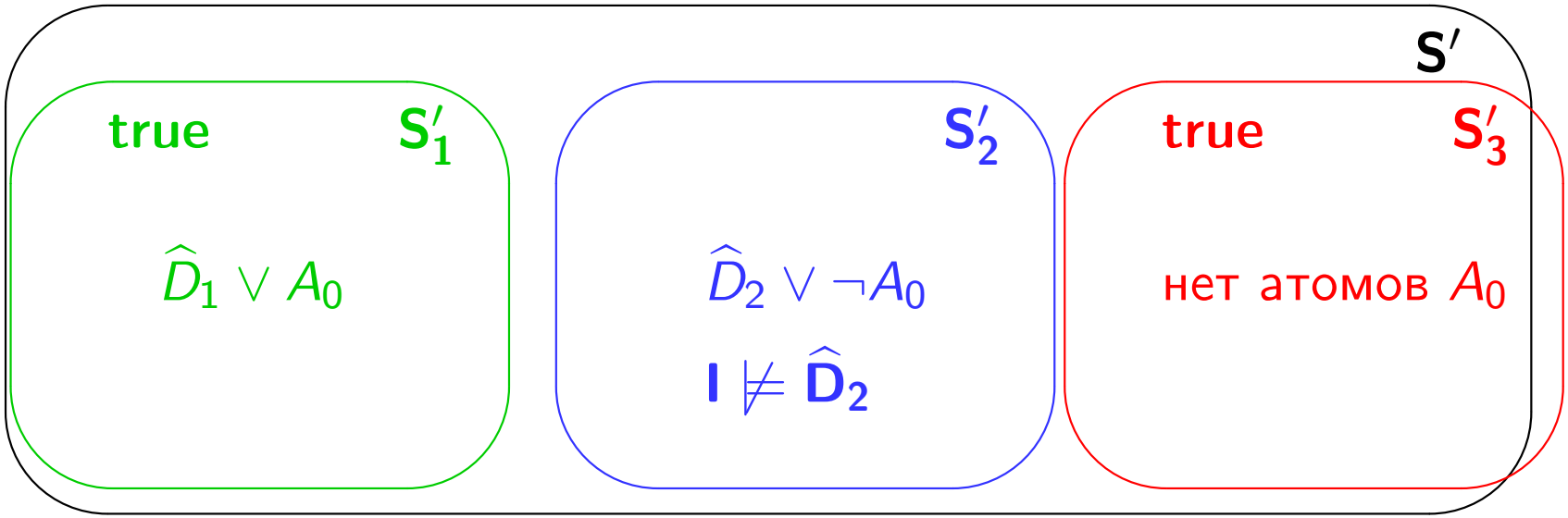
$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 2.**

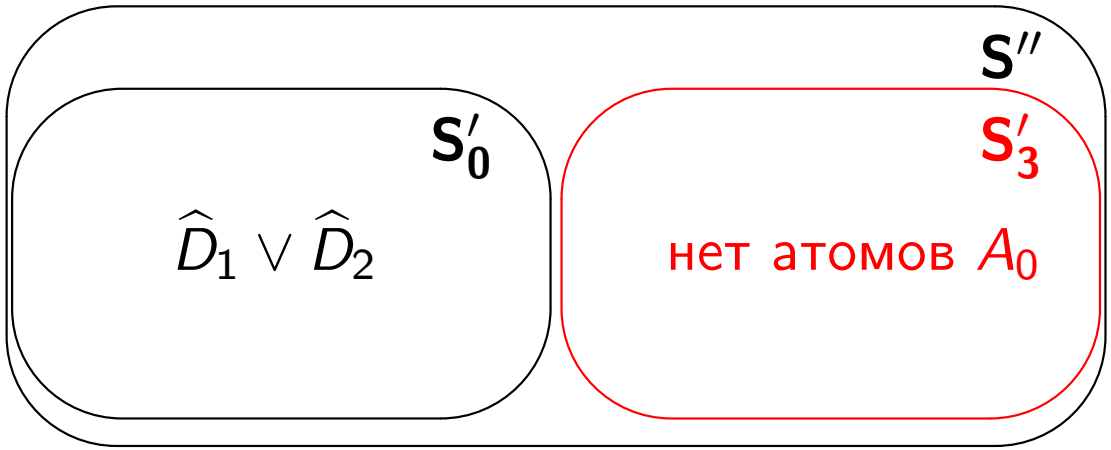




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

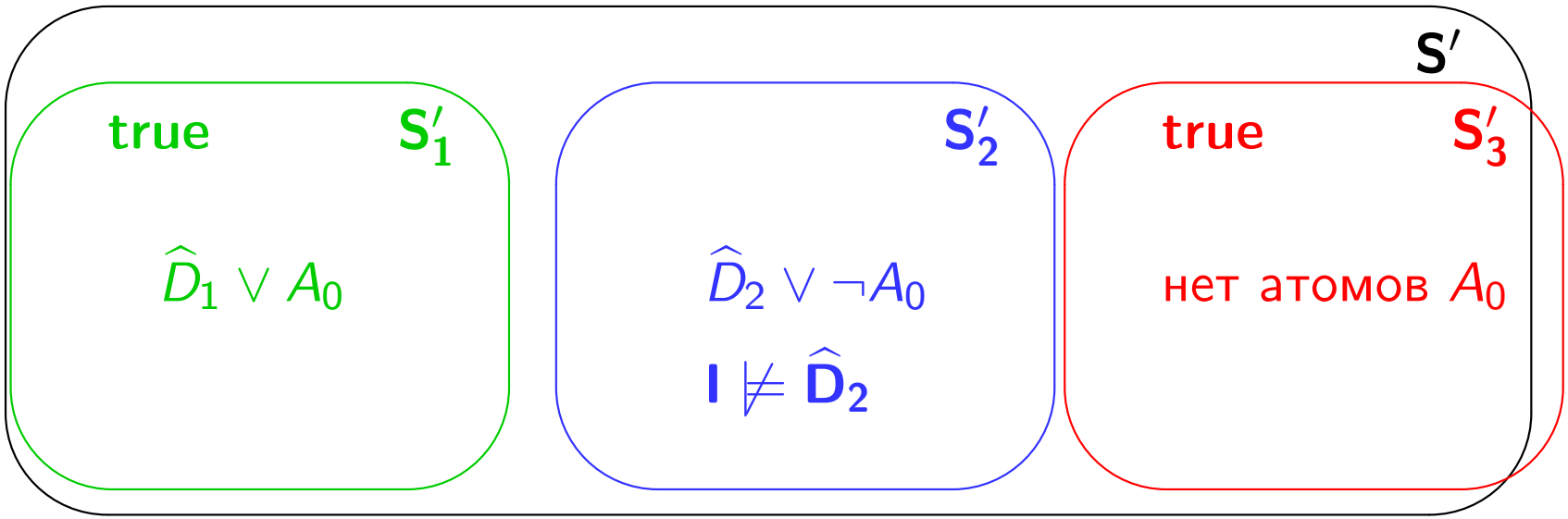
$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 2.**

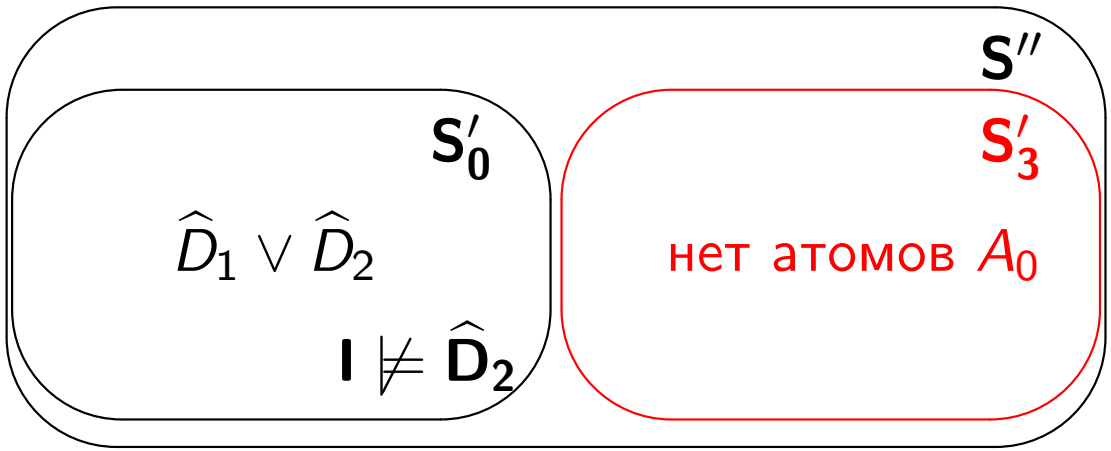




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

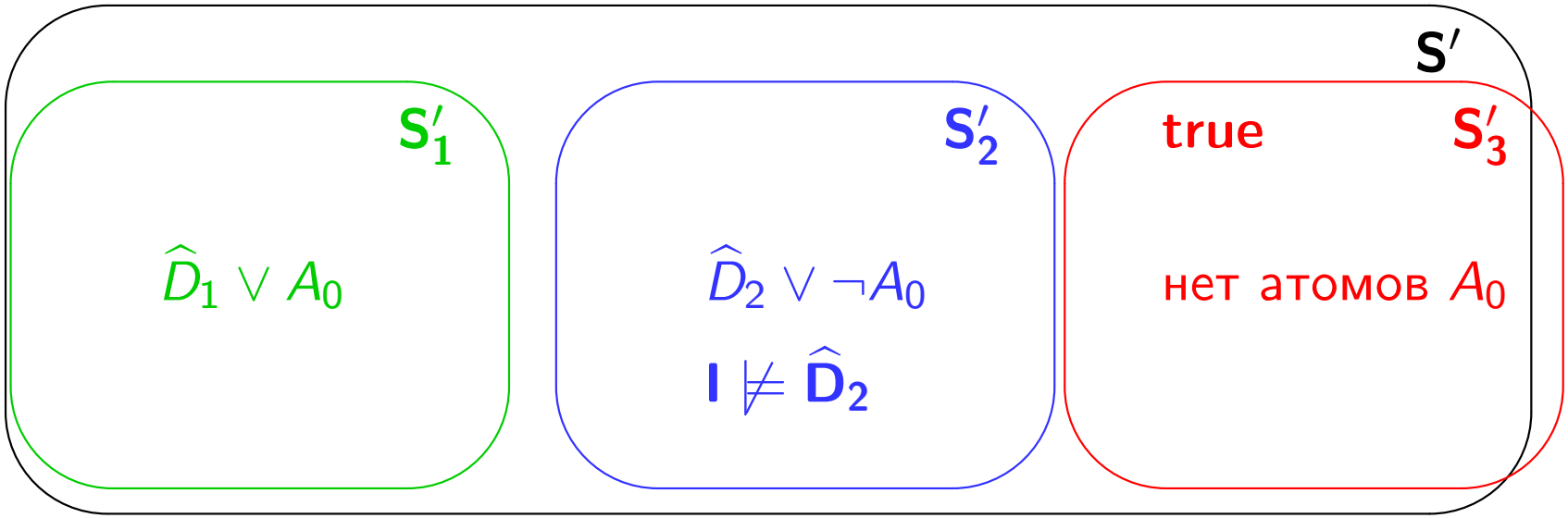
$\mathbf{I} \models \mathbf{A_0}$ **Вариант 2.**

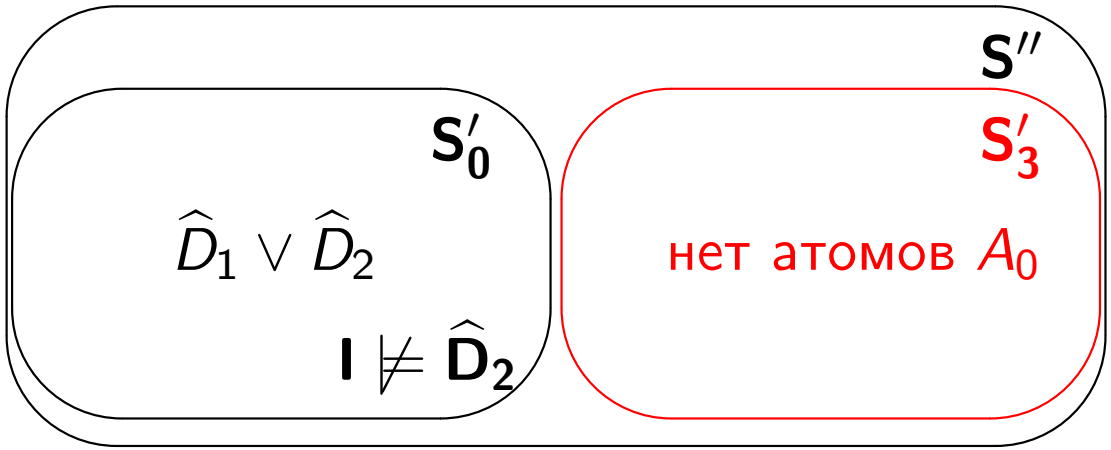




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

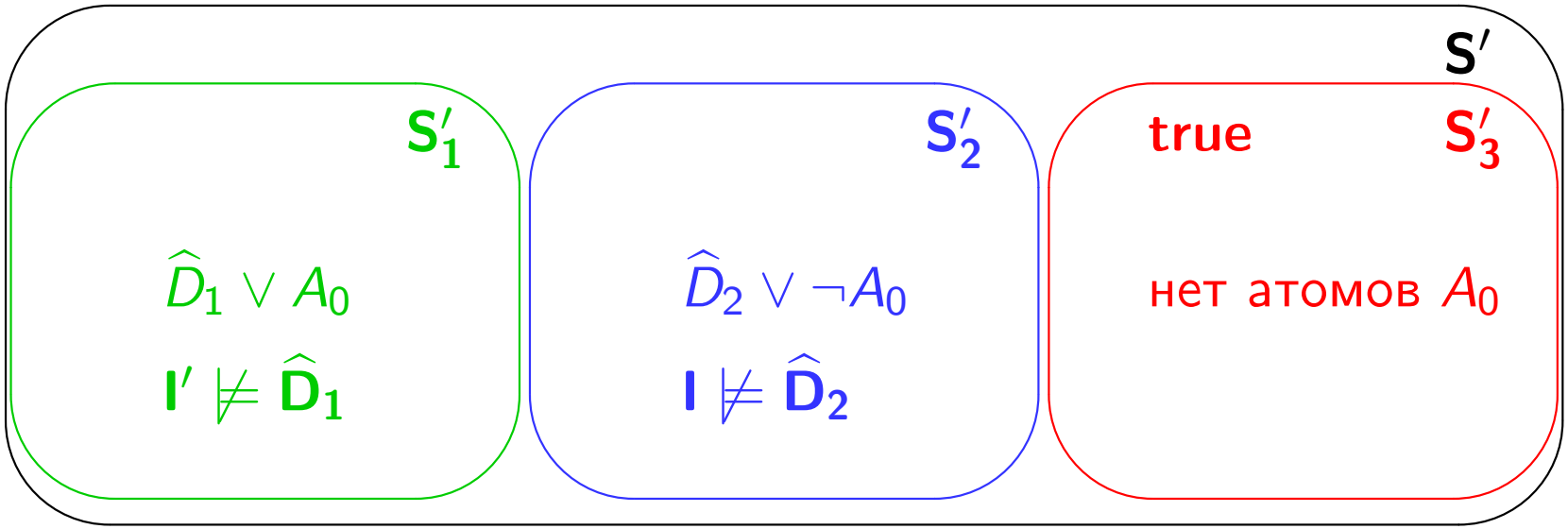
$\mathbf{I' \not\models A_0}$ **Вариант 2.**

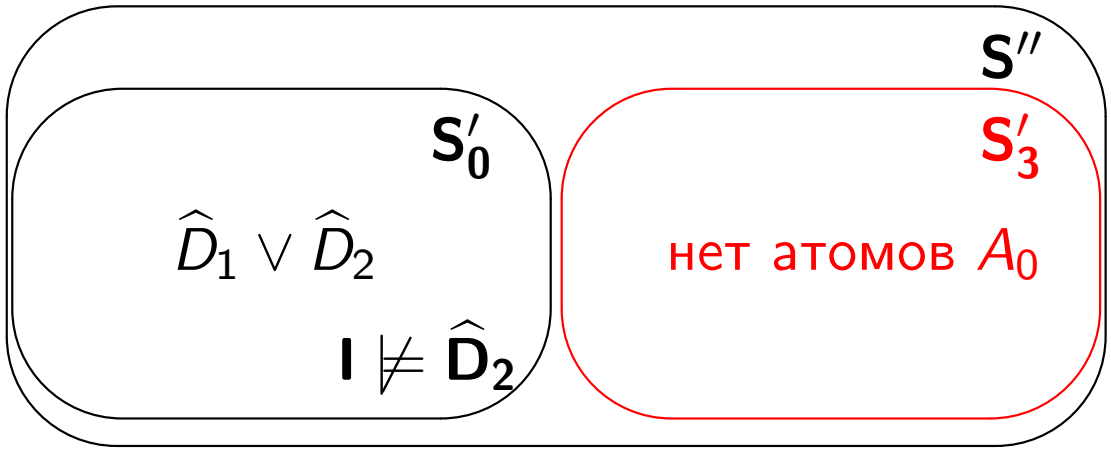




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

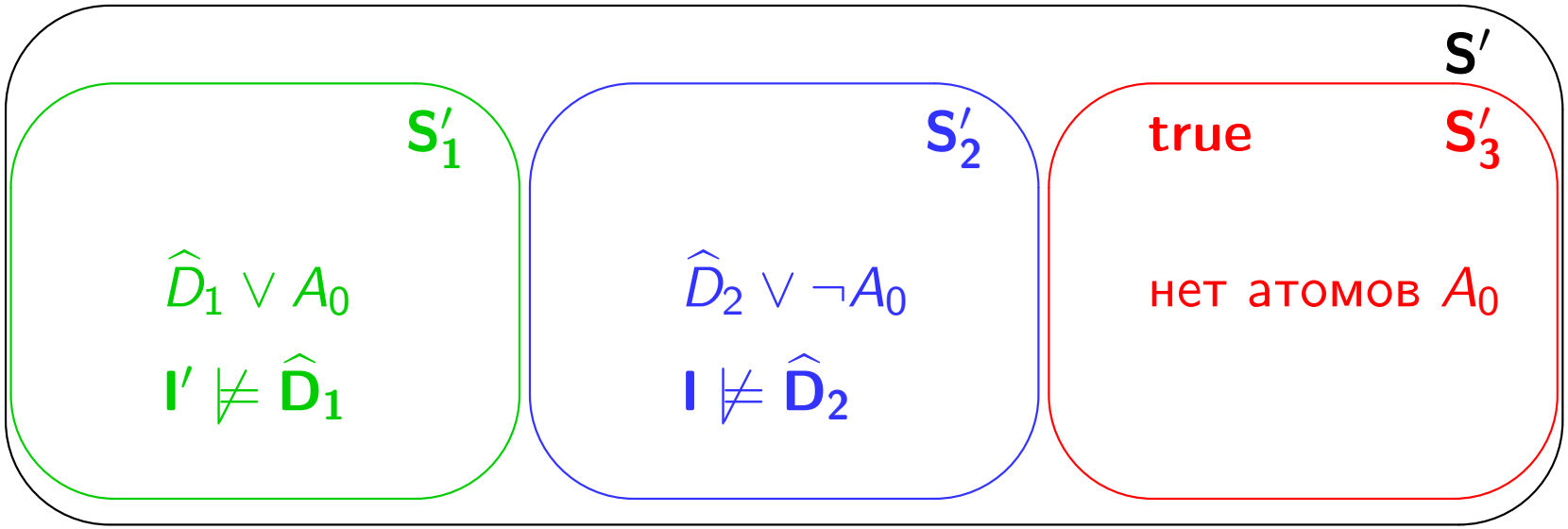
$\mathbf{I' \not\models A_0}$ **Вариант 2.**

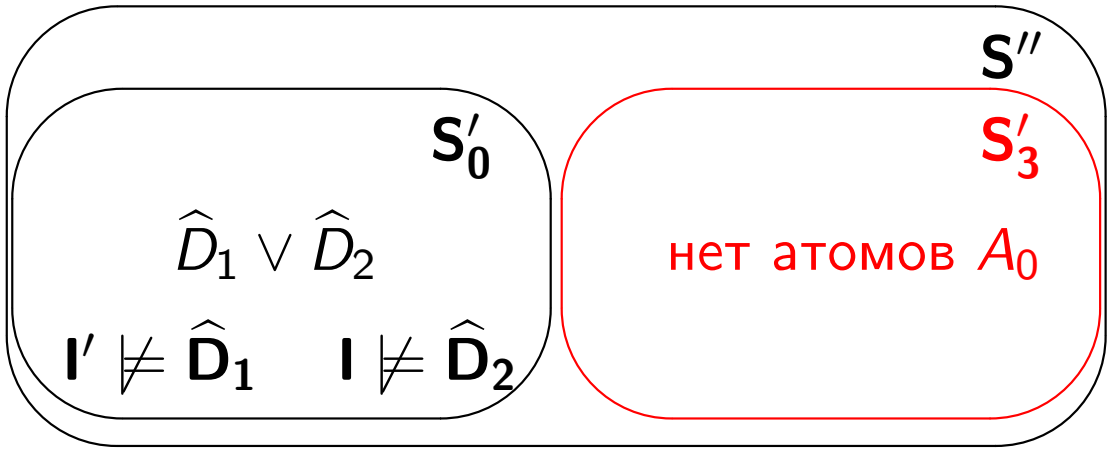




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

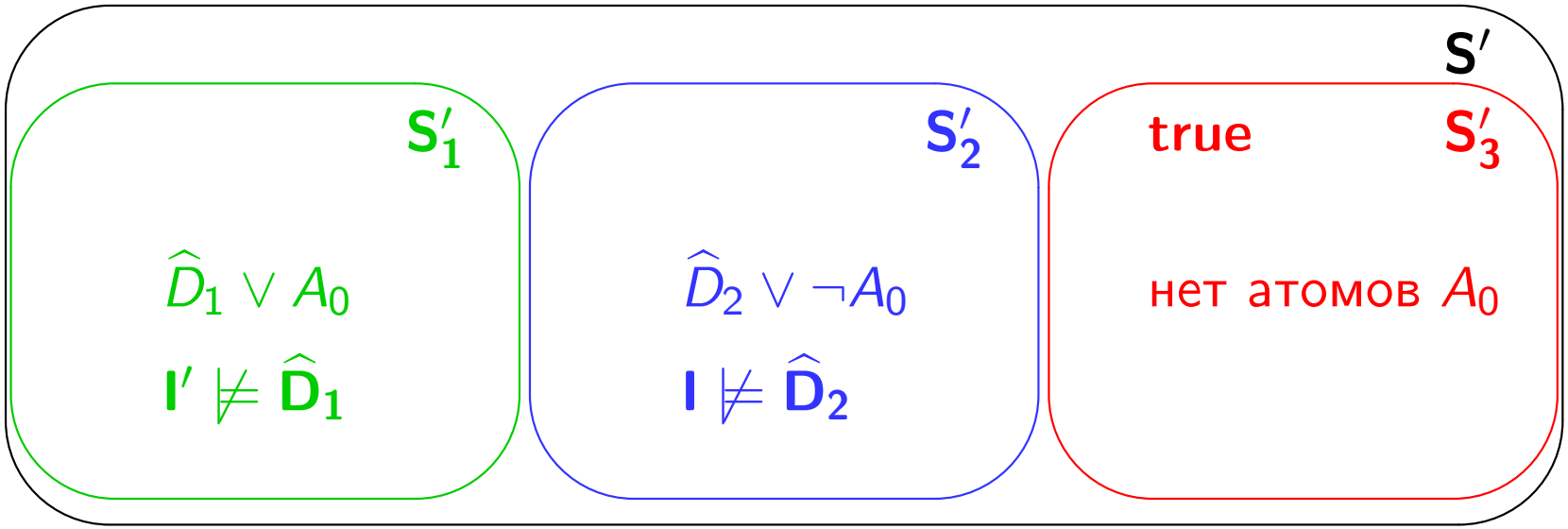
$\mathbf{I' \not\models A_0}$ **Вариант 2.**

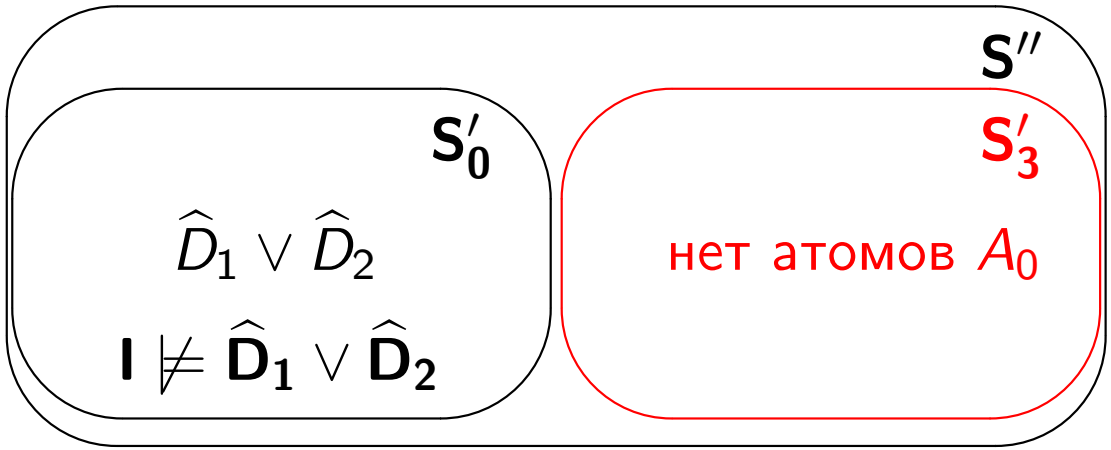




ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

$\mathbf{I' \not\models A_0}$ **Вариант 2.**





ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \widehat{D}_1$ и $I \not\models \widehat{D}_2$, верно $I \not\models \widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$.

Остается заметить, что $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$ и $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, и поэтому $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \in S'_0$

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \widehat{D}_1$ и $I \not\models \widehat{D}_2$, верно $I \not\models \widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$.

Остается заметить, что $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$ и $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, и поэтому $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \in S'_0$

Следовательно, $I \not\models S'_0$. Тогда $I \not\models S''$, что и требовалось.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \widehat{D}_1$ и $I \not\models \widehat{D}_2$, верно $I \not\models \widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$.

Остается заметить, что $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\widehat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$ и $\widehat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, и поэтому $\widehat{D}_1 \vee \widehat{D}_2 \in S'_0$

Следовательно, $I \not\models S'_0$. Тогда $I \not\models S''$, что и требовалось.

Итак, в обоих случаях $I \not\models S''$. Т. к. I — произвольная интерпретация, приходим к заключению о том, что система дизъюнктов $S'' = S'_0 \cup S'_3$

- противоречивая,
- получена из S' при помощи правила резолюции,
- не содержит атома A_0.

Индуктивный переход завершен, и лемма доказана. □

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма о подъеме

Пусть D_1 и D_1 — два дизъюнкта, и при этом $Var_{D_1} \cap Var_{D_2} = \emptyset$.

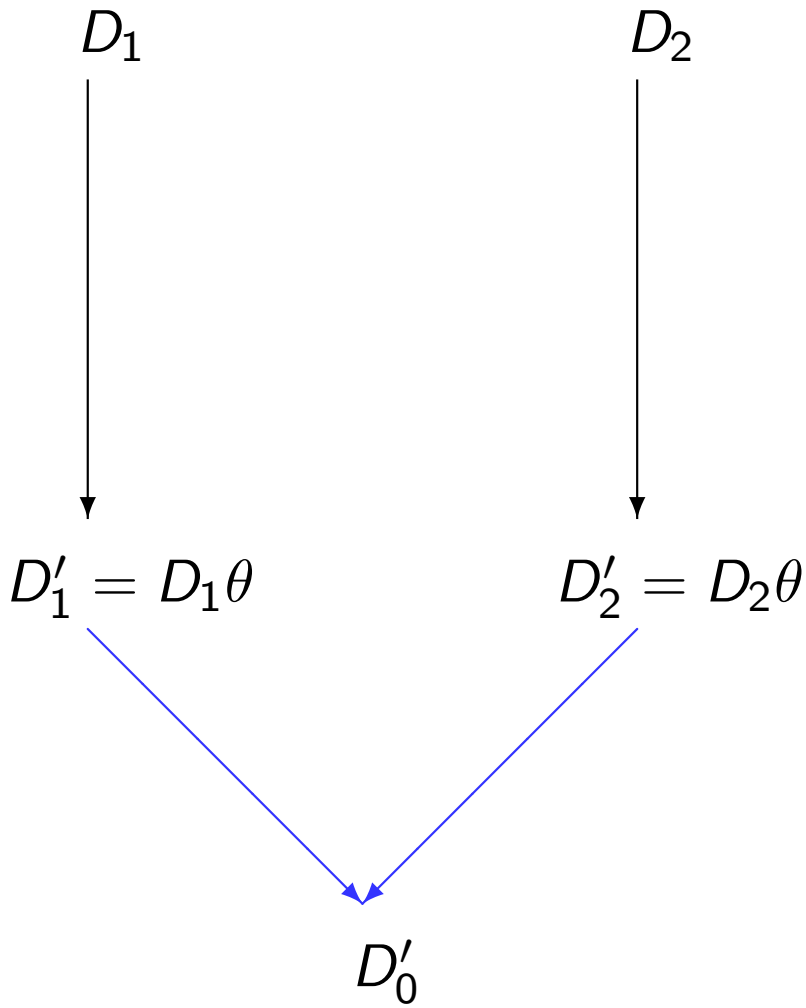
Пусть $D'_1 = D_1\theta$ и $D'_2 = D_2\theta$ — два основных примера этих дизъюнктов D_1 и D_1.

Пусть D'_0 — резольвента дизъюнктов D'_1 и D'_2.

Тогда из дизъюнктов D_1 и D_2 резолютивно выводим дизъюнкт D_0, основным примером которой является дизъюнкт D'_0.

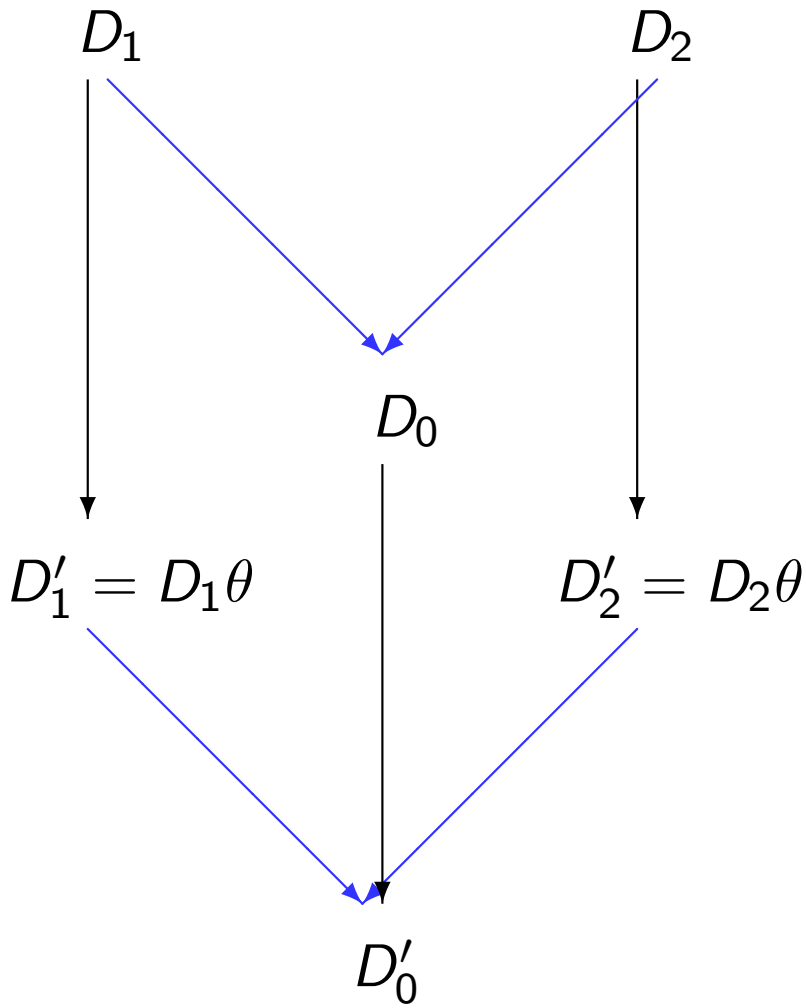
ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма о подъеме



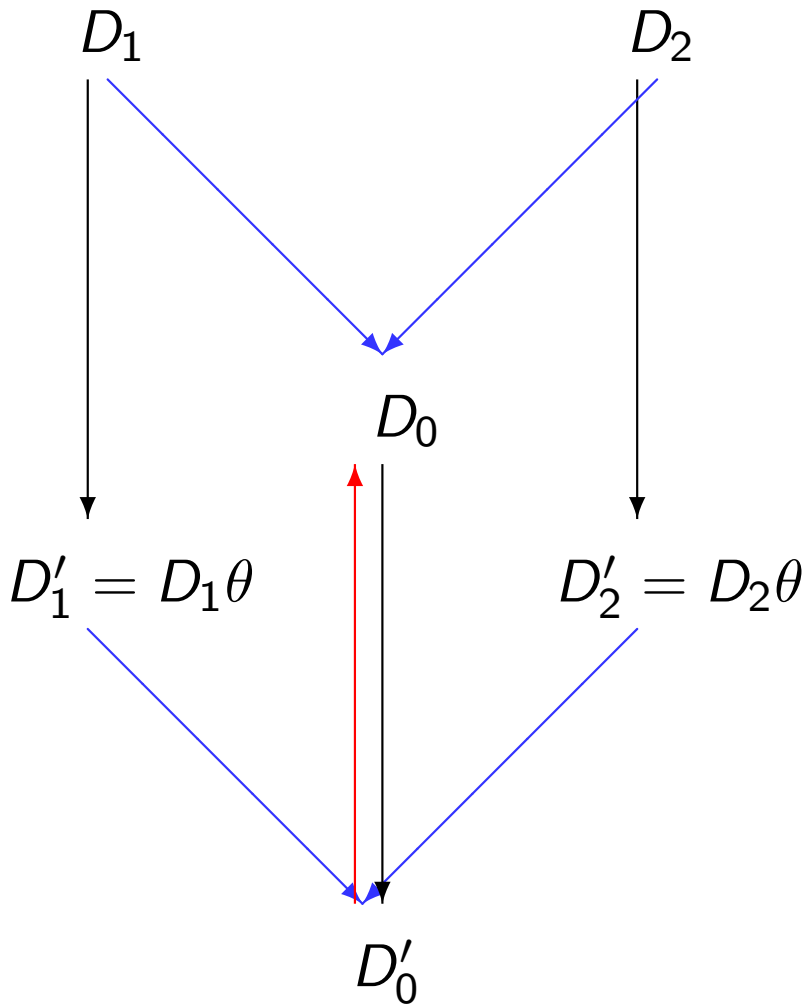
ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Пусть $L'_0,\ \neg L'_0$ — это контрарная пара литер, по которой была построена резольвента D'_0 дизъюнктов D'_1 и D'_2.

$D'_1 = \widehat{D}'_1 \vee L'_0,$

$D'_2 = \widehat{D}'_2 \vee \neg L'_0,$

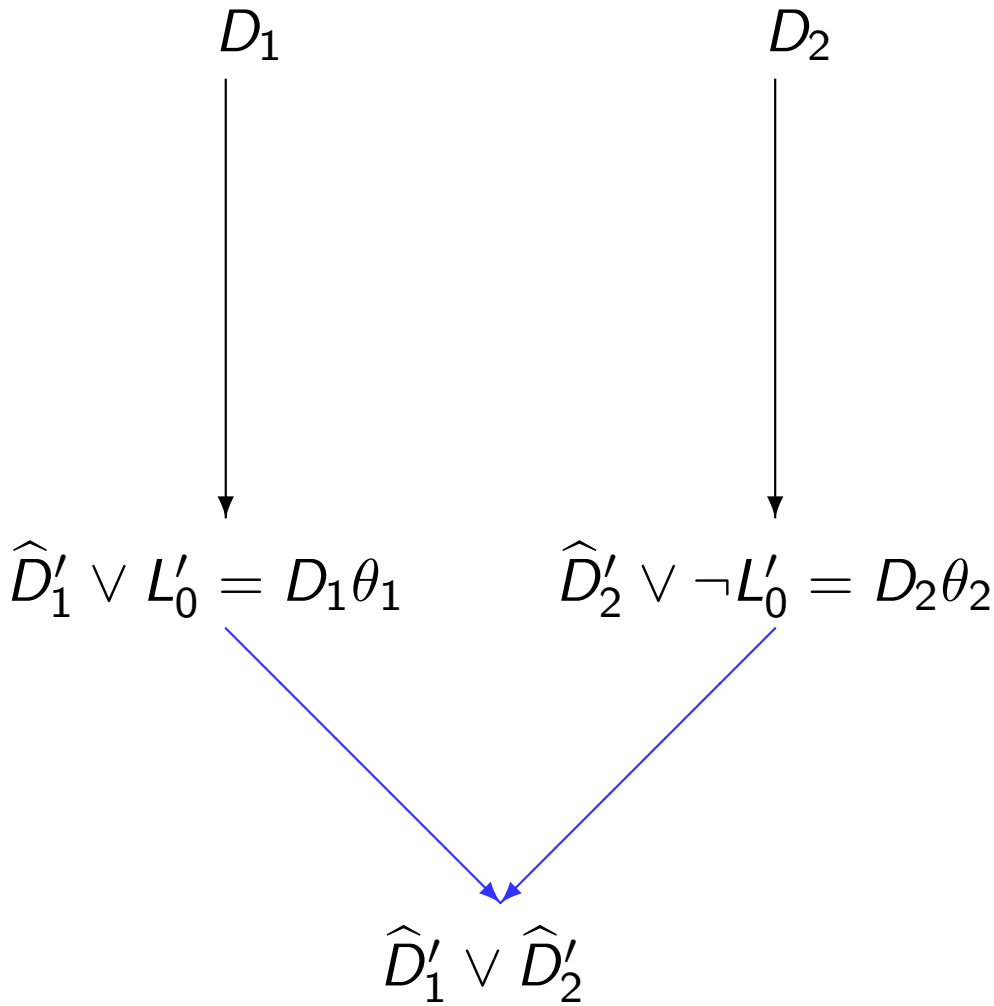
$D'_0 = \widehat{D}'_1 \vee \widehat{D}'_2.$

Поскольку $Var_{D_1} \cap Var_{D_2} = \emptyset$, подстановку θ можно разделить на две половины θ_1, θ_2 так, что

$\theta = \theta_1 \cup \theta_2,\ Dom_{\theta_1} \subseteq Var_{D_1},\ Dom_{\theta_2} \subseteq Var_{D_2}.$

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Поскольку $D_1' = D_1\theta_1$, литера L_0' является основным примером некоторых литер $L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k_1}$, входящих в состав дизъюнкта D_1, т.е.

$$L_0' = L_{11}\theta = L_{11}\theta_1 = \cdots = L_{1k_1}\theta_1.$$

Аналогично, литера $\neg L_0'$ является основным примером некоторых литер $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \ldots, \neg L_{2k_2}$, входящих в состав дизъюнкта D_2, т. е.

$$\neg L_0' = \neg L_{21}\theta_2 = \neg L_{22}\theta_2 = \cdots = \neg L_{2k_2}\theta_2.$$

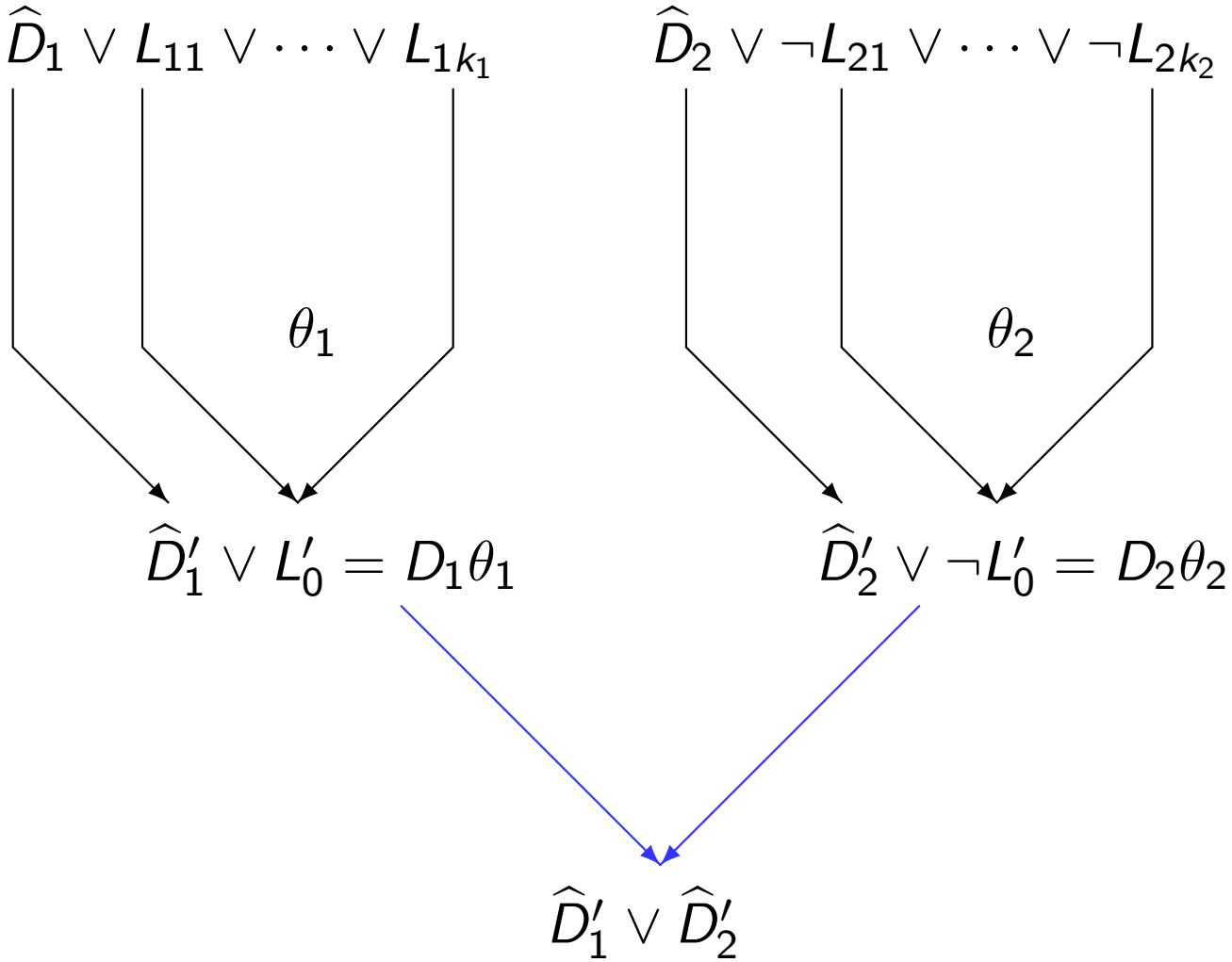
Значит,

$$D_1 = \widehat{D}_1 \vee L_{11} \vee L_{12} \vee \cdots \vee L_{1k_1}$$

$$D_2 = \widehat{D}_2 \vee \neg L_{21} \vee \neg L_{22} \vee \cdots \vee \neg L_{2k_2}$$

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Так как $L'_0 = L_{11}\theta = L_{12}\theta_1 = \cdots = L_{1k_1}\theta_1$, литеры $L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k_1}$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ η_1, т. е.

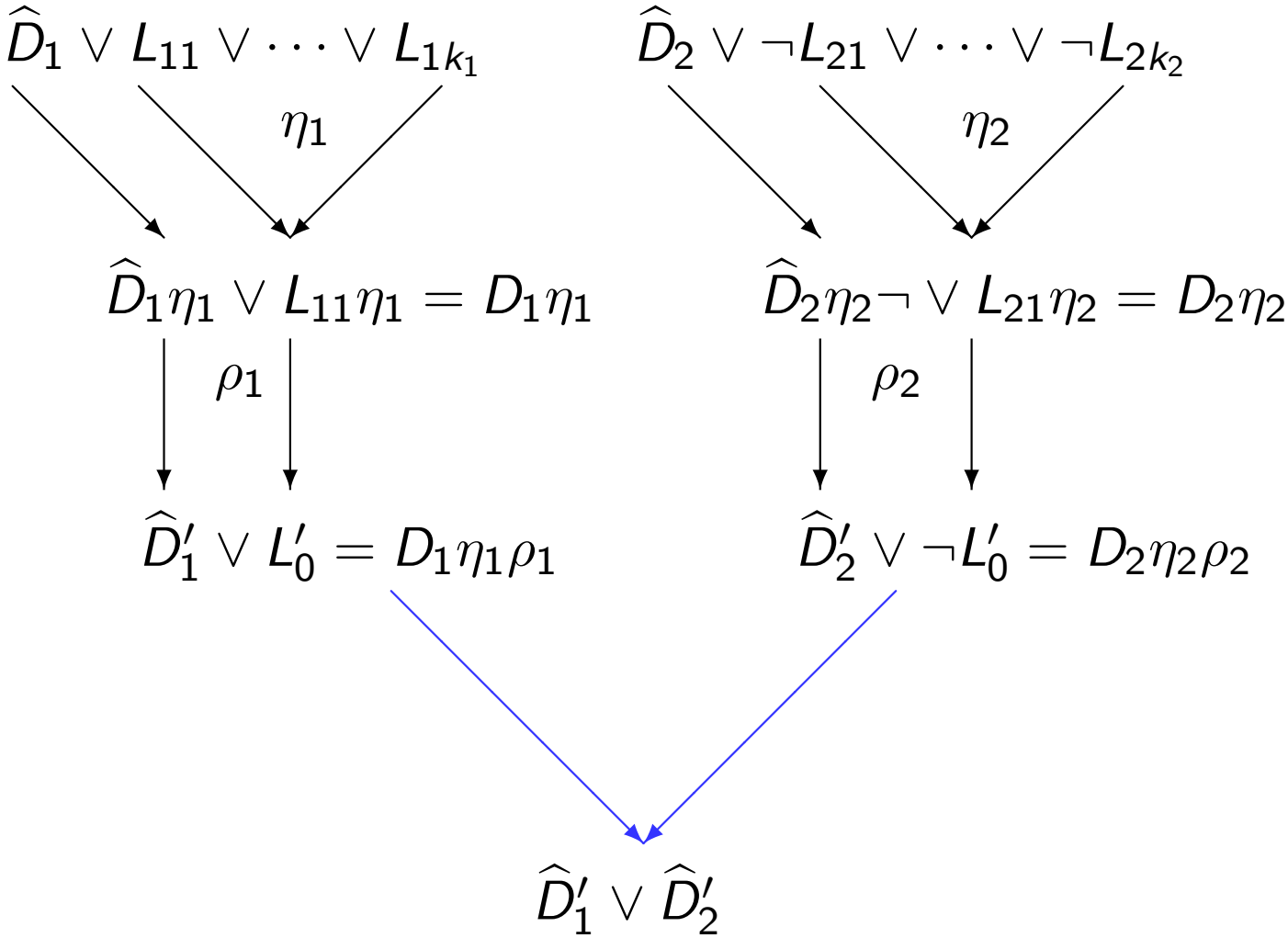
$$\eta_1 \in НОУ(L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k_1}), \quad \theta_1 = \eta_1\rho_1.$$

Значит $D_1\eta_1$ — склейка дизъюнкта D_1 по литерам $L_{11}, L_{12}, \ldots, L_{1k_1}$, и при этом $D'_1 = D_1\theta_1 = (D_1\eta_1)\rho_1$ — основной пример склейки $D_1\eta_2$.

Аналогично, литеры $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \ldots, \neg L_{2k_2}$ имеют НОУ η_2. Тогда $D_2\eta_2$ — склейка дизъюнкта D_2 по литерам $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \ldots, \neg L_{2k_2}$, и при этом $D'_2 = D_2\theta_2 = (D_1\eta_2)\rho_2$ — основной пример склейки $D_2\eta_2$.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Согласно нашей привычке переименовывать переменные, дизъюнкты-склейки $D_1\eta_1$ и $D_2\eta_2$ содержат разные наборы переменных. Поэтому $Dom_{\rho_1} \cap Dom_{\rho_2} = \emptyset$, и существует подстановка $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$:

$$(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{11}\eta_1)\rho_1, \quad (L_{21}\eta_2)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho_2$$

Так как $L'_0 = L_{11}\eta_1\rho_1$ и $\neg L'_0 = \neg L_{21}\eta_2\rho_2$, верно $(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho$, т. е. литеры $L_{11}\eta_1$ и $L_{21}\eta_2$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ λ, т. е.

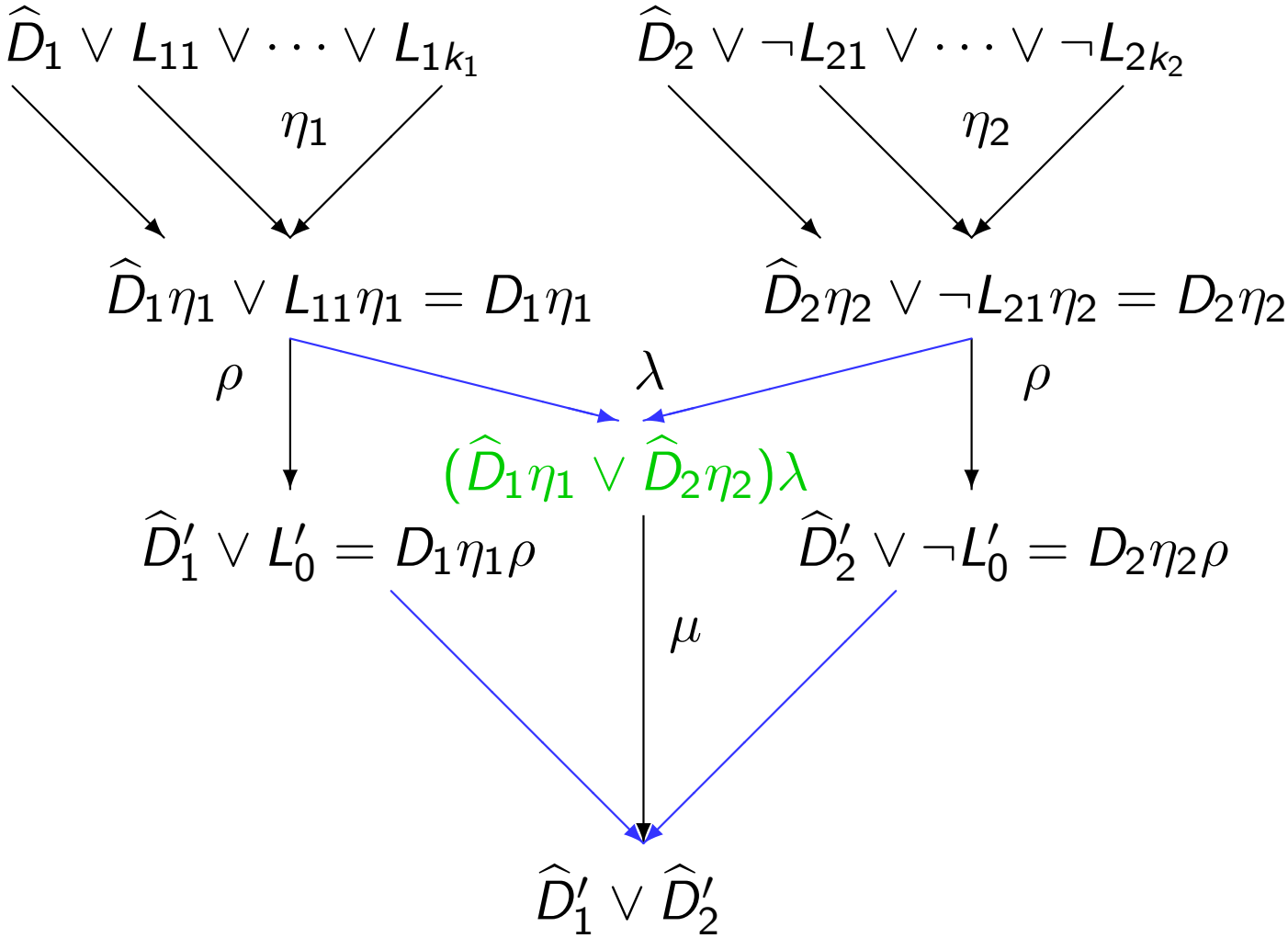
$$\lambda \in НОУ(L_{11}\eta_1, L_{21}\eta_2), \quad \rho = \lambda\mu.$$

Поэтому дизъюнкты-склейки $D_1\eta_1 = \widehat{D}_1\eta_1 \vee L_{11}\eta_1$ и $D_2\eta_2 = \widehat{D}_2\eta_2 \vee \neg L_{21}\eta_2$ имеют резольвенту $D_0 = (\widehat{D}_1\eta_1 \vee \widehat{D}_2\eta_2)\lambda$, и при этом

$$D'_0 = \widehat{D}'_1 \vee \widehat{D}'_2 = \widehat{D}_1\eta_1\rho \vee \widehat{D}_2\eta_2\rho = (\widehat{D}_1\eta_1 \vee \widehat{D}_2\eta_2)\lambda\mu = D_0\mu.$$

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Таким образом, из дизъюнктов D_1 и D_2 резолютивно выводим дизъюнкт D_0, основным примером которого являются D_0'.

Что и требовалось доказать в лемме о подъеме. □

Завершение доказательства теоремы полноты.

Мы показали, что

1. Противоречивая система дизъюнктов S имеет конечную противоречивую систему S' **основных** примеров (теорема Эрбрана).
2. Из противоречивой системы основных примеров дизъюнктов S' можно резолютивно вывести пустой дизъюнкт □ (лемма об основных примерах).
3. Если □ резолютивно выводим из системы основных примеров дизъюнктов S', то □ резолютивно выводим из исходной системы дизъюнктов S (лемма о подъеме). □

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Метод резолюций

- корректен,
- полон,
- алгоритмизуем.

Но как пользоваться им для решения **практических** задач?

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вот подходящая логическая задача

Известно, что

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша.

Вопрос: кто любит Дашу?

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

Вначале сформулируем задачу на языке логики предикатов.

Сформируем алфавит, состоящий из:

- Константы *Даша* ,
- Константы *Саша* ,
- Константы *Паша* ,
- Константы *пиво* ,
- Предикатного символа $L^{(2)}$: «$L(x, y)$ — x любит y».

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- Даша любит Сашу: $\varphi_1 : L(\mathit{Даша}, \mathit{Саша})$,
- а Саша любит пиво: $\varphi_2 : L(\mathit{Саша}, \mathit{пиво})$,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша: $\varphi_3 \,\&\, \varphi_4$,

  $\varphi_3 : L(\mathit{Паша}, \mathit{пиво})$

  $\varphi_4 : \forall x\, (\exists y\, (L(\mathit{Паша}, y) \,\&\, L(x, y)) \rightarrow L(\mathit{Паша}, x))$.

Кто любит Дашу? : $\varphi_0 : \exists z\, L(z, \mathit{Даша})$.

Формулировка задачи.

Проверить, верно ли, что $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_0$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

1. Сводим проблему логического следования

$$\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4\}\ \models\ \varphi_0$$

к проблеме общезначимости

$$\models\ \varphi_1\ \&\ \varphi_2\ \&\ \varphi_3\ \&\ \varphi_4\ \rightarrow\ \varphi_0.$$

2. Сводим проблему общезначимости к проблеме противоречивости

$$\psi_1\ =\ \neg\,(\varphi_1\ \&\ \varphi_2\ \&\ \varphi_3\ \&\ \varphi_4\ \rightarrow\ \varphi_0)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

3. Строим предваренную нормальную форму ПНФ

$$\psi_2 = \forall x \forall y \forall z \Big(L(\textit{Саша}, \textit{пиво}) \;\&\; L(\textit{Саша}, \textit{пиво}) \;\&\; L(\textit{Паша}, \textit{пиво}) \;\&\; (\neg L(\textit{Паша}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\textit{Паша}, x)) \;\&\; \neg L(z, \textit{Даша}) \Big).$$

4. Строим сколемовскую стандартную форму — она совпадает с ПНФ.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

5. Строим систему дизъюнктов S

$$\begin{aligned} S = \{ & D_1 = L(\textit{Саша}, \textit{пиво}), \\ & D_2 = L(\textit{Саша}, \textit{пиво}), \\ & D_3 = L(\textit{Паша}, \textit{пиво}), \\ & D_4 = \neg L(\textit{Паша}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\textit{Паша}, x), \\ & D_0 = \neg L(z, \textit{Даша}) \}. \end{aligned}$$

6. А теперь будем строить резолютивный вывод.

Будем руководствоваться такой стратегией:

- Начнем с дизъюнкта-запроса D_0;
- На каждом шаге вывода будем использовать последнюю из построенных резольвент (линейный вывод).

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D'_0 = \neg L(z, Даша)$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

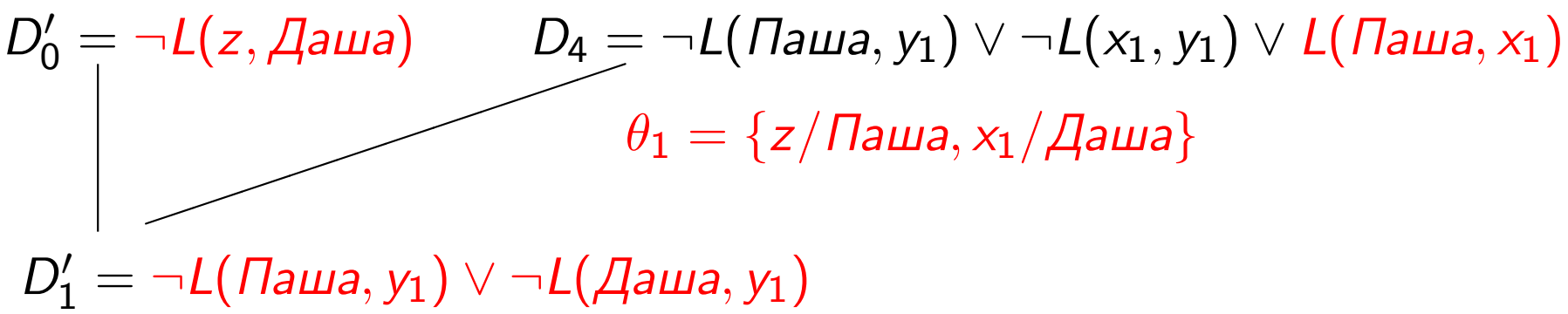
6. Линейный резолютивный вывод

$D_0' = \neg L(z, \textit{Даша})$ $\qquad$ $D_4 = \neg L(\textit{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\textit{Паша}, x_1)$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

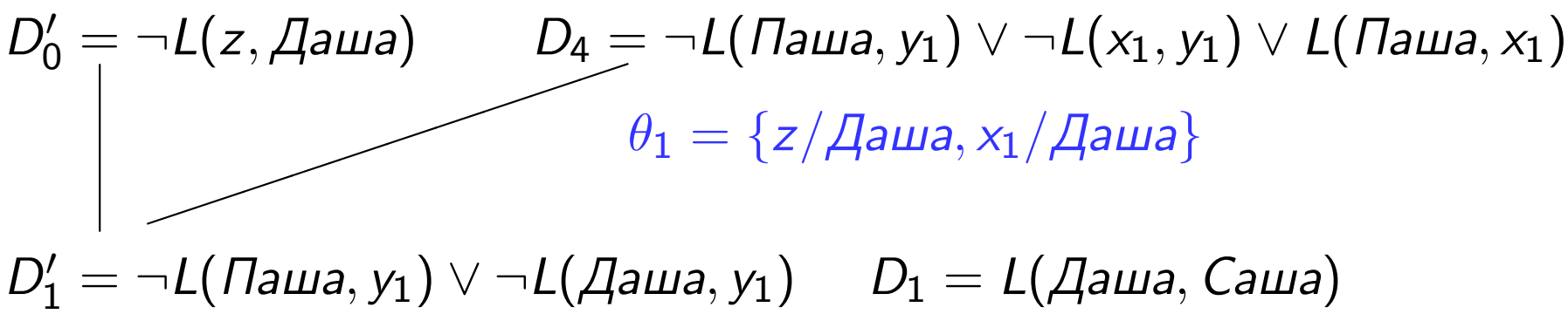
6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

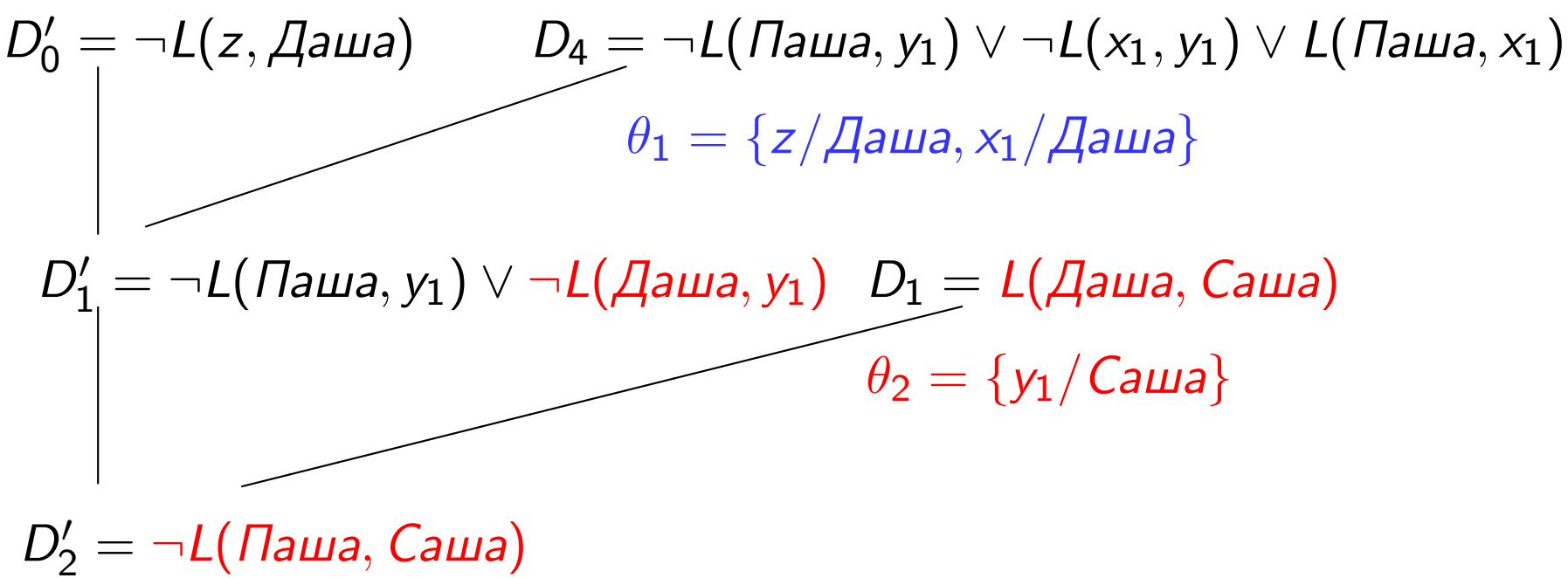
6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

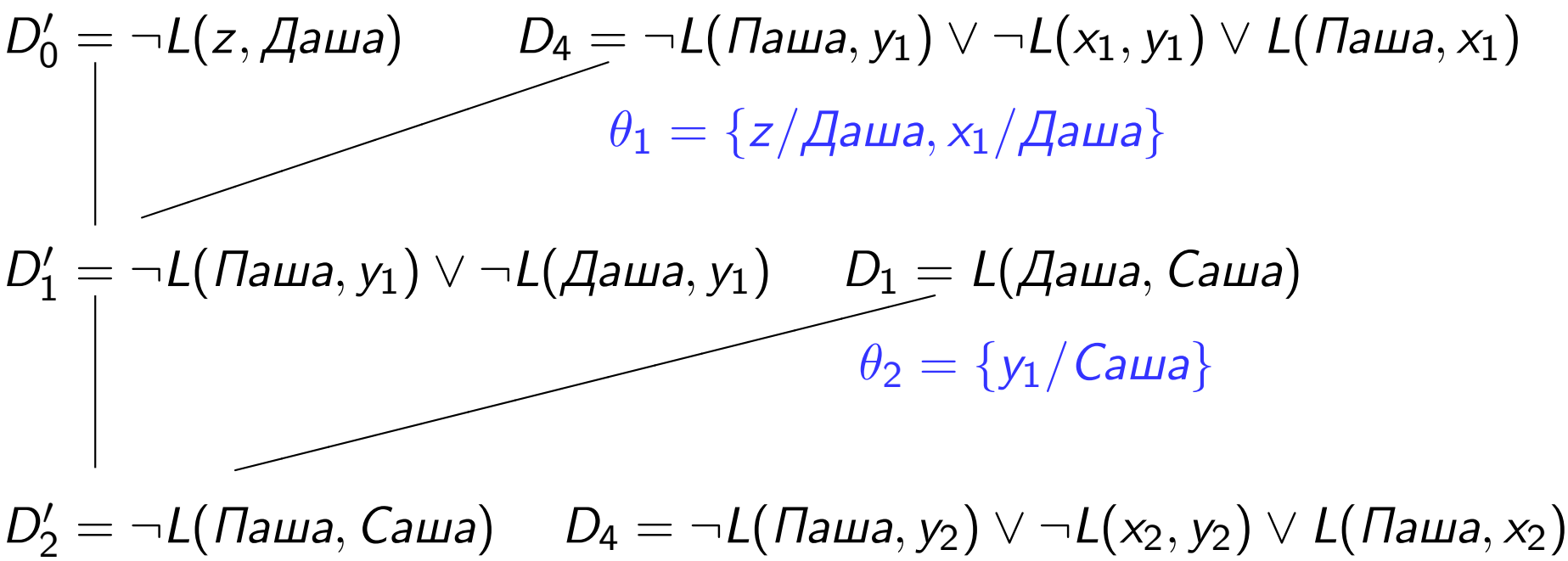
6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

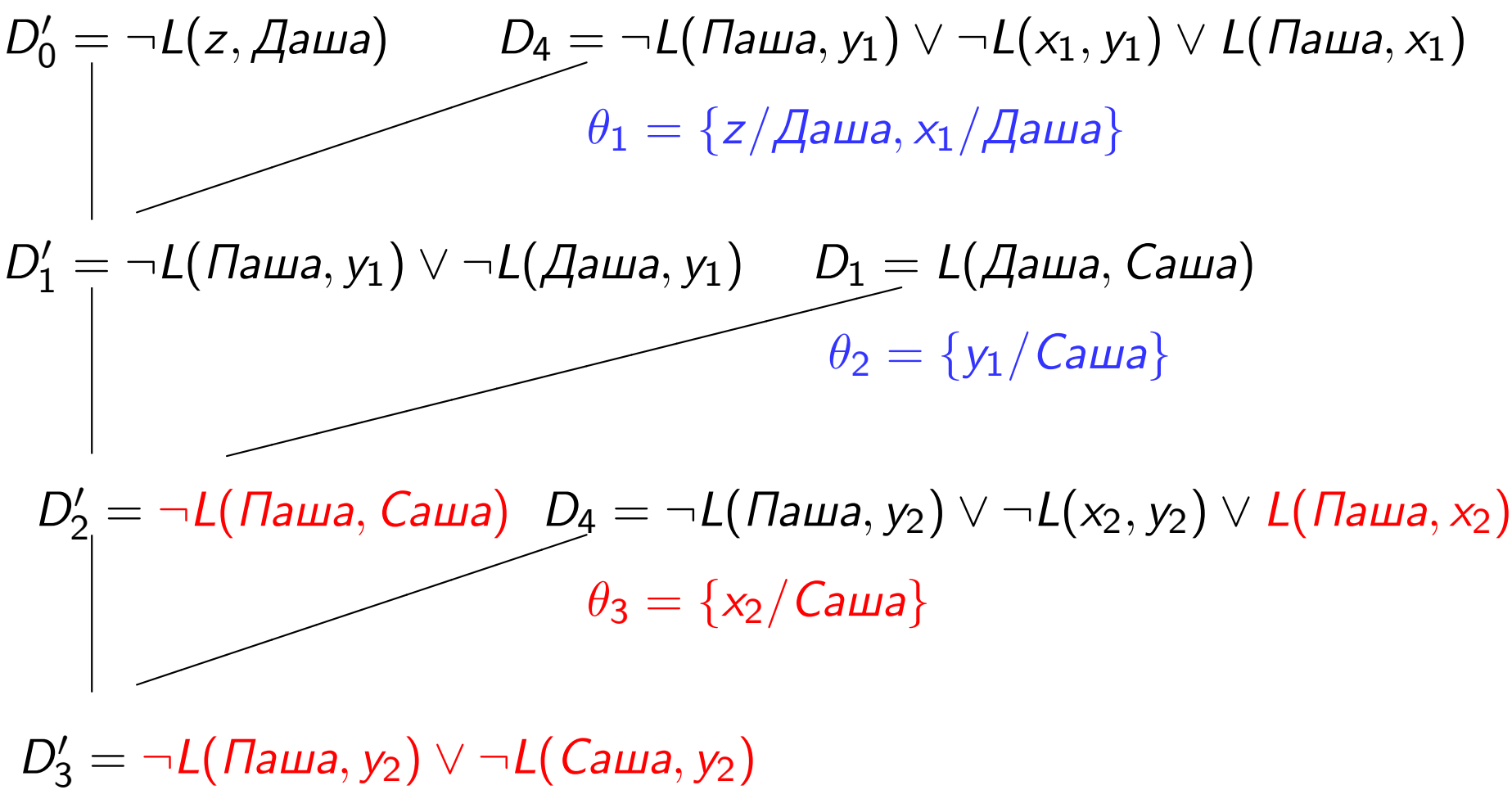
6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

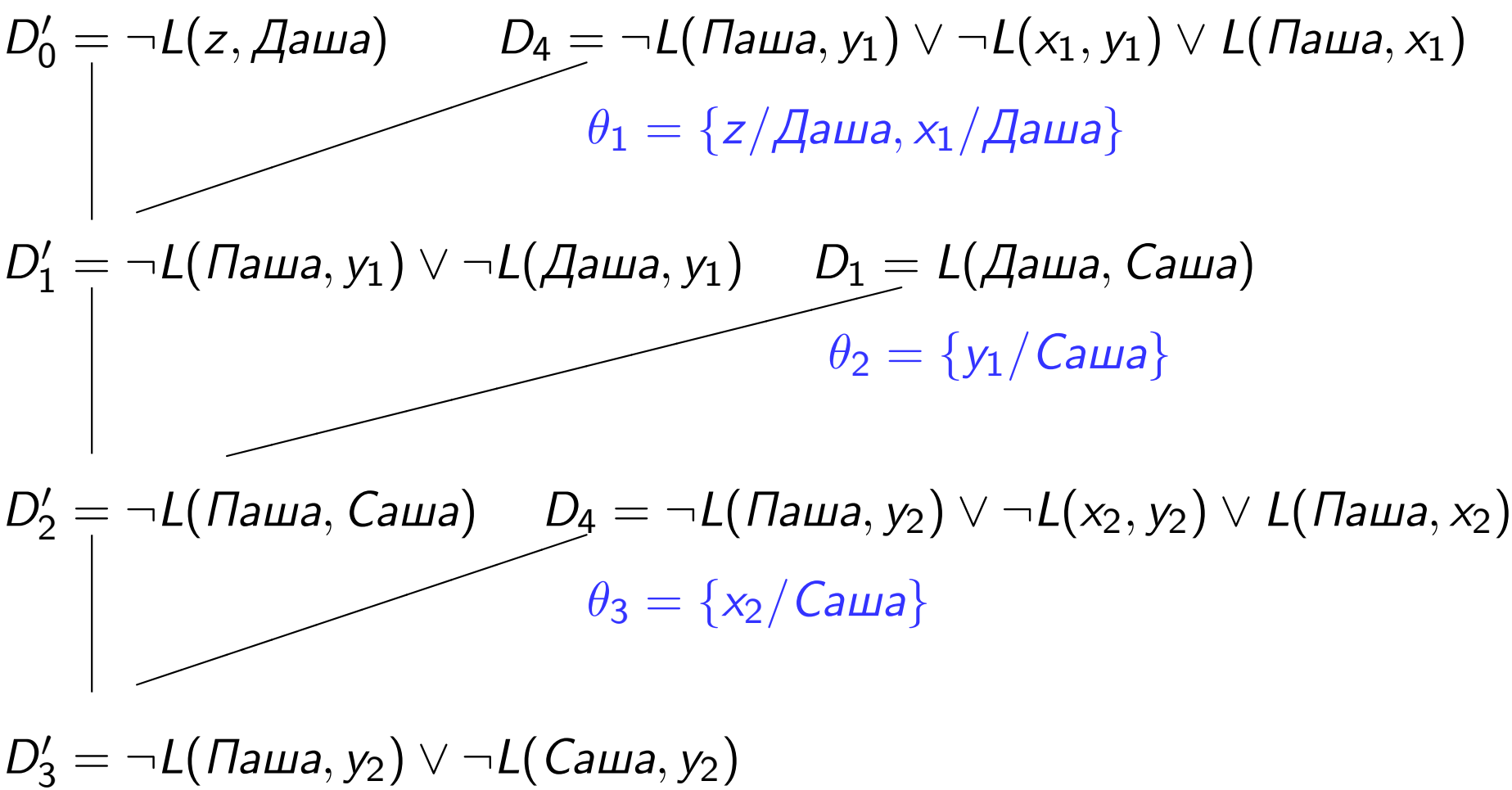
6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$D'_3 = \neg L(Паша, y_2) \vee \neg L(Саша, y_2)$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

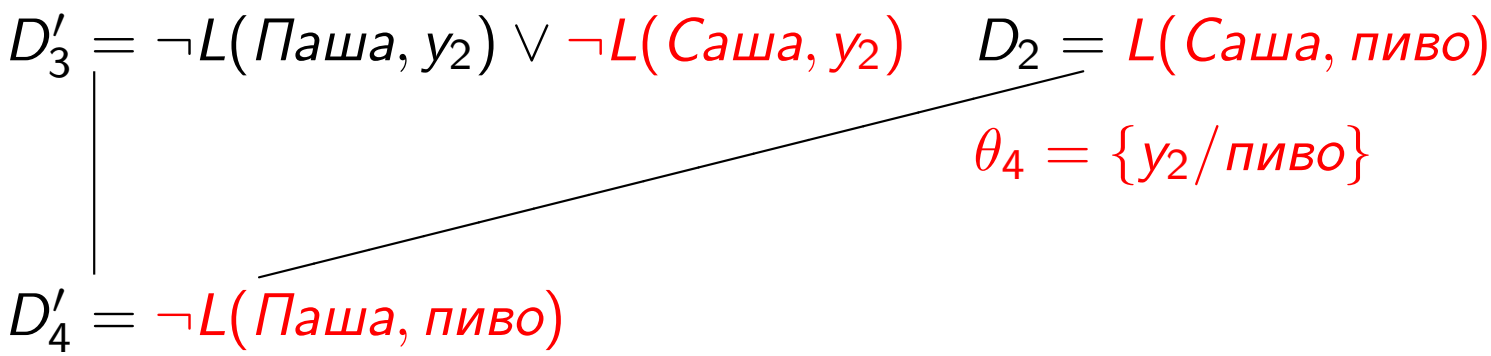
6. Линейный резолютивный вывод

$D_3' = \neg L(Паша, y_2) \vee \neg L(Саша, y_2) \qquad D_2 = L(Саша, пиво)$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

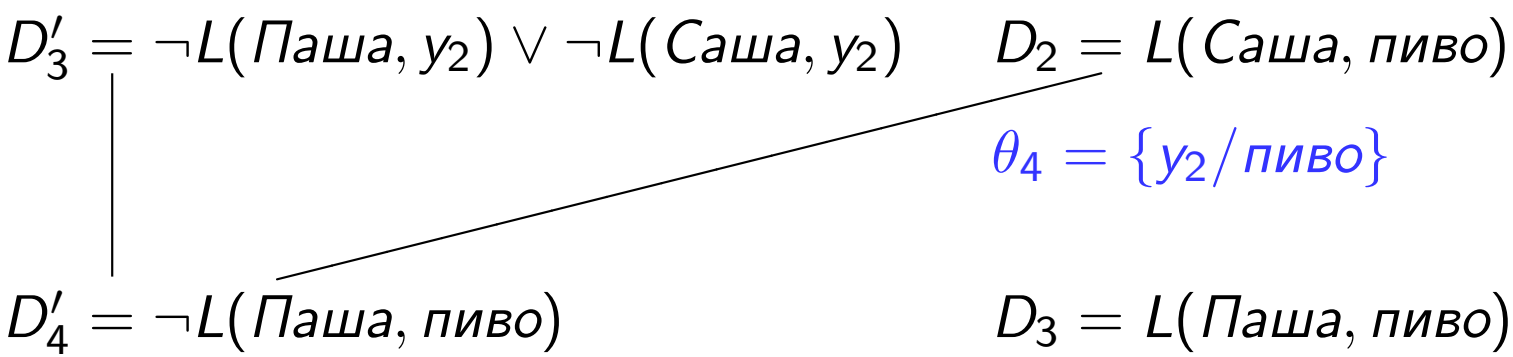
6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

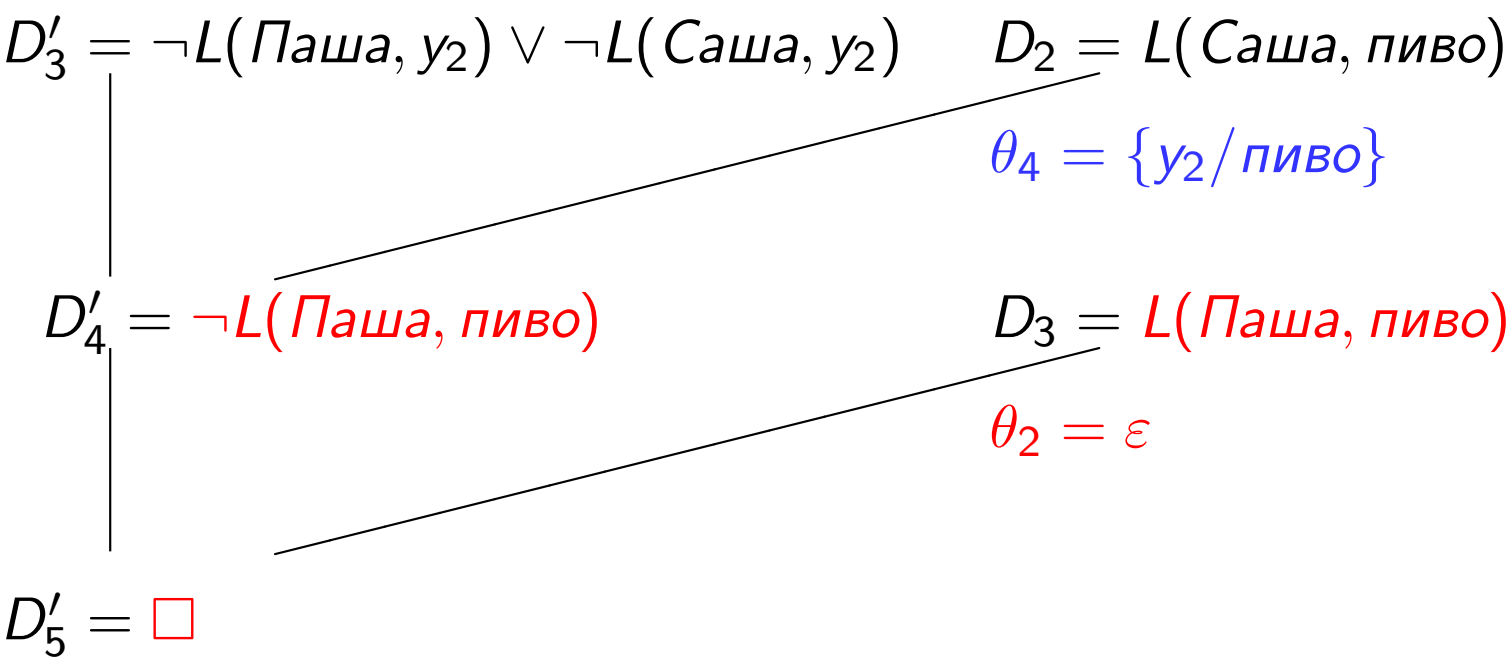
6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

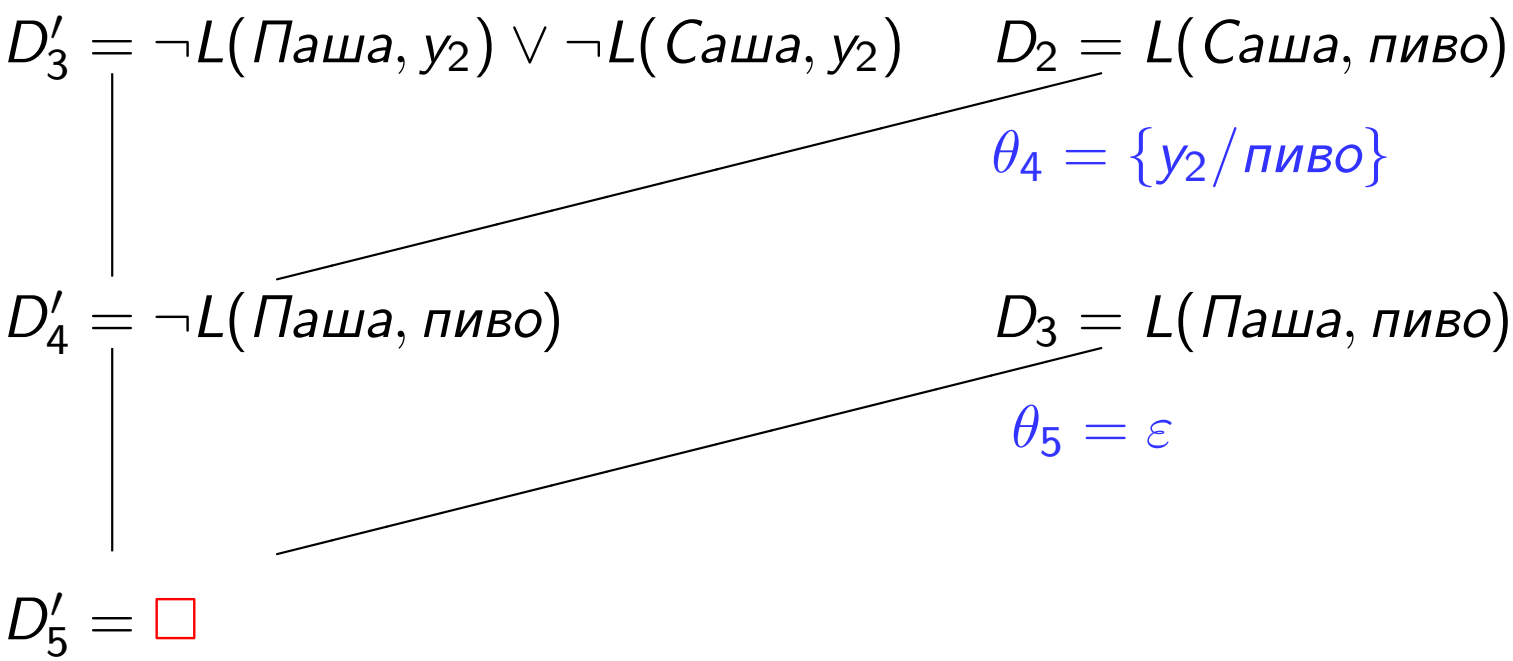
6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод



Успешный резолютивный вывод завершен!

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

Итак, система дизъюнктов S противоречива.

Значит,

$$\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4\} \models \varphi_0.$$

В рамках нашей задачи это означает, что верно утверждение: «Кто-то любит Дашу».

Но кто же это таинственное существо, любящее Дашу?

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

Чтобы ответить и на этот вопрос, возьмем все подстановки-унификаторы, которые мы вычислили по ходу вывода, и посмотрим, какое действие они окажут на **целевую переменную** z в дизъюнкте-запросе

$$D_0 = \neg L(z, \textit{Даша}).$$

$\theta_1 = \{z/\textit{Паша}, x_1/\textit{Даша}\}$,
$\theta_2 = \{y_1/\textit{Саша}\}$
$\theta_3 = \{x_2/\textit{Саша}\}$
$\theta_4 = \{y_2/\textit{пиво}\}$
$\theta_5 = \varepsilon$

$$z\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \textit{Паша}$$

Итак, Паша любит Дашу!

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 10.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 11.

Стратегии резолютивного вывода. Резолютивный вывод как средство вычисления.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Метод резолюций не предписывает заранее никакого фиксированного порядка применения правил резолюции и склейки для вывода пустого дизъюнкта $\square$ из противоречивого множества дизъюнктов.

Существуют различные стратегии резолютивного вывода , налагающие дополнительные ограничения на выбор подходящих пар дизъюнктов для получения резольвент.

Стратегия резолютивного вывода называется полной , если она позволяет вывести пустой дизъюнкт $\square$ из любого противоречивого множества дизъюнктов.

Рассмотрим пример.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Пример.

Пусть

$$S = \{ \begin{array}{l} D_1 = \neg P \vee \neg Q \vee R; \\ D_2 = P \vee R; \\ D_3 = Q \vee R; \\ D_4 = \neg R \end{array} \}$$

Можно построить много разных резольвент:
$D_1 + D_2 = \neg Q \vee R$, $D_1 + D_3 = \neg P \vee R$, $D_1 + D_4 = \neg P \vee \neg Q$,
$D_2 + D_4 = P$, $D_3 + D_4 = Q$, и т. д.

Но как ограничиться только теми, которые действительно нужны для вывода $\square$?

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Семантическая резолюция

Разделим дизъюнкты на два подмножества по следующему принципу:

выберем H-интерпретацию I и положим
$S_1^I = \{D \ : \ D \in S, \ I \models D\}$,
$S_2^I = \{D \ : \ D \in S, \ I \not\models D\}$.

Наложим ограничение на применение правила резолюции:

При построении резольвенты, оба дизъюнкта-предпосылки должны принадлежать разным множествам S_1 и S_2.

$$\frac{D_1 = D_1' \vee L_1, \ D_2 = D_2' \vee \neg L_2}{D_0 = (D_1' \vee D_2')\theta}, \ D_1 \in S_1^I, \ D_2 \in S_2^I, \theta \in HOY(L_1, L_2).$$

Такое правило будем называть правилом I-резолюции .

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Пример.

Пусть $I = \emptyset$, т. е. $I \not\models P$, $I \not\models Q$, $I \not\models R$. Тогда

$$S_1^I : \begin{array}{l} D_1 = \neg P \vee \neg Q \vee R; \\ D_4 = \neg R; \end{array} \qquad S_2^I : \begin{array}{l} D_2 = P \vee R; \\ D_3 = Q \vee R; \end{array}$$

I-резольвенты будут строиться так:

$$S_1 : \begin{array}{l} D_1 + D_2 = \neg Q \vee R; \\ D_1 + D_3 = \neg P \vee R; \end{array} \qquad S_2 : \begin{array}{l} D_4 + D_2 = P; \\ D_4 + D_3 = Q; \\ (D_1 + D_2) + D_3 = R; \\ ((D_1 + D_2) + D_3) + D_4 = \square \end{array}$$

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема полноты I-резолюции

Если система дизъюнктов S противоречива, то для любой интерпретации I существует успешный I-резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S.

Доказательство:

Самостоятельно.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Линейная резолюция

Предположим, что в системе дизъюнктов S выделен некоторый дизъюнкт D_0.
Тогда резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\square$ из системы дизъюнктов S можно строить, руководствуясь следующими соглашениями:

- Для построения первой резольвенты D_1 выбирается дизъюнкт D_0 и некоторый дизъюнкт $D \in S \setminus \{D_0\}$;
- Для построения i-ой резольвенты D_i выбирается резольвента D_{i-1}, построенная на предыдущем шаге вывода, и дизъюнкт $D \in S$.

Резолютивный вывод такого вида будем называть линейным резолютивным выводом , инициированным дизъюнктом D_0.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Пример.

Пусть

$$S = \{ \quad D_1 = \neg P \vee \neg Q \vee R; \quad D_2 = P \vee R; \quad D_3 = Q \vee R; \quad D_4 = \neg R \quad \}$$

и выделенный дизъюнкт D_0 — это $D_4 = \neg R$.
Тогда линейный резолютивный вывод будет таким:

1. $D_4 + D_1 = \neg P \vee \neg Q$;
2. $(D_4 + D_1) + D_2 = R \vee \neg Q$;
3. $((D_4 + D_1) + D_2) + D_3 = R$;
4. $(((D_4 + D_1) + D_2) + D_3) + D_4 = \square$.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема полноты линейного резолютивного вывода

Если система дизъюнктов S противоречива, а система дизъюнктов $S' = S \setminus \{D_0\}$ непротиворечива, то существует успешный линейный резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S.

Доказательство:

Самостоятельно.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Автоматические пруверы

The World Championship
for 1^{st} Order Automated Theorem Proving

Vampire (Manchester, A. Voronkov),

SPASS (Max Plank Institute, M. Keil),

SNARK (AIC, California, E. Stikel),

Otter (Argonne National Laboratory, USA, W. McCune),

Gandalf (Goteborg, Tartu, T. Tammet),

Carine (Montreal, Quebec, P. Haraoun).

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Метод резолюций можно использовать для решения разных задач. Например, для получения ответа на вопрос

А будет ли утверждение φ_0 обязательно верно,
если известно, что верны утверждения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$?

Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — это база знаний , φ_0 — это запрос .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Математическая постановка задачи такова: проверить $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi_0$.

Проверка логического следствия сводится к проверке общезначимости: $\models (\varphi_1 \& \varphi_2 \& \ldots \& \varphi_n) \to \varphi_0$.

Проверка общезначимости сводится к проверке противоречивости формулы $\neg\Big((\varphi_1 \& \varphi_2 \& \ldots \& \varphi_n) \to \varphi_0\Big)$, или, что равносильно, противоречивости системы формул $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi_0\}$.

Для проверки противоречивости системы S применяем метод резолюций.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Но метод резолюций позволяет решать и более изощренные задачи.

Пусть имеется база знаний $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ и запрос $Q = \varphi_0(x_1, \ldots, x_m)$.

Задача: вычислить значения переменных $x_1, \ldots, x_m$, при которых запрос Q логически следует из базы знаний Γ.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Решить эту задачу можно попытаться так:

задачу проверки логического следствия
$\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \models \exists x_1 \ldots \exists x_m \varphi_0(x_1, \ldots, x_m)$.

свести к проверке противоречивости системы формул
$S = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi_0(x_1, \ldots, x_m)\}$
(здесь $x_1, \ldots, x_m$ по умолчанию связаны квантором $\forall$),

построить резолютивное опровержение S, и

применить последовательность унификаторов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$, вычисленных по ходу построения резолютивного вывода, к целевым переменным $x_1, \ldots, x_m$:

$$x_1\theta_1\theta_2\ldots\theta_N, \quad \ldots, \quad x_m\theta_1\theta_2\ldots\theta_N.$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Этот трюк сработал при решении задачи о «любовном квадрате Саша–Даша–Паша–пиво».

Попробуем применить его еще раз для решения какой-нибудь другой вычислительной задачи.

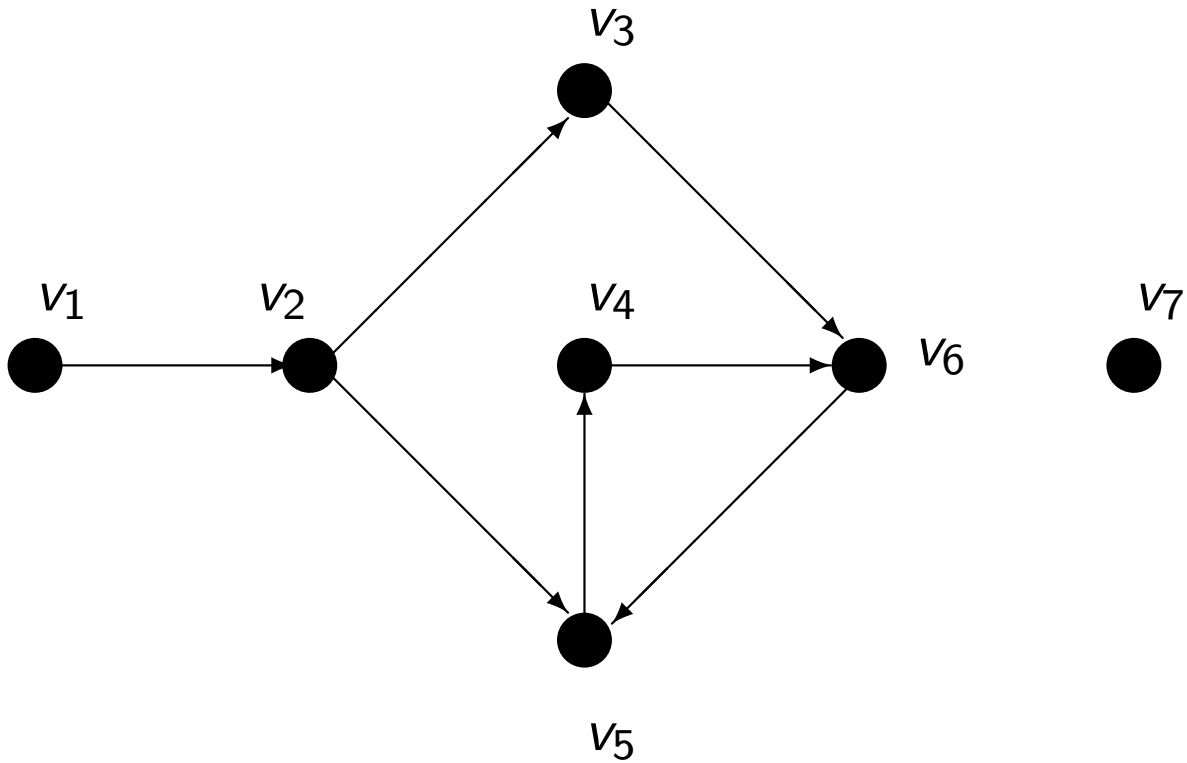
Поиск пути в графе.

Пусть задан ориентированный граф Γ , в котором выделены две вершины u и v . Требуется найти маршрут из вершины u в вершину v .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

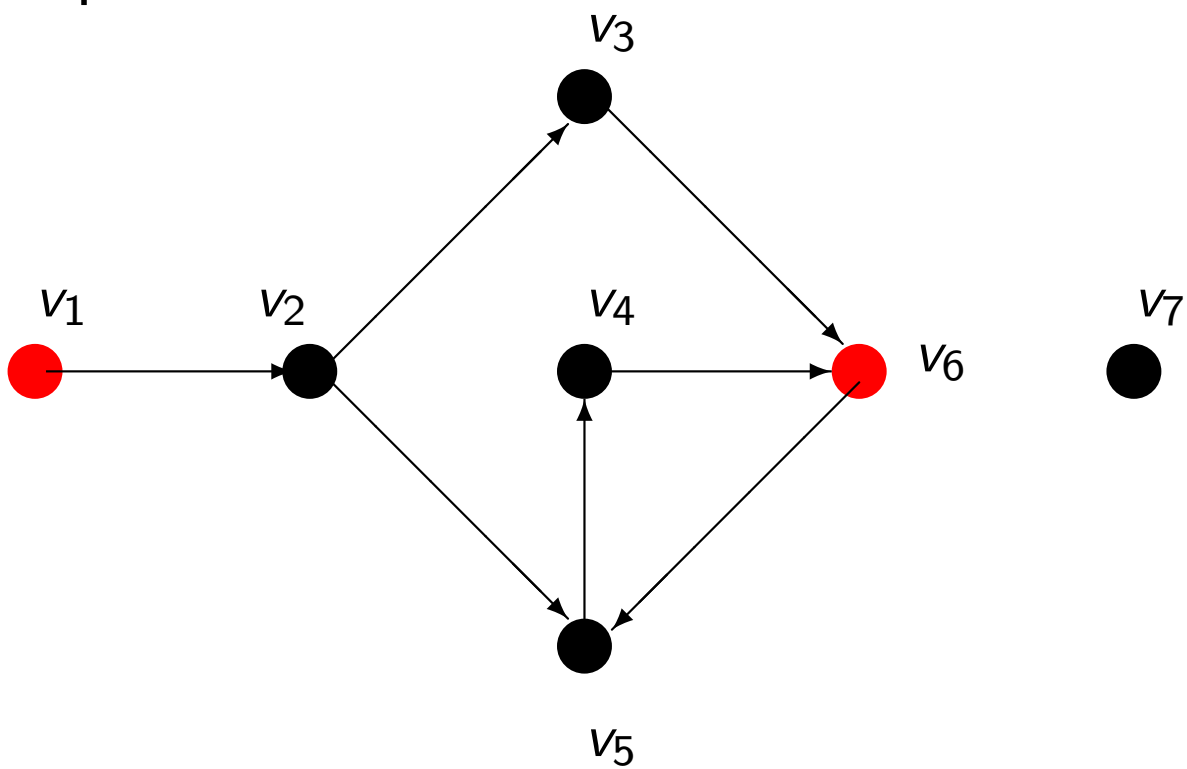
граф **Г**



РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

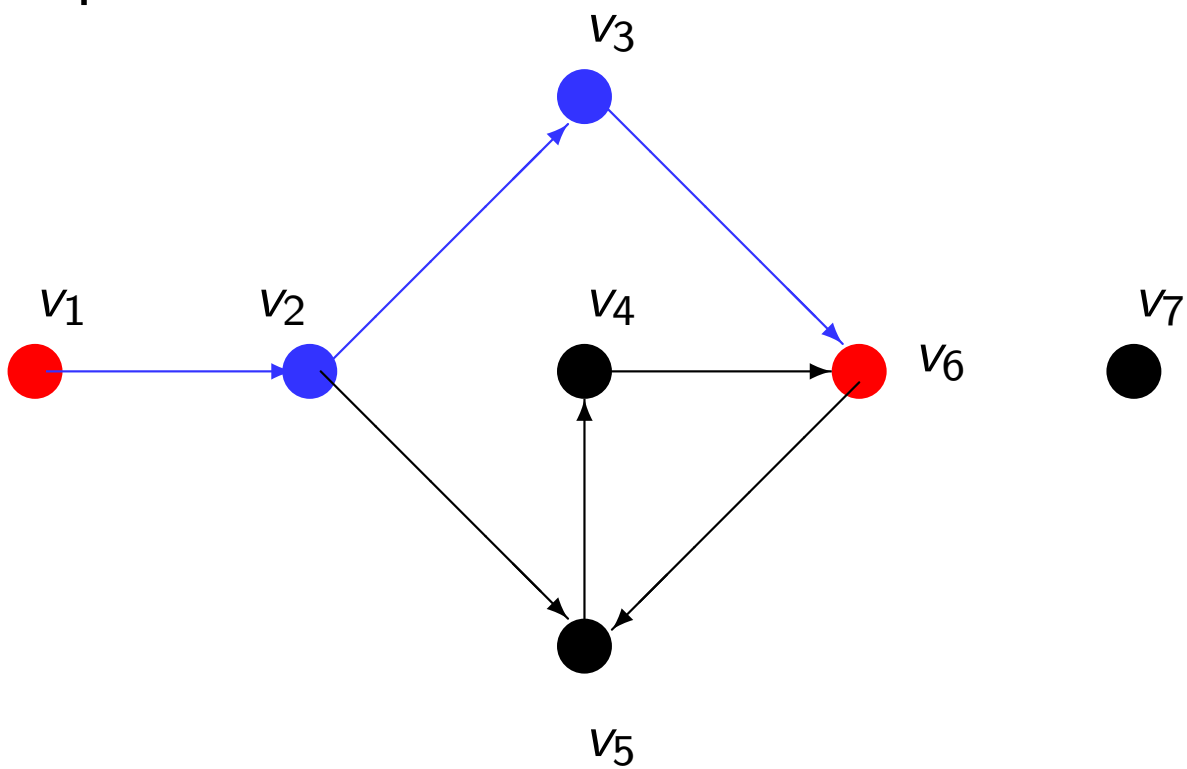
граф **Г**



РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

граф **Г**



РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Вначале нужно суметь сформулировать эту задачу на языке логики предикатов.

Граф Г может быть задан перечнем его вершин и дуг. Введем

- константы $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ для обозначения вершин графов;
- предикатный символ $Vert^{(1)}$ для обозначения свойства: «x — вершина графа» ;
- предикатный символ $Arc^{(2)}$ для обозначения свойства: «$\langle x, y \rangle$ — дуга графа».

Чтобы отличать переменные от констант, в дальнейшем условимся обозначать переменные **ЗАГЛАВНЫМИ БУКВАМИ**, а константы — **строчными буквами**.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Тогда граф может быть описан следующим набором формул логики предикатов.

$$KB_{\Gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1 = Vert(v_1), & \psi_1 = Arc(v_1, v_2), \\ \varphi_2 = Vert(v_2), & \psi_2 = Arc(v_2, v_3), \\ \varphi_3 = Vert(v_3), & \psi_3 = Arc(v_2, v_5), \\ \varphi_4 = Vert(v_4), & \psi_4 = Arc(v_3, v_6), \\ \varphi_5 = Vert(v_5), & \psi_5 = Arc(v_5, v_4), \\ \varphi_6 = Vert(v_6), & \psi_6 = Arc(v_4, v_6), \\ \varphi_7 = Vert(v_7), & \psi_7 = Arc(v_6, v_5) \end{array} \right\}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Ориентированный путь в графе — это последовательность (список) дуг. Значит, нужно иметь подходящую структуру данных для представления списка на языке логики предикатов.

Для этого мы введем

- специальную константу **nil** для обозначения пустого списка, не содержащего ни одного элемента;
- специальный функциональный символ $\cdot^{(2)}$ для обозначения двухместной операции присоединения элемента x к списку y в качестве заголовка (конструктор списков).

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

При помощи введенных символов **nil** и $\cdot$ определим специальное множество термов — списки :

- константа **nil** — это список;
- если t — произвольный терм, а T — список, то терм $\cdot(t, T)$ — это список;
- других списков нет.

Терм t называтся заголовком , а T — хвостом списка $\cdot(t, T)$.

Чтобы сделать обозначения более естественными, мы будем записывать знак двухместной операции $\cdot$ между аргументами (инфиксная запись), как это делается для операций $+$, $\times$.

Таким образом, запись $\cdot(t_1, t_2)$ равносильна записи $t_1 \cdot t_2$.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Примеры списков

Пустой список: **nil**

Список из одного элемента X: $X \,.\, \mathbf{nil}$

Упорядоченная пара $\langle X, Y \rangle$: $X \,.\, (Y \,.\, \mathbf{nil})$

Последовательность букв `а,б,в,г`: $а \,.\, (б \,.\, (в \,.\, (г \,.\, \mathbf{nil})))$

Таблица (матрица) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$(1 \,.\, (2 \,.\, \mathbf{nil})) \,.\, \Big((3 \,.\, (4 \,.\, \mathbf{nil})) \,.\, \mathbf{nil}\Big)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Поскольку в большинстве случаев списки используются для представления конечных последовательностей, упростим запись линейных списков:

условимся опускать скобки, считая по умолчанию, что все скобки ассоциируются вправо, т.е. запись

$$a \,.\, (б \,.\, (в \,.\, (г \,.\, \mathbf{nil})))$$

будет считаться равносильной записи

$$a \,.\, б \,.\, в \,.\, г \,.\, \mathbf{nil}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Еще несколько примеров списков

Терм **nil . nil** обозначает список, состоящий из одного элемента — пустого списка;

Терм $а . б . в . г$ вообще не является списком (почему?);

Терм $(1 . \mathbf{nil}) . 2 . \mathbf{nil} . \mathbf{nil}$ обозначает список, состоящий из трех элементов:
первый элемент — это список, состоящий из одного элемента 1,
второй элемент — это константа 2,
третий элемент — пустой список.

Следует помнить, что термы $X . \mathbf{nil}$ и X — существенно различные (имеют разные типы):
$X . \mathbf{nil}$ — это список (массив) из одного элемента X,
X — это просто элемент (переменная или константа).

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Таким образом, маршрут в ориентированном графе — это список дуг, в котором каждая дуга — это список, состоящий из двух вершин.

Пример: $(v_1 \centerdot v_2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (v_2 \centerdot v_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot \mathbf{nil}$ — это маршрут, состоящий из двух дуг $\langle v_1, v_2 \rangle$ и $\langle v_2, v_3 \rangle$.

А теперь запишем на языке логики предикатов определение маршрута в ориентированном графе. Для этого введем трехместный предикатный символ $R^{(3)}$:

$R(X, Y, t)$ будет обозначать утверждение о том, что терм t задает маршрут из вершины X в вершину Y.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Определение маршрута в графе состоит из двух частей:

$$\chi_1 = \forall X \; R(X, X, \mathbf{nil})$$

«из X в X ведет пустой маршрут»;

$$\chi_2 = \forall X \forall Y \forall Z \forall U \, (Arc(X, Y) \& R(Y, Z, U) \rightarrow R(X, Z, (X \,.\, Y \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, U))$$

«если из X в Y ведет дуга, а из Y в Z ведет маршрут U,
то из X в Z ведет маршрут $t' = \langle X, Y \rangle, U$».

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Итак, мы имеем

Базу знаний KB, состоящую из формул

$$\varphi_i,\ 1 \le i \le 7, \qquad \psi_i,\ 1 \le i \le 7, \qquad \chi_1,\ \chi_2,$$

при помощи которых определяется устройство графа Γ и знания о том, что такое маршрут в графе.

Запрос к базе знаний $Q(X) = R(v_1, v_6, X)$ с одной целевой переменной X.

Наша задача: найти такое значение t целевой переменной X, при котором имеет место логическое следствие

$$KB \models Q(t).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Будем решать задачу поиска пути методом резолюций.

$$KB \models \exists X\ Q(X)$$

Сведем вопрос о логическом следствии к вопросу о противоречивости формулы

$$\neg\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{7}\varphi_i\ \&\ \bigwedge_{j=1}^{7}\psi_j\ \&\ \chi_1\ \&\ \chi_2\right)\ \rightarrow\ \exists X\ Q(X)\right)$$

Далее приводим полученную формулу к ПНФ, к ССФ, и извлекаем систему дизъюнктов S.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Построим резолютивное опровержение полученной системы дизъюнктов S:

$$
S = \left\{
\begin{array}{ll}
\varphi_1 = Vert(v_1), & \psi_1 = Arc(v_1, v_2), \\
\varphi_2 = Vert(v_2), & \psi_2 = Arc(v_2, v_3), \\
\varphi_3 = Vert(v_3), & \psi_3 = Arc(v_2, v_5), \\
\varphi_4 = Vert(v_4), & \psi_4 = Arc(v_3, v_6), \\
\varphi_5 = Vert(v_5), & \psi_5 = Arc(v_5, v_4), \\
\varphi_6 = Vert(v_6), & \psi_6 = Arc(v_4, v_6), \\
\varphi_7 = Vert(v_7), & \psi_7 = Arc(v_6, v_5), \\
\chi_1 = R(X, X, \mathbf{nil}), & \\
\chi_2 = \neg Arc(X, Y) \vee \neg R(Y, Z, U) & \vee\ R(X, Z, (X \mathbf{.} Y \mathbf{.} \mathbf{nil}) \mathbf{.} U), \\
\Phi_0 = \neg R(v_1, v_6, X) &
\end{array}
\right\}
$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

$$\Phi_0 = \neg R(v_1, v_6, X)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

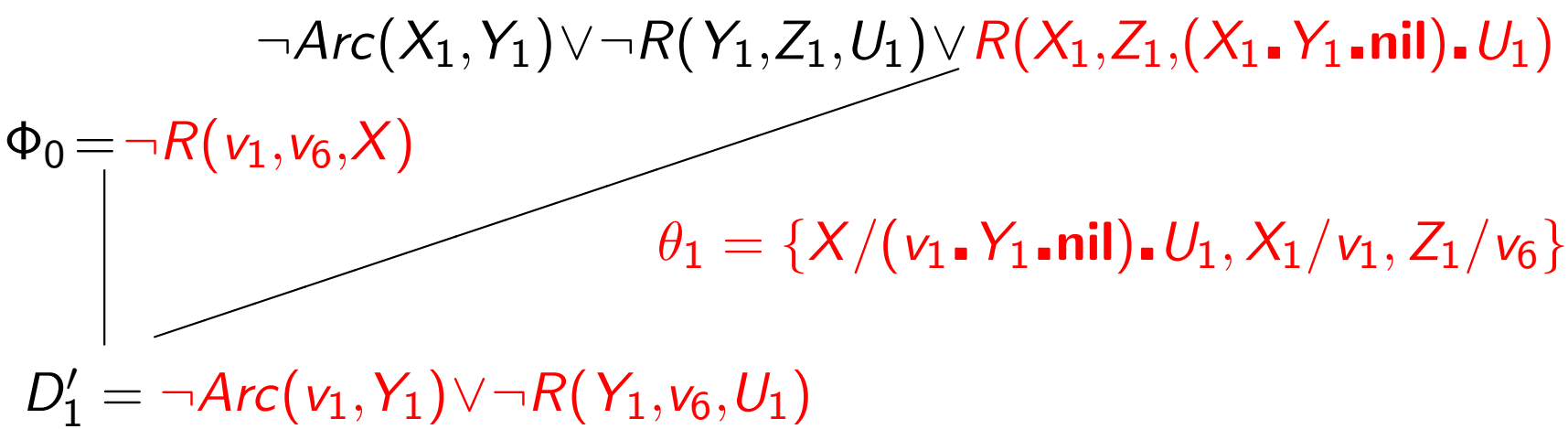
Поиск пути в графе.

$$\chi_2 = \neg Arc(X_1, Y_1) \vee \neg R(Y_1, Z_1, U_1) \vee R(X_1, Z_1, (X_1 . Y_1 . \mathbf{nil}) . U_1)$$

$\Phi_0 = \neg R(v_1, v_6, X)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.



РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

$$\chi_2 = \neg Arc(X_1, Y_1) \vee \neg R(Y_1, Z_1, U_1) \vee R(X_1, Z_1, (X_1 . Y_1 . \mathbf{nil}) . U_1)$$

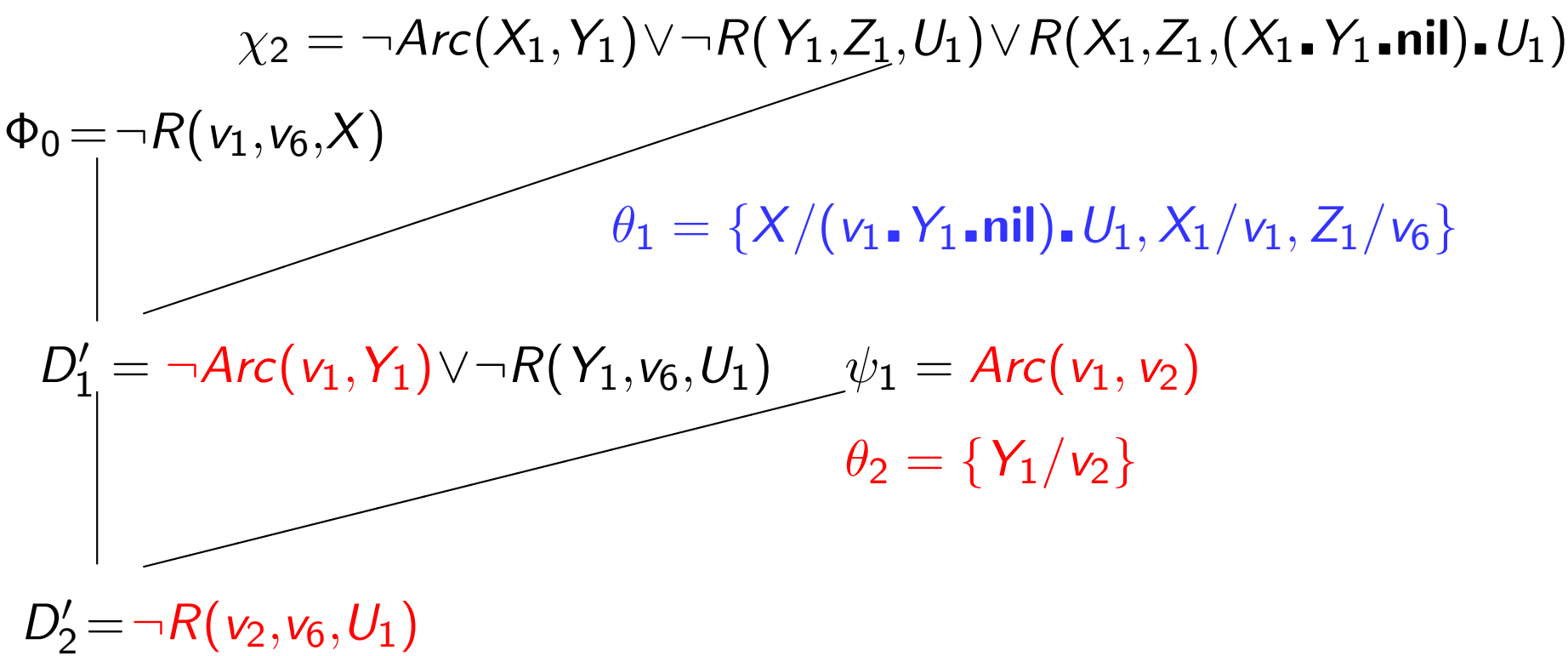
$$\Phi_0 = \neg R(v_1, v_6, X)$$

$$\theta_1 = \{X/(v_1 . Y_1 . \mathbf{nil}) . U_1, X_1/v_1, Z_1/v_6\}$$

$$D'_1 = \neg Arc(v_1, Y_1) \vee \neg R(Y_1, v_6, U_1) \qquad \psi_1 = Arc(v_1, v_2)$$

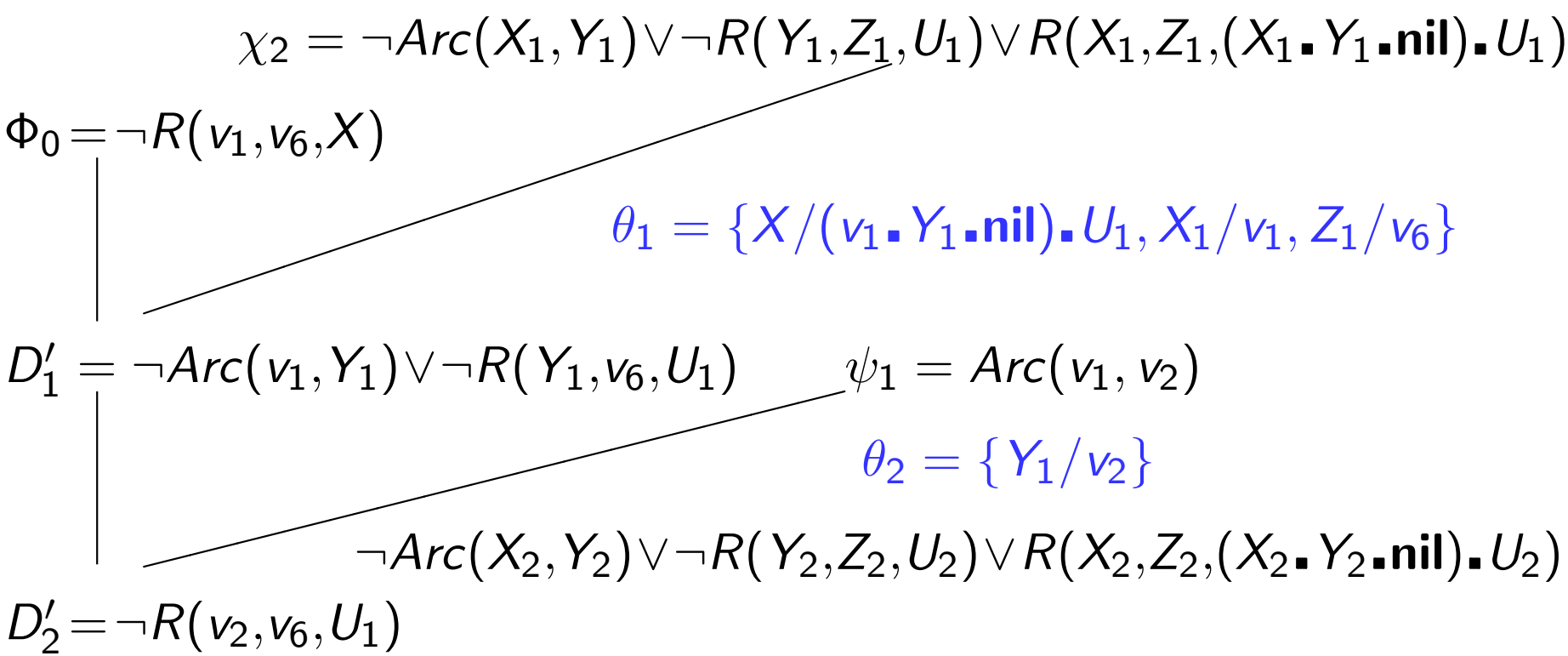
РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.



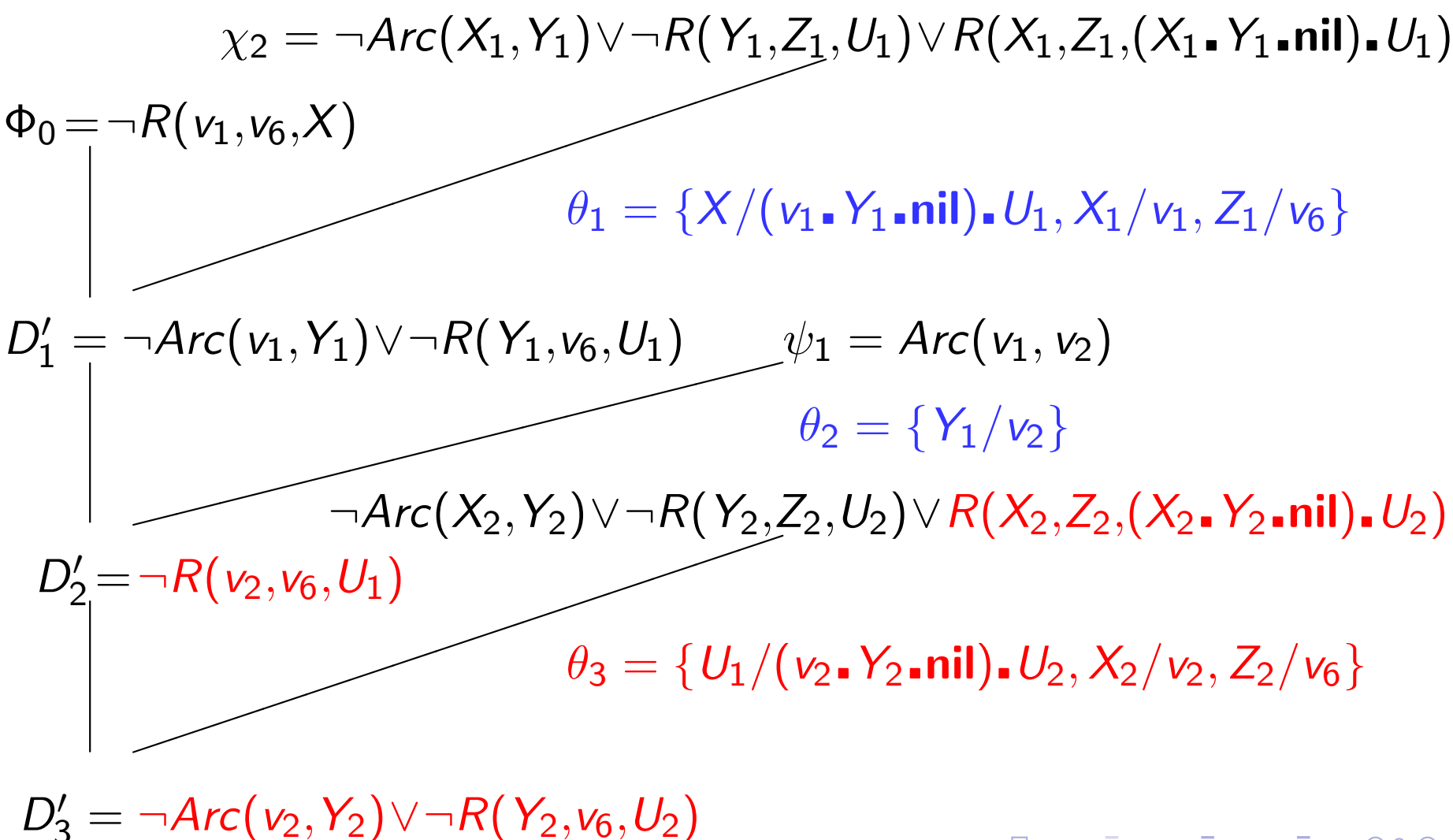
РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.



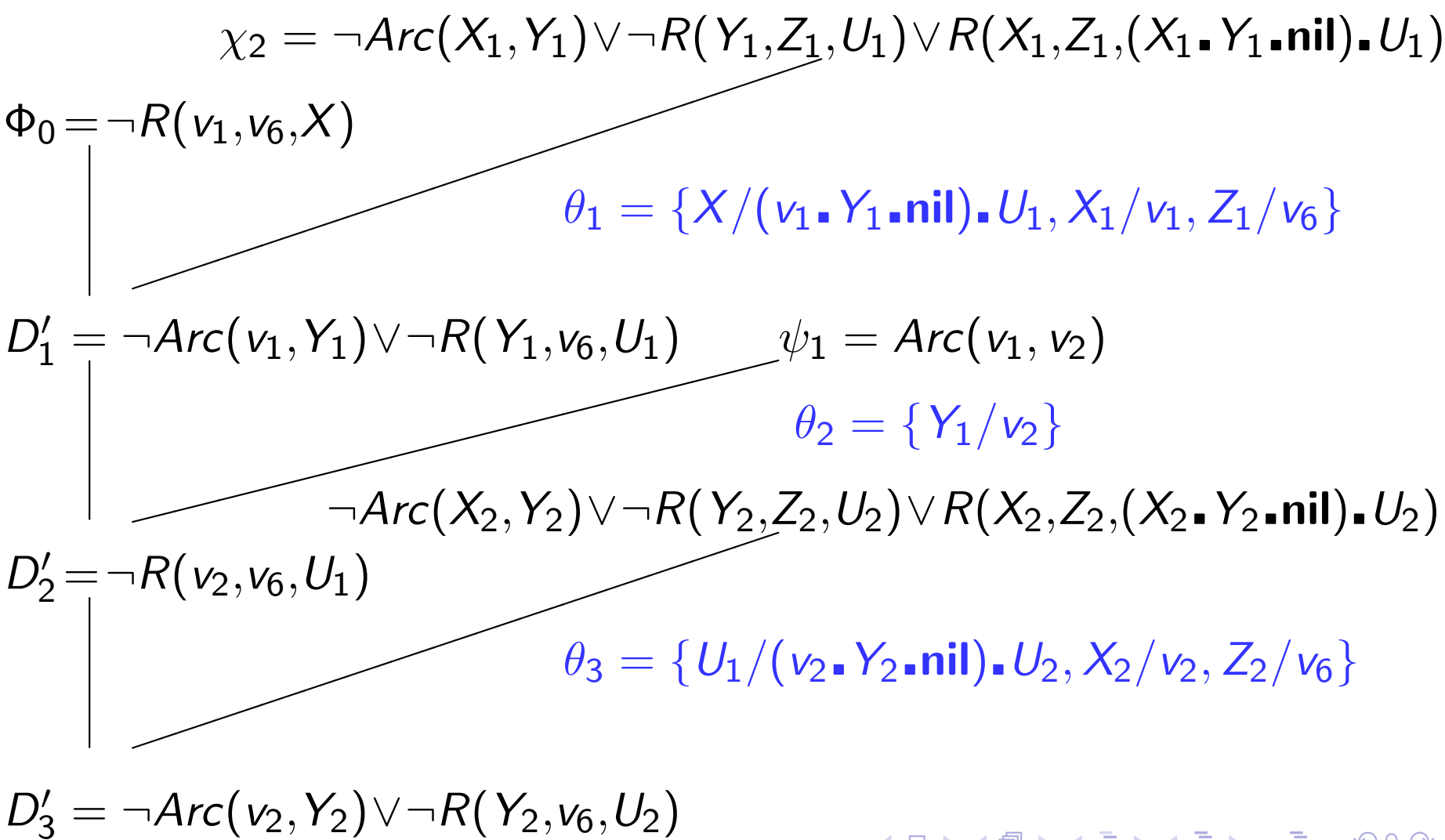
РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.



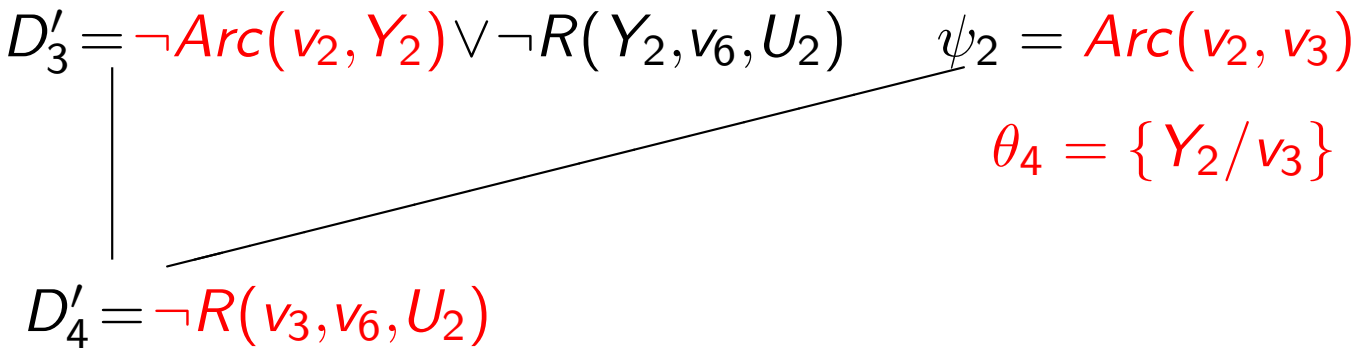
РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

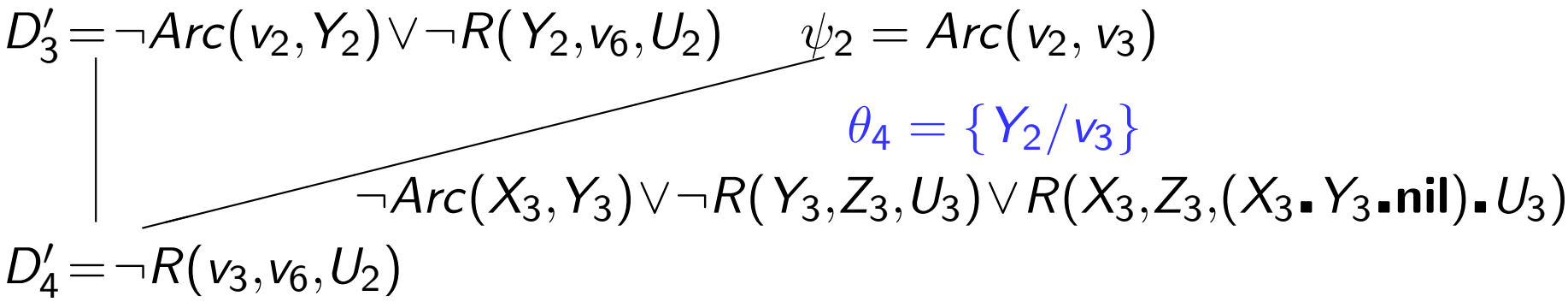
Поиск пути в графе.

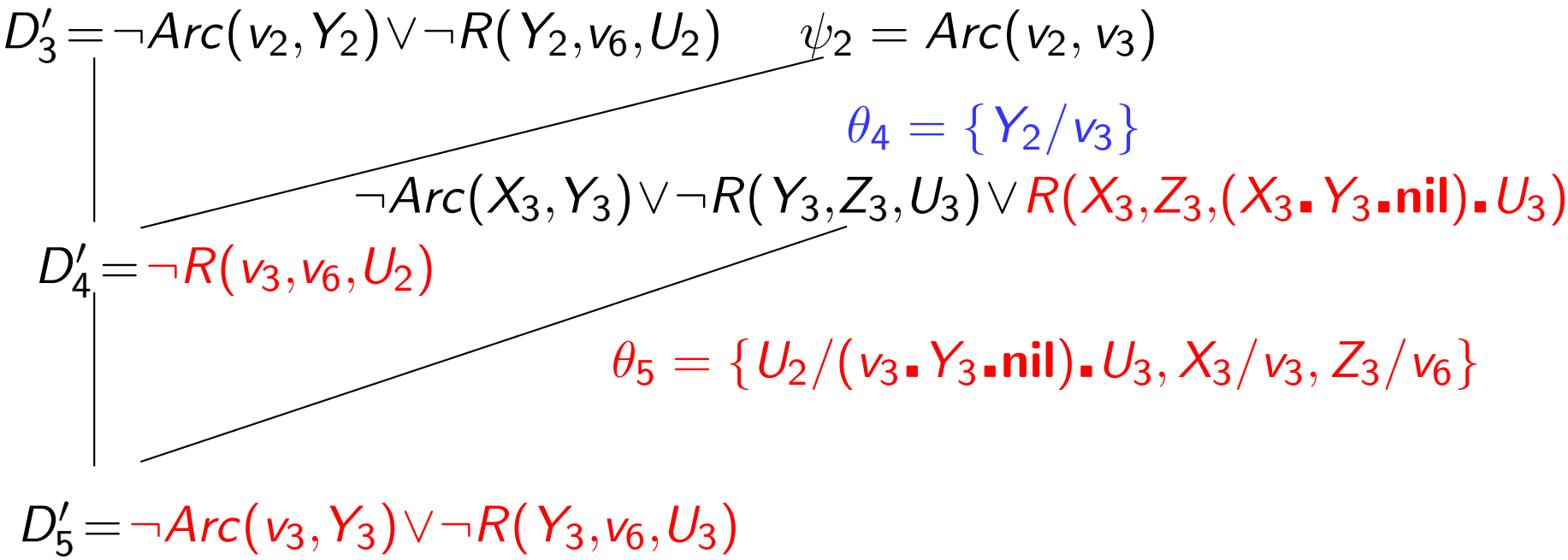


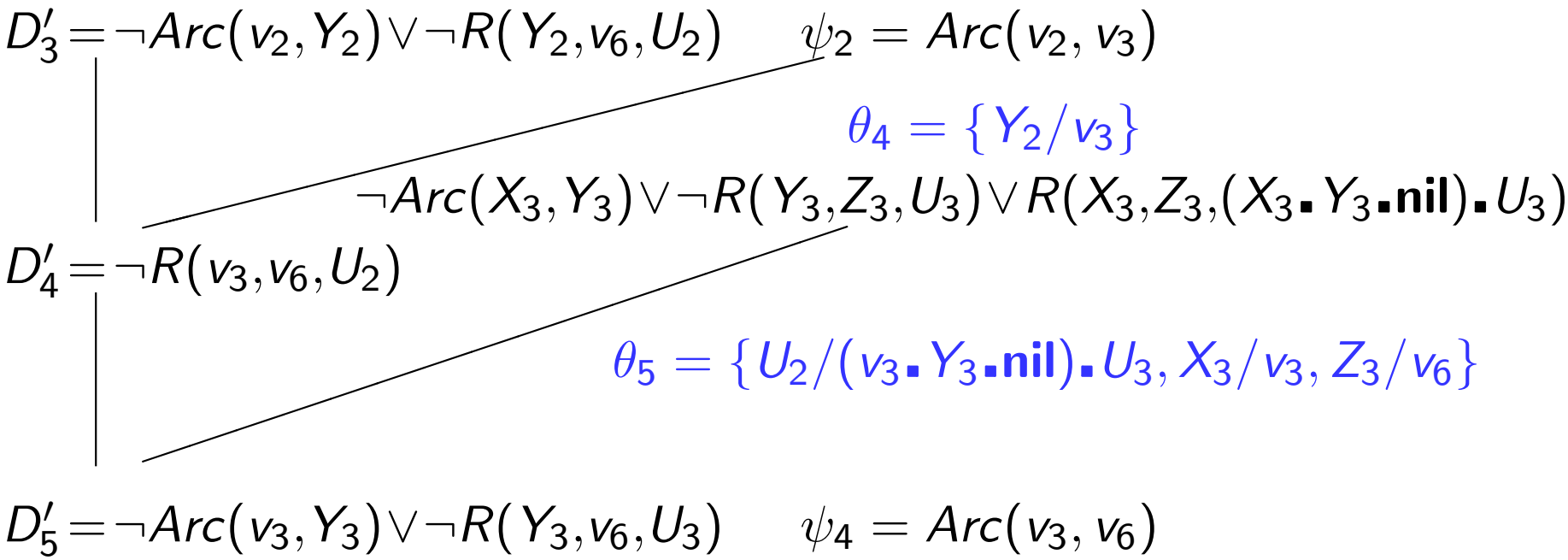
$$D_3' = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$$

$$D_3' = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2) \qquad \psi_2 = Arc(v_2, v_3)$$


$D'_3 = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$
$\psi_2 = Arc(v_2, v_3)$
$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$
$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$


$D'_3 = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$
$\psi_2 = Arc(v_2, v_3)$
$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$
$\neg Arc(X_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, Z_3, U_3) \vee R(X_3, Z_3, (X_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3)$
$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$


$D'_3 = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$
$\psi_2 = Arc(v_2, v_3)$
$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$
$\neg Arc(X_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, Z_3, U_3) \vee R(X_3, Z_3, (X_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3)$
$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$
$\theta_5 = \{U_2/(v_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\}$
$D'_5 = \neg Arc(v_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, v_6, U_3)$


$D'_3 = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$
$\psi_2 = Arc(v_2, v_3)$
$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$
$\neg Arc(X_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, Z_3, U_3) \vee R(X_3, Z_3, (X_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3)$
$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$
$\theta_5 = \{U_2/(v_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\}$
$D'_5 = \neg Arc(v_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, v_6, U_3)$
$\psi_4 = Arc(v_3, v_6)$

$D'_3 = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$ $\quad \psi_2 = Arc(v_2, v_3)$

$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$

$\neg Arc(X_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, Z_3, U_3) \vee R(X_3, Z_3, (X_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3)$

$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$

$\theta_5 = \{U_2/(v_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\}$

$D'_5 = \neg Arc(v_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, v_6, U_3)$ $\quad \psi_4 = Arc(v_3, v_6)$

$\theta_6 = \{Y_3/v_6\}$

$D'_6 = \neg R(v_6, v_6, U_3)$

$D'_3 = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$ $\quad \psi_2 = Arc(v_2, v_3)$

$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$

$\neg Arc(X_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, Z_3, U_3) \vee R(X_3, Z_3, (X_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3)$

$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$

$\theta_5 = \{U_2/(v_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\}$

$D'_5 = \neg Arc(v_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, v_6, U_3)$ $\quad \psi_4 = Arc(v_3, v_6)$

$\theta_6 = \{Y_3/v_6\}$

$D'_6 = \neg R(v_6, v_6, U_3)$ $\quad \chi_1 = R(X_4, X_4, \mathbf{nil})$

$D'_3 = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$ $\quad \psi_2 = Arc(v_2, v_3)$

$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$

$\neg Arc(X_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, Z_3, U_3) \vee R(X_3, Z_3, (X_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3)$

$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$

$\theta_5 = \{U_2/(v_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\}$

$D'_5 = \neg Arc(v_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, v_6, U_3)$ $\quad \psi_4 = Arc(v_3, v_6)$

$\theta_6 = \{Y_3/v_6\}$

$D'_6 = \neg R(v_6, v_6, U_3)$ $\quad \chi_1 = R(X_4, X_4, \mathbf{nil})$

$\theta_7 = \{X_4/v_6, U_3/\mathbf{nil}\}$

$D'_7 = \square$

$D'_3 = \neg Arc(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$ $\quad \psi_2 = Arc(v_2, v_3)$

$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$

$\neg Arc(X_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, Z_3, U_3) \vee R(X_3, Z_3, (X_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3)$

$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$

$\theta_5 = \{U_2/(v_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\}$

$D'_5 = \neg Arc(v_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, v_6, U_3)$ $\quad \psi_4 = Arc(v_3, v_6)$

$\theta_6 = \{Y_3/v_6\}$

$D'_6 = \neg R(v_6, v_6, U_3)$ $\quad \chi_1 = R(X_4, X_4, \mathbf{nil})$

$\theta_7 = \{X_4/v_6, U_3/\mathbf{nil}\}$

$D'_7 = \square$

Вывод успешно завершен.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Итак, система дизъюнктов S противоречива, т. е. маршрут из вершины v_1 в вершину v_6 существует. Но каков этот маршрут?

Рассмотрим **последовательность** вычисленных унификаторов

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \{X/(v_1 . Y_1 . \mathbf{nil}) . U_1, X_1/v_1, Z_1/v_6\} \\
\theta_2 &= \{Y_1/v_2\} \\
\theta_3 &= \{U_1/(v_2 . Y_2 . \mathbf{nil}) . U_2, X_2/v_2, Z_2/v_6\} \\
\theta_4 &= \{Y_2/v_3\} \\
\theta_5 &= \{U_2/(v_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\} \\
\theta_6 &= \{Y_3/v_6\} \\
\theta_7 &= \{X_4/v_6, U_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}$$

и применим их к целевой переменной X:

$$X\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_6\theta_7 = ???$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Итак, система дизъюнктов S противоречива, т. е. маршрут из вершины v_1 в вершину v_6 существует. Но каков этот маршрут?

Рассмотрим **последовательность** вычисленных унификаторов

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \{X/(v_1 . Y_1 . \mathbf{nil}) . U_1, X_1/v_1, Z_1/v_6\} \\
\theta_2 &= \{Y_1/v_2\} \\
\theta_3 &= \{U_1/(v_2 . Y_2 . \mathbf{nil}) . U_2, X_2/v_2, Z_2/v_6\} \\
\theta_4 &= \{Y_2/v_3\} \\
\theta_5 &= \{U_2/(v_3 . Y_3 . \mathbf{nil}) . U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\} \\
\theta_6 &= \{Y_3/v_6\} \\
\theta_7 &= \{X_4/v_6, U_3/\mathbf{nil}\}
\end{aligned}$$

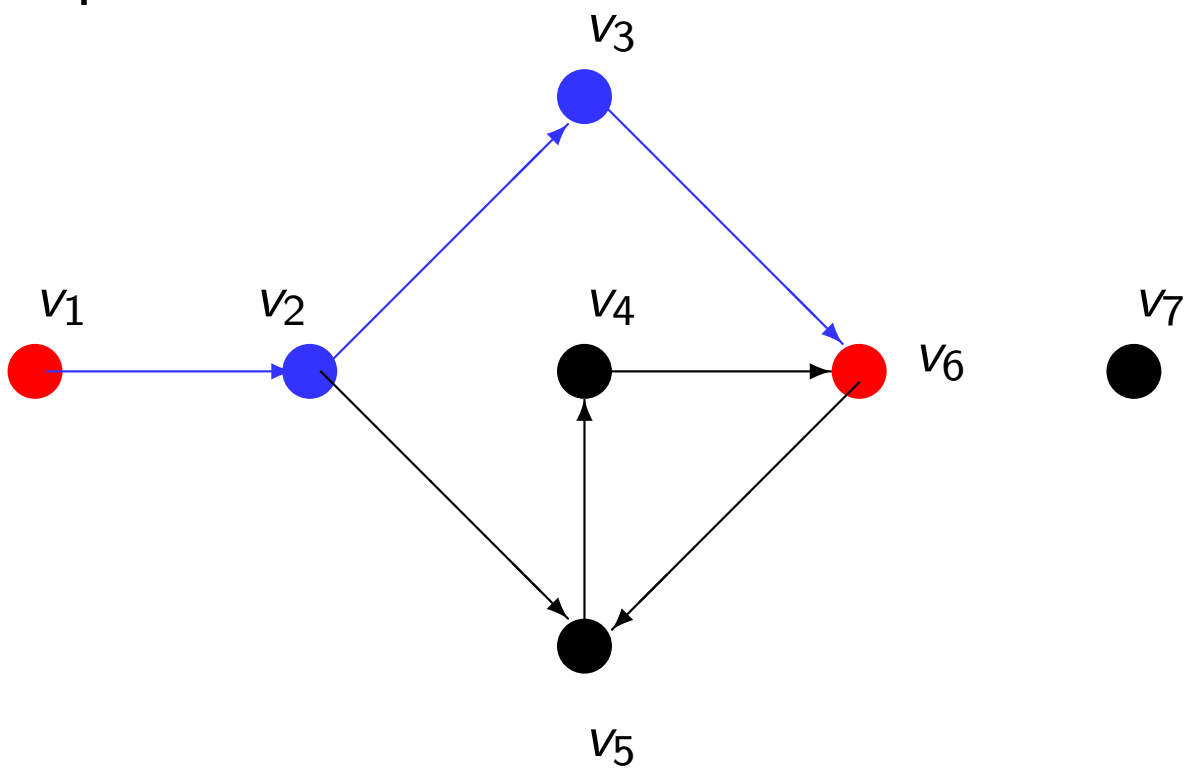
и применим их к целевой переменной X:

$$(v_1 . v_2 . \mathbf{nil}) . (v_2 . v_3 . \mathbf{nil}) . (v_3 . v_6 . \mathbf{nil}) . \mathbf{nil}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

граф **Г**



$$X\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7 = (v_1 \centerdot v_2 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (v_2 \centerdot v_3 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot (v_3 \centerdot v_6 \centerdot \mathbf{nil}) \centerdot \mathbf{nil}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Нам опять повезло, и метод резолюций вычислил правильный ответ.

Неужели так хорошо и красиво бывает всегда?

Рассмотрим еще одну задачу.

Где мы проведем вечер?

Если вечером будет идти дождь, то мы пойдем в кино, а если дождя не будет, то мы пойдем в парк. Где же мы проведем вечер?

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?

Введем необходимые константы и предикаты:

- *кино* и *парк* — константы;
- $R^{(0)}$ — 0-местный предикатный символ, обозначающий утверждение «вечером пойдет дождь»;
- $E^{(1)}$ — 1-местный предикатный символ; $E(X)$ обозначает утверждение «этим вечером наше развлечение — X».

База знаний:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= R \rightarrow E(\textit{кино}), \\ \varphi_2 &= \neg R \rightarrow E(\textit{парк}), \end{aligned}$$

Запрос: $Q(X) = E(X)$.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?

1. $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \exists X\ E(X)$?
2. $\models \varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \exists X\ E(X)$?
3. Противоречива ли $\neg\Big(\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \exists X\ E(X)\Big)$?
3. Противоречива ли система

$$S = \{ \begin{array}{l} D_1 = \neg R \vee E(\textit{кино}), \\ D_2 = R \vee E(\textit{парк}), \\ D_0 = \neg E(X) \end{array} \}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?

$$D_0 = \neg E(X)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?

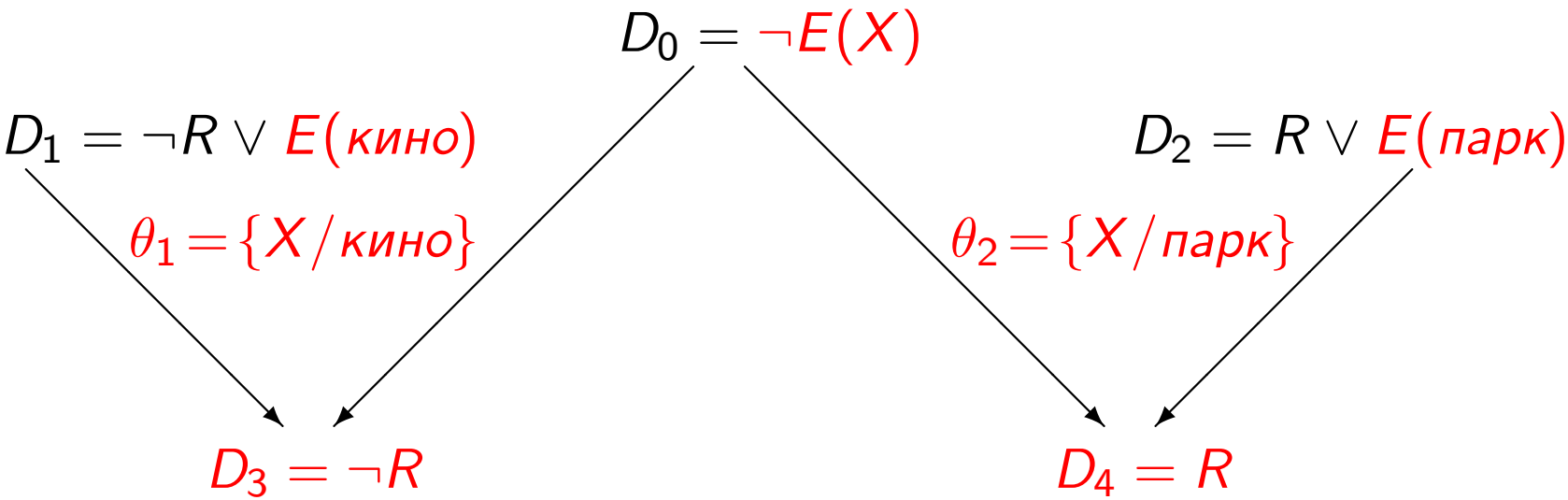
$$D_0 = \neg E(X)$$

$D_1 = \neg R \vee E(\textit{кино})$

$D_2 = R \vee E(\textit{парк})$

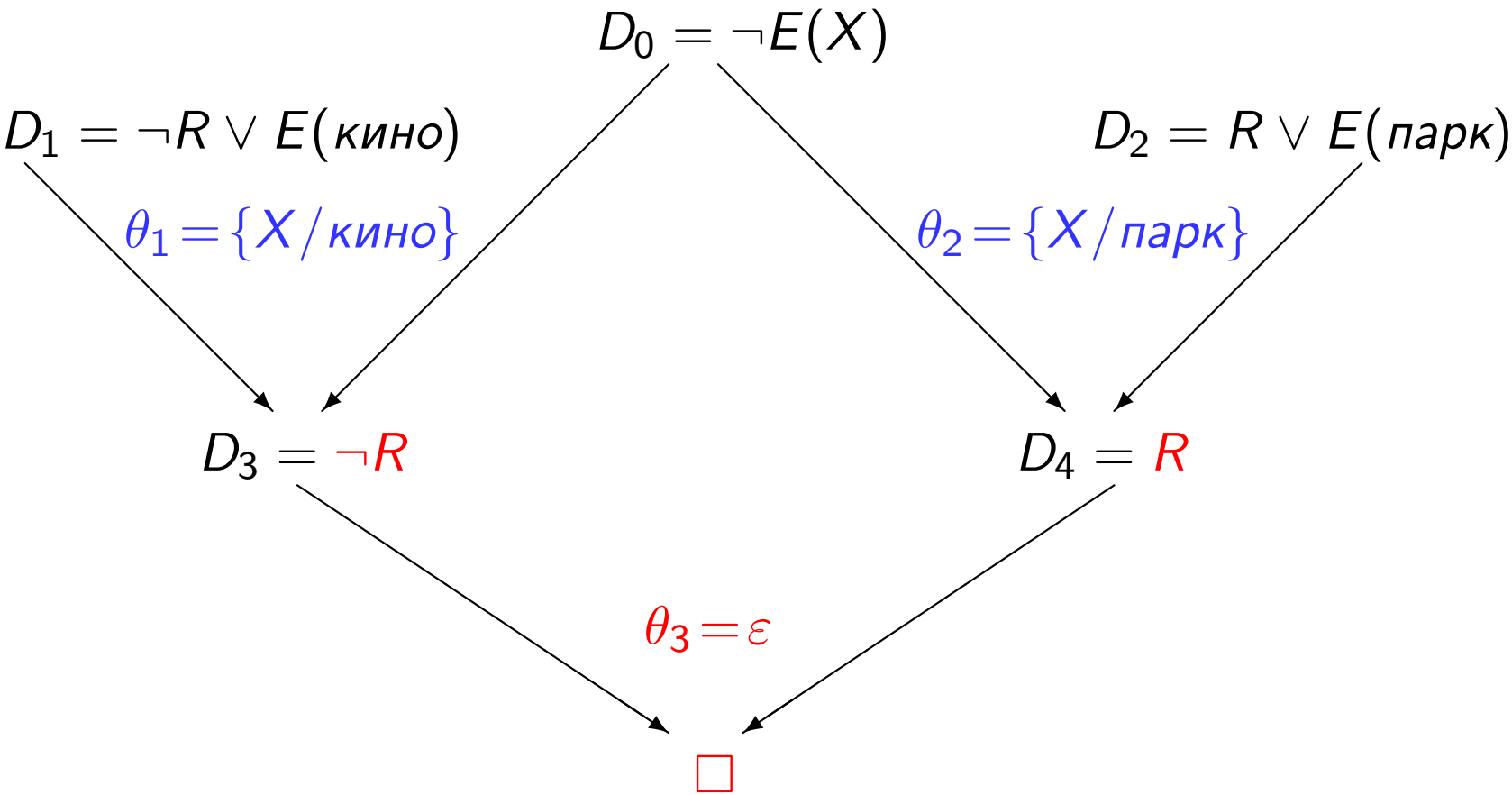
РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?



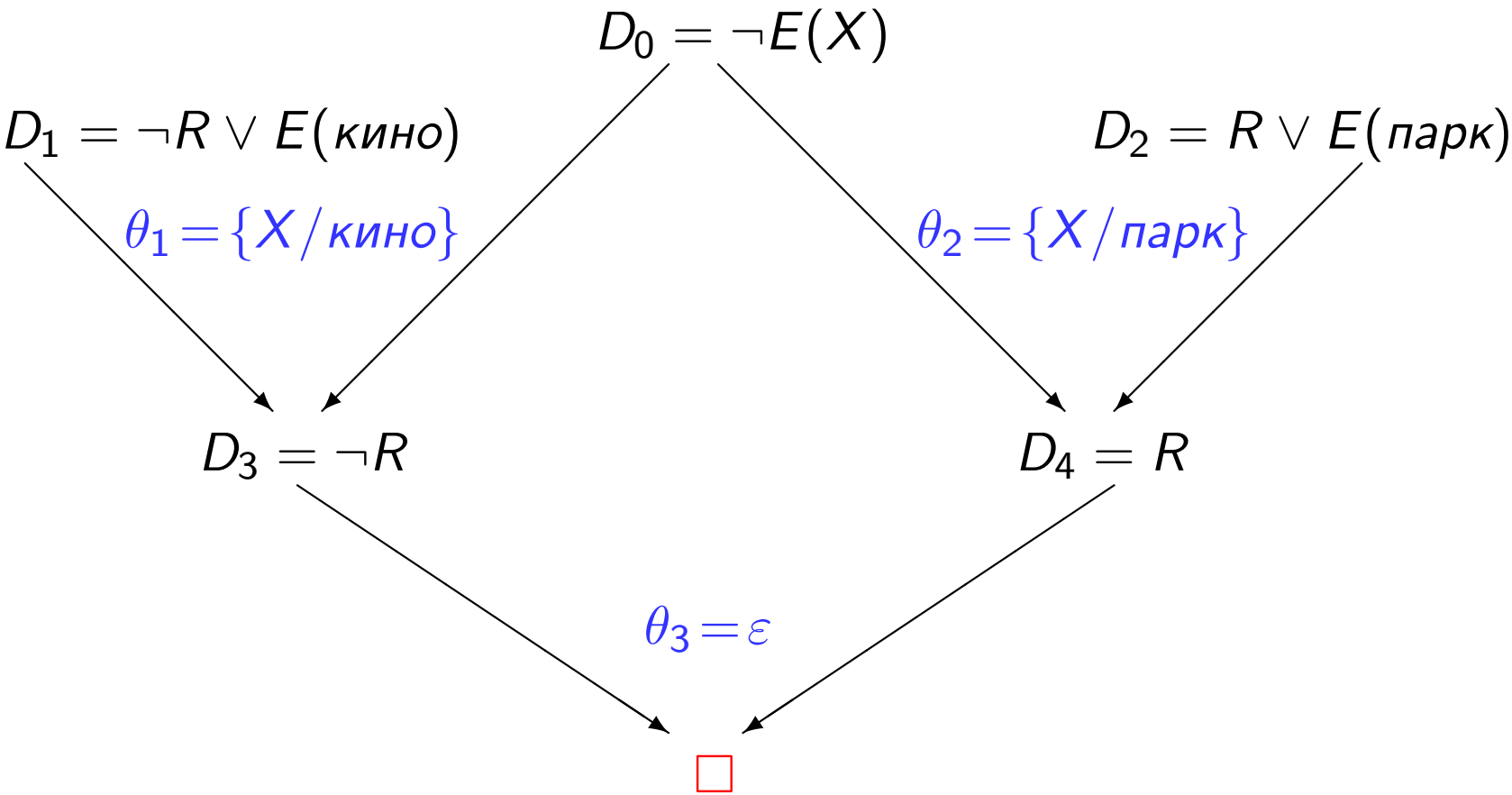
РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?



РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?



Резолютивное опровержение построено

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?

Построив резолютивное опровержение, мы можем быть уверены, что

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \exists X\ E(X),$$

т. е. **куда-то** вечером мы пойдем.

Но куда же мы пойдем?

Поскольку в этом выводе вместо целевой переменной X были одновременно (параллельно) подставлены разные термы *кино* и *парк*, то все, что мы можем сказать — это $X \in \{\textit{кино}, \textit{парк}\}$.

Мы сумели доказать существование требуемого предмета X, но не сумели вычислить его конкретное значение. Такие доказательства называются неконструктивными .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Чтобы резолютивный вывод позволял проводить вычисления, он должен быть конструктивным .

Но, как показывает пример «вечернего развлечения», не все противоречивые системы дизъюнктов допускают **конструктивное** резолютивное опровержение. Значит, для вычислительных целей нужно выбрать такой подкласс формул логики предикатов, для которых резолютивное опровержение оказывается конструктивным.

Заметим, что при решении задач «любовного квадрата» и «маршрута в графе» мы построили линейное резолютивное опровержение, а при решении задачи «вечернего развлечения» линейное резолютивное опровержение построить в принципе невозможно.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Значит, для того, чтобы использовать метод резолюций как средство вычислений, нужно ограничиться линейным резолютивным выводом. Удалось обнаружить широкий класс формул, для которых резолютивное опровержение всегда имеет линейную структуру. Это — хорновские дизъюнкты .

Определение

Литера L называется положительной , если L — это атом.
Литера L называется отрицательной , если $L = \neg A$, где A — это атом.

Дизъюнкт $D = L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n$ называется хорновским дизъюнктом (horn clause), если среди литер $L_1, L_2, \ldots, L_n$ имеется не более одной **положительной** литеры.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Примеры.

Хорновские дизъюнкты:

$$
\begin{aligned}
D_1' &= \neg L(\mathit{Паша}, Y) \vee \neg L(X, Y) \vee L(\mathit{Паша}, X),\\
D_2' &= \neg \mathit{Arc}(v_1, Y_1) \vee \neg R(Y_1, v_6, U_1),\\
D_3' &= \mathit{Arc}(v_6, v_4),\\
D_4' &= \neg R \vee E(\mathit{кино}).
\end{aligned}
$$

А вот этот дизъюнкт — нехорновский:

$$D'' = R \vee E(\mathit{парк}).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Хорновский дизъюнкт

$$A_0 \vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n$$

равносилен формуле

$$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \rightarrow A_0,$$

которая выражает утверждение:

«Если выполнены условия A_1 и A_2 и $\ldots$ и A_n, то верно A_0».

В подавляющем большинстве случаев именно в такой форме мы выражаем наши позитивные знания (условные и безусловные).

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Хорновский дизъюнкт

$$\neg C_1 \ \vee \ \neg C_2 \ \vee \cdots \vee \ \neg C_m$$

равносилен формуле

$$\neg(C_1 \ \& \ C_2 \ \& \ldots \& \ C_m),$$

и это есть отрицание запроса $Q(X_1, \ldots, X_k) = C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m$, который выражает требование:

«Найти такие значения переменных $X_1, \ldots, X_k$, которые удовлетворяют условиям C_1 и C_2 и $\ldots$ и C_m».

Большинство наших вопросов представлено именно в такой форме.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Резолютивное опровержение систем хорновских дизъюнктов — это вычисление ответов на простые запросы, обращенные к базе позитивных знаний.

Базы позитивных знаний (хорновские дизъюнкты) становятся, таким образом,

ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ .

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 11.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 12.

Хорновские логические программы: синтаксис. Декларативная семантика логических программ.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

ПАРАДИГМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Императивное программирование : программа — это описание последовательности операторов (команд).
Языки: Assembler, Pascal, C, Java.

Функциональное программирование : программа — это система уравнений, описывающая вычисляемую функцию.
Языки: Lisp, ML, Haskel, Hope.

Логическое программирование : программа — это множество формул, описывающих условия решаемой задачи.
Языки: Prolog, Datalog, Godel.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Синтаксис логических программ

Пусть $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ — некоторая сигнатура, в которой определяются термы и атомы.

«заголовок» ::= «атом»

«тело» ::= «атом» | «тело», «атом»

«правило» ::= «заголовок» $\leftarrow$ «тело»;

«факт» ::= «заголовок»;

«утверждение» ::= «правило» | «факт»

«программа» ::= «пусто» | «утверждение» «программа»

«запрос» ::= $\square$ | ? «тело»

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Примеры

Правило: $\underbrace{L(\textit{паша}, Y)}_{\text{заголовок}} \leftarrow \underbrace{L(Y, X),\ L(\textit{паша}, X)}_{\text{тело}};$

Факт: $L(\textit{даша}, \textit{саша})$;

Запрос (целевое утверждение):

$$? \ \underbrace{\text{Умный}(X)}_{\text{подцель}}, \ \underbrace{\text{Добрый}(X)}_{\text{подцель}}, \ \underbrace{\text{Красивый}(X)}_{\text{подцель}}, \ \underbrace{\text{Любит}(X, \textit{меня})}_{\text{подцель}}$$

Здесь X — целевая переменная .

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Терминология

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, D — программное утверждение, а θ — подстановка. Тогда

- $D\theta$ — пример программного утверждения D,
- если θ — переименование, то $D\theta$ — вариант программного утверждения D,
- если $Var_{D\theta} = \emptyset$, то $D\theta$ — основной пример программного утверждения D,
- $[D]$ — множество всех основных примеров программного утверждения D,
- $[\mathcal{P}]$ — множество всех основных примеров всех утверждений программы $\mathcal{P}$.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Терминология

Пусть $G = ?C_1, C_2, \ldots, C_m$ — запрос. Тогда

- атомы $C_1, C_2, \ldots, C_m$ называются подцелями запроса G,
- переменные множества $\bigcup_{i=1}^{m} Var_{C_i}$ называются целевыми переменными ,
- запрос $\square$ называется пустым запросом ,
- запросы будем также называть целевыми утверждениями .

Для удобства обозначения условимся в дальнейшем факты A; рассматривать как правила $A \leftarrow$; с заголовком A и пустым телом.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Примеры

Пусть $D = \ elem(X, Y \centerdot Z) \ \leftarrow \ elem(X, Z)$; — программное утверждение. Тогда

$D' = D\{X/Y, Z/\mathbf{nil}\} = \ elem(Y, Y \centerdot \mathbf{nil}) \ \leftarrow \ elem(Y, \mathbf{nil})$;
пример программного утверждения D,

$D'' = \ elem(X', Y' \centerdot Z') \ \leftarrow \ elem(X', Z')$;
вариант программного утверждения D,

$D''' = D\{X/1, Y/2, Z/\mathbf{nil}\} = \ elem(1, 2 \centerdot \mathbf{nil}) \ \leftarrow \ elem(1, \mathbf{nil})$;
основной пример программного утверждения D,

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Пример логической программы

$$
\begin{array}{lcl}
si\_ro(X_s, X_s, V, A, \mathbf{nil}) & \leftarrow & in(X_s, V, V_1); \\
si\_ro(X_s, X_d, V, A, Z) & \leftarrow & in(X_s, V, V_1), in(X_d, V_1, V_2), \\
 & & R(X_s, X_d, V_2, A, Z);
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
R(X_s, X_d, V, A, (X_s \,.\, X_d \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, \mathbf{nil}) & \leftarrow & in(X_s \,.\, X_d \,.\, \mathbf{nil}, A, A_1); \\
R(X_s, X_d, V, A, (X_s \,.\, Y \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, Z) & \leftarrow & in(Y, V, V_1), \\
 & & in(X_s \,.\, Y \,.\, \mathbf{nil}, A, A_1), \\
 & & R(Y, X_d, V_1, A_1, Z);
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
in(X, X \,.\, Y, Y); & & \\
in(X, Z \,.\, Y, Z \,.\, V) & \leftarrow & in(X, Y, V);
\end{array}
$$

и запроса к ней

$$? \; si\_ro(4, 2, 1.2.3.4.\mathbf{nil}, (1.2.\mathbf{nil}).\,(2.3.\mathbf{nil}).(2.4.\mathbf{nil}).\,(3.1.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, Z)$$

Что же вычислит программа в ответ на этот запрос?

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Как нужно понимать логические программы?

Главная особенность логического программирования — полисемантичность : одна и та же логическая программа имеет две равноправные семантики, и поэтому человек–программист и компьютер–вычислитель имеют две разные точки зрения на программу.

Программисту важно понимать, **ЧТО** вычисляет программа. Такое понимание программы называется декларативной семантикой программы.

Компьютеру важно «знать», **КАК** проводить вычисление программы. Такое понимание программы называется операционной семантикой программы.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Как нужно понимать логические программы?

Декларативная семантика	Операционная семантика
Правило $A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$;	
Если выполнены условия $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то справедливо и утверждение A_0.	Чтобы решить задачу A_0, достаточно решить задачи $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Факт A_0;	
Утверждение A_0 считается верным.	Задача A_0 объявляется решенной.
Запрос $?C_1, C_2, \ldots, C_m$	
При каких значениях целевых переменных будут верны все отношения $C_1, C_2, \ldots, C_m$?	Решить список задач $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Пример истолкования логической программы

$$\mathcal{P}: \quad elem(X, X \centerdot L);$$
$$elem(X, Y \centerdot L) \quad \leftarrow \quad elem(X, L);$$

Декларативная семантика	Операционная семантика
1. Всякий предмет X входит в состав того списка, заголовком которого он является	1. Считается решенной задача поиска предмета X в любом списке, содержащем X в качестве заголовка.
2. Если предмет X содержится в хвосте списка, то X содержится и в самом списке.	2. Чтобы обнаружить предмет X в списке, достаточно найти его в хвосте этого списка.

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Более строгое описание семантик требует привлечения аппарата математической логики.

Логические программы и логические формулы

Каждому утверждению логической программы сопоставим логическую формулу:

Правило: $D' = A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$;

$$D' = \forall x_1 \ldots \forall x_k (A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \rightarrow A_0), \text{ где } \{x_1, \ldots, x_k\} = \bigcup_{i=0}^{n} Var_{A_i}$$

Факт: $D'' = A$;

$$D'' = \forall x_1 \ldots \forall x_k A, \text{ где } \{x_1, \ldots, x_k\} = Var_A$$

Запрос: $G = ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

С точки зрения декларативной семантики, программные утверждения D и запросы G — это логические формулы, программа $\mathcal{P}$ — это множество формул (база знаний), а правильный ответ на запрос — это такие значения переменных (подстановка), при которой запрос оказывается логическим следствием базы знаний.

Определение (правильного ответа)

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, G — запрос к $\mathcal{P}$ с множеством целевых переменных $Y_1, \ldots, Y_k$.
Тогда всякая подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ называется ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$.
Ответ $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ называется правильным ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$, если

$$\mathcal{P} \models \forall Z_1 \ldots \forall Z_N G\theta, \qquad \text{где } \{Z_1, \ldots, Z_N\} = \bigcup_{i=1}^{k} Var_{t_i}.$$

Теперь вопрос: как искать правильные ответы?

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Пусть $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ — некоторая сигнатура.
Рассмотрим

- H_σ — эрбрановский универсум сигнатуры σ (множество основных термов);
- B_σ — эрбрановский базис сигнатуры σ (множество основных атомов);
- эрбрановские интерпретации сигнатуры σ:

$$I \subseteq B_\sigma, \qquad I = \{A \ : \ A \in B_\sigma, \ I \models A\}$$

Определение (модели для логической программы)

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, I — H-интерпретация.
Тогда I называется эрбрановской моделью для программы $\mathcal{P}$, если для любого программного утверждения D, $D \in \mathcal{P}$, верно

$$I \ \models \ D$$

(сокращенная запись $I \ \models \ \mathcal{P}$).

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Лемма (о модели для логической программы)

Эрбрановская интерпретация I является моделью для логической программы $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда для любого основного примера программного утверждения $D' = A'_0 \leftarrow A'_1, \ldots, A'_n,\ D' \in [\mathcal{P}]$ верно

$$\{A'_1, \ldots, A'_n\} \subseteq I \ \Rightarrow\ A'_0 \in I$$

Доказательство.

(**Необходимость**) Пусть $D \in \mathcal{P}$ и $D' = D\theta$ — основной пример. Тогда I — модель для $\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ $I \models D$ $\Rightarrow$ $I \models D'$ $\Rightarrow$ $I \models A'_1 \& \ldots \& A'_n \rightarrow A'_0$ $\Rightarrow$ если $I \models A'_1 \& \ldots \& A'_n$, то $I \models A'_0$ $\Rightarrow$ если $I \models A'_1,\ \ldots\ I \models A'_n$, то $I \models A'_0$ $\Rightarrow$ если $\{A'_1, \ldots, A'_n\} \subseteq I$, то $A'_0 \in I$.

(**Достаточность**) Сами. □

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Следствие

Каждая хорновская логическая программа $\mathcal{P}$ имеет хотя бы одну эрбрановскую модель.

Доказательство.

Самостоятельно. (Покажите, что в качестве одной из моделей всегда можно взять максимальную интерпретацию $I = B_{\mathcal{P}}$).

Пример.

Программа

$$\begin{aligned} P(X, f(X)) &\leftarrow R(X); \\ R(f(Y)) &\leftarrow P(Y); \end{aligned}$$

имеет H-модель $I = \emptyset$.

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Лемма (о пересечении моделей)

Если H-интерпретации I_1 и I_2 являются моделями для логической программы $\mathcal{P}$, то H-интерпретация $I_0 = I_1 \cap I_2$ также является моделью для $\mathcal{P}$.

Доказательство.

Воспользуемся леммой о модели для логической программы. Пусть $D' = A'_0 \leftarrow A'_1, \ldots, A'_n,\ D' \in [\mathcal{P}]$. Тогда

$$\{A'_1, \ldots, A'_n\} \subseteq I_0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{A'_1, \ldots, A'_n\} \subseteq I_1 \\ \{A'_1, \ldots, A'_n\} \subseteq I_2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A'_0 \in I_1 \\ A'_0 \in I_2 \end{array} \right. \Rightarrow A'_0 \in I_0$$

□

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Теорема (о наименьшей модели)

Всякая хорновская логическая программа $\mathcal{P}$ имеет наименьшую эрбрановскую модель.

Доказательство.

1. Каждая хорновская логическая программа $\mathcal{P}$ имеет хотя бы одну эрбрановскую модель.
2. Рассмотрим множество $\mathcal{I}_\mathcal{P}$ всех H-моделей логической программы $\mathcal{P}$. Как было показано, $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Поэтому, согласно лемме о пересечении H-моделей, интерпретация $M_\mathcal{P} = \bigcap\limits_{I \in \mathcal{I}_\mathcal{P}} I$ также является H-моделью программы $\mathcal{P}$.
   При этом для любой H-модели I верно $M_\mathcal{P} \subseteq I$. Таким образом, $M_\mathcal{P}$ — это наименьшая эрбрановская модель для программы $\mathcal{P}$.

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Теорема (характеристическое свойство наименьшей модели)

Пусть $G = ?A$ — запрос к хорновской логической программе $\mathcal{P}$.
Пусть $A_0 = A\theta$ — основной пример атома A. Тогда

$$\mathcal{P} \models A_0 \iff A_0 \in M_{\mathcal{P}}.$$

Доказательство.

Допустим $\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_N\}$. Тогда

$\mathcal{P} \models A_0 \iff \models (D_1 \& \ldots \& D_N) \to A_0 \iff$

$S = \{D_1, \ldots, D_N, \neg A_0\}$ — противоречивая система $\iff$

S не имеет H-моделей (теорема о H-интерпретациях) $\iff$

для любой H-интерпретации I: $I \models \mathcal{P}$ влечет $A_0 \in I$ $\iff$

$A_0 \in \bigcap\limits_{I \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}} I = M_{\mathcal{P}}$ (теорема о наименьшей модели) $\square$

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Теорема (об основном правильном ответе)

Пусть $G = ?C_1, C_2, \ldots, C_m$ — запрос к хорновской логической программе $\mathcal{P}$. Пусть $Y_1, \ldots, Y_k$ — целевые переменные, $t_1, \ldots, t_k$ — основные термы.
Тогда подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ является правильным ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $\{C_1\theta, \ldots, C_m\theta\} \subseteq M_{\mathcal{P}}$.

Доказательство.

Самостоятельно. (На основании характеристического свойства наименьшей модели).

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

ИТОГИ

- Логическая программа $\mathcal{P}$ — это база знаний, состоящая из законов (фактов и правил), описывающих устройство некоторого математического мира (задачи).
- В этом математическом мире истинным считается то и только то, что удовлетворяет законам базы знаний — ничего лишнего.
- Этот математический мир — наименьшая эрбрановская модель $M_{\mathcal{P}}$.
- Правильным ответом на запрос к базе знаний считается такой ответ, который логически следует из базы знаний (программы).
- Все правильные ответы на любые запросы к логической программе $\mathcal{P}$ нужно искать в наименьшей модели $M_{\mathcal{P}}$.

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Теперь ясно, каков смысл логических программ, какие ответы на запросы к программ считаются правильными, и где находятся правильный ответы. Математику этого достаточно, для того чтобы создавать программы.

Но этого совершенно недостаточно вычислительному устройству, для того чтобы вычислять ответы на запросы к программам.

Теперь нам нужно выяснить,

КАК ВЫЧИСЛЯТЬ ОТВЕТЫ НА ЗАПРОСЫ?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 12.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 12.

Хорновские логические программы: синтаксис. Декларативная семантика логических программ. Операционная семантика логических программ: SLD–резолютивные вычисления.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

ПАРАДИГМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Императивное программирование : программа — это автомат, описывающий последовательности операторов (команд).
Математическая модель: машины Тьюринга–Поста.
Языки: **Assembler, Pascal, C, Java**.

Функциональное программирование : программа — это система уравнений, описывающая вычисляемую функцию.
Математическая модель: λ-исчисление Черча–Клини, уравнения Эрбрана–Геделя.
Языки: **Lisp, ML, Haskell**.

Логическое программирование : программа — это множество формул, описывающих условия решаемой задачи.
Математическая модель: логические исчисления.
Языки: **Prolog, Godel**.

ПАРАДИГМА ЛОГИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Декларативная семантика

ПРОГРАММА

Операционная семантика

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ = ПРОГРАММА

Декларативная семантика $\Longleftrightarrow$ **Операционная семантика**

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Синтаксис логических программ

Пусть $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ — некоторая сигнатура, в которой определяются термы и атомы.

«заголовок» ::= «атом»

«тело» ::= «атом» | «тело», «атом»

«правило» ::= «заголовок» $\leftarrow$ «тело»;

«факт» ::= «заголовок»;

«утверждение» ::= «правило» | «факт»

«программа» ::= «пусто» | «утверждение» «программа»

«запрос» ::= $\square$ | ? «тело»

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Примеры

Правило: $\underbrace{L(\textit{паша}, Y)}_{\text{заголовок}} \leftarrow \underbrace{L(Y, X),\ L(\textit{паша}, X)}_{\text{тело}};$

Факт: $L(\textit{даша}, \textit{саша})$;

Запрос (целевое утверждение):

$$? \ \underbrace{\text{Умный}(X)}_{\text{подцель}}, \ \underbrace{\text{Добрый}(X)}_{\text{подцель}}, \ \underbrace{\text{Красивый}(X)}_{\text{подцель}}, \ \underbrace{\text{Любит}(X, \textit{меня})}_{\text{подцель}}$$

Здесь X — целевая переменная .

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Пример логической программы

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}: \quad & \mathit{elem}(X, X \centerdot L); \\
& \mathit{elem}(X, Y \centerdot L) \leftarrow \mathit{elem}(X, L); \\
& \mathit{concat}(\mathbf{nil}, Y, Y); \\
& \mathit{concat}(U \centerdot X, Y, U \centerdot Z) \leftarrow \mathit{concat}(X, Y, Z); \\
& \mathit{common}(X, Y) \leftarrow \mathit{elem}(U, X), \mathit{elem}(U, Y);
\end{aligned}
$$

и запроса к ней

$$
? \ \mathit{concat}(L1, L2, \text{п} \centerdot \text{р} \centerdot \text{о} \centerdot \text{г} \centerdot \text{р} \centerdot \text{а} \centerdot \text{м} \centerdot \text{м} \centerdot \text{а} \centerdot \mathbf{nil}), \mathit{common}(L1, L2);
$$

Какой ответ мы ожидаем получить на этот запрос?

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Пример логической программы

```
simp_path(X,X,Vert,Arc,nil) ← elem(X,Vert,U);

simp_path(X,Y,V,A,Path)     ← elem(X,V,U1),elem(Y,U1,U2),
                              find_path(X,Y,U2,A,P);

find_path(X,Y,V,A,(X.Y.nil).nil) ← elem(X.Y.nil,A,A1);

find_path(X,Y,V,A,(X.Z.nil).Path) ← elem(Z,V,V1),
                                    elem(X.Z.nil,A,A1),
                                    find_path(Z,Y,V1,A1,Path);
elem(X,X.L1,L1);

elem(X,Y.L1,Y.L1) ← elem(X,L1,L2);
```

и запроса к ней

```
?simp_path(4,2,1.2.3.4.nil,(1.2.nil).(2.3.nil).(2.4.nil).(3.1.nil).nil,X)
```

Что же вычислит программа в ответ на этот запрос?

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Как нужно понимать логические программы?

Главная особенность логического программирования — полисемантичность: одна и та же логическая программа имеет две равноправные семантики, два смысла.
Человек–программист и компьютер–вычислитель имеют две разные точки зрения на программу.

Программисту важно понимать, **ЧТО** вычисляет программа. Такое понимание программы называется декларативной семантикой программы.

Компьютеру важно «знать», **КАК** проводить вычисление программы. Такое понимание программы называется операционной семантикой программы.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Как нужно понимать логические программы?

Декларативная семантика	Операционная семантика
Правило $A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$;	
Если выполнены условия $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то справедливо и утверждение A_0.	Чтобы решить задачу A_0, достаточно решить задачи $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Факт A_0;	
Утверждение A_0 считается верным.	Задача A_0 объявляется решенной.
Запрос $?C_1, C_2, \ldots, C_m$	
При каких значениях целевых переменных будут верны все отношения $C_1, C_2, \ldots, C_m$?	Решить список задач $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Пример истолкования логической программы

$$\mathcal{P}: \quad elem(X, X \centerdot L);$$
$$elem(X, Y \centerdot L) \quad \leftarrow \quad elem(X, L);$$

Декларативная семантика	Операционная семантика
1. Всякий предмет X входит в состав того списка, заголовком которого он является	1. Считается решенной задача поиска предмета X в любом списке, содержащем X в качестве заголовка.
2. Если предмет X содержится в хвосте списка, то X содержится и в самом списке.	2. Чтобы обнаружить предмет X в списке, достаточно найти его в хвосте этого списка.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Терминология

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, D — программное утверждение, а θ — подстановка. Тогда

- $D\theta$ — пример программного утверждения D,
- если θ — переименование, то $D\theta$ — вариант программного утверждения D,
- если $Var_{D\theta} = \emptyset$, то $D\theta$ — основной пример программного утверждения D,
- $[D]$ — множество всех основных примеров программного утверждения D,
- $[\mathcal{P}]$ — множество всех основных примеров всех утверждений программы $\mathcal{P}$.

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Терминология

Пусть $G = ?C_1, C_2, \ldots, C_m$ — запрос. Тогда

- атомы $C_1, C_2, \ldots, C_m$ называются подцелями запроса G,
- переменные множества $\bigcup_{i=1}^{m} Var_{C_i}$ называются целевыми переменными ,
- запрос $\square$ называется пустым запросом ,
- запросы будем также называть целевыми утверждениями .

Для удобства обозначения условимся в дальнейшем факты A; рассматривать как правила $A \leftarrow$; с заголовком A и пустым телом.

$elem(X, X . L);$ $\qquad$ $elem(X, X . L) \leftarrow;$

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Примеры

Пусть $D = \ elem(X, Y \centerdot Z) \ \leftarrow \ elem(X, Z)$; — программное утверждение. Тогда

$D' = D\{X/Y, Z/\mathbf{nil}\} = \ elem(Y, Y \centerdot \mathbf{nil}) \ \leftarrow \ elem(Y, \mathbf{nil})$;
пример программного утверждения D,

$D'' = \ elem(X', Y' \centerdot Z') \ \leftarrow \ elem(X', Z')$;
вариант программного утверждения D,

$D''' = D\{X/1, Y/2, Z/\mathbf{nil}\} = \ elem(1, 2 \centerdot \mathbf{nil}) \ \leftarrow \ elem(1, \mathbf{nil})$;
основной пример программного утверждения D,

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Более строгое описание семантик требует привлечения аппарата математической логики.

Логические программы и логические формулы

Каждому утверждению логической программы сопоставим логическую формулу:

Правило: $D' = A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$;

$$D' = \forall X_1 \ldots \forall X_k (A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_n \rightarrow A_0), \text{ где } \{X_1, \ldots, X_k\} = \bigcup_{i=0}^{n} Var_{A_i}$$

Факт: $D'' = A$;

$$D'' = \forall X_1 \ldots \forall X_k A, \text{ где } \{X_1, \ldots, X_k\} = Var_A$$

Запрос: $G = ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$

$$G = C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m$$

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

С точки зрения декларативной семантики,

- программные утверждения D и запросы G — это логические формулы,
- программа $\mathcal{P}$ — это множество формул (база знаний),
- а правильный ответ на запрос — это такие значения переменных (подстановка), при которой запрос оказывается логическим следствием базы знаний.

ДЕКЛАРАТИВНАЯ СЕМАНТИКА

Определение (правильного ответа)

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, G — запрос к $\mathcal{P}$ с множеством целевых переменных $Y_1, \ldots, Y_k$.

Тогда всякая подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ называется ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$.

Ответ $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ называется правильным ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$, если

$$\mathcal{P} \models \forall Z_1 \ldots \forall Z_N G\theta, \qquad \text{где } \{Z_1, \ldots, Z_N\} = \bigcup_{i=1}^{k} Var_{t_i}.$$

ХОРНОВСКИЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРОГРАММЫ

Примеры правильных ответов

Правильными ответами на запрос G : ? $elem(X, \text{с}\blacksquare\,\text{т}\blacksquare\,\text{о}\blacksquare\,\text{л}\blacksquare\,\mathbf{nil})$; обращенный к логической программе

$$\begin{aligned}\mathcal{P}: \quad & elem(X, X\blacksquare\,L);\\ & elem(X, Y\blacksquare\,L) \leftarrow elem(X, L);\end{aligned}$$

являются четыре подстановки

$$\theta_1 = \{X/\text{с}\},\ \theta_2 = \{X/\text{т}\}, \theta_3 = \{X/\text{о}\}, \theta_4 = \{X/\text{л}\},$$

поскольку для любой из этих подстановок верно соотношение

$$\{\forall X \forall Y \forall L(elem(X, L) \rightarrow elem(X, Y\blacksquare\,L)),\ \forall X \forall L\ elem(X, X\blacksquare\,L)\} \models elem(X, \text{с}\blacksquare\,\text{т}\blacksquare\,\text{о}\blacksquare\,\text{л}\blacksquare\,\mathbf{nil})\theta_i\ .$$

Но как искать правильные ответы?

ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Концепция операционной семантики

Под операционной семантикой понимают правила построения **вычислений программы**. Операционная семантика описывает, КАК достигается результат работы программы.

Ожидаемый результат работы логической программы — это **правильный ответ** на запрос к программе. Значит, операционная семантика должна описывать метод вычисления правильных ответов.

Таким методом вычисления может быть разновидность **метода резолюций**, учитывающая особенности устройства программных утверждений.

ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

Логически предпосылки операционной семантики

Запрос $G(Y_1, \ldots Y_m) =? C_1, C_2, \ldots, C_m$ к логической программе $\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_N\}$ порождает задачу о логическом следствии:

$$\{D_1, \ldots, D_N\} \models \exists Y_1 \ldots \exists Y_k (C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m),$$

которая равносильна задаче об общезначимости

$$\models D_1 \& \ldots \& D_N \rightarrow \exists Y_1 \ldots \exists Y_k (C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m),$$

которая равносильна задаче о противоречивости формулы

$$\neg (D_1 \& \ldots \& D_N \rightarrow \exists Y_1 \ldots \exists Y_k (C_1 \& C_2 \& \ldots \& C_m),$$

равносильной формуле

$$D_1 \& \ldots \& D_N \ \& \ \forall Y_1 \ldots \forall Y_k (\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C_m),$$

ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

Логически предпосылки операционной семантики

Полученную формулу

$$D_1 \& \ldots \& D_N \ \& \ \forall Y_1 \ldots \forall Y_k (\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C_m),$$

можно рассматривать как систему дизъюнктов

$$S_{\mathcal{P},G} \ = \ \{D_1, \ldots, D_N, \neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C_m\},$$

и доказывать ее противоречивость методом резолюций.

ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

Логические программы и хорновские дизъюнкты

Каждому утверждению логической программы сопоставим хорновский дизъюнкт:

Правило: $D' = A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$D' = A_0 \vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n$$

Факт: $D'' = A$

$$D'' = A$$

Запрос: $G = ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$

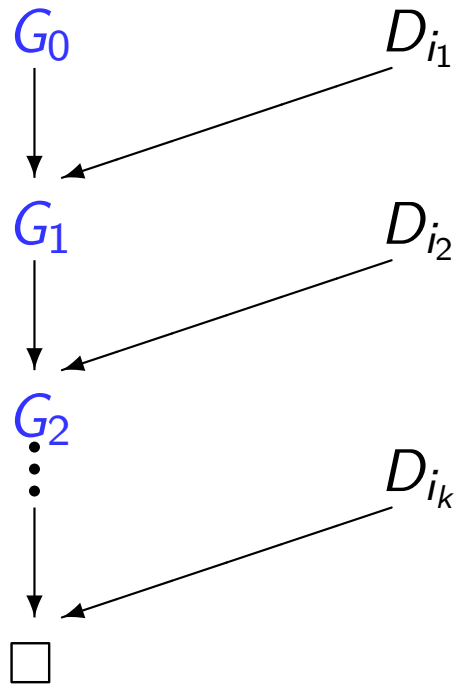
$$G = \neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C_m$$

Как это принято у дизъюнктов, предполагается, что все переменные связаны кванторами $\forall$.

ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

Логические программы и хорновские дизъюнкты

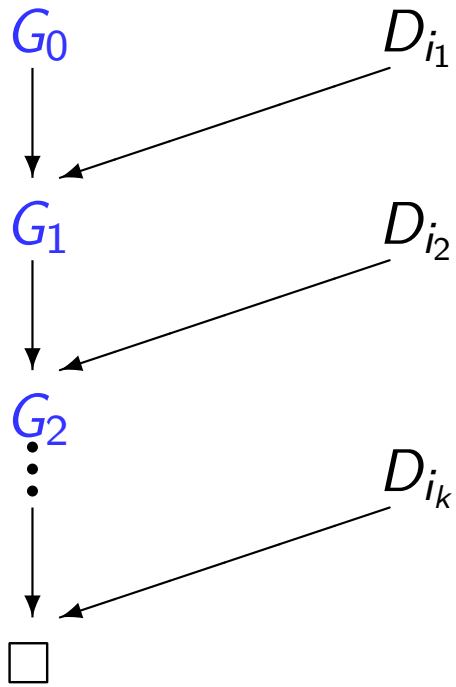
Мы будем применять специальную стратегию построения резолютивного вывода:



ОПЕРАЦИОННАЯ СЕМАНТИКА

Логические программы и хорновские дизъюнкты

Мы будем применять специальную стратегию построения резолютивного вывода:



L inear resolution with S election function for D efinite clauses

SLD-резолюция (P. Ковальски)

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

Пусть

- $G = ?\ C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$ — целевое утверждение, в котором выделена подцель C_i,
- $D' = A'_0 \leftarrow \mathbf{A'_1}, \mathbf{A'_2}, \ldots, \mathbf{A'_n}$ — **вариант** некоторого программного утверждения, в котором $Var_G \cap Var_{D'} = \emptyset$,
- $\theta \in HOY(C_i, A'_0)$ — наиб. общ. унификатор подцели C_i и заголовка программного утверждения A'_0.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

Пусть

- $G = ?\ C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$ — целевое утверждение, в котором выделена подцель C_i,
- $D' = A'_0 \leftarrow \mathbf{A'_1}, \mathbf{A'_2}, \ldots, \mathbf{A'_n}$ — **вариант** некоторого программного утверждения, в котором $Var_G \cap Var_{D'} = \emptyset$,
- $\theta \in HOY(C_i, A'_0)$ — наиб. общ. унификатор подцели C_i и заголовка программного утверждения A'_0.

Тогда запрос

$$G' = ?(C_1, \ldots, C_{i-1}, \mathbf{A'_1}, \mathbf{A'_2}, \ldots, \mathbf{A'_n}, C_{i+1}, \ldots, C_m)\theta$$

называется SLD-резольвентой программного утверждения D' и запроса G с выделенной подцелью C_i и унификатором θ.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

$G = ?\ C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$

КОММЕНТАРИИ.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

$G = ?\ C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$

КОММЕНТАРИИ.

Выделяем подцель в запросе.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

$$G = ?\ C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$$

$$D = \ A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n;$$

КОММЕНТАРИИ.

Выбираем программное утверждение.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

$$G = ?\ C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$$

$$D' = A'_0 \leftarrow A'_1, A'_2, \ldots, A'_n;$$

КОММЕНТАРИИ.

Переименовываем переменные в выбранном утверждении, так чтобы $Var_{D'} \cap Var_G = \emptyset$.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

$$G = ?\ C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$$

$$D' = A'_0 \leftarrow A'_1, A'_2, \ldots, A'_n;$$

$$\theta = НОУ(C_i, A'_0)$$

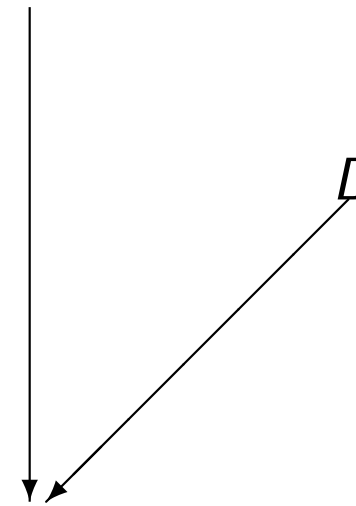
КОММЕНТАРИИ.

Вычисляем Наиболее Общий Унификатор.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

$G = ?\ C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_m$



$D' = A'_0 \leftarrow A'_1, A'_2, \ldots, A'_n;$

$\theta = НОУ(C_i, A'_0)$

$G' = ?\ (C_1, \ldots, C_{i-1}, A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, C_{i+1}, \ldots, C_m)\theta$

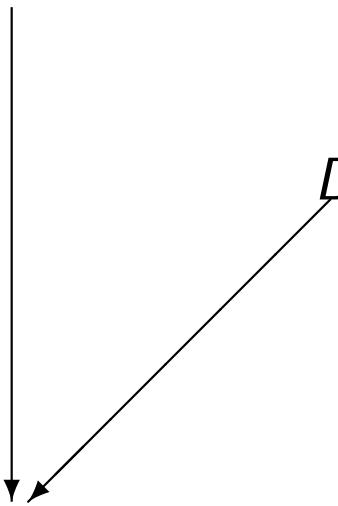
КОММЕНТАРИИ.

Строим SLD-резольвенту

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолюции)

$$G = \neg C_1 \vee \cdots \vee \neg C_i \vee \cdots \vee \neg C_m$$



$$D' = A'_0 \vee \neg A'_1 \vee \neg A'_2 \vee \cdots \vee A'_n;$$

$$\theta = НОУ(C_i, A'_0)$$

$$G' = (\neg C_1 \vee \cdots \vee \neg C_{i-1} \vee \neg A'_1 \vee \neg A'_2 \vee \cdots \vee \neg A'_n \vee \neg C_{i+1} \vee \cdots \vee \neg C_m)\theta$$

КОММЕНТАРИИ.

Действительно, это резольвента двух дизъюнктов

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 1.

$$G = ?\ P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

КОММЕНТАРИИ.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 1.

$$G = ?\ P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

КОММЕНТАРИИ.

Выделяем подцель в запросе.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 1.

$$G = ?\ P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

$$D = \ R(Y, X) \leftarrow P(X), R(c, Y);$$

КОММЕНТАРИИ.

Выбираем программное утверждение.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 1.

$$G = ?\ P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

$$D' = \ R(Y_1, X_1) \leftarrow P(X_1), R(c, Y_1);$$

КОММЕНТАРИИ.

Переименовываем переменные в выбранном утверждении, так чтобы $Var_{D'} \cap Var_G = \emptyset$.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 1.

$$G = ?\ P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$$

$$D' = \ R(Y_1, X_1) \leftarrow P(X_1), R(c, Y_1);$$

$$\theta = НОУ(R(X, f(Y)), R(Y_1, X_1)) = \{Y_1/X, X_1/f(Y)\}$$

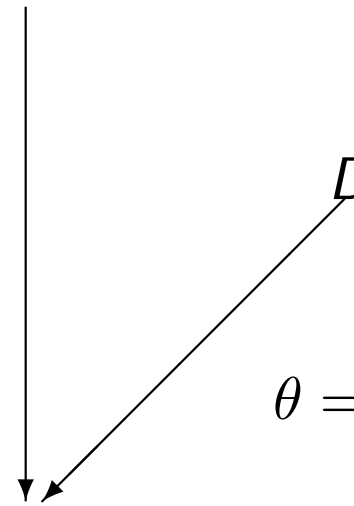
КОММЕНТАРИИ.

Вычисляем Наиболее Общий Унификатор.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 1.

$G = ?\ P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$



$D' = R(Y_1, X_1) \leftarrow P(X_1), R(c, Y_1);$

$\theta = НОУ(R(X, f(Y)), R(Y_1, X_1)) = \{Y_1/X, X_1/f(Y)\}$

$G' = ?\ (P(X), \mathbf{P(X_1)}, \mathbf{R(c, Y_1)}, R(Y, c))\theta$

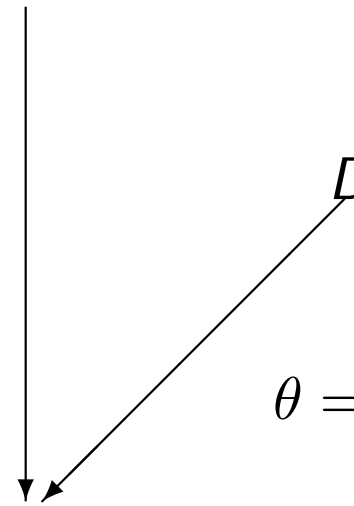
КОММЕНТАРИИ.

Строим SLD-резольвенту

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 1.

$G = ?\ P(X), R(X, f(Y)), R(Y, c)$



$D' = R(Y_1, X_1) \leftarrow P(X_1), R(c, Y_1);$

$\theta = НОУ(R(X, f(Y)), R(Y_1, X_1)) = \{Y_1/X, X_1/f(Y)\}$

$G' = ?\ P(X), P(f(Y)), R(c, X), R(Y, c)$

КОММЕНТАРИИ.

Вот она.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$G = ?\ R(X, X \,.\, \mathbf{nil})$

КОММЕНТАРИИ.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$G = ?\ R(X, X \,.\, \mathbf{nil})$

КОММЕНТАРИИ.

Выделяем подцель в запросе.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$G = ?\ R(X, X \,.\, \mathbf{nil})$

$$D = \ R(X \,.\, \mathbf{nil}, Y) \leftarrow;$$

КОММЕНТАРИИ.

Выбираем программное утверждение.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$G = ?\ R(X, X \centerdot \mathbf{nil})$

$$D' = \ R(X_1 \centerdot \mathbf{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

КОММЕНТАРИИ.

Переименовываем переменные в выбранном утверждении, так чтобы $Var_{D'} \cap Var_G = \emptyset$.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$$G = ?\ R(X, X \,.\, \mathbf{nil})$$

$$D' = \ R(X_1 \,.\, \mathbf{nil}, Y_1) \leftarrow;$$

$$\theta = \mathit{НОУ}(R(X, X \,.\, \mathbf{nil}), R(X_1 \,.\, \mathbf{nil}, Y_1)) = \{X/X_1 \,.\, \mathbf{nil}, Y_1/(X_1 \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, \mathbf{nil}\}$$

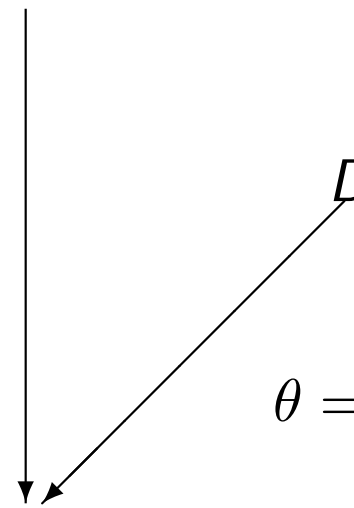
КОММЕНТАРИИ.

Вычисляем Наиболее Общий Унификатор.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.

$G = ?\ R(X, X \,.\, \mathbf{nil})$



$D' = \ R(X_1 \,.\, \mathbf{nil}, Y_1) \leftarrow;$

$\theta = \mathit{НОУ}(R(X, X \,.\, \mathbf{nil}), R(X_1 \,.\, \mathbf{nil}, Y_1)) =$
$\{X/X_1 \,.\, \mathbf{nil}, Y_1/(X_1 \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, \mathbf{nil}\}$

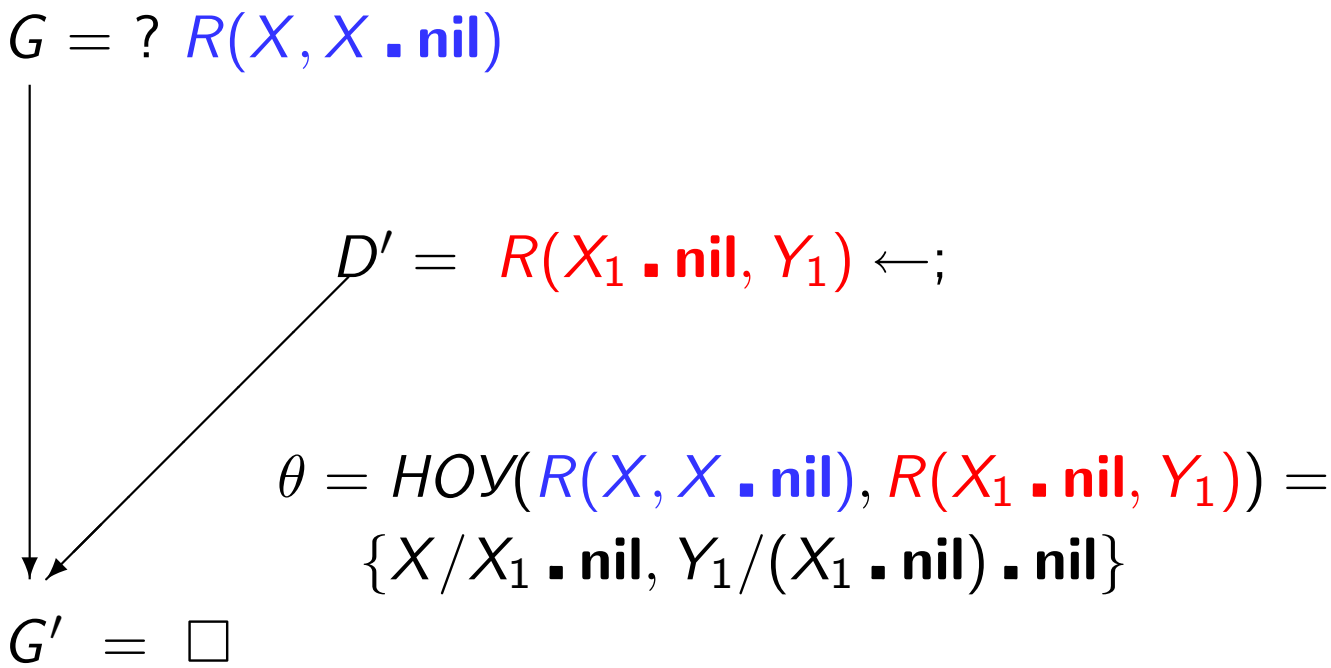
$G' \ = \ (\square)\theta$

КОММЕНТАРИИ.

Строим SLD-резольвенту

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 2.



КОММЕНТАРИИ.

Вот она.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 3.

$$G = ?\ R(X, X \,.\, \mathbf{nil}), P(c, Y)$$

КОММЕНТАРИИ.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 3.

$G = ?\ R(X, X \,.\, \mathbf{nil}), P(c, Y)$

КОММЕНТАРИИ.

Выделяем подцель в запросе.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 3.

$$G = ?\ R(X, X \centerdot \mathbf{nil}), P(c, Y)$$

$$D = \ R(X \centerdot \mathbf{nil}, X) \leftarrow;$$

КОММЕНТАРИИ.

Выбираем программное утверждение.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 3.

$$G = ?\ R(X, X \centerdot \mathbf{nil}), P(c, Y)$$

$$D' = \ R(X_1 \centerdot \mathbf{nil}, X_1) \leftarrow;$$

КОММЕНТАРИИ.

Переименовываем переменные в выбранном утверждении,

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 3.

$$G = ?\ R(X, X \centerdot \mathbf{nil}), P(c, Y)$$

$$D' = \ R(X_1 \centerdot \mathbf{nil}, X_1) \leftarrow;$$

$$НОУ(R(X, X \centerdot \mathbf{nil}), R(X_1 \centerdot \mathbf{nil}, X_1)) = \emptyset$$

КОММЕНТАРИИ.

Атомы неунифицируемы!

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 3.

$$G = ?\ R(X, X \centerdot \mathbf{nil}), P(c, Y)$$

$$D' = \ R(X_1 \centerdot \mathbf{nil}, X_1) \leftarrow;$$

$$НОУ(R(X, X \centerdot \mathbf{nil}), R(X_1 \centerdot \mathbf{nil}, X_1)) = \emptyset$$

КОММЕНТАРИИ.

Значит, SLD-резольвенту нельзя построить.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 3.

$$G = ?\ R(X, X \centerdot \mathbf{nil}), P(c, Y)$$

$$D' = \ R(X_1 \centerdot \mathbf{nil}, X_1) \leftarrow;$$

$$НОУ(R(X, X \centerdot \mathbf{nil}), R(X_1 \centerdot \mathbf{nil}, X_1)) = \emptyset$$

КОММЕНТАРИИ.

Нужно выделить другую подцель или

выбрать другое программное утверждение.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолютивного вычисления)

Пусть

- $G_0 = ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$ — целевое утверждение,
- $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — хорновская логическая программа.

Тогда (частичным) SLD-резолютивным вычислением , порожденным запросом G_0 к логической программе $\mathcal{P}$ называется последовательность троек (конечная или бесконечная)

$$(D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \theta_n, G_n), \ldots,$$

в которой для любого i, $i \geq 1$,

- $D_{j_i} \in \mathcal{P}$, $\theta_i \in Subst$, G_i — целевое утверждение (запрос);
- запрос G_i является SLD-резольвентой программного утверждения D_{j_i} и запроса G_{i-1} с унификатором θ_i.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолютивного вычисления)

Частичное SLD-резолютивное вычисление

$$comp = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \ldots, (D_{j_k}, \theta_n, G_n)$$

называется

- успешным вычислением (SLD-резолютивным опровержением), если $G_n = \square$;
- бесконечным вычислением , если *comp* — это **бесконечная** последовательность;
- тупиковым вычислением , если *comp* — это **конечная** последовательность, и при этом для выделенной подцели запроса G_n невозможно построить ни одной SLD-резольвенты.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение (SLD-резолютивного вычисления)

Пусть

- $G_0 = ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$ — целевое утверждение с целевыми переменными $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$,
- $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,
- $comp = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$ — успешное SLD-резолютивное вычисление, порожденное запросом G к программе $\mathcal{P}$.

Тогда подстановка $\theta = (\theta_1\theta_2\ldots\theta_n)|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k}$,

представляющая собой композицию всех вычисленных унификаторов $\theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_n$, ограниченную целевыми переменными $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$,

называется вычисленным ответом на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X/X_1,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X/X_1,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X/X_1,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

$\theta_2 = \{X_1/X_2,\ Y_2/b,\ L_2/c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_2 = ?elem(X_2, c \centerdot \mathbf{nil})$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X/X_1,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

$\theta_2 = \{X_1/X_2,\ Y_2/b,\ L_2/c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_2 = ?elem(X_2, c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_3, X_3 \centerdot \mathbf{nil})$;

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X/X_1,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

$\theta_2 = \{X_1/X_2,\ Y_2/b,\ L_2/c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_2 = ?elem(X_2, c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_3, X_3 \centerdot \mathbf{nil})$;

$\theta_3 = \{X_2/c, X_3/c\}$

$G_3 = \square$

УСПЕХ!

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 4.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(X, a \centerdot b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X/X_1,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(X_1, b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

$\theta_2 = \{X_1/X_2,\ Y_2/b,\ L_2/c \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_2 = ?elem(X_2, c \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_3, X_3 \centerdot \mathbf{nil})$;

$\theta_3 = \{X_2/c, X_3/c\}$

$G_3 = \square$

УСПЕХ!

Вычисленный ответ: $\theta = (\theta_1\theta_2\theta_3)|_X = \{X/c\}$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X_1/c, Y_1/a, L_1/b \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(c, b \centerdot \mathbf{nil})$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X_1/c,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(c, b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

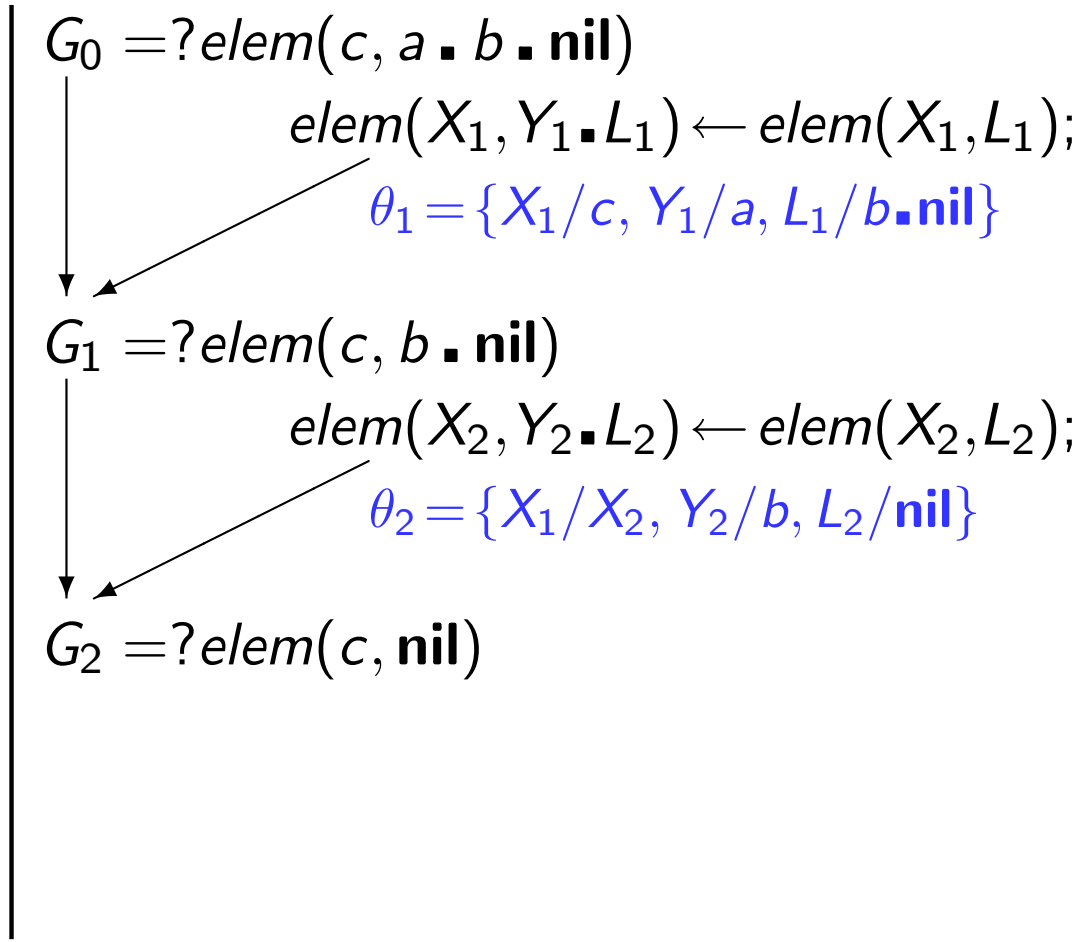
Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$



SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X_1/c,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(c, b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

$\theta_2 = \{X_1/X_2,\ Y_2/b,\ L_2/\mathbf{nil}\}$

$G_2 = ?elem(c, \mathbf{nil})$

$elem(X_3, X_3 \centerdot L_3)$;

Нет унификатора

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X_1/c,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(c, b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

$\theta_2 = \{X_1/X_2,\ Y_2/b,\ L_2/\mathbf{nil}\}$

$G_2 = ?elem(c, \mathbf{nil})$

$elem(X_3, Y_3 \centerdot L_3) \leftarrow elem(X_3, L_3)$;

Нет унификатора

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 5.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$G_0 = ?elem(c, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

$\theta_1 = \{X_1/c,\ Y_1/a,\ L_1/b \centerdot \mathbf{nil}\}$

$G_1 = ?elem(c, b \centerdot \mathbf{nil})$

$elem(X_2, Y_2 \centerdot L_2) \leftarrow elem(X_2, L_2)$;

$\theta_2 = \{X_1/X_2,\ Y_2/b,\ L_2/\mathbf{nil}\}$

$G_2 = ?elem(c, \mathbf{nil})$

failure

Нет SLD-резольвенты

ТУПИК!

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$

$G_0 = ?elem(a, X)$

$elem(X_1, Y_1 \centerdot L_1) \leftarrow elem(X_1, L_1)$;

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

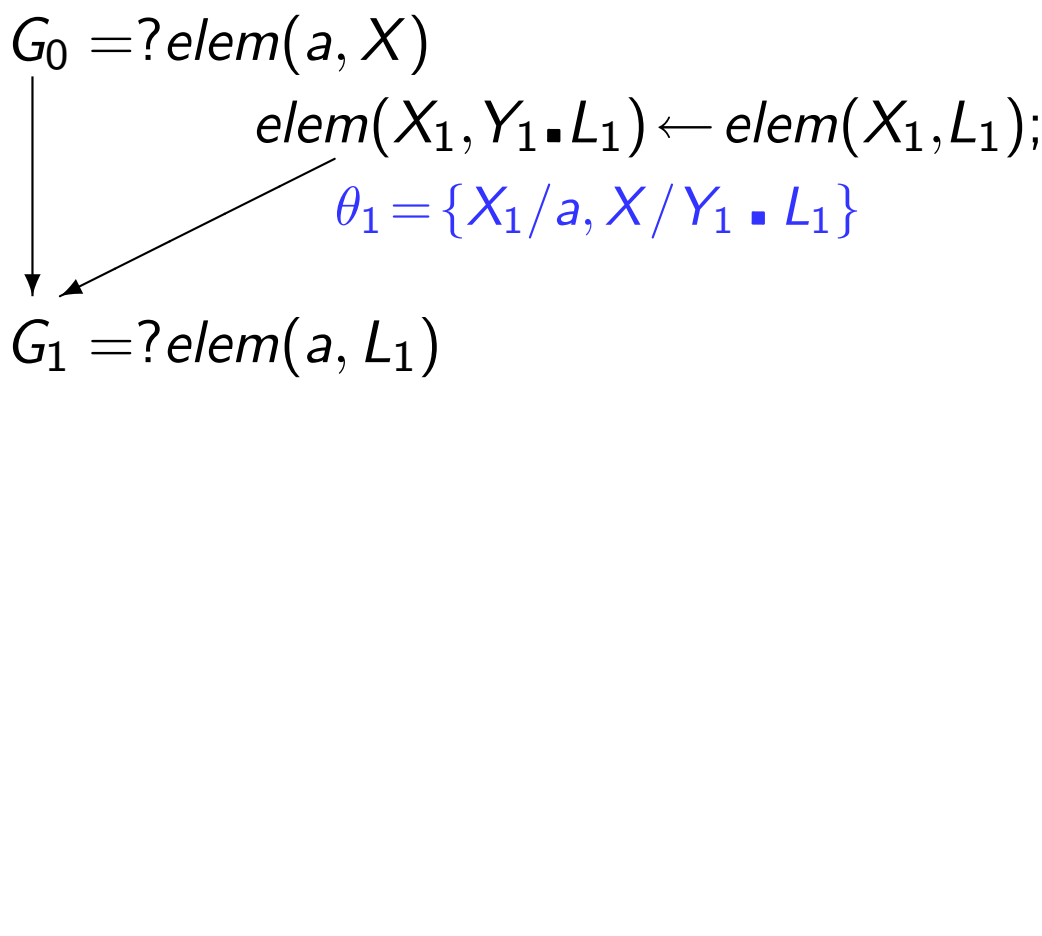
Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \cdot L)$;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$



SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

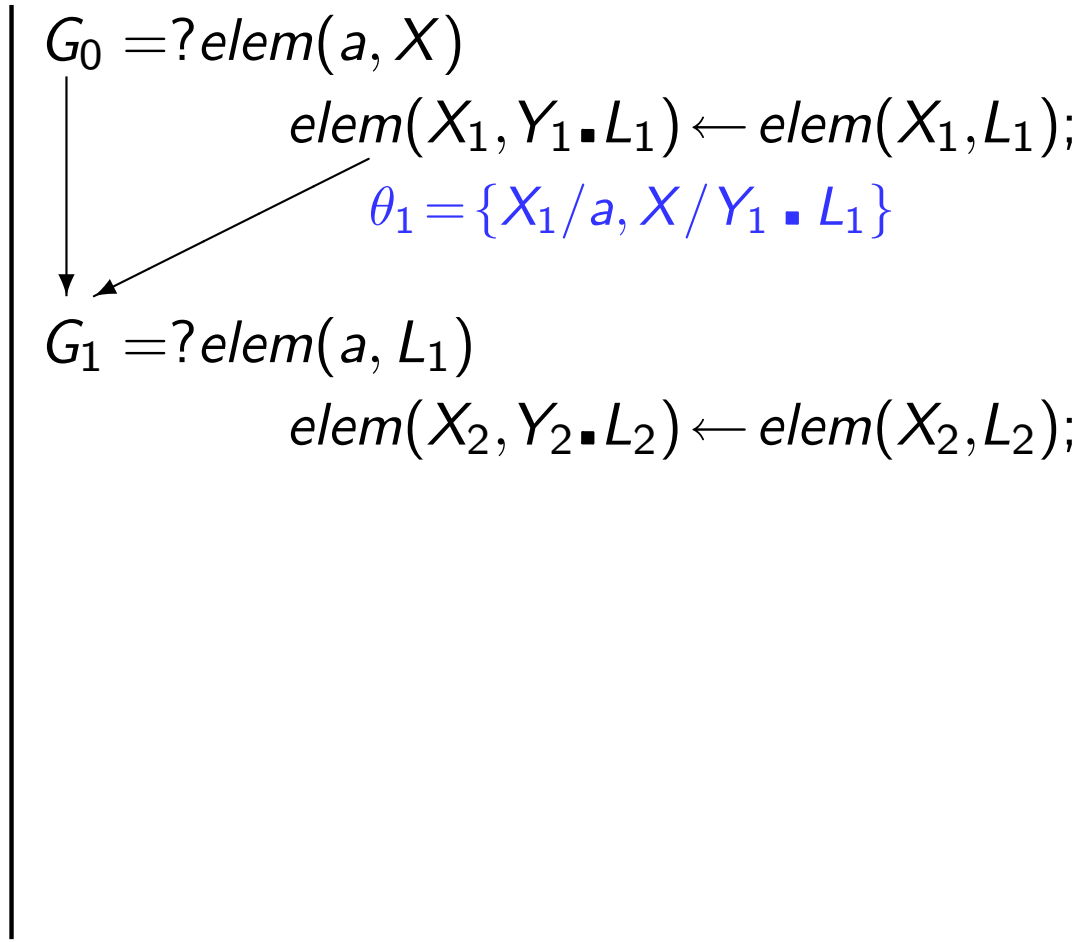
Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$



SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

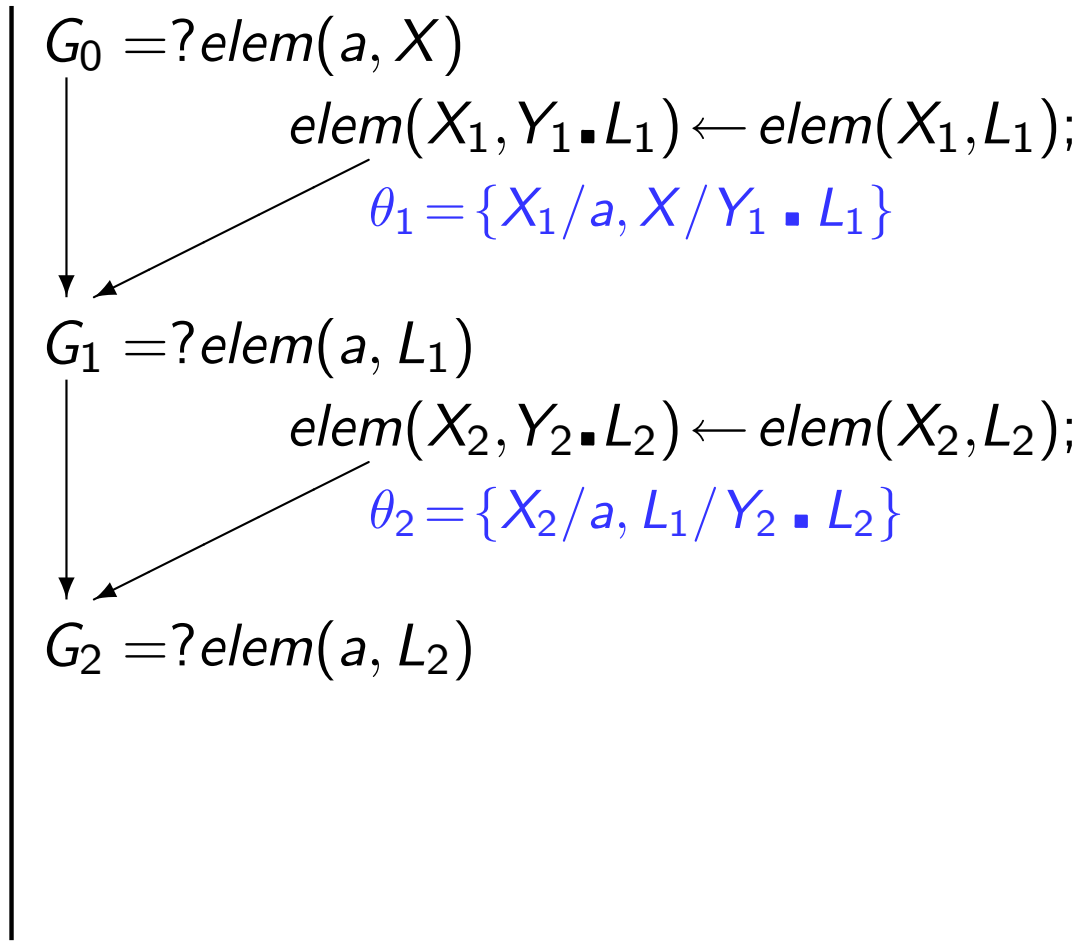
Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \cdot L)$;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$



SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

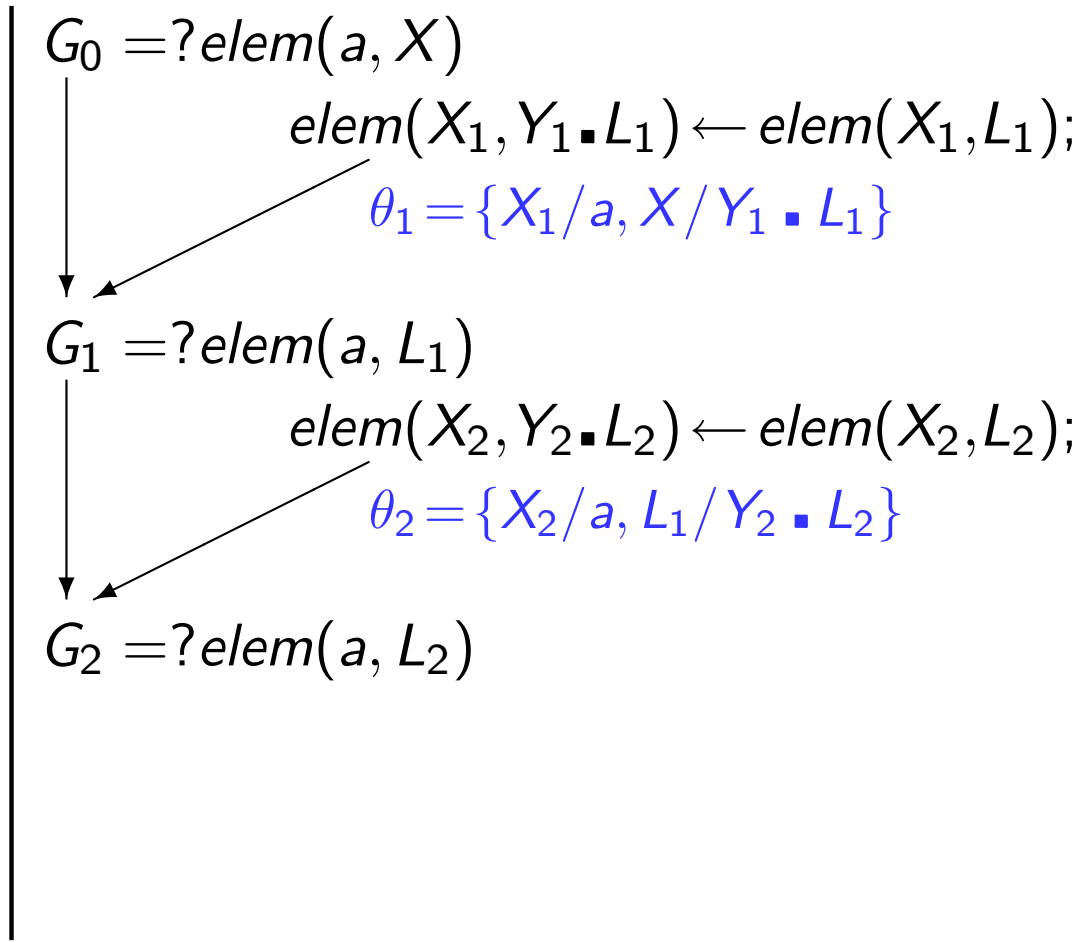
Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \cdot L)$;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$



SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

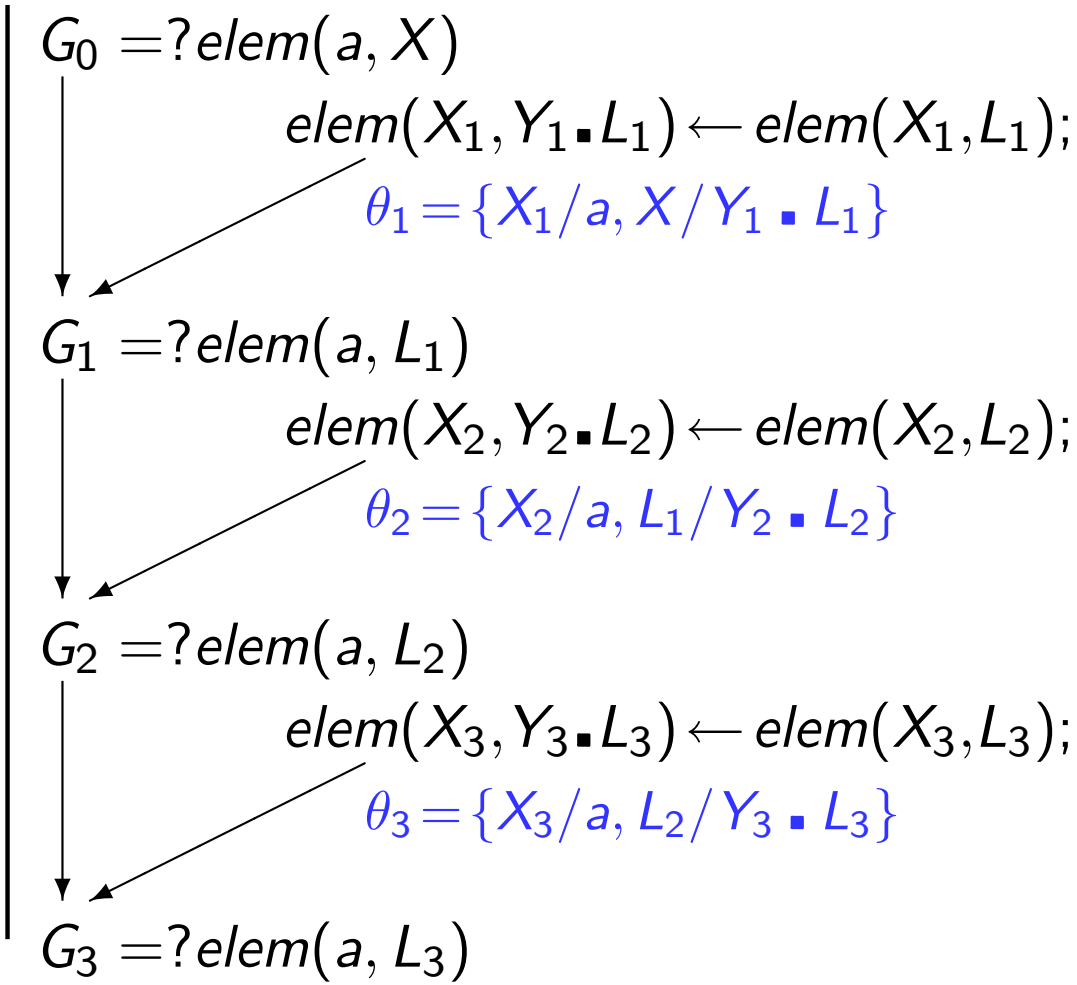
Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \centerdot L)$;

$elem(X, Y \centerdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$



SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пример 6.

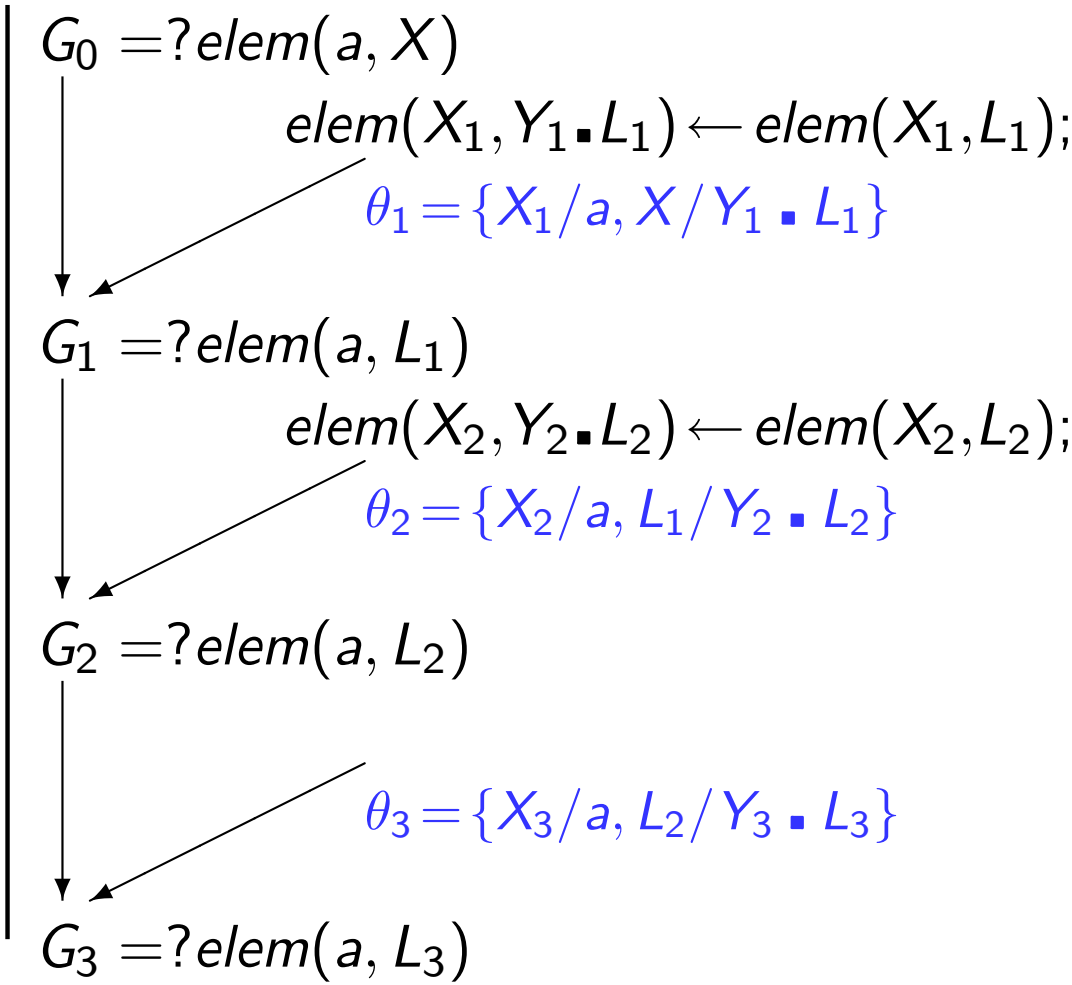
Логическая программа $\mathcal{P}$:

$elem(X, X \cdot L)$;

$elem(X, Y \cdot L) \leftarrow elem(X, L)$;

Запрос G_0:

? $elem(a, X)$



и. т. д. до ∞

Бесконечное вычисление.

SLD-РЕЗОЛЮТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Теперь у нас есть два типа ответов на запросы к логическим программам:

- **правильные ответы**, которые логически следуют из программы;
- **вычисленные ответы**, которые конструируются по ходу SLD-резолютивных вычислений.

Правильные ответы — это то, что мы хотим получить, обращаясь с вопросами к программе.

Вычисленные ответы — это то, что нам в действительности выдает компьютер (интерпретатор программы).

Какова связь между правильными и вычисленными ответами?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 12.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 13.

Корректность операционной семантики. Полнота операционной семантики логических программ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

У нас есть два типа ответов на запросы к логическим программам:

- **правильные ответы**, которые логически следуют из программы;
- **вычисленные ответы**, которые конструируются по ходу SLD-резолютивных вычислений.

Правильные ответы — это то, что мы хотим получить, обращаясь с вопросами к программе.

Вычисленные ответы — это то, что нам в действительности выдает компьютер (интерпретатор программы).

Какова связь между правильными и вычисленными ответами?

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Определение правильного ответа

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, G — запрос к $\mathcal{P}$ с множеством целевых переменных $Y_1, \ldots, Y_k$.

Тогда всякая подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ называется ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$.

Ответ $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ называется правильным ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$, если

$$\mathcal{P} \models \forall Z_1 \ldots \forall Z_N G\theta, \qquad \text{где } \{Z_1, \ldots, Z_N\} = \bigcup_{i=1}^{k} Var_{t_i}.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Определение вычисленного ответа

Пусть

- $G_0 = ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$ — целевое утверждение с целевыми переменными $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$,
- $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,
- $comp = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$ — успешное SLD-резолютивное вычисление, порожденное запросом G к программе $\mathcal{P}$.

Тогда подстановка $\theta = (\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n)|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k}$,

представляющая собой композицию всех вычисленных унификаторов $\theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_n$, ограниченную целевыми переменными $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$,

называется вычисленным ответом на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Теорема (корректности операционной семантики)

Пусть

- $G_0 = ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$ — целевое утверждение,
- $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,
- θ — вычисленный ответ на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$.

Тогда θ — правильный ответ на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$.

Доказательство.

Рассмотрим успешное вычисление, порожденное запросом G_0 к логической программе $\mathcal{P}$:

$$comp\ =\ (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$$

Покажем индукцией по длине вычисления n, что
$\theta = (\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n)|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k}$ — это правильный ответ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Базис индукции ($n = 1$). Тогда

$$G_0 =? \; C_1 \qquad D_{j_1} = A_0; \qquad \theta_1 \in HOУ(C_1, A_0).$$

Значит, $C_1\theta_1 = A_0\theta_1$. Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, мы приходим к следующему выводу:

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X} A_0, \qquad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1, \qquad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_1\theta_1, \qquad \text{почему?}$$

и, следовательно, $\theta = \theta_1|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k}$ — это правильный ответ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Индуктивный переход ($n-1 \rightarrow n$). Пусть

$$\begin{array}{rcl} G_0 & = & ?\ C_1, C_2, \ldots, \mathbf{C_i}, \ldots, C_m \\ D_{j_1} & = & \mathbf{A_0} \leftarrow \mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_r}; \\ \theta_1 & \in & HOY(\mathbf{C_i}, \mathbf{A_0}), \\ G_1 & = & ?\ (C_1, C_2, \ldots, \mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_r}, \ldots, C_m)\theta_1. \end{array}$$

Тогда

$$comp' = (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \theta_n, \Box)$$

— это успешное вычисление длины $n-1$, порожденное запросом G_1. Значит, по предположению индукции, $\theta' = \theta_2 \ldots \theta_n|_{Var_{G_1}}$ — правильный ответ на запрос G_1.

Значит,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \ldots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \ldots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \ldots \& A_r \to A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\Big((A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta' \to A_0\theta_1\theta'\Big).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \ldots \& A_r \to A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\Big((A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta' \to A_0\theta_1\theta'\Big).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \ldots \& A_r \to A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\Big((A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta' \to A_0\theta_1\theta'\Big).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Итак, из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& \ldots \& C_{i-1} \& C_{i+1} \& \ldots C_m)\theta_1\theta'.$$

Мы показали, что

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\, C_i\theta_1\theta'.$$

Значит,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(\underbrace{C_1 \& \ldots \& C_{i-1} \& C_i \& C_{i+1} \& \ldots C_m}_{G_0})\underbrace{\theta_1\theta'}_{\theta}.$$

Значит, $\theta_1\theta'|_{Var_{G_0}} = (\theta_1\theta_2\ldots\theta_n)|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k} = \theta$ — правильный ответ на запрос G_0. □

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Итак, всякий вычисленный ответ — правильный.

А можно ли вычислить любой правильный ответ?

Полна ли наша операционная семантика?

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Проблема полноты

Пусть θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$, т. е. $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\ G_0\theta$.

Существует ли такое успешное SLD-резолютивное вычисление, порожденное запросом G_0 к программе $\mathcal{P}$

$$(D_{j_1}, \eta_1, G_1), (D_{j_2}, \eta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \eta_n, \square),$$

которое вычисляет ответ θ, т. е. $\theta = (\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n)|_{Var_{G_0}}$?

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Теорема полноты.

Пусть

$\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,

$G_0 = ?C_1, C_2, \ldots C_m$ — запрос с множеством целевых переменных $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$,

θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$.

Тогда существует такой вычисленный ответ η на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$, что

$$\theta = \eta\rho$$

для некоторой подстановки ρ.

Теорема полноты гласит, что каждый правильный ответ — это пример (частный случай) некоторого вычисленного ответа .

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Доказательство.

Пусть $\theta = \{Y_1/t_1, \ldots, Y_k/t_k\}$ и пусть $\bigcup_{i=1}^{k} Var_{t_i} = \{Z_1, \ldots, Z_r\}$.

Выберем некоторое множество новых «свежих» констант $\{c_1, \ldots, c_k\}$, **не содержащихся** ни в программе $\mathcal{P}$, ни в запросе G, ни в термах подстановки θ, и рассмотрим подстановку $\lambda = \{Z_1/c_1, Z_2/c_2, \ldots, Z_r/c_r\}$.

Поскольку θ — правильный ответ, верно $\mathcal{P} \models \forall Z_1 \ldots \forall Z_k\, G_0\theta$. Запрос $G_0' = G_0\theta\lambda$ — основной пример запроса G_0, и поэтому $\mathcal{P} \models G_0\theta\lambda$.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Доказательство.

Общий замысел доказательства

1. Вначале покажем, что запрос $G_0' = G_0\theta\lambda$, обращенный к множеству $[\mathcal{P}]$ основных примеров программных утверждений программы $\mathcal{P}$, имеет успешное SLD-резолютивное вычисление (лемма об основных вычислениях).

2. Затем покажем, что исходный запрос G_0, обращенный к самой программе $\mathcal{P}$, имеет успешное SLD-резолютивное вычисление с таким вычисленным ответом η, для которого верно равенство $\theta\lambda = \eta\rho'$ для некоторой подстановки ρ' (лемма о подъеме для хорновских дизъюнктов).

3. Затем покажем, что отсюда следует равенство $\theta = \eta\rho$ для некоторой подстановки ρ.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Лемма об основных вычислениях.

Пусть

$\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,

$G'_0 = ?C'_1, C'_2, \ldots C'_n$ — **основной** запрос,

и при этом верно $\mathcal{P} \models G'_0$.

Тогда существует успешное SLD-резолютивное вычисление запроса G'_0, обращенного к множеству $[\mathcal{P}]$ основных примеров программных утверждений программы $\mathcal{P}$.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

$\{D_1, D_2, \ldots, D_N\} \models C'_1 \& C'_2 \& \ldots \& C'_n$

$\Longleftrightarrow$

множество дизъюнктов $\{D_1, D_2, \ldots, D_N, \neg C'_1 \vee \neg C_2 \vee \ldots \vee \neg C'_n\}$ противоречиво.

$\Longleftrightarrow$ (по теореме Эрбрана)

существует такое конечное множество основных примеров программных утверждений $\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M\} \subseteq [\mathcal{P}]$, что множество дизъюнктов $\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}$ противоречиво.

$\Longleftrightarrow$ (по теореме полноты метода резолюций)

из системы дизъюнктов $\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \ldots \vee \neg C'_n\}$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \cdots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \cdots \vee \neg A_{r2}$$

$$\cdots$$

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \cdots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \cdots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \cdots \vee \neg A_{r2}$$

$$\cdots$$

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \cdots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \cdots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \cdots \vee \neg A_{r2}$$

$$\cdots$$

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \cdots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n$$

возможны резольвенты двух типов

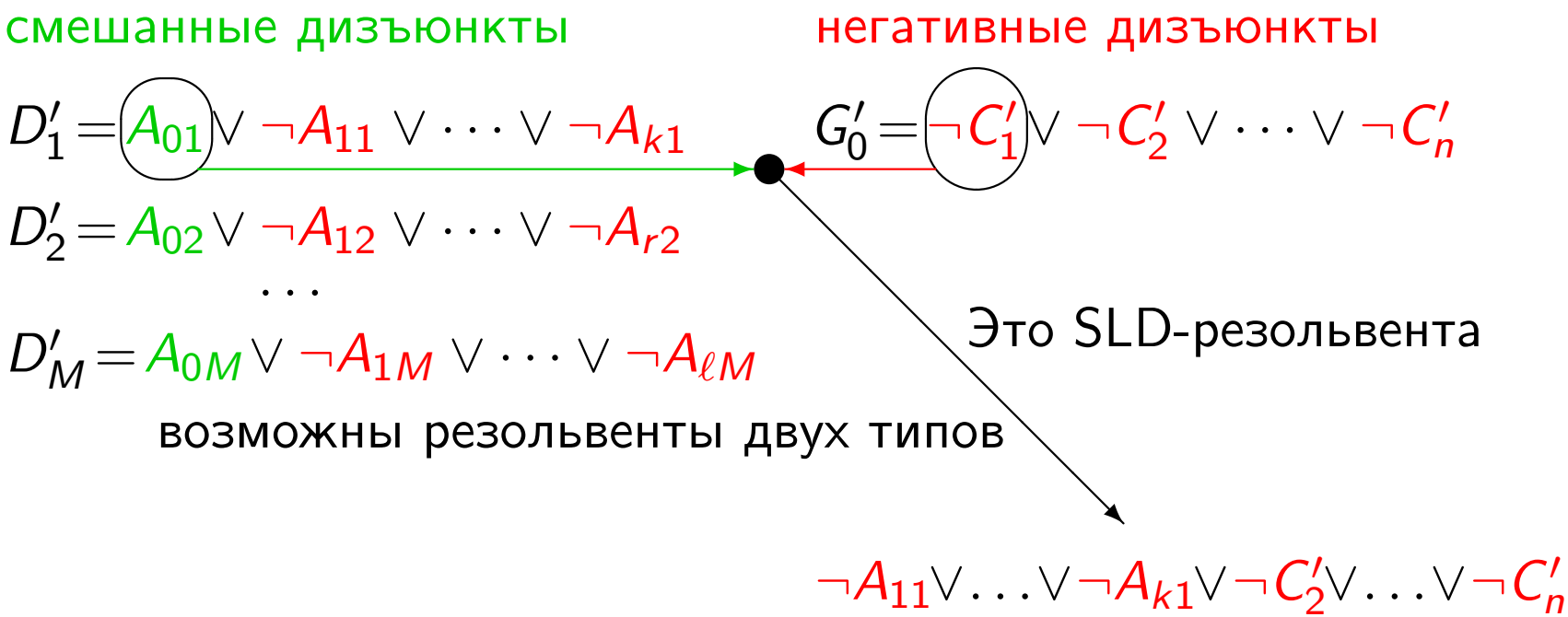
ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.



ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

негативные дизъюнкты

$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \cdots \vee \neg A_{k1}$

$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n$

$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \cdots \vee \neg A_{r2}$

$\ldots$

$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \cdots \vee \neg A_{\ell M}$

возможны резольвенты двух типов

А это не SLD-резольвента

$\neg A_{11} \vee \ldots \vee \neg A_{k1} \vee \neg C'_2 \vee \ldots \vee \neg C'_n$

$A_{02} \vee \neg A_{22} \vee \ldots \vee \neg A_{r2} \vee \neg A_{11} \vee \ldots \vee \neg A_{k1}$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \cdots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \cdots \vee \neg A_{r2}$$

$$\cdots$$

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \cdots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n$$

возможны резольвенты двух типов

$$\neg A_{11} \vee \ldots \vee \neg A_{k1} \vee \neg C'_2 \vee \ldots \vee \neg C'_n$$

$$A_{02} \vee \neg A_{22} \vee \ldots \vee \neg A_{r2} \vee \neg A_{11} \vee \ldots \vee \neg A_{k1}$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?),

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

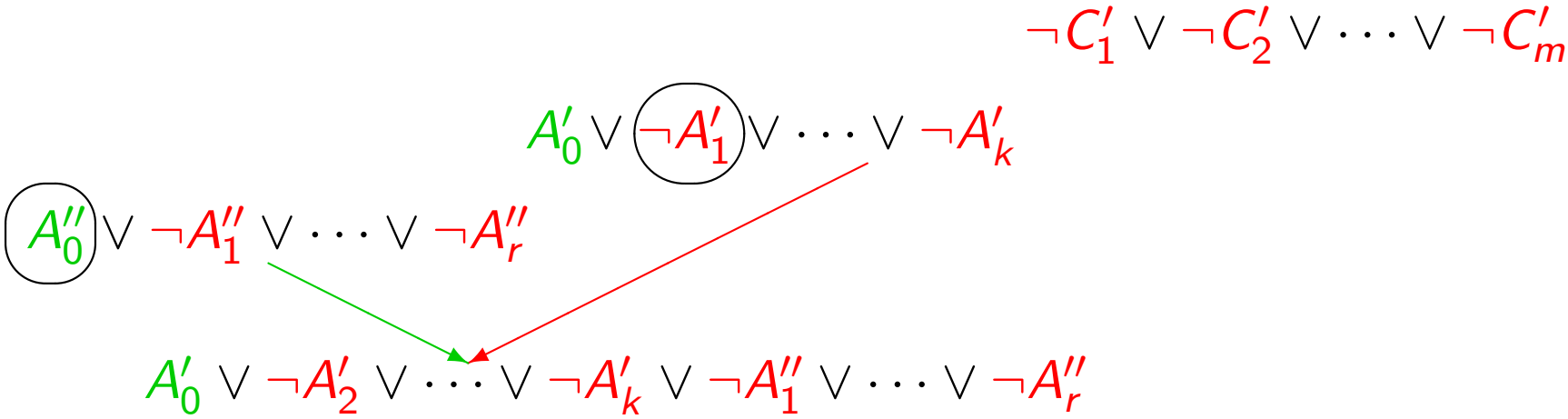
Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?).

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?). Тогда будем поступать так:

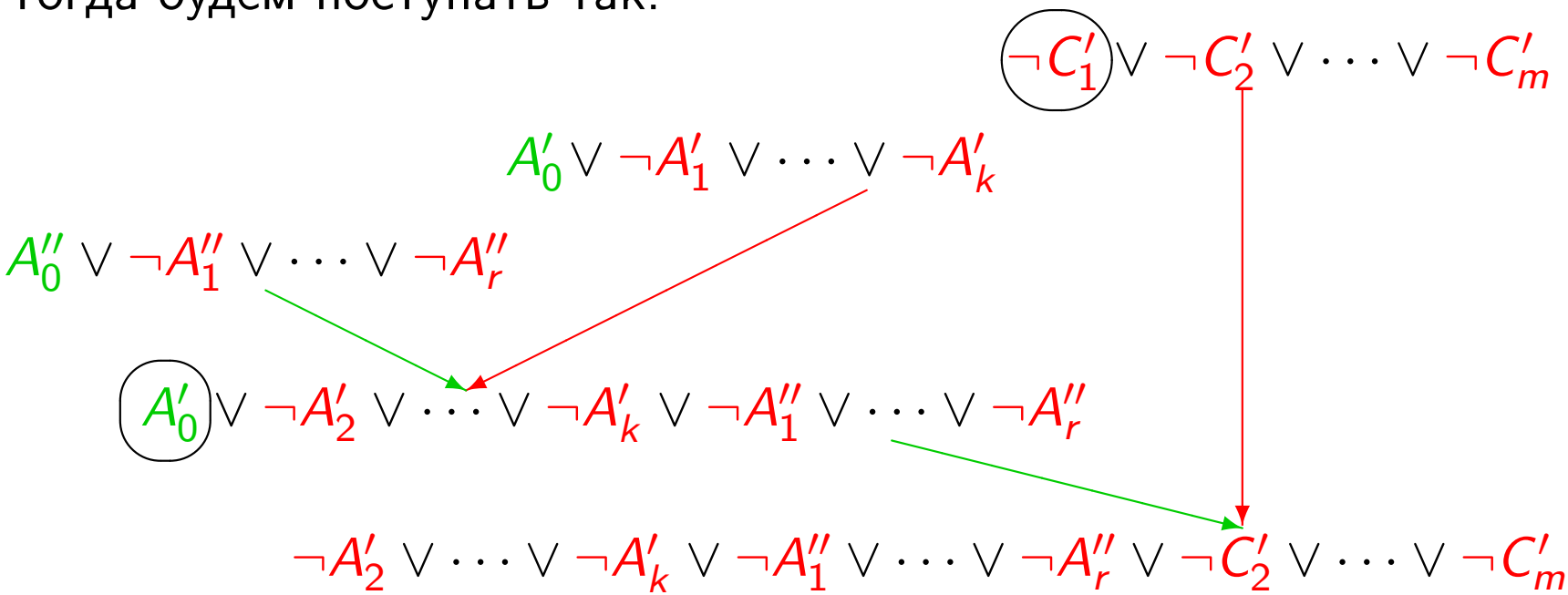


Если правило резолюции вначале применяется к двум программным утверждениям,

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?). Тогда будем поступать так:

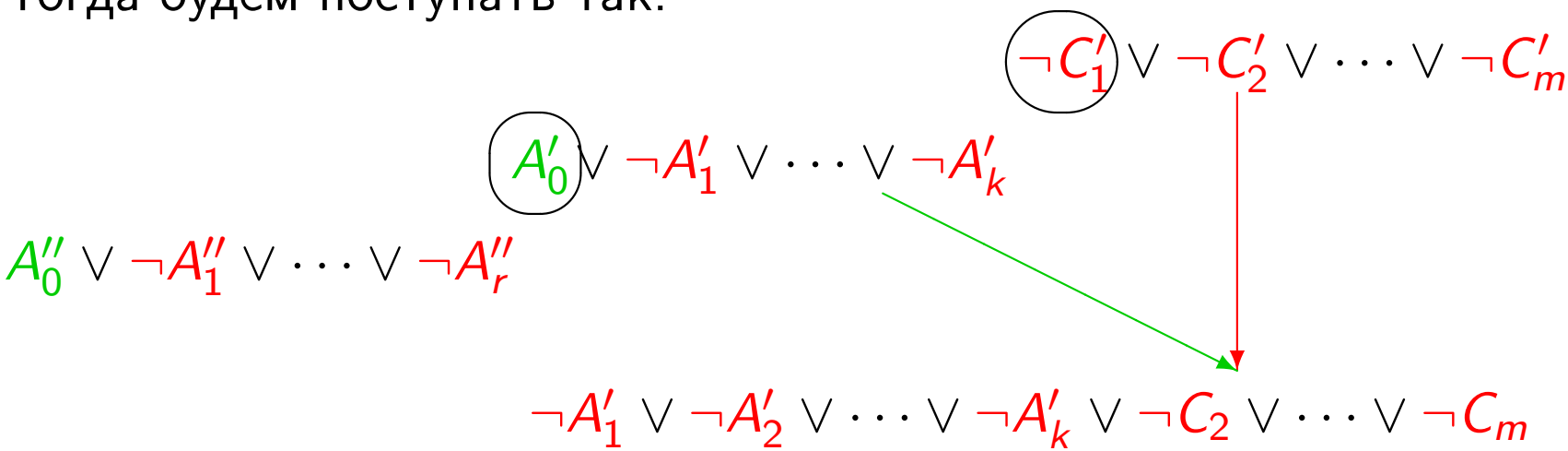


а затем применяется к полученной резольвенте и запросу,

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?). Тогда будем поступать так:

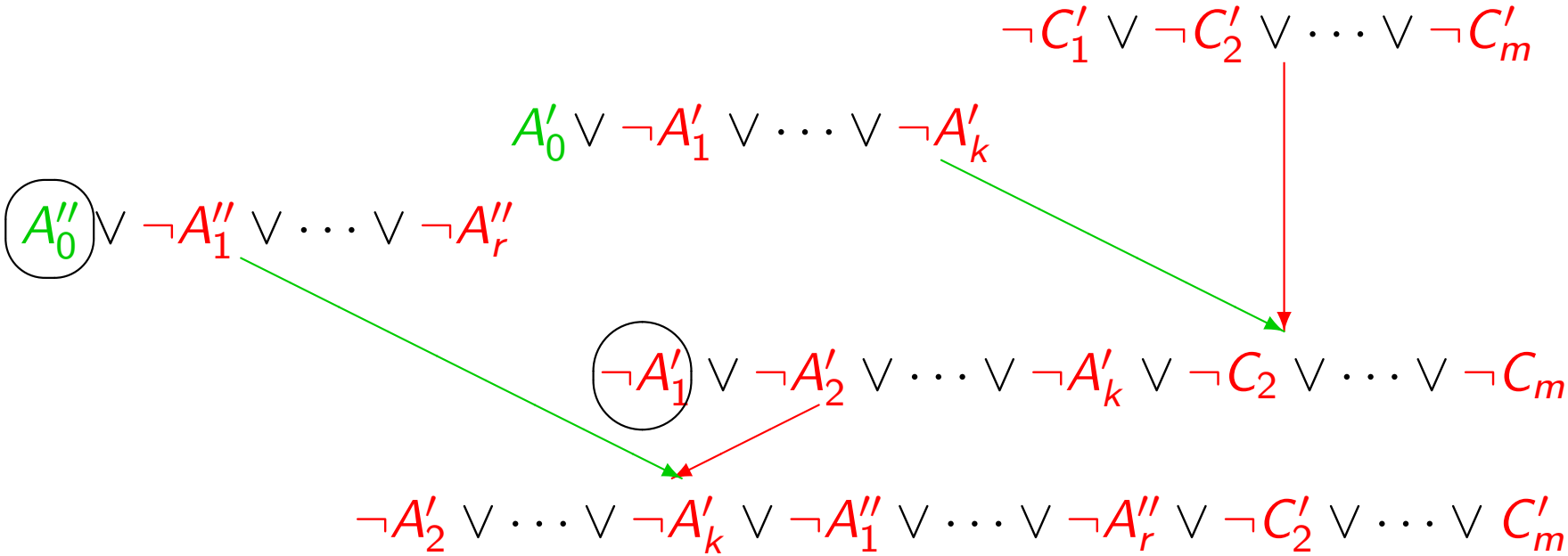


то изменим порядок применения правил

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?). Тогда будем поступать так:



и получим тот же самый результат,

но уже только при помощи SLD-резолюции.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство.

Будем применять этот прием, до тех пор пока в выводе не останутся только правила SLD-резолюции. Таким образом, в итоге получим вывод пустого дизъюнкта $\square$ из множества дизъюнктов

$$\{D_1, D_2, \ldots, D_N, \neg C'_1 \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}$$

только при помощи правила SLD-резолюции.

Это и есть успешное SLD-резолютивное вычисление основного запроса $G'_0 = ?C'_1, C'_2, \ldots C'_n$, обращенного к множеству основных примеров программных утверждений $[\mathcal{P}]$.

Что и требовалось доказать. $\square$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Лемма о подъеме (для логических программ)

Пусть $G_0' = G_0\theta'$ — основной пример запроса G_0 с множеством целевых переменных $Y_1, \ldots, Y_m$, обращенный к хорновской логической программе $\mathcal{P}$.

Если запрос G_0', обращенный к множеству **основных примеров** программных утверждений $[\mathcal{P}]$, имеет успешное вычисление,

то исходный запрос G_0, обращенный к самой программе $\mathcal{P}$, также имеет успешное вычисление с ответом η, который удовлетворяет равенству

$$\theta' = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки ρ'.

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Рассмотрим SLD-резолютивное вычисление запроса $G'_0 = G_0\theta'$ с использованием основных примеров программных утверждений из множества $[\mathcal{P}]$

$$(D'_1, \varepsilon, G'_1), (D'_2, \varepsilon, G'_2), \ldots, (D'_n, \varepsilon, \square)$$

и покажем, что существует SLD-резолютивное вычисление запроса G_0 с использованием программы $\mathcal{P}$

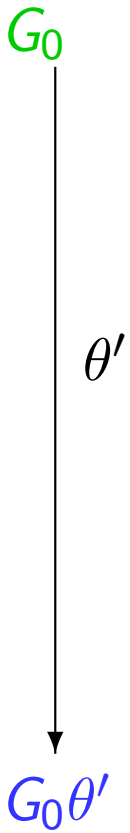
$$(D_1, \eta_1, G_1), (D_2, \eta_2, G_2), \ldots, (D_n, \eta_n, \square),$$

удовлетворяющее условиям леммы.

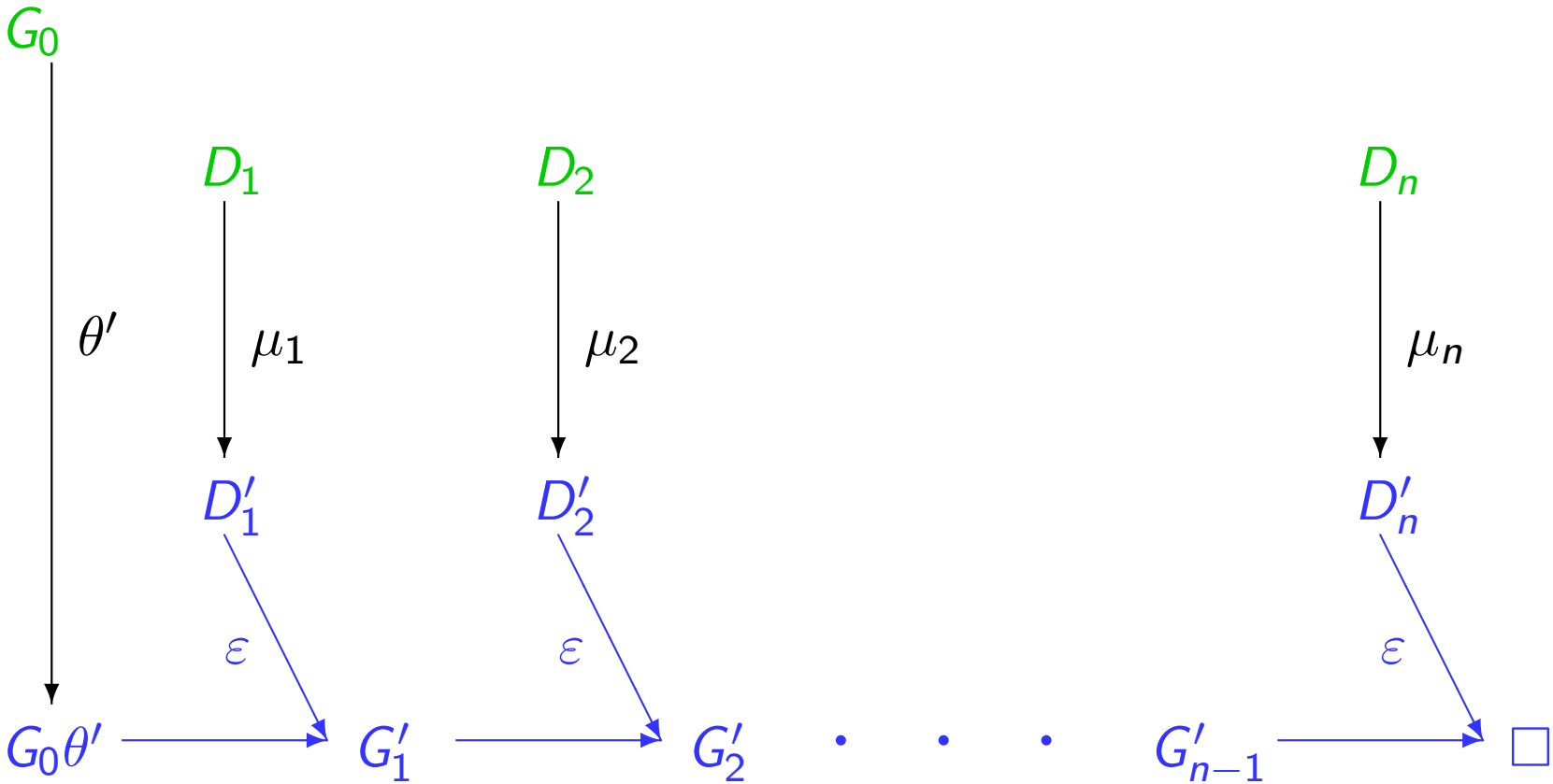
ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

G_0

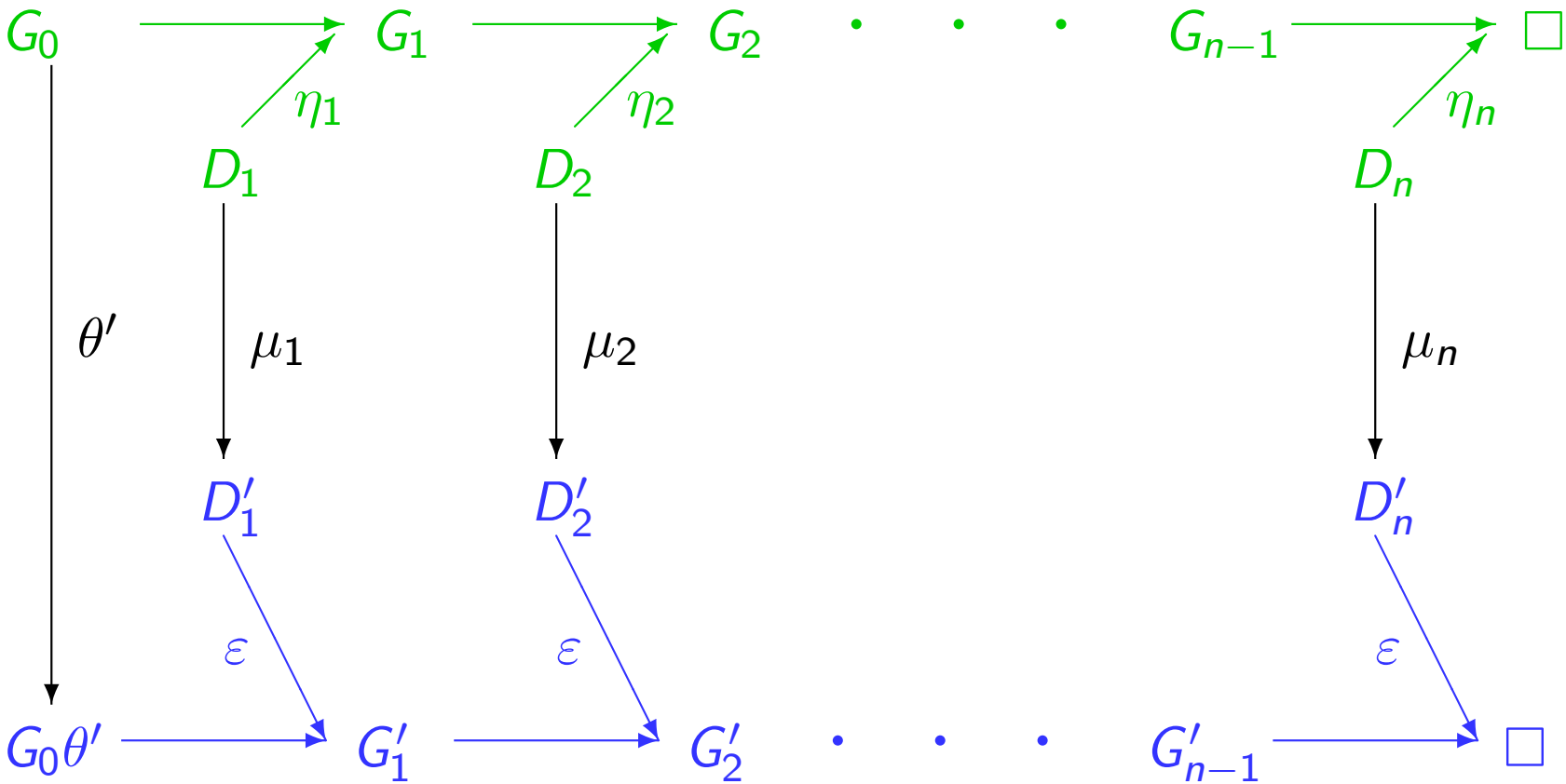
ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ



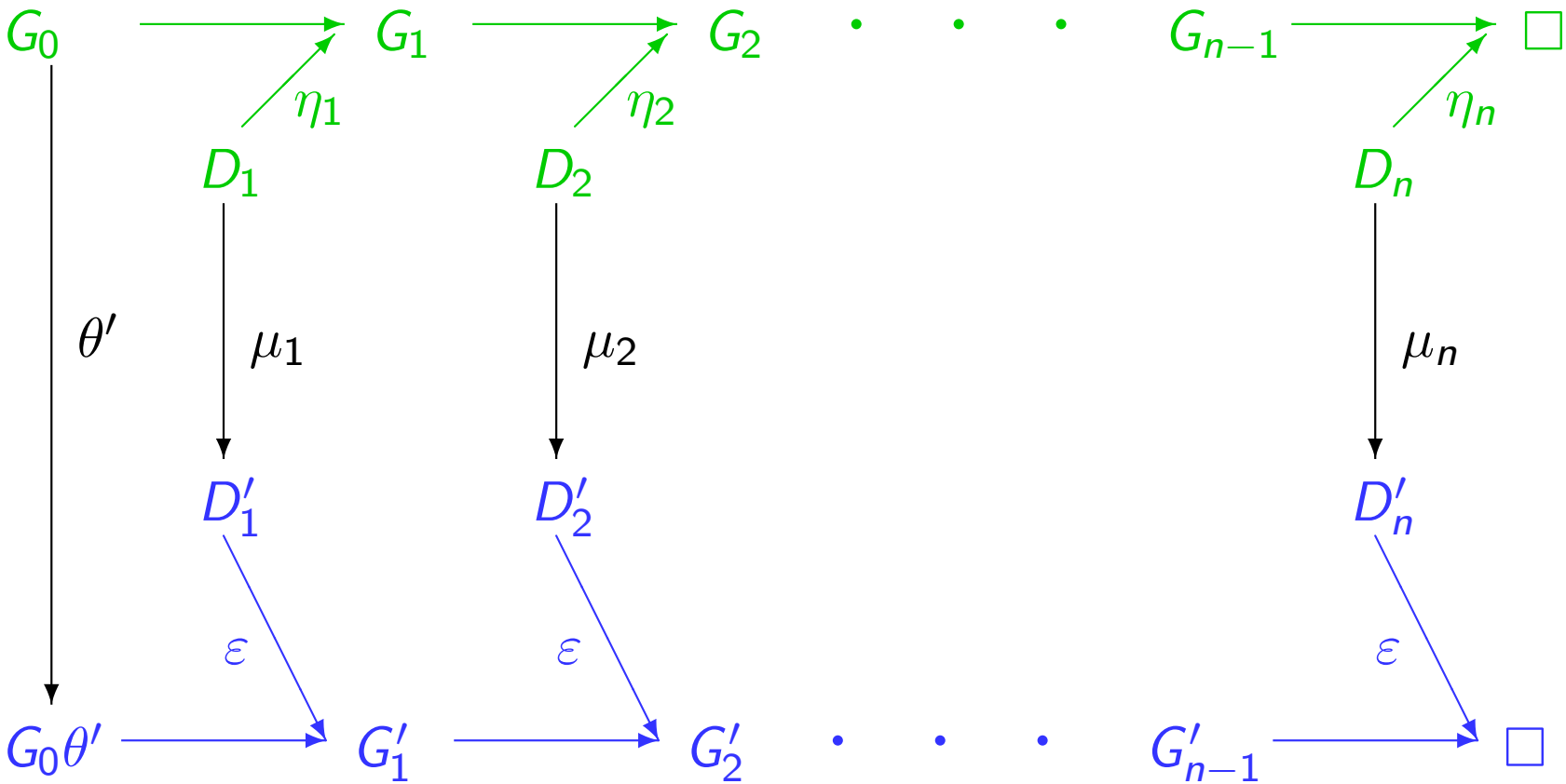
ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

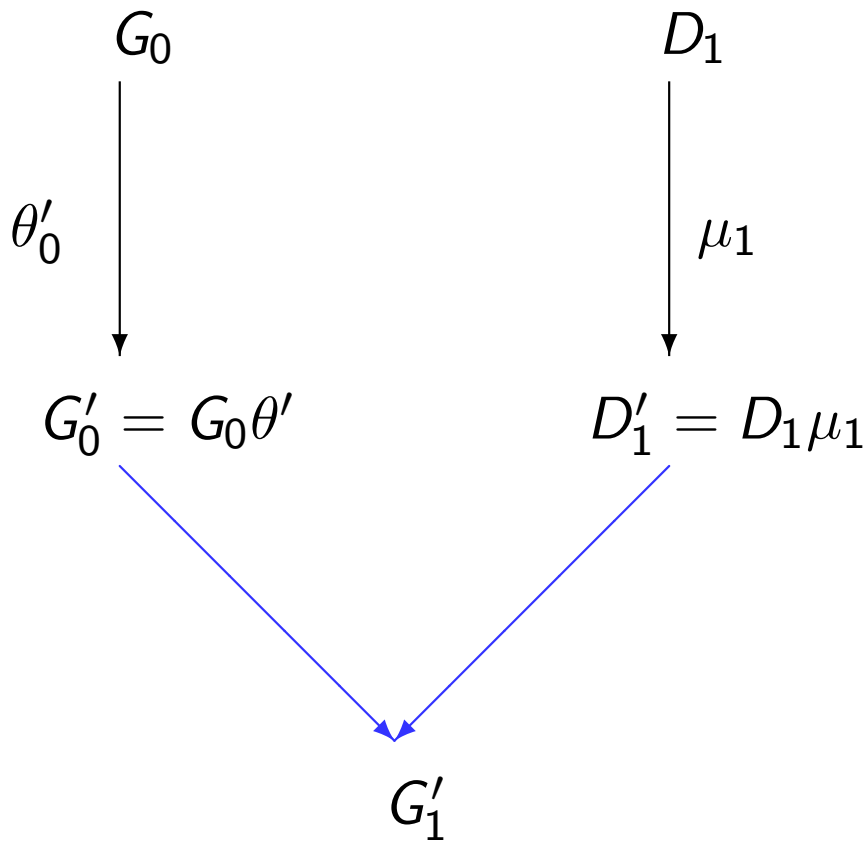


$$\theta' = (\eta_1\eta_2\ldots\eta_n)|_{Y_1,\ldots,Y_m}\rho'$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

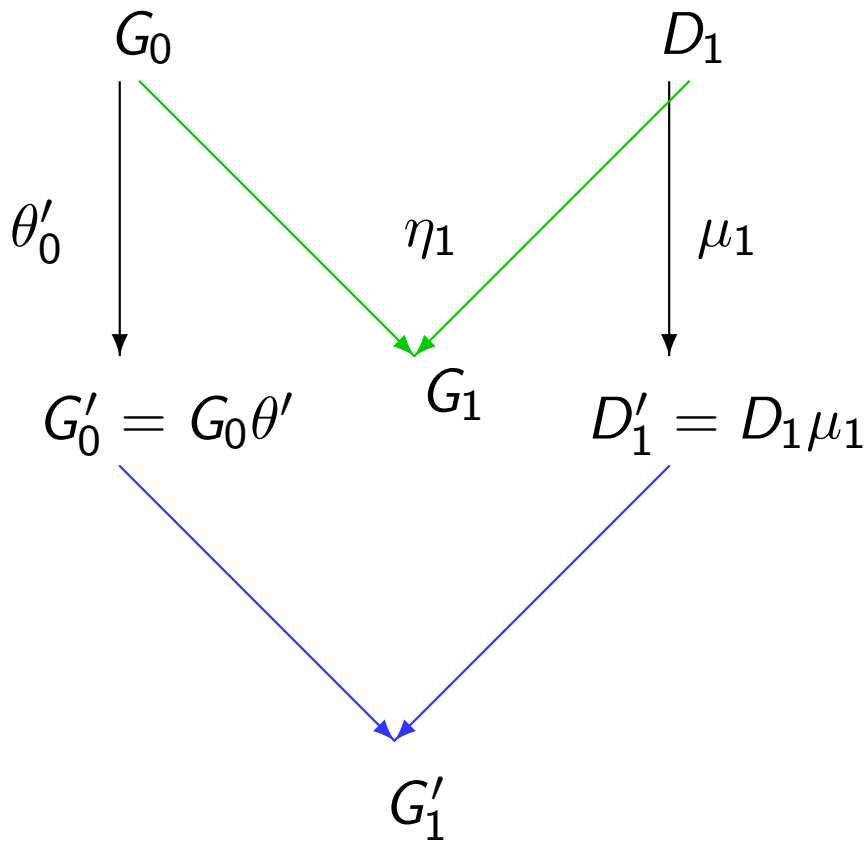
Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

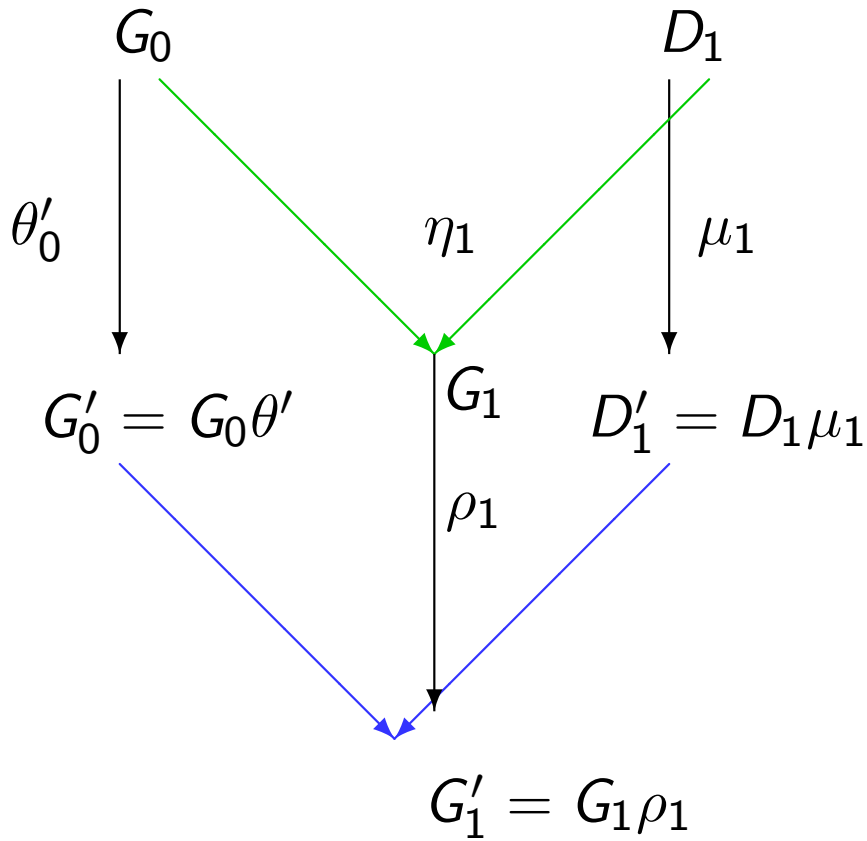
Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

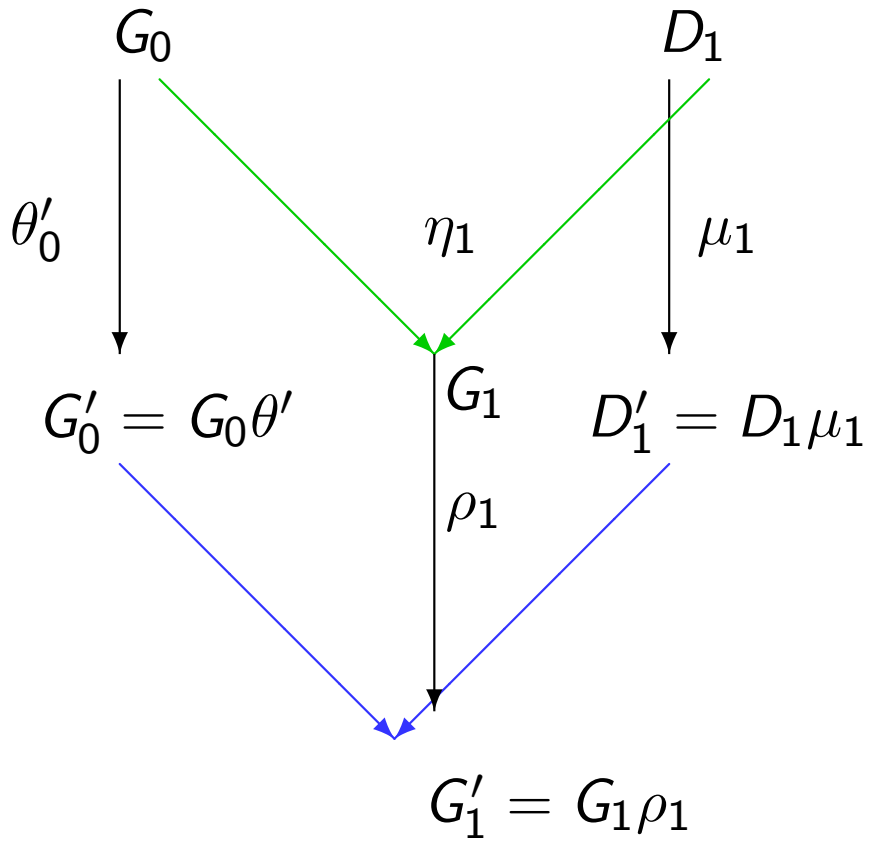
Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.



И при этом верно равенство $\theta'_0 = (\eta_1\rho_1)|_{Y_1,\ldots,Y_m}$.

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Последовательно применяя этот прием на всех шагах вычисления запроса G'_0, получаем SLD-резолютивное вычисление запроса G_0:

$$(D_1, \eta_1, G_1), (D_2, \eta_1, G_2), \ldots, (D_n, \eta_n, \square)$$

для которого выполняется система равенств

$$\begin{aligned}
\theta' &= (\eta_1\rho_1)|_{Y_1,\ldots,Y_m} \\
\rho_1 &= (\eta_2\rho_2)|_{Var_{G_1}} \\
\rho_2 &= (\eta_3\rho_3)|_{Var_{G_2}} \\
&\ldots \\
\rho_n &= (\eta_n\rho_n)|_{Var_{G_n}}
\end{aligned}$$

Из этой системы следует равенство $\theta' = (\eta_1\eta_2\ldots\eta_n)|_{Y_1,\ldots,Y_m}\rho'$ для некоторой подстановки ρ'. $\square$

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

Итак, у нас есть

- правильный ответ θ_0 на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$;
- подстановка $\lambda = \{Z_1/c_1, Z_2/c_2, \ldots, Z_r/c_r\}$ «свежих» констант на место всех переменных $Z_1, \ldots, Z_r$ из термов подстановки θ_0.
- основной пример $\theta'_0 = \theta_0\lambda$ правильного ответа θ.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

θ_0 — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$;

$\Downarrow$

$\mathcal{P} \models G_0\theta_0\lambda$;

$\Downarrow$ (по лемме об основных вычислениях)

основной запрос $G_0\theta_0\lambda$ к множеству основных примеров программных утверждений $[\mathcal{P}]$ имеет успешное вычисление;

$\Downarrow$ (по лемме о подъеме для логических программ)

запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$ имеет успешное вычисление с вычисленным ответом η, для которого верно равенство

$$\theta_0\lambda = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки ρ'.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

А теперь заменим в левой и правой частях равенства

$$\theta_0\lambda = \eta\rho'$$

все константы $c_1, \ldots, c_r$ на символы переменных $Z_1, \ldots, Z_r$.

Поскольку константы $c_1, \ldots, c_r$ не входят в состав запроса G_0 и программы $\mathcal{P}$, эти константы не входят в состав термов вычисленного ответа η, и, значит, могут содержаться только в подстановке ρ'.

В левой части равенства подстановка $\lambda = \{Z_1/c_1, \ldots, Z_r/c_r\}$ превращается в пустую подстановку ε.

В правой части равенства подстановка ρ' превращается в некоторую новую подстановку ρ.
В итоге равенство $\theta_0\lambda = \eta\rho'$ превращается в равенство

$$\theta_0 = \eta\rho$$

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Поясняющий пример.

Рассмотрим запрос $?P(U, V)$ к логической программе

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}: & P(f(X), X) \leftarrow R(X); & (1) \\ & R(Y) \leftarrow; & (2) \\ & Q(c) \leftarrow; & (3) \end{array}$$

Легко видеть, что $\theta = \{U/f(c), V/c\}$ — это правильный ответ на запрос к программе.

Вместе с тем, единственный вычисленный ответ — это $\eta = \{U/f(Y), V/Y\}$.

Все дело в том, что θ — это частный случай η: $\theta = \eta\{Y/c\}$.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Итак, любой правильный ответ на запрос к хорновской логической программе можно вычислить (возможно, с обобщением) по правилу SLD-резолюции, и любой вычисленный ответ будет правильным.

А как организовать вычисления логических программ, чтобы вычислить **ВСЕ** ответы?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 13.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 14.

Правила выбора подцелей. Деревья вычислений логических программ. Стратегии вычисления логических программ.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

SLD-резолютивное вычисление запроса $?G$ к логической программе $\mathcal{P}$ определяется неоднозначно.
Рассмотрим запрос $?P(U,V), R(U)$ к логической программе

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}: & P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y); & (1) \\ & P(X,X) \leftarrow Q(X); & (2) \\ & R(b) \leftarrow; & (3) \\ & Q(c) \leftarrow; & (4) \end{array}$$

Уже на первом шаге вычисления возникают вопросы выбора:

- Какую подцель выделить?

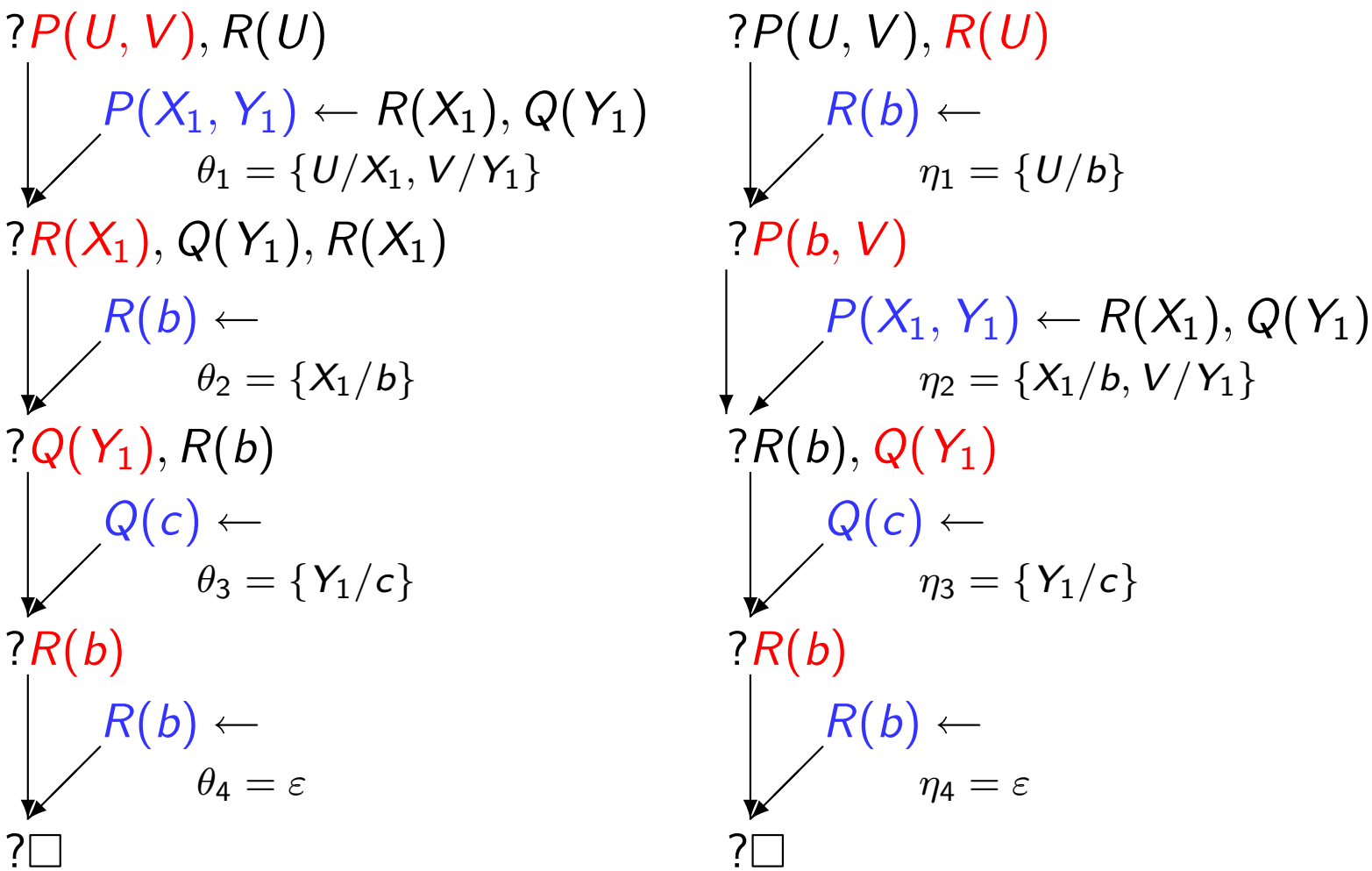
$$?P(U,V), R(U) \qquad\qquad ?P(U,V), R(U)$$

- Если выделена, например, первая подцель $?P(U,V)$, $R(U)$, то какое программное утверждение выбрать?

$$\begin{array}{lll} P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y); & (1) \\ P(X,X) \leftarrow Q(X); & (2) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y); & (1) \\ P(X,X) \leftarrow Q(X); & (2) \end{array}$$

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Рассмотрим два вычисления запроса $?P(U, V), R(U)$



$\theta = \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4|_{\{U,V\}} = \{U/b, V/c\}$

$\eta = \eta_1\eta_2\eta_3\eta_4|_{\{U,V\}} = \{U/b, V/c\}$

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Как видите, мы получаем одинаковые вычисленные ответы в обоих вычислениях независимо от порядка выбора подцелей в целевых утверждениях.

Это случайность или так бывает всегда?

С точки зрения операционной семантики программ, запрос — это список задач, которые нужно решить.

- Для решения запроса нужно решить **все** подцели запроса. Значит, результат вычисления не зависит от того порядка, в котором решаются задачи (выбираются подцели).
- Решение одной задачи может помочь решить другую. Значит, правильно выбранный порядок решения задач существенно влияет на эффективность вычисления запроса.

Покажем, что верно первое предположение.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Определение.

Отображение R, которое сопоставляет каждому непустому запросу $G : ?C_1, C_2, \ldots, C_m$ одну из подцелей $C_i = R(G)$ в этом запросе, называется **правилом выбора подцелей** .

Для заданного правила выбора подцелей R вычисление запроса G к логической программе $\mathcal{P}$ называется **R-вычислением** , если на каждом шаге вычисления очередная подцель в запросе выбирается по правилу R.

Ответ, полученный в результате успешного R-вычисления, называется **R-вычисленным** .

Возникает вопрос:

При каком правиле выбора подцелей R каждый вычисленный ответ оказывется R-вычисленным?

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Для каждого программного утверждения $D: \ A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$ условимся использовать запись D^+ для обозначения атома A_0, а запись D^- — для обозначения списка атомов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В частности, если D — это факт $A_0 \leftarrow$, то D^- — это пустой список.

Выбор обозначений обусловлен тем, что утверждение $D: \ A_0 \leftarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответствует дизъюнкту

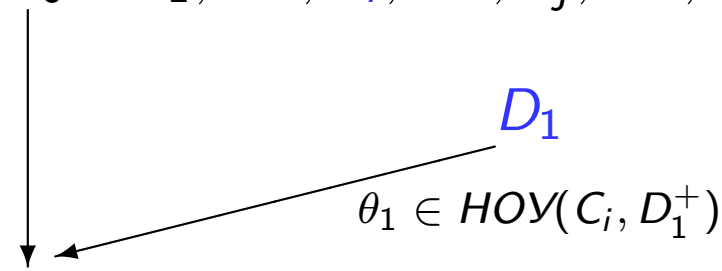
$$\overbrace{A_0}^{\text{положительная литера}} \quad \underbrace{\vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n}_{\text{отрицательные литеры}}$$

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

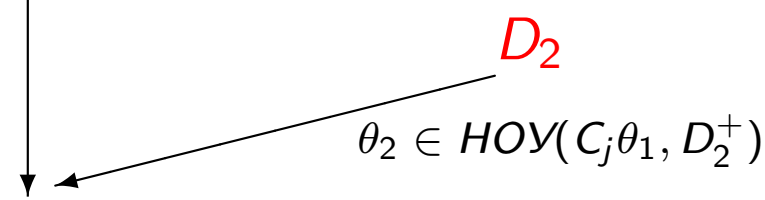
Переключательная лемма.

Предположим, что запрос $G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$ к хорновской логической программе $\mathcal{P}$ имеет вычисление

$G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$



$G_1' :? (C_1, \ldots, D_1^-, \ldots, C_j, \ldots, C_m)\theta_1$



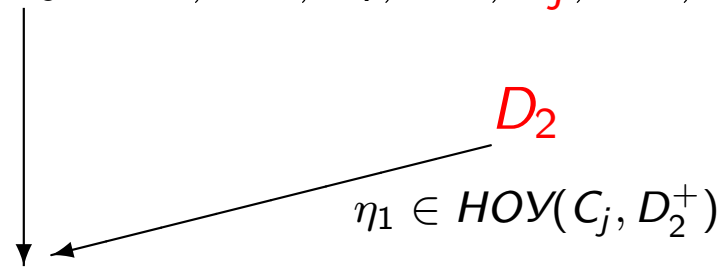
$G_2' :? (C_1\theta_1, \ldots, D_1^-\theta_1, \ldots, D_2^-, \ldots, C_m\theta_1)\theta_2$

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

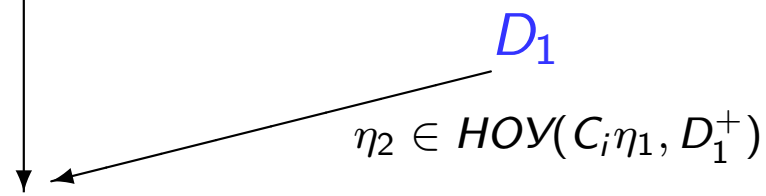
Переключательная лемма.

Тогда запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$ также имеет вычисление

$G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$



$G_1'' :? (C_1, \ldots, C_i, \ldots, D_2^-, \ldots, C_m)\eta_1$



$G_2'' :? (C_1\eta_1, \ldots, D_1^-, \ldots, D_2^-\eta_1 \ \ldots, C_m\eta_1)\eta_2$

и при этом запросы G_2' и G_2'' являются вариантами друг друга, т. е. $\theta_1\theta_2\rho' = \eta_1\eta_2$ и $\eta_1\eta_2\rho'' = \theta_1\theta_2$ для некоторых $\rho', \rho'' \in Subst$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

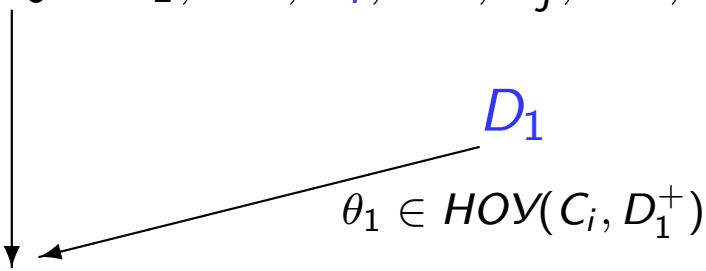
Переключательная лемма говорит о том, что при изменении порядка выбора подцелей результат вычисления сохраняется (с точностью до переименования переменных).

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

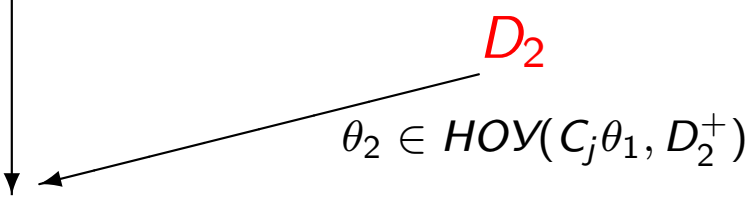
Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление

$G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$



$G_1' :? (C_1, \ldots, D_1^-, \ldots, C_j, \ldots, C_m)\theta_1$

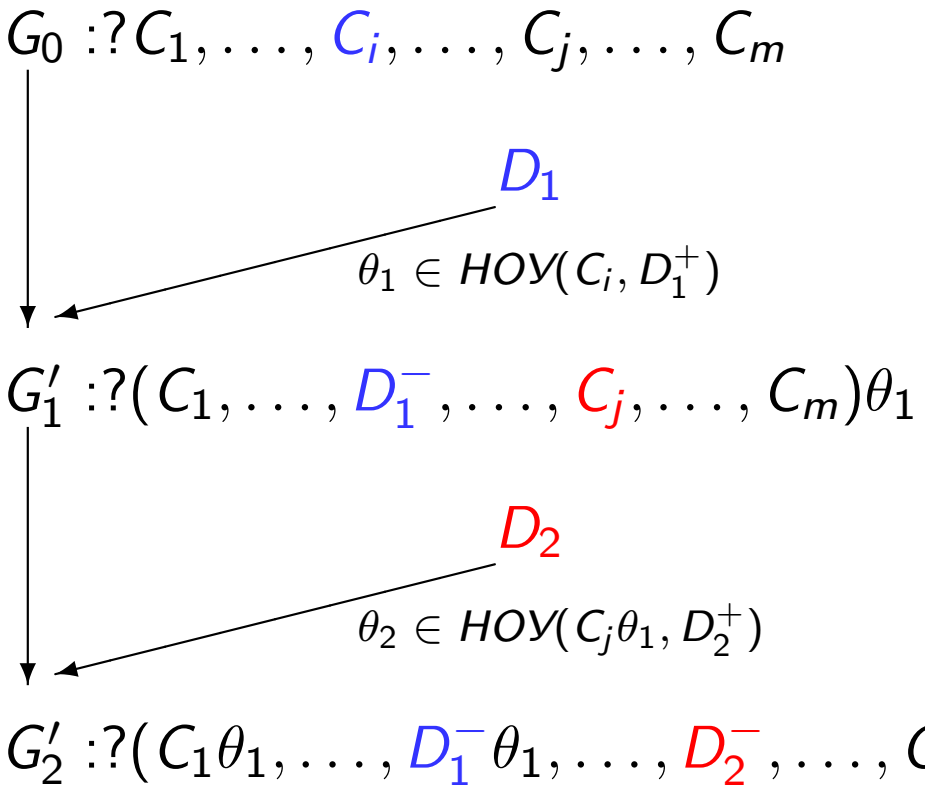


$G_2' :? (C_1\theta_1, \ldots, D_1^-\theta_1, \ldots, D_2^-, \ldots, C_m\theta_1)\theta_2$

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление



Согласно определению SLD-резолютивного вычисления $Dom_{\theta_1} \cap Var_{D_2} = \emptyset$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление

$G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$

D_1

$\theta_1 \in HOY(C_i, D_1^+)$

$G_1' :? (C_1, \ldots, D_1^-, \ldots, C_j, \ldots, C_m)\theta_1$

D_2

$\theta_2 \in HOY(C_j\theta_1, D_2^+)$

$G_2' :? (C_1\theta_1, \ldots, D_1^-\theta_1, \ldots, D_2^-, \ldots, C_m\theta_1)\theta_2$

Согласно определению SLD-резолютивного вычисления $Dom_{\theta_1} \cap Var_{D_2} = \emptyset$.

Поэтому $D_2^+\theta_2 = D_2^+\theta_1\theta_2$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление

$G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$

D_1

$\theta_1 \in HOY(C_i, D_1^+)$

$G_1' :? (C_1, \ldots, D_1^-, \ldots, C_j, \ldots, C_m)\theta_1$

D_2

$\theta_2 \in HOY(C_j\theta_1, D_2^+)$

$G_2' :? (C_1\theta_1, \ldots, D_1^-\theta_1, \ldots, D_2^-, \ldots, C_m\theta_1)\theta_2$

Согласно определению SLD-резолютивного вычисления $Dom_{\theta_1} \cap Var_{D_2} = \emptyset$.

Поэтому $D_2^+\theta_2 = D_2^+\theta_1\theta_2$.

Следовательно,

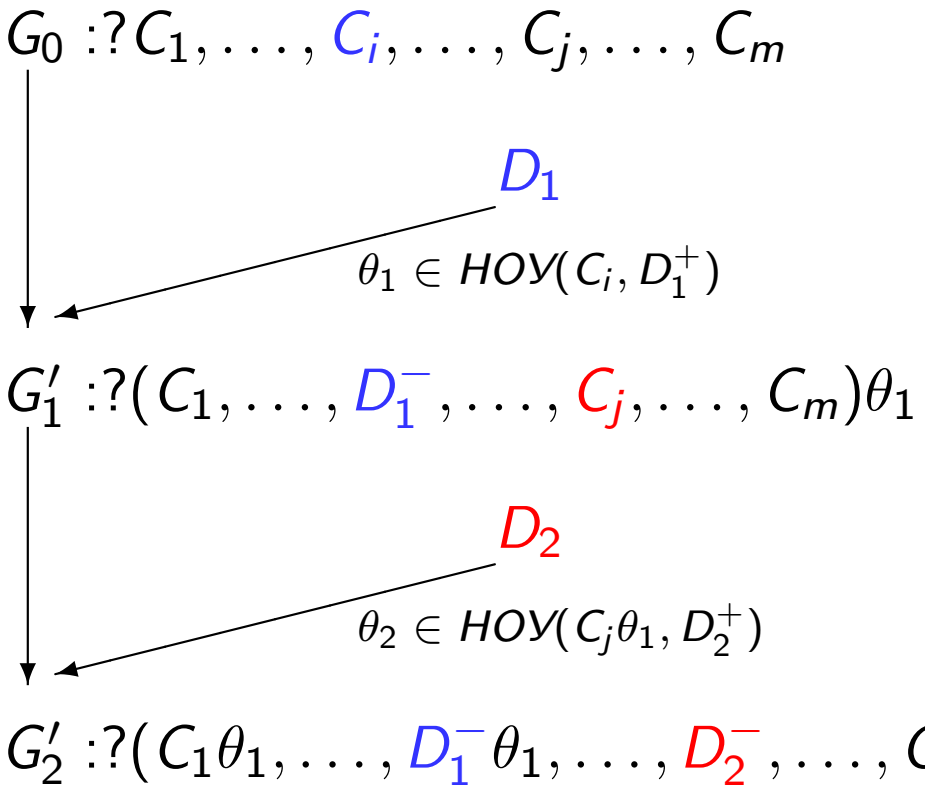
$C_j\theta_1\theta_2 = D_2^+\theta_2 = D_2^+\theta_1\theta_2$,

т. е. C_j и D_2^+ унифицируемы.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление

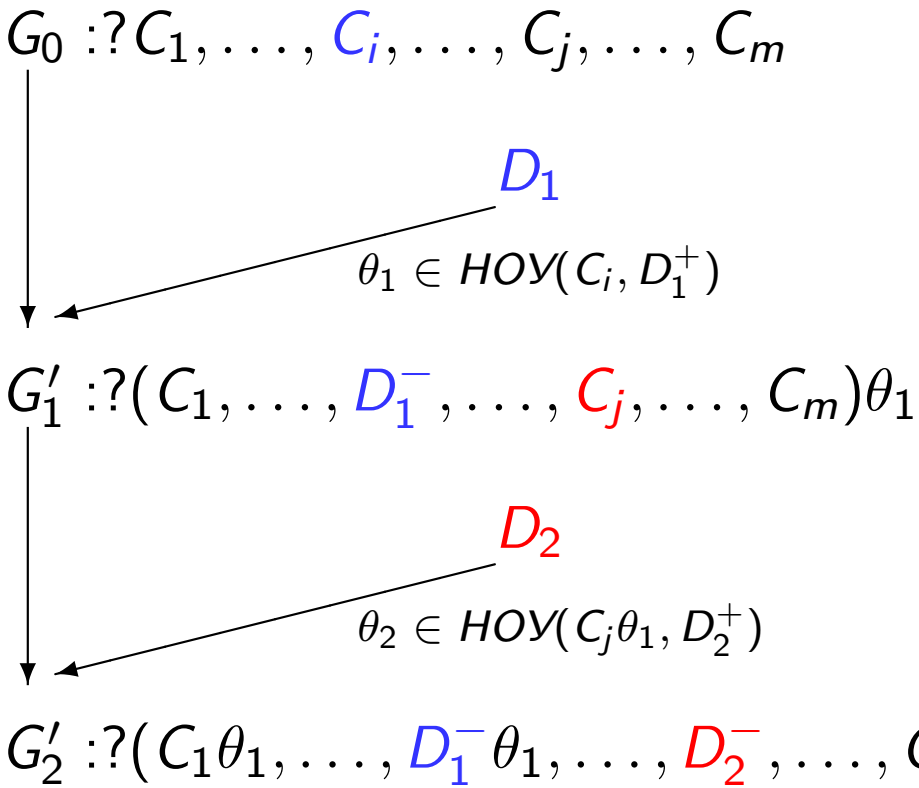


А раз C_j и D_2^+ унифицируемы, существует $\eta_1 \in HOY(C_j, D_2^+)$, и при этом $\theta_1\theta_2 = \eta_1\lambda$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление



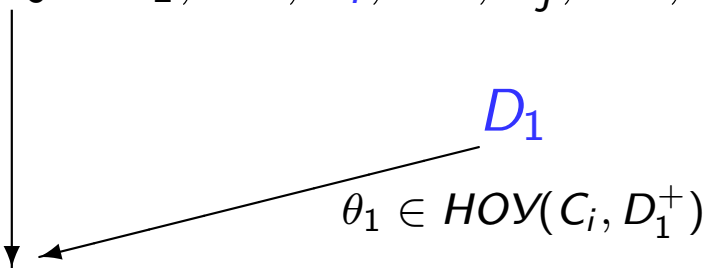
Далее, заметим,
что $C_i\theta_1\theta_2 = D_1^+\theta_1\theta_2$,
и поэтому $C_i\eta_1\lambda = D_1^+\eta_1\lambda$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

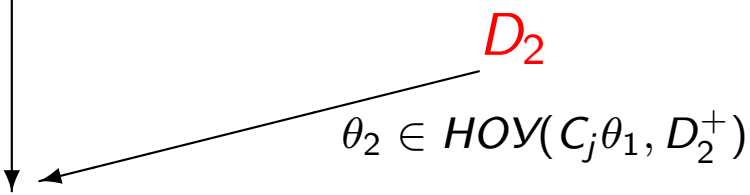
Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление

$G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$



$G_1' :? (C_1, \ldots, D_1^-, \ldots, C_j, \ldots, C_m)\theta_1$



$G_2' :? (C_1\theta_1, \ldots, D_1^-\theta_1, \ldots, D_2^-, \ldots, C_m\theta_1)\theta_2$

Далее, заметим,
что $C_i\theta_1\theta_2 = D_1^+\theta_1\theta_2$,
и поэтому $C_i\eta_1\lambda = D_1^+\eta_1\lambda$.

Т. к. $Dom_{\eta_1} \cap Var_{D_1} = \emptyset$,
верно $D_1^+\eta_1 = D_1^+$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление

$G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$

D_1

$\theta_1 \in HOУ(C_i, D_1^+)$

$G_1' :? (C_1, \ldots, D_1^-, \ldots, C_j, \ldots, C_m)\theta_1$

D_2

$\theta_2 \in HOУ(C_j\theta_1, D_2^+)$

$G_2' :? (C_1\theta_1, \ldots, D_1^-\theta_1, \ldots, D_2^-, \ldots, C_m\theta_1)\theta_2$

Далее, заметим,
что $C_i\theta_1\theta_2 = D_1^+\theta_1\theta_2$,
и поэтому $C_i\eta_1\lambda = D_1^+\eta_1\lambda$.

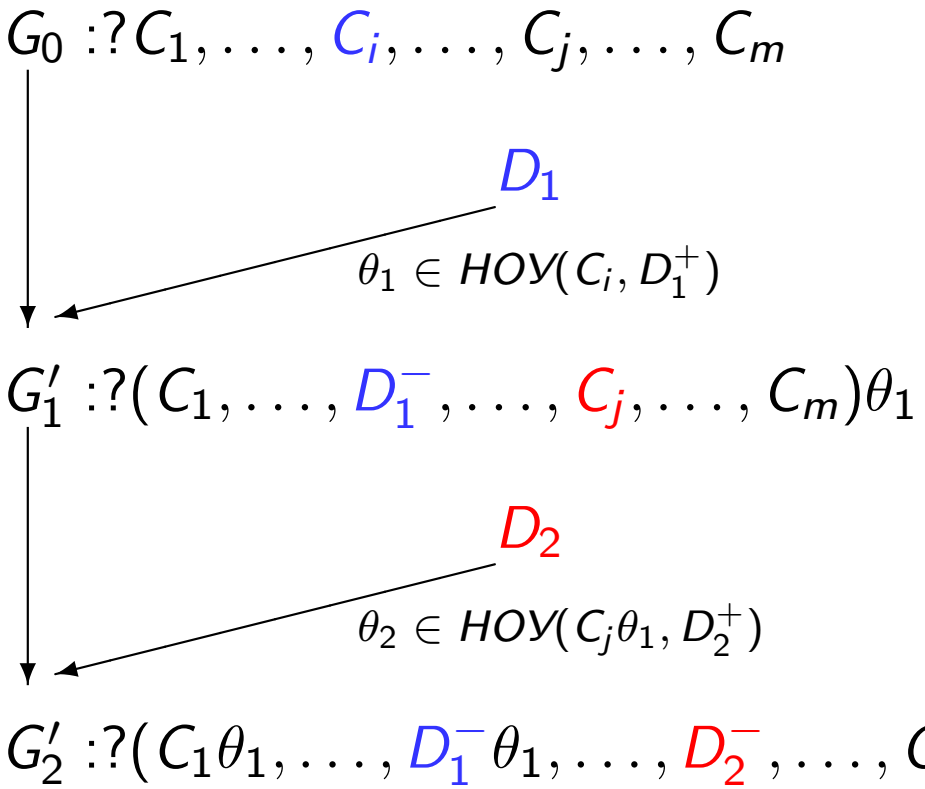
Т. к. $Dom_{\eta_1} \cap Var_{D_1} = \emptyset$,
верно $D_1^+\eta_1 = D_1^+$.

Значит, $C_i\eta_1\lambda = D_1^+\lambda$,
т. е. $C_i\eta_1$ и D_1^+ унифицируемы.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление

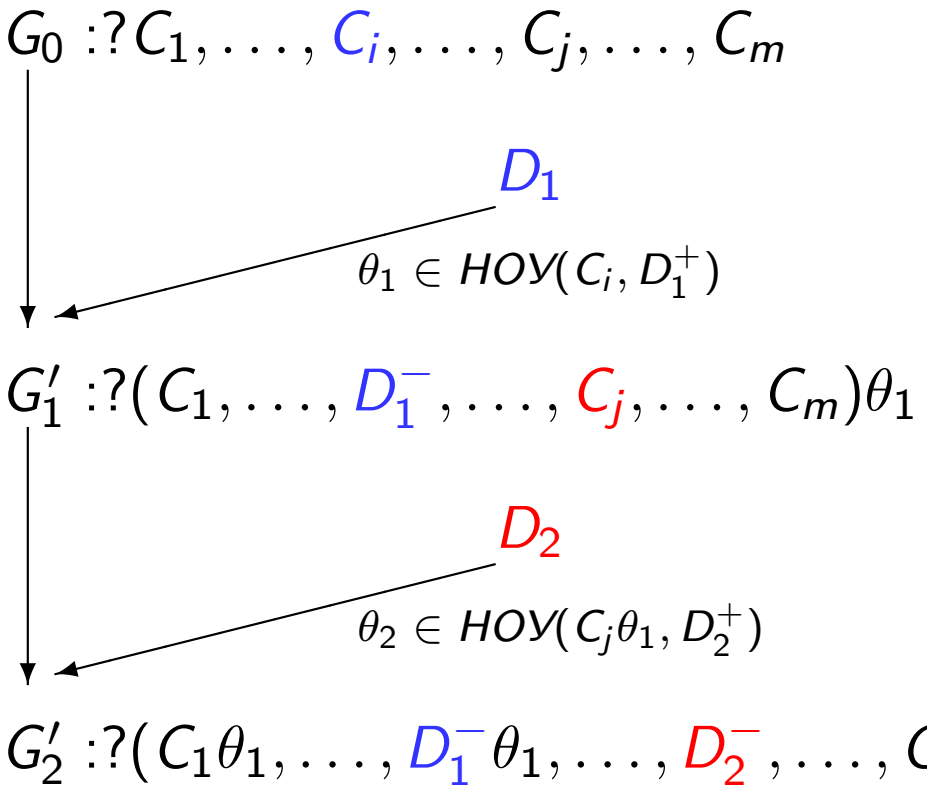


А раз $C_i\eta_1$ и D_1^+ унифицируемы, существует $\eta_2 \in HOY(C_i\eta_1, D_1^+)$, и при этом $\lambda = \eta_2\rho'$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).

Рассмотрим первое вычисление



Итак, получаем

$\eta_1 \in HOV(C_j, D_2^+)$,

$\eta_2 \in HOV(C_i\eta_1, D_1^+)$,

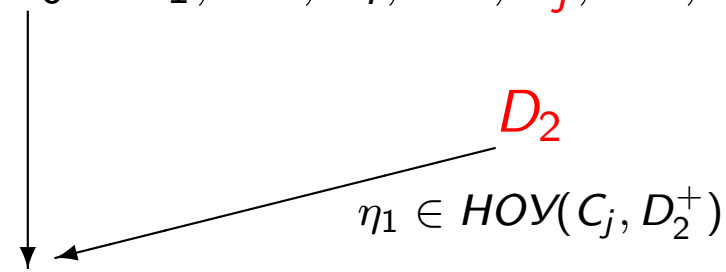
$\theta_1\theta_2 = \eta_1\lambda = \eta_1\eta_2\rho'$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

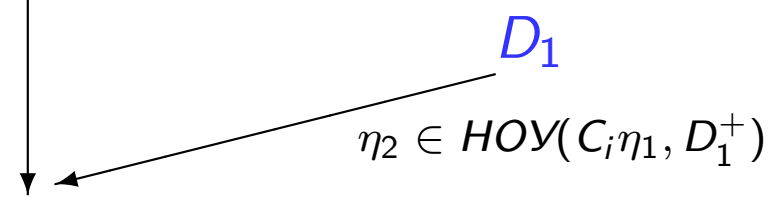
Доказательство (переключательной леммы).

Получаем другое вычисление

$G_0 :? C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_m$



$G_1'' :? (C_1, \ldots, C_i, \ldots, D_2^-, \ldots, C_m)\eta_1$



$G_2'' :? (C_1\eta_1, \ldots, D_1^-, \ldots, D_2^-\eta_1 \ \ldots, C_m\eta_1)\eta_2$

Итак, получаем

$\eta_1 \in HOY(C_j, D_2^+)$,

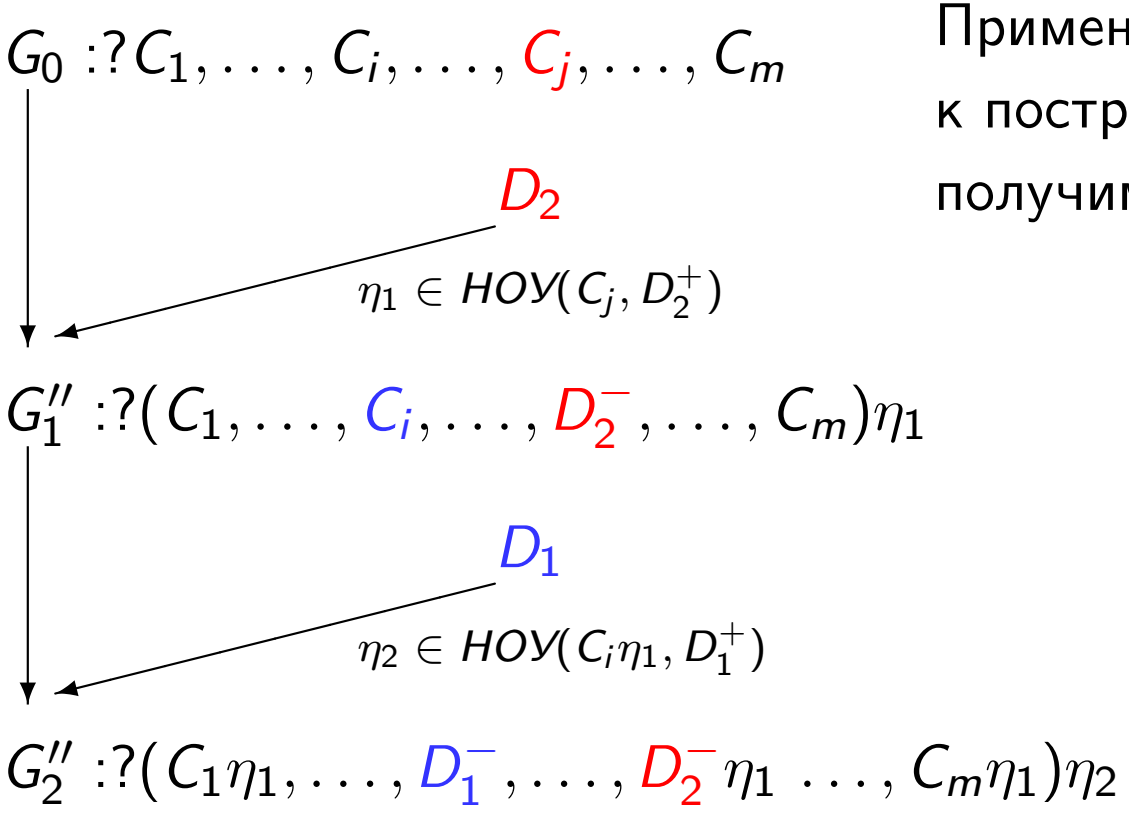
$\eta_2 \in HOY(C_i\eta_1, D_1^+)$,

$\theta_1\theta_2 = \eta_1\lambda = \eta_1\eta_2\rho'$.

Значит, запрос G_0 имеет и другое вычисление.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

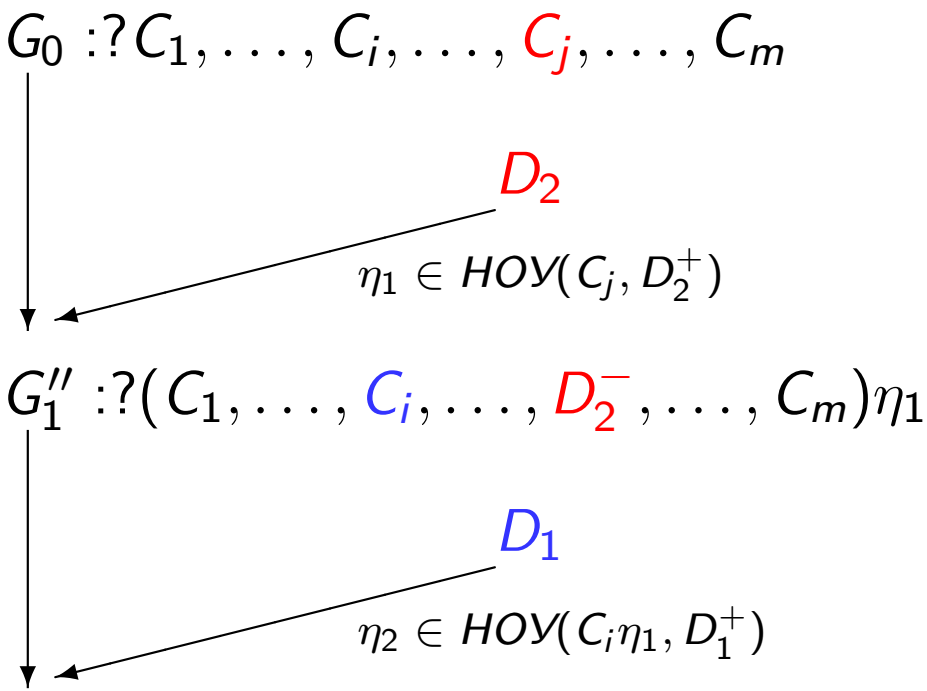
Доказательство (переключательной леммы).



Применяя те же рассуждения к построенному вычислению получим $\eta_1\eta_2 = \theta_1\theta_2\rho''$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство (переключательной леммы).



Применяя те же рассуждения к построенному вычислению получим $\eta_1\eta_2 = \theta_1\theta_2\rho''$.

Равенства $\theta_1\theta_2 = \eta_1\eta_2\rho'$, $\eta_1\eta_2 = \theta_1\theta_2\rho''$ означают, что подстановки $\eta_1\eta_2$ и $\theta_1\theta_2$, а также запросы G_2' и G_2'' являются вариантами друг друга. $\square$

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Теорема сильной полноты

Каково бы ни было правило выбора подцелей R, если θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$, то существует такой R-**вычисленный ответ** η, что равенство

$$\theta = \eta\rho$$

выполняется для некоторой подстановки ρ.

Доказательство

По теореме полноты существуют такой вычисленный ответ η', что $\theta = \eta'\rho'$. Рассмотрим соответствующее этому ответу успешное вычисление запроса G

$$comp' = (D_1, \eta'_1, G_1), \ldots, (D_N, \eta'_N, \square),$$

в котором $\eta' = \eta'_1 \ldots \eta'_N$.

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Доказательство

Предположим, что $R(G_0) = C_i$. Поскольку $comp'$ — это успешное вычисление, существует k_i, что подцель C_i впервые выбирается на k_i-ом шаге вычисления $comp'$. Применяя последовательно k_i раз переключательную лемму, можно получить успешное вычисление

$$comp'' = (D_{i_k}, \eta''_1, G''_1), (D_1, \eta''_2, G''_1), \ldots, (D_N, \eta''_N, \Box),$$

в котором на первом шаге выбирается подцель $C_i = R(G_0)$, но при этом вычисленный результат $\eta'' = \eta''_1 \ldots \eta''_N$ — это вариант вычисленного ответа $\eta' = \eta'_1 \ldots \eta'_N$, и значит $\theta = \eta''\rho''$.

Повторяя этот трюк N раз, получим требуемое успешное R-вычисление.

Полное и строгое доказательство требует применения математической индукции. Провести самостоятельно. $\Box$

ПРАВИЛА ВЫБОРА ПОДЦЕЛЕЙ

Теорема сильной полноты говорит о том. что правило выбора подцелей не играет существенной роли при вычислении ответа: любое правило выбора подцелей позволяет получить все вычисленные ответы.

Поэтому для единообразной организации вычислений логических программ всегда используется **стандартное правило выбора** : в каждом запросе всегда выбирается самая первая (левая) подцель.
Теперь займемся вопросом о том, какую роль играет выбор подходящих программных утверждений.

ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Обратимся снова к запросу $?P(U, V), R(U)$ к логической программе

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}: & P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y); & (1) \\ & P(X,X) \leftarrow Q(X); & (2) \\ & R(b) \leftarrow; & (3) \\ & Q(c) \leftarrow; & (4) \end{array}$$

и будем применять стандартное правило выбора подцелей.

ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Тогда возможны следующие два вычисления запроса $?P(U, V), R(U)$

$?P(U, V), R(U)$

$P(X_1, Y_1) \leftarrow R(X_1), Q(Y_1)$

$\theta_1 = \{U/X_1, V/Y_1\}$

$?R(X_1), Q(Y_1), R(X_1)$

$R(b) \leftarrow$

$\theta_2 = \{X_1/b\}$

$?Q(Y_1), R(b)$

$Q(c) \leftarrow$

$\theta_3 = \{Y_1/c\}$

$?R(b)$

$R(b) \leftarrow$

$\theta_4 = \varepsilon$

$?\square$

$\theta = \theta_1\theta_2\theta_3\theta_4|_{\{U,V\}} = \{U/b, V/c\}$

$?P(U, V), R(U)$

$P(X_1, X_1) \leftarrow Q(X_1);$

$\eta_1 = \{U/X_1, V/X_1\}$

$?Q(X_1), R(X_1)$

$Q(c) \leftarrow$

$\eta_2 = \{X_1/c\}$

$?R(c)$

failure

тупиковое вычисление

ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Как видно из этого примера, выбор программных утверждений играет значительную роль.

Программное утверждение — это способ (рецепт) решения задачи (подцели). Ясно, что некоторые способы решения могут быть «хорошими», а некоторые — «плохими».

Таким образом, чтобы вычислить все ответы на запрос (или, что то же само, гарантировать вычисление хотя бы одного ответа), нужно уметь просматривать все варианты выбора программных утверждений. И нужно правильно организовать этот перебор.

ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

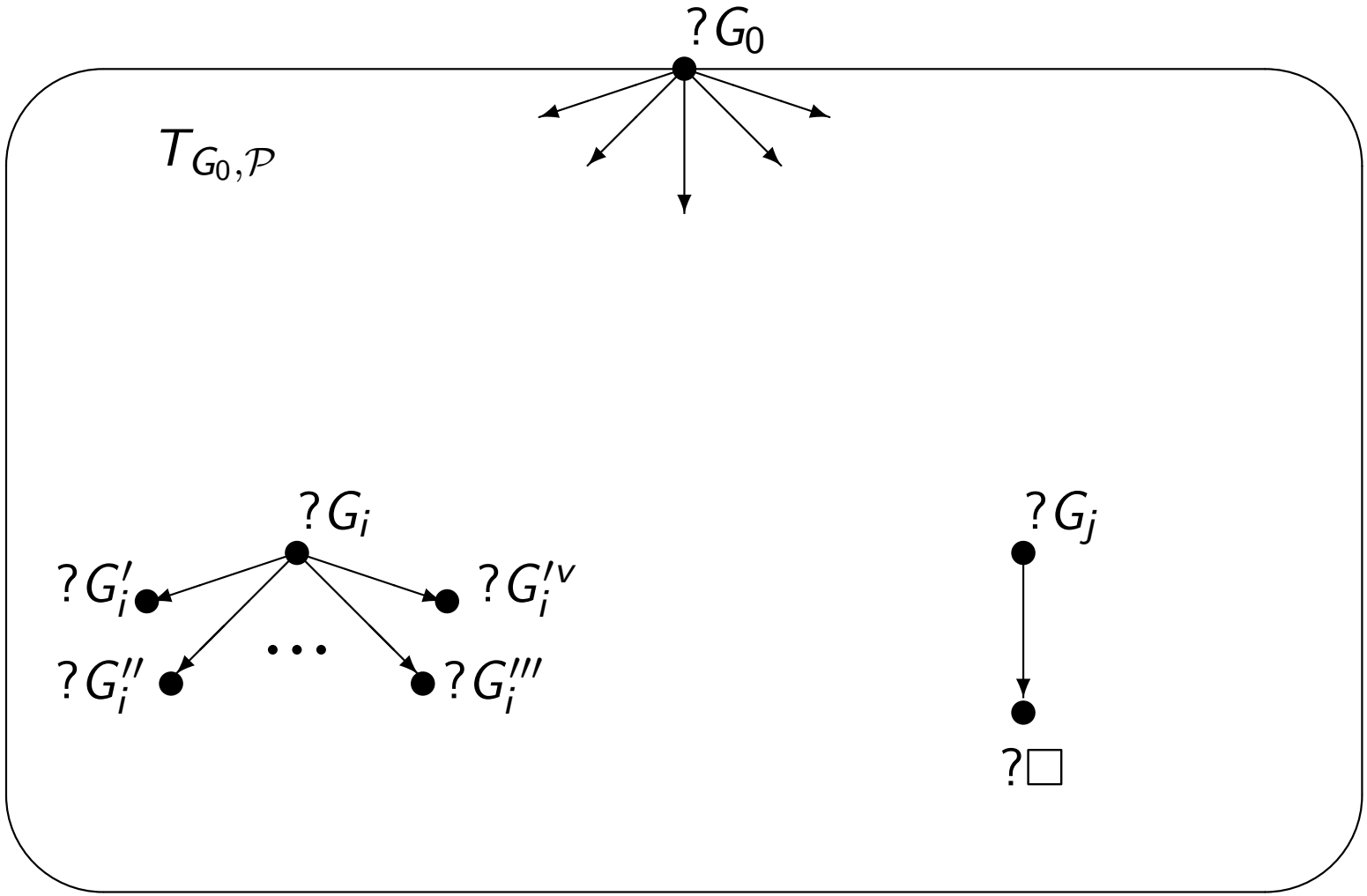
Определение

Деревом SLD-резолютивных вычислений запроса G_0 к логической программе $\mathcal{P}$ называется помеченное корневое дерево $T_{G_0,\mathcal{P}}$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1. Корнем дерева является исходный запрос G_0;
2. Потомками каждой вершины G являются всевозможные SLD-резольвенты запроса G (при фиксированном стандартном правиле выбора подцелей);
3. Листовыми вершинами являются пустые запросы (завершающие успешные вычисления) и запросы, не имеющие SLD-резольвент (завершающие тупиковые вычисления).

ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

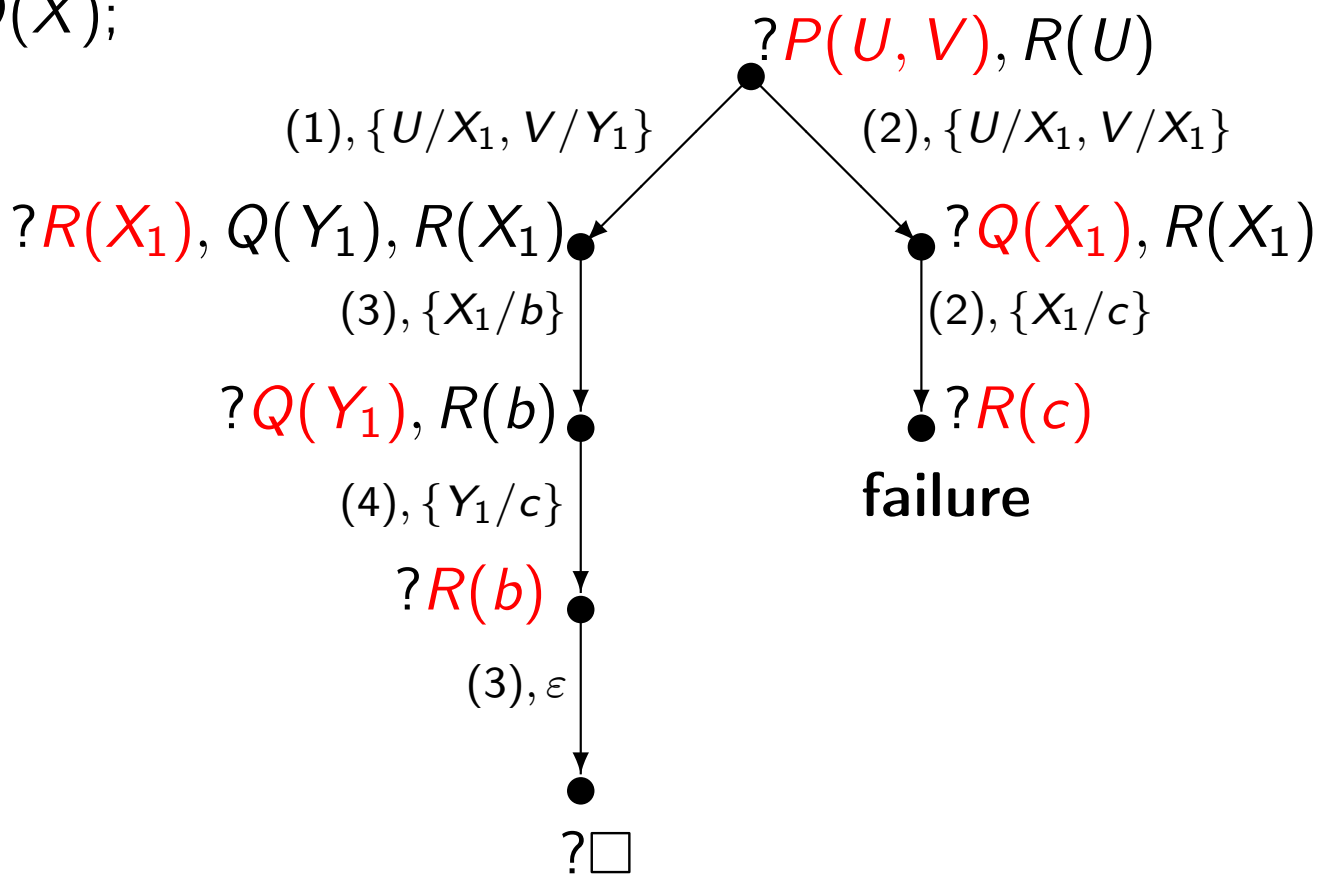
Иллюстрация



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Пример 1.

$\mathcal{P}$: $P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$
$R(b) \leftarrow;$
$Q(c) \leftarrow;$



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

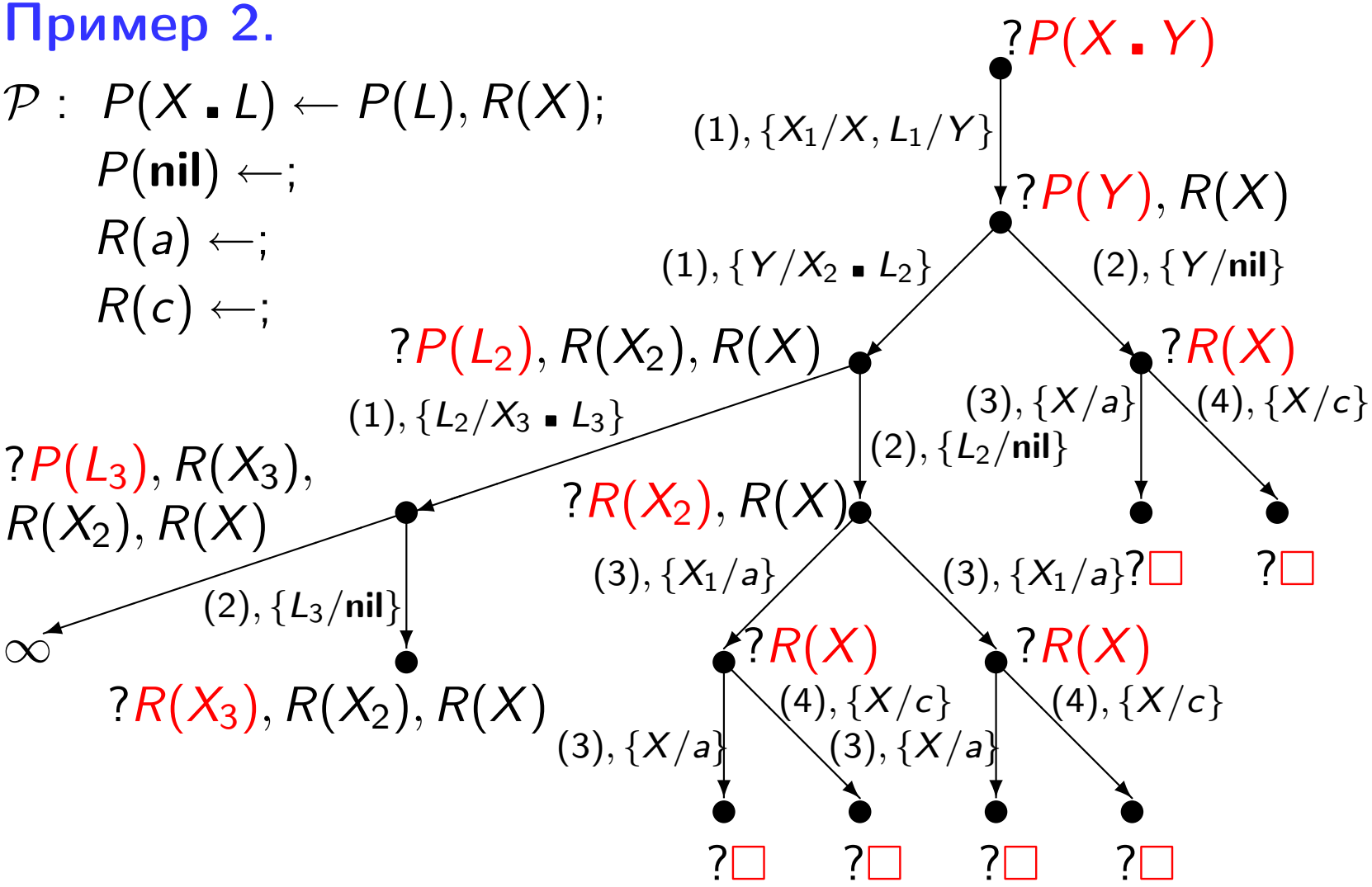
Пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(X \cdot L) \leftarrow P(L), R(X);$

$P(\mathbf{nil}) \leftarrow;$

$R(a) \leftarrow;$

$R(c) \leftarrow;$



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Итак, деревья вычислений логических программ бывают разные — конечные и бесконечные, с конечным или бесконечным множеством ветвей, и т. п.

Каждая ветвь дерева $T_{G_0,\mathcal{P}}$ соответствует одному из возможных вычислений запроса G_0 к логической программе $\mathcal{P}$.

Некоторые из ветвей образуют успешное вычисление и дают ответ на запрос.

Возникает вопрос:

Как нам обнаружить ветви успешных вычислений в дереве SLD-резолютивных вычислений программы?

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Определение

Стратегией вычисления запросов к логическим программам называется алгоритм построения (обхода) дерева SLD-резолютивных вычислений $T_{G_0,\mathcal{P}}$ всякого запроса G_0 к произвольной логической программе $\mathcal{P}$

Стратегия вычислений называется **вычислительно полной**, если для любого запроса G_0 и любой логической программы $\mathcal{P}$ эта стратегия строит (обнаруживает) **все** успешные вычисления запроса G_0 к программы $\mathcal{P}$

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Фактически, стратегия вычисления — это одна стратегий обхода корневого дерева. Как известно, таких стратегий существует много, но среди них выделяются две наиболее характерные:

- **стратегия обхода в ширину**, при которой дерево строится (обходится) поярусно — вершина i-го не строится, до тех пор пока не будут построены все вершины $(i-1)$-го яруса;
- **стратегия обхода в глубину с возвратом**, при которой ветви дерева обходятся поочередно — очередная ветвь дерева не обохдится, до тех пор пока не будут пройдены все вершины текущей ветви.

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

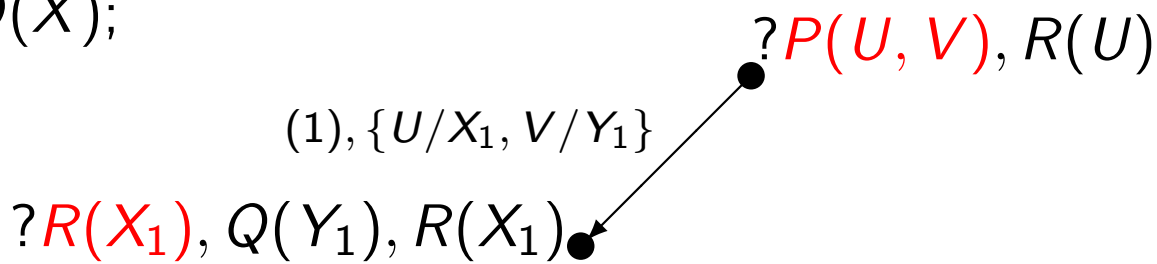
Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

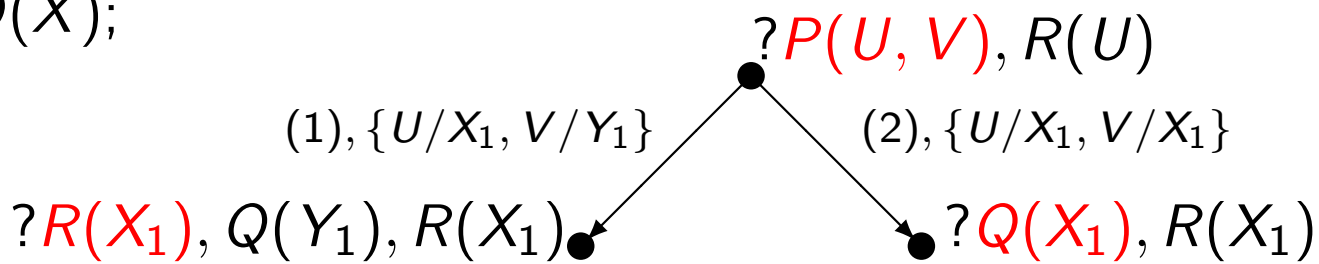
Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

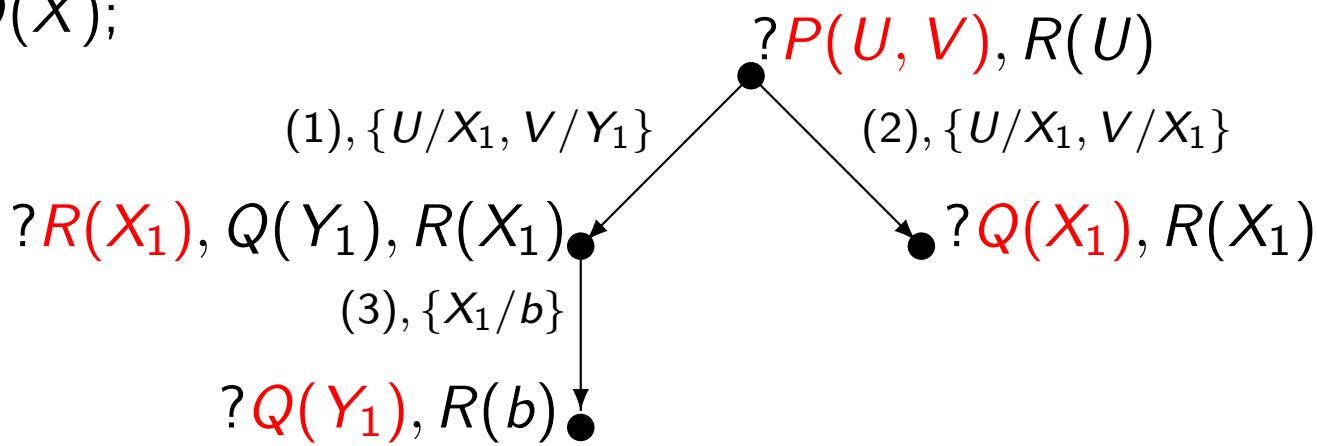
Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

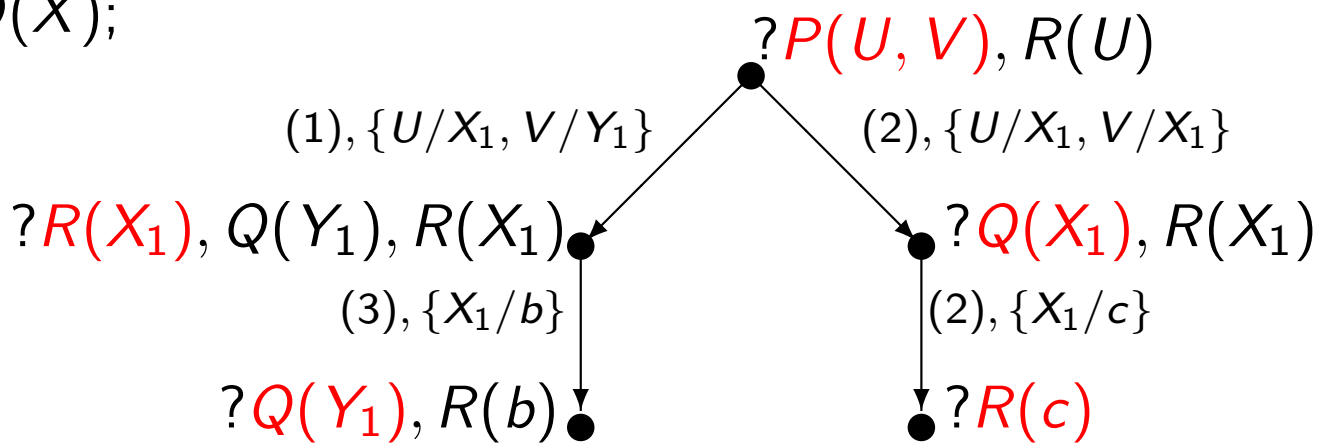
Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

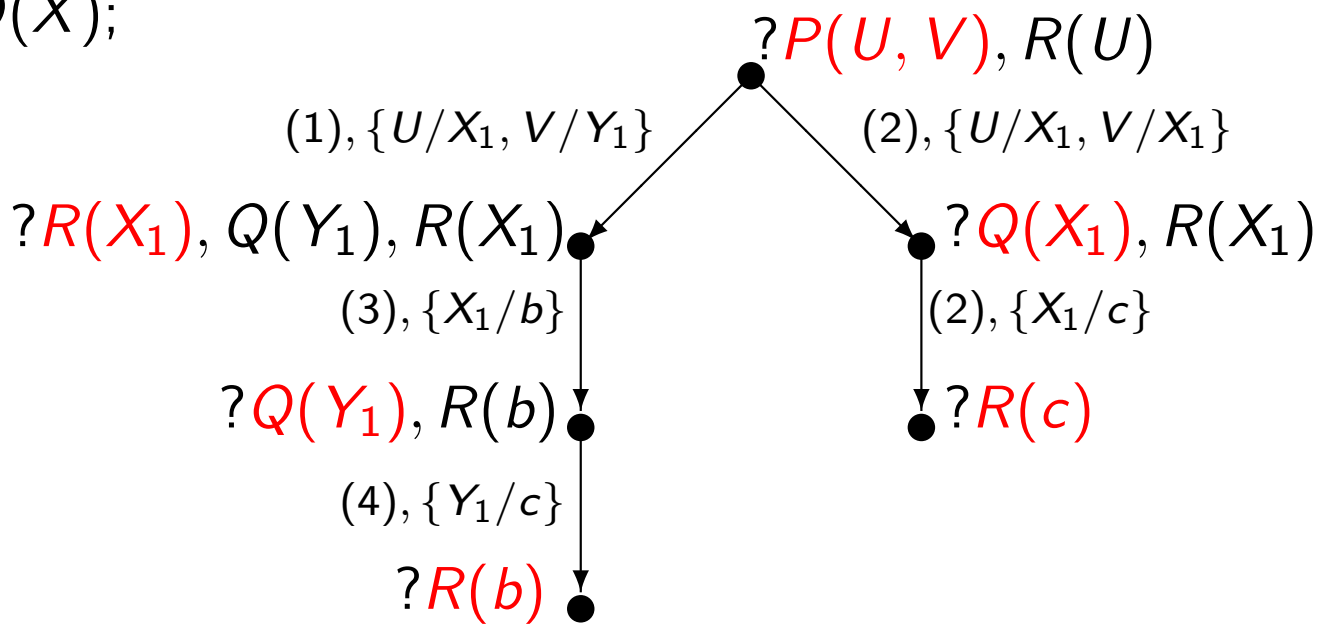
Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

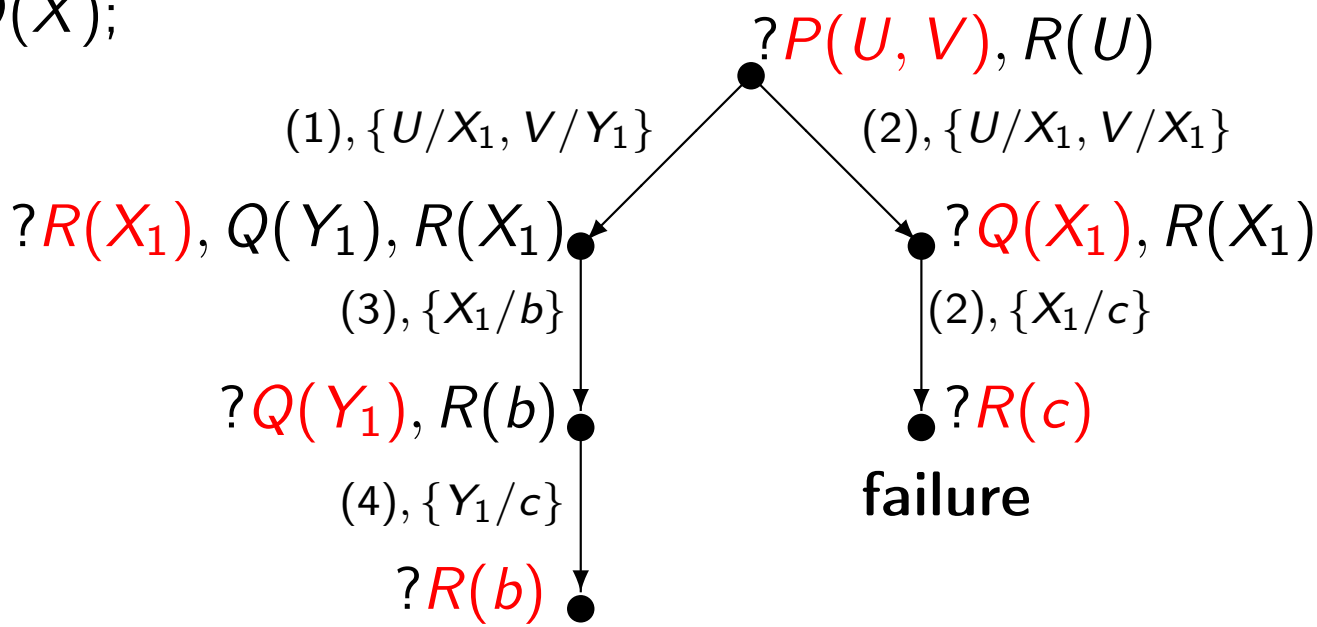
$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$
$P(X,X) \leftarrow Q(X);$
$R(b) \leftarrow;$
$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

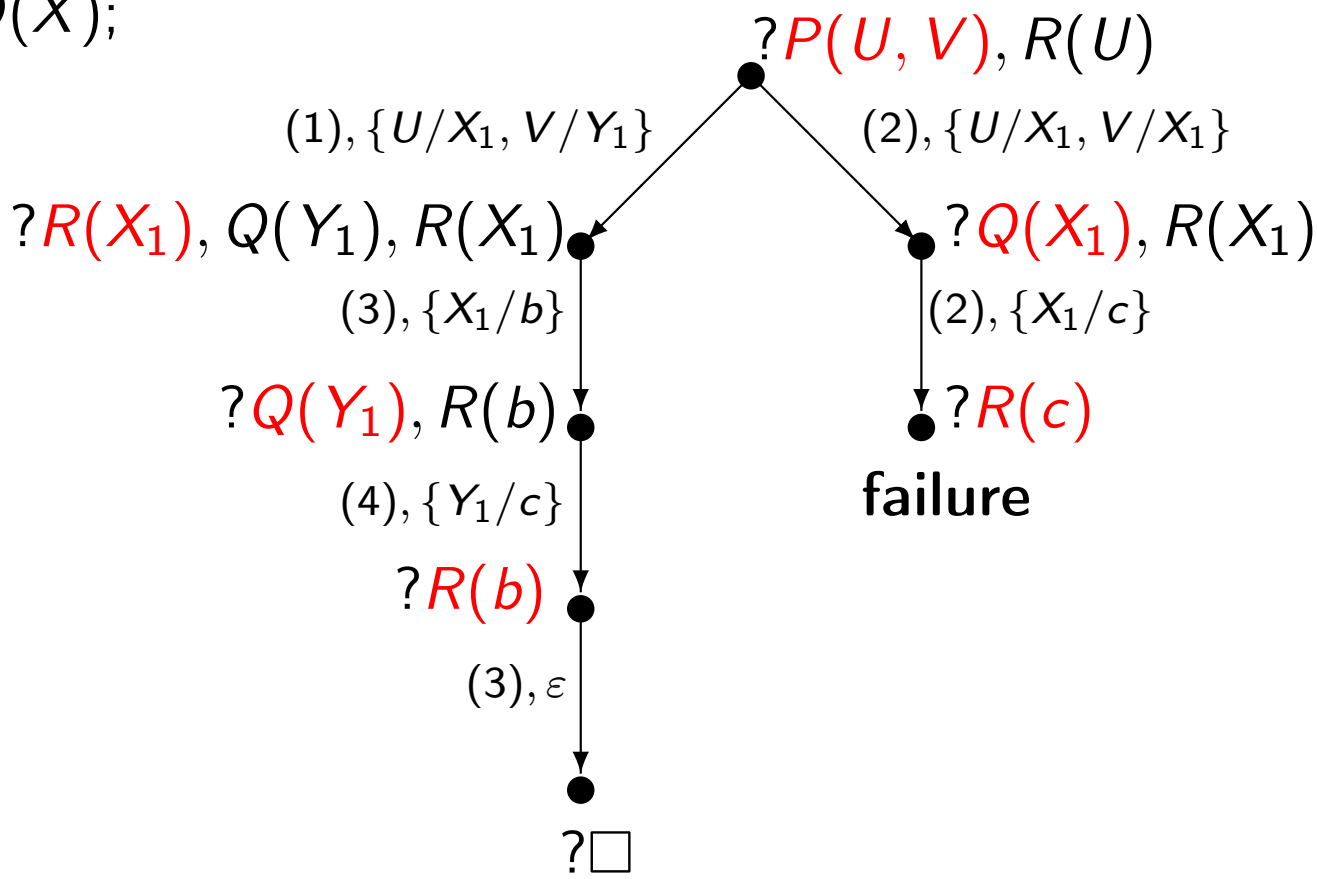
Пример обхода в ширину.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Стратегия обхода в ширину является вычислительно полной, поскольку

- каждый запрос имеет конечное число SLD-резольвент, и поэтому в каждом ярусе дерева SLD-резолютивных вычислений имеется конечное число вершин;
- каждое успешное вычисление завершается на некотором ярусе;
- и поэтому каждое успешное вычисление будет рано или поздно полностью построено.

Но строить интерпретатор логических программ на основе стратегии обхода в ширину **нецелесообразно**. При обходе дерева в ширину нужно обязательно хранить в памяти **все** вершины очередного яруса. Это требует большого расхода памяти. Например, в 100-м ярусе двоичного дерева содержится 2^{99} вершин. Вычислительных ресурсов всего земного шара не хватит, чтобы хранить информацию обо всех этих вершинах.

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Стратегия обхода в глубину с возвратом основана на следующих принципах:

1. все программные утверждения упорядочиваются;
2. на каждом шаге обхода из текущей вершины G осуществляется переход
   - либо в новую вершину-потомок G', которая является SLD-резольвентой запроса G и первого по порядку программного утверждения D, ранее не использованного для этой цели;
   - либо в ранее построенную родительскую вершину G'' (откат), если все программные утверждения уже были опробованы для построения SLD-резольвент запроса G.

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

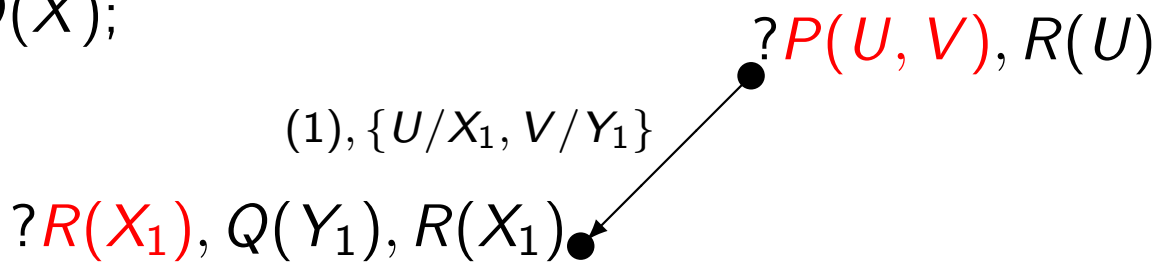
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

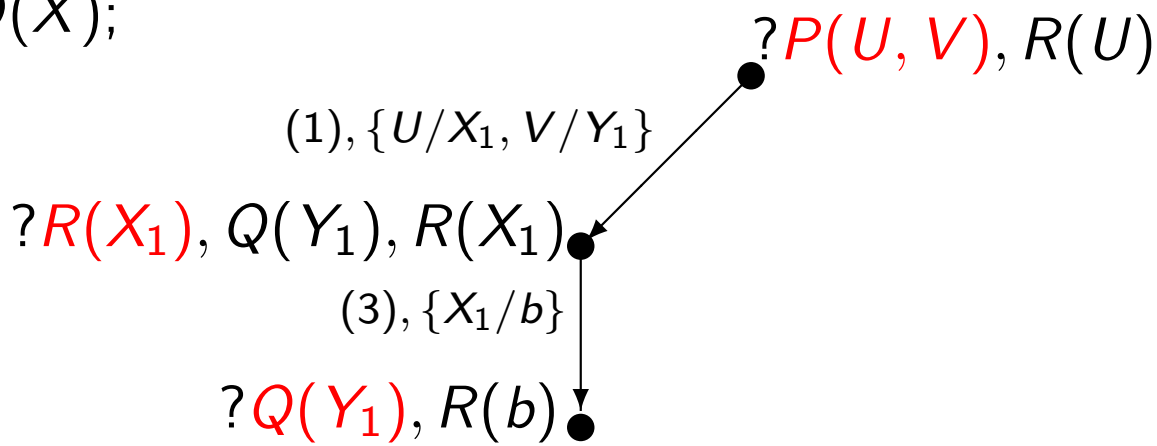
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

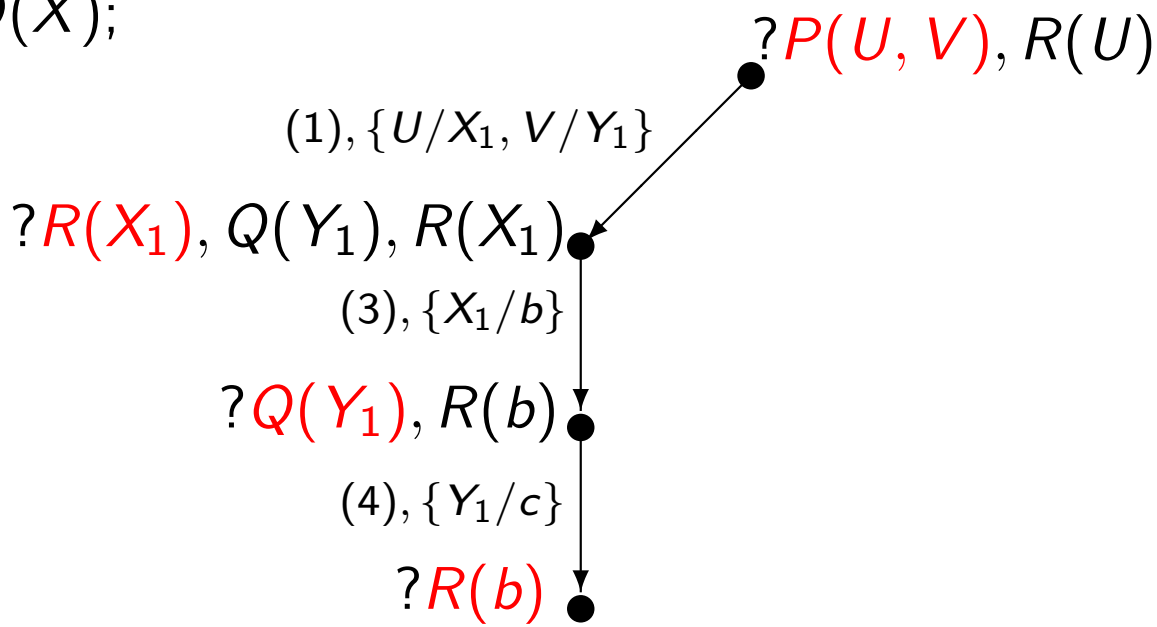
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

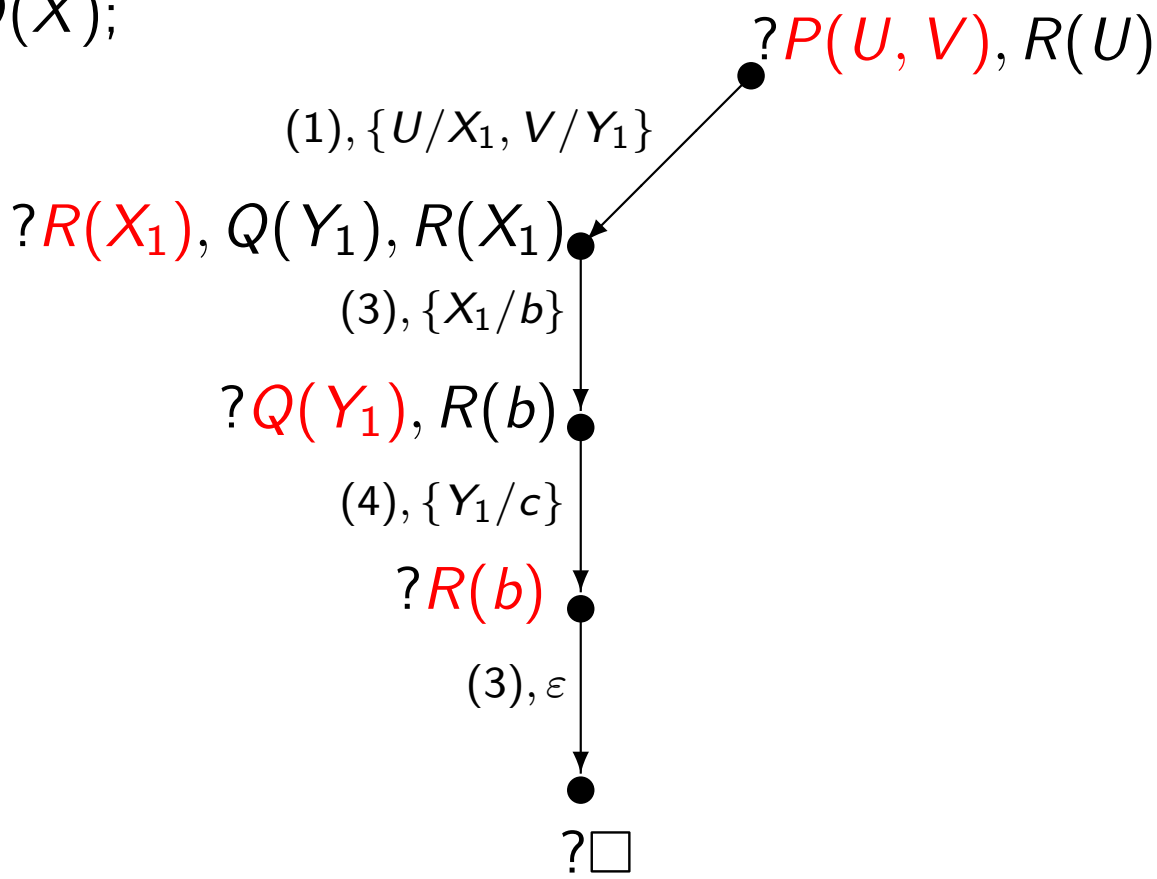
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

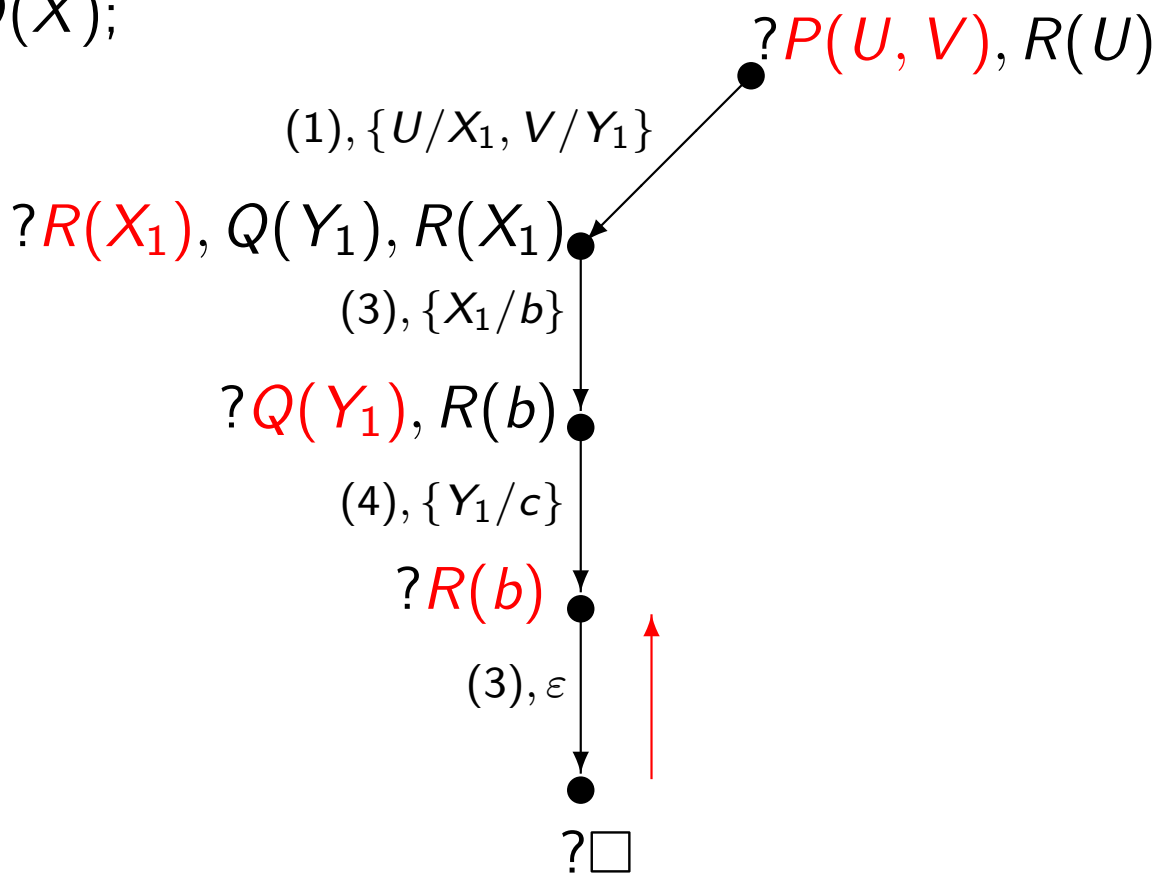
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

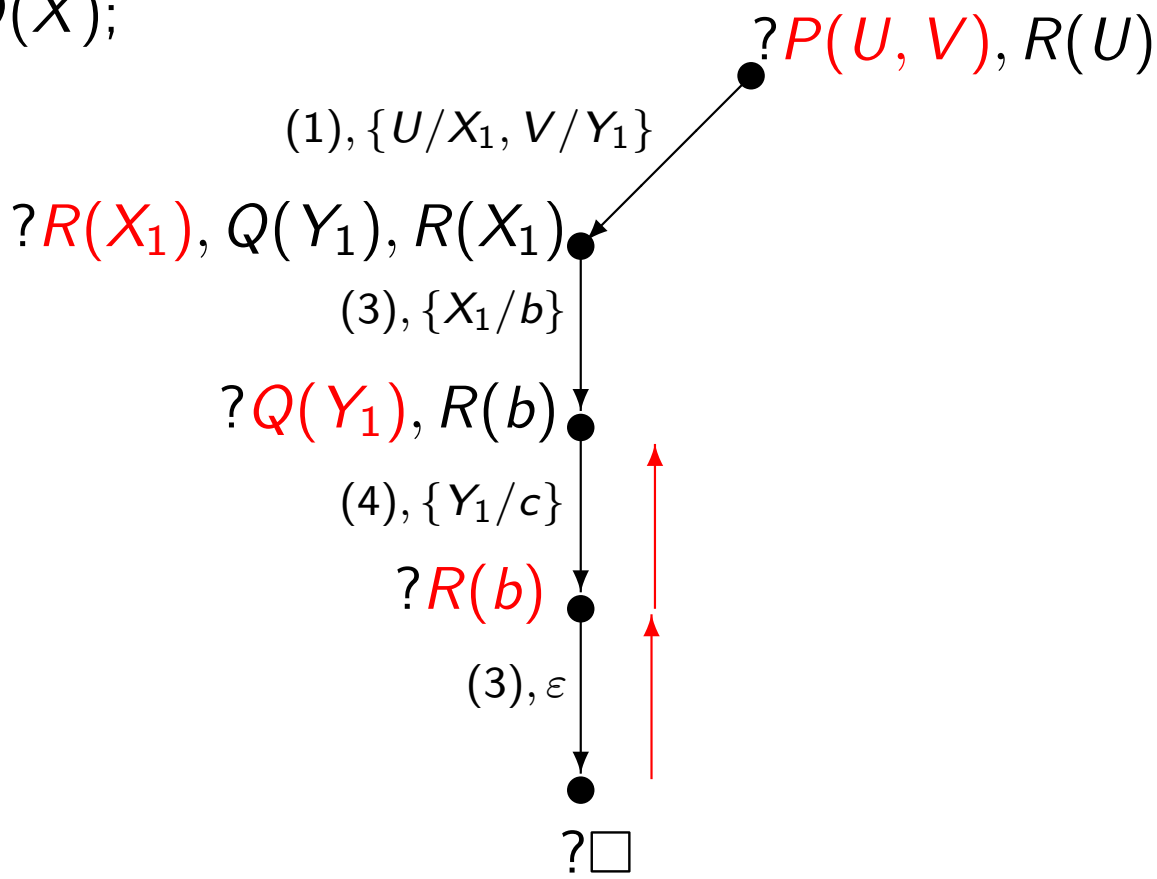
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

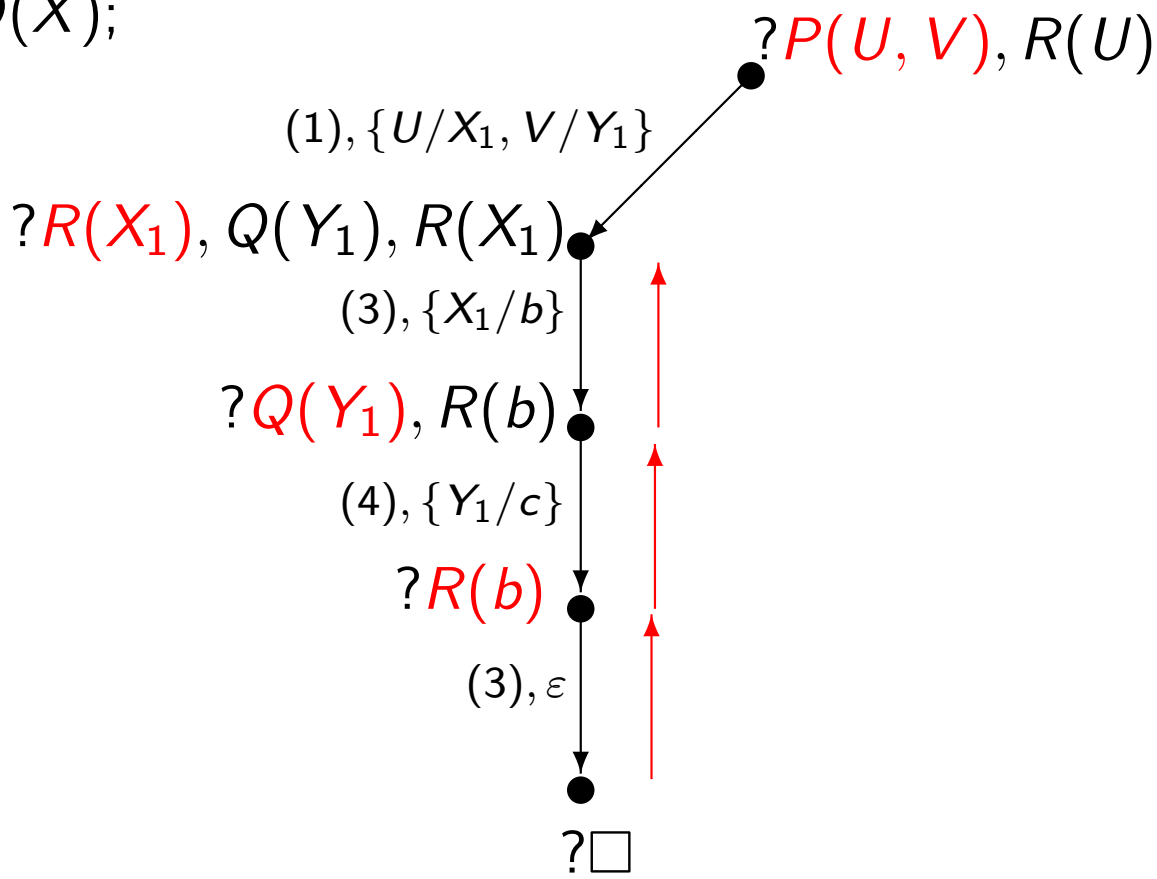
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

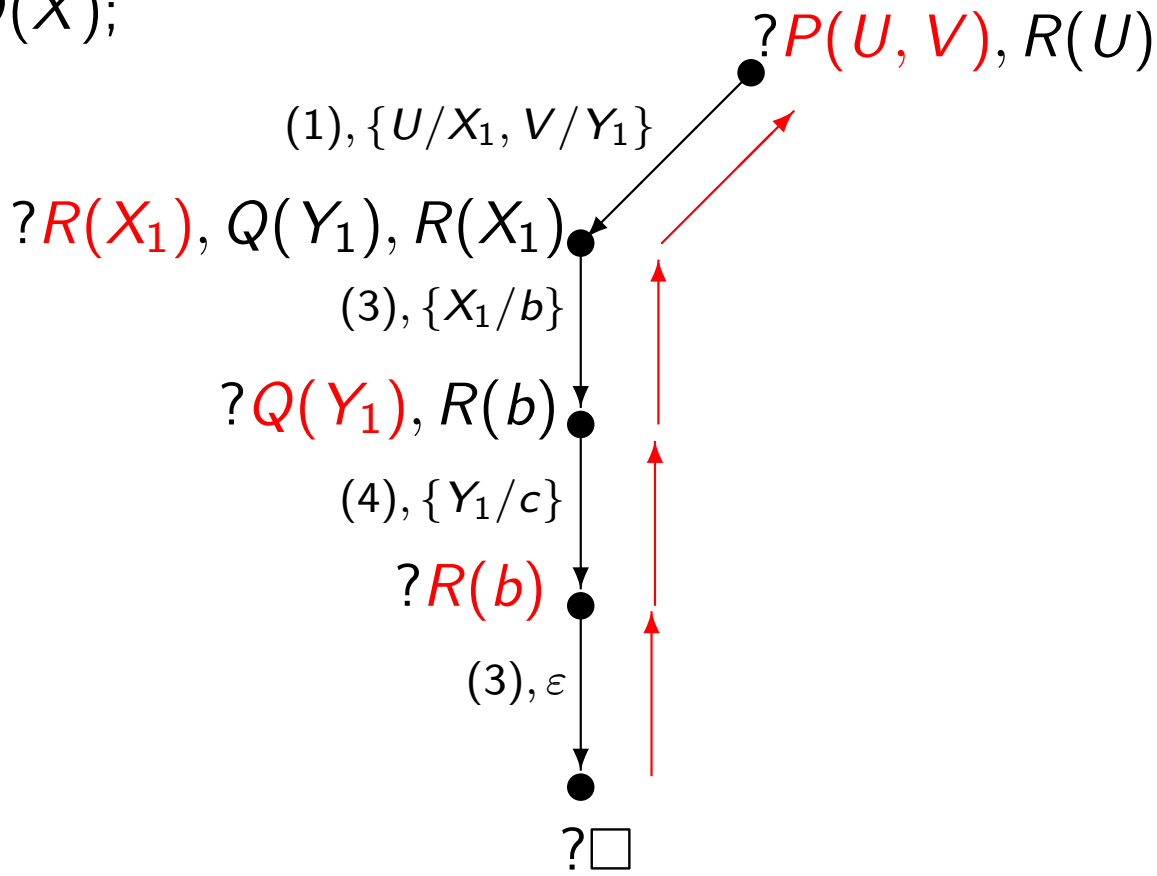
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

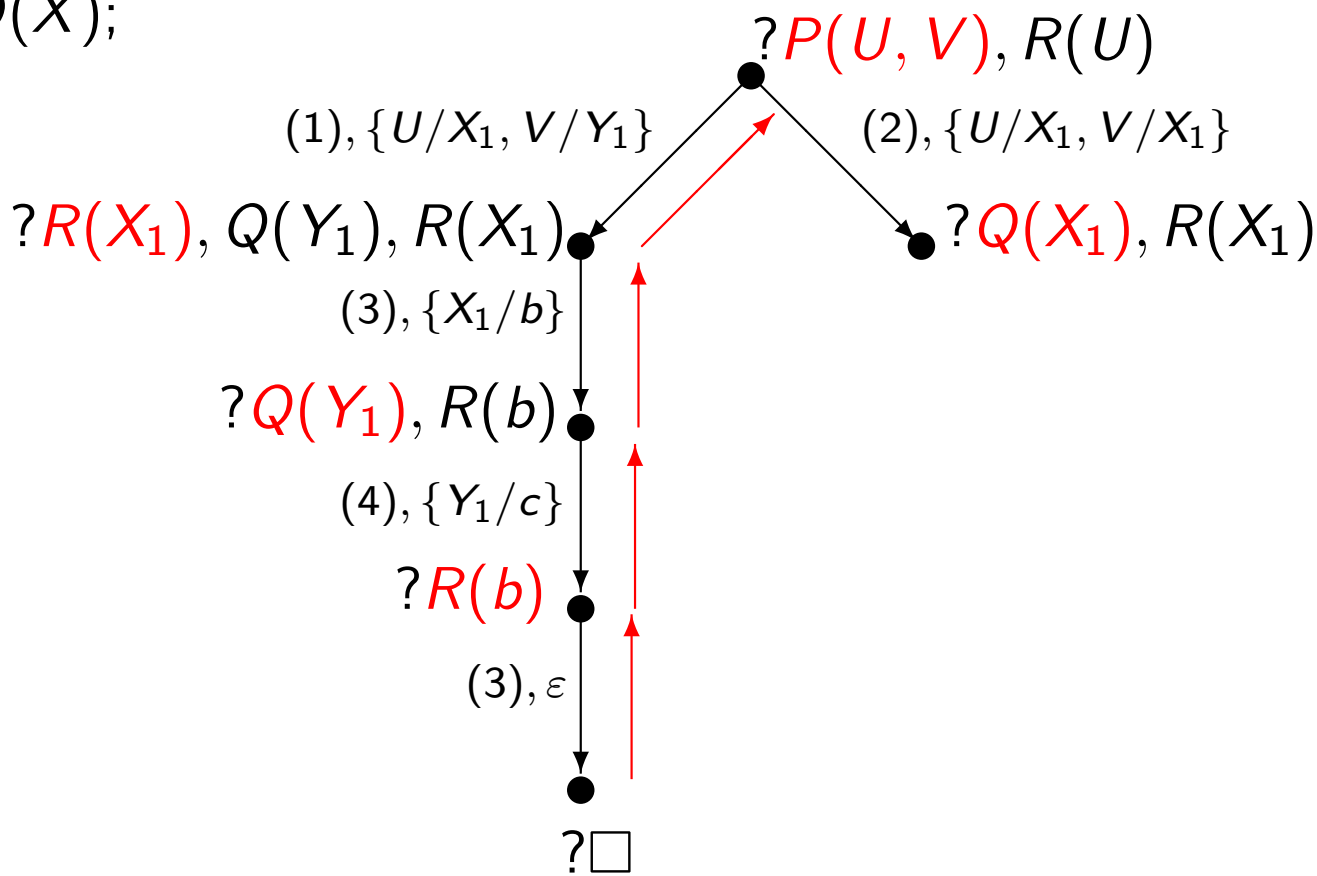
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

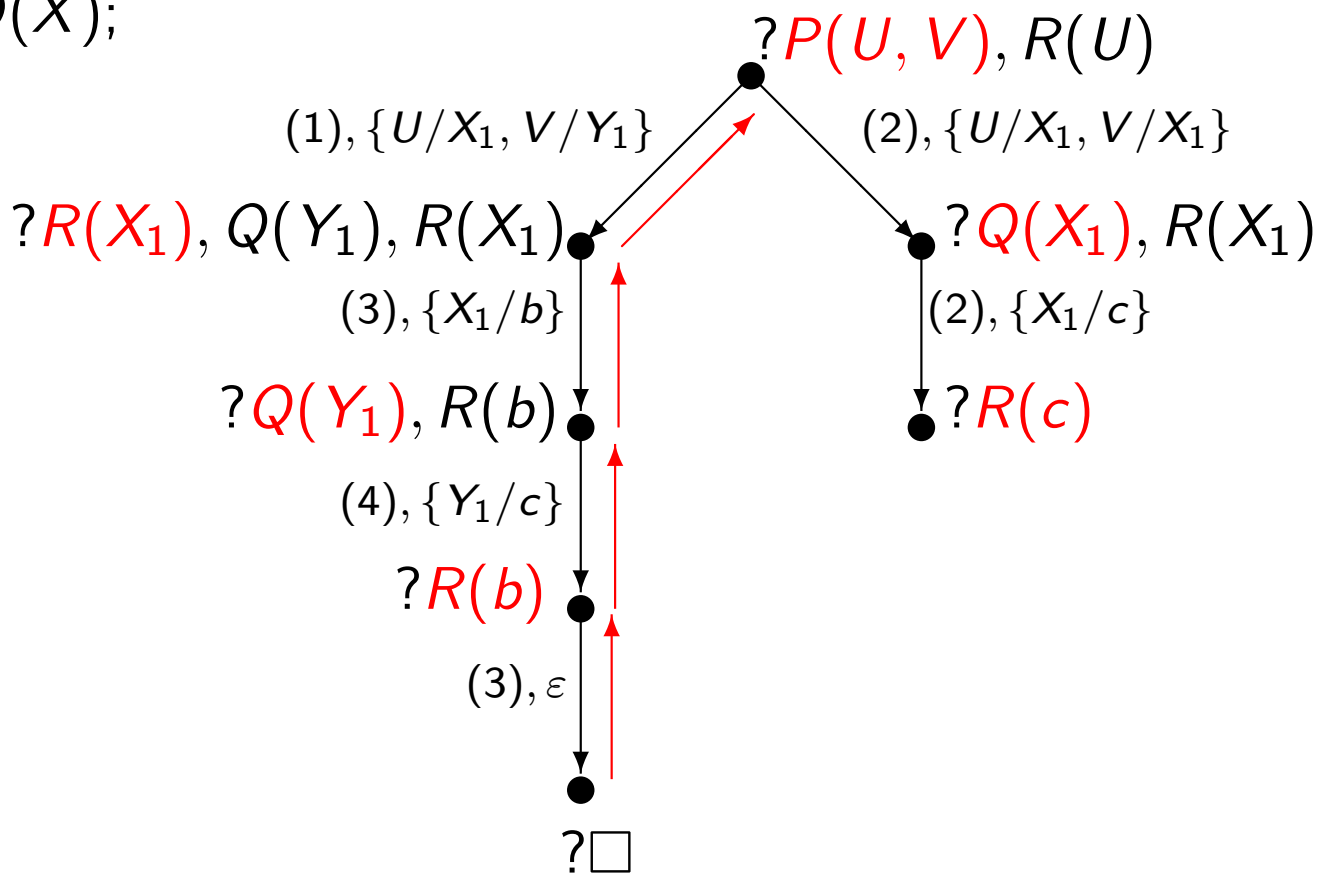
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

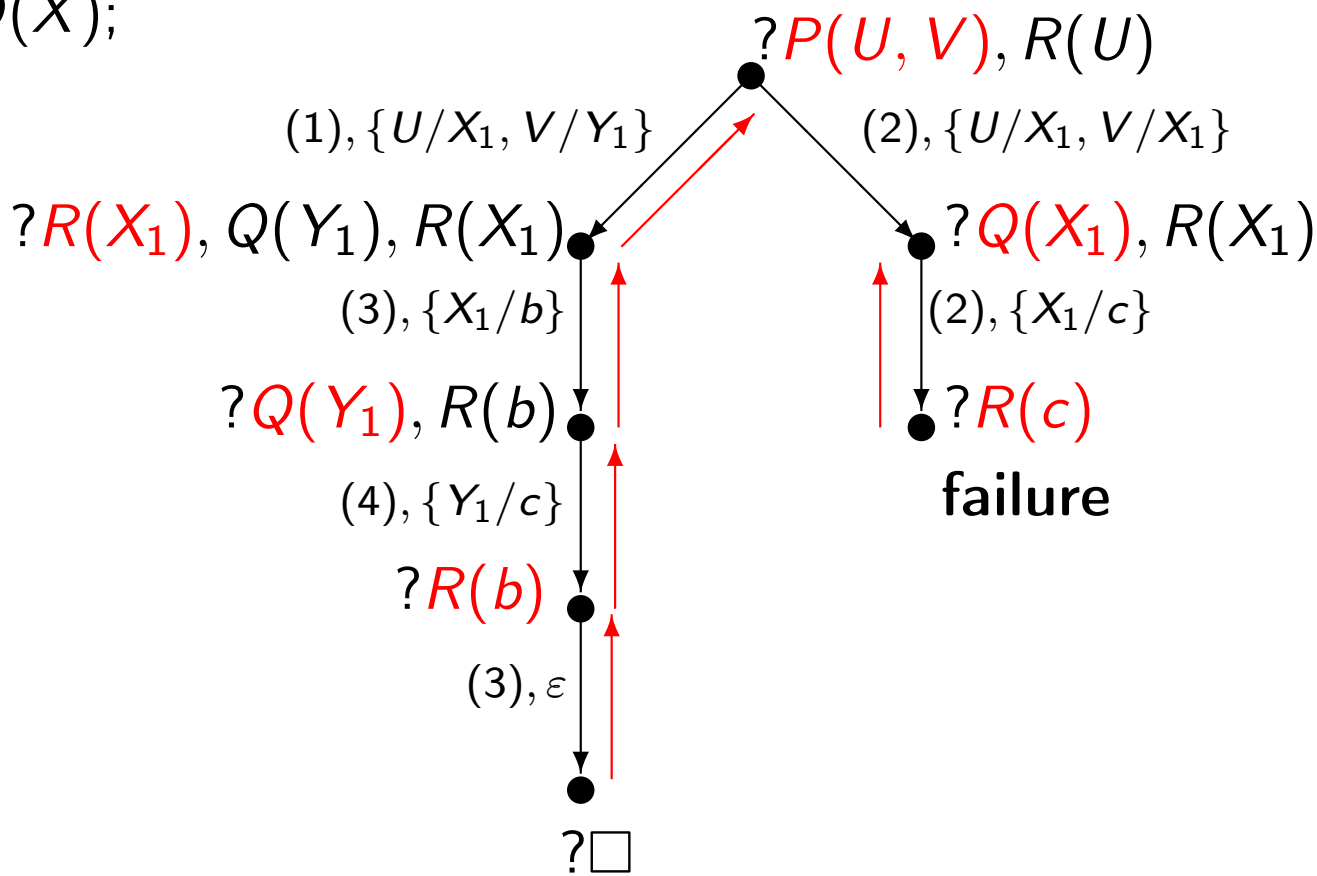
$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}$: $P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$
$R(b) \leftarrow;$
$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

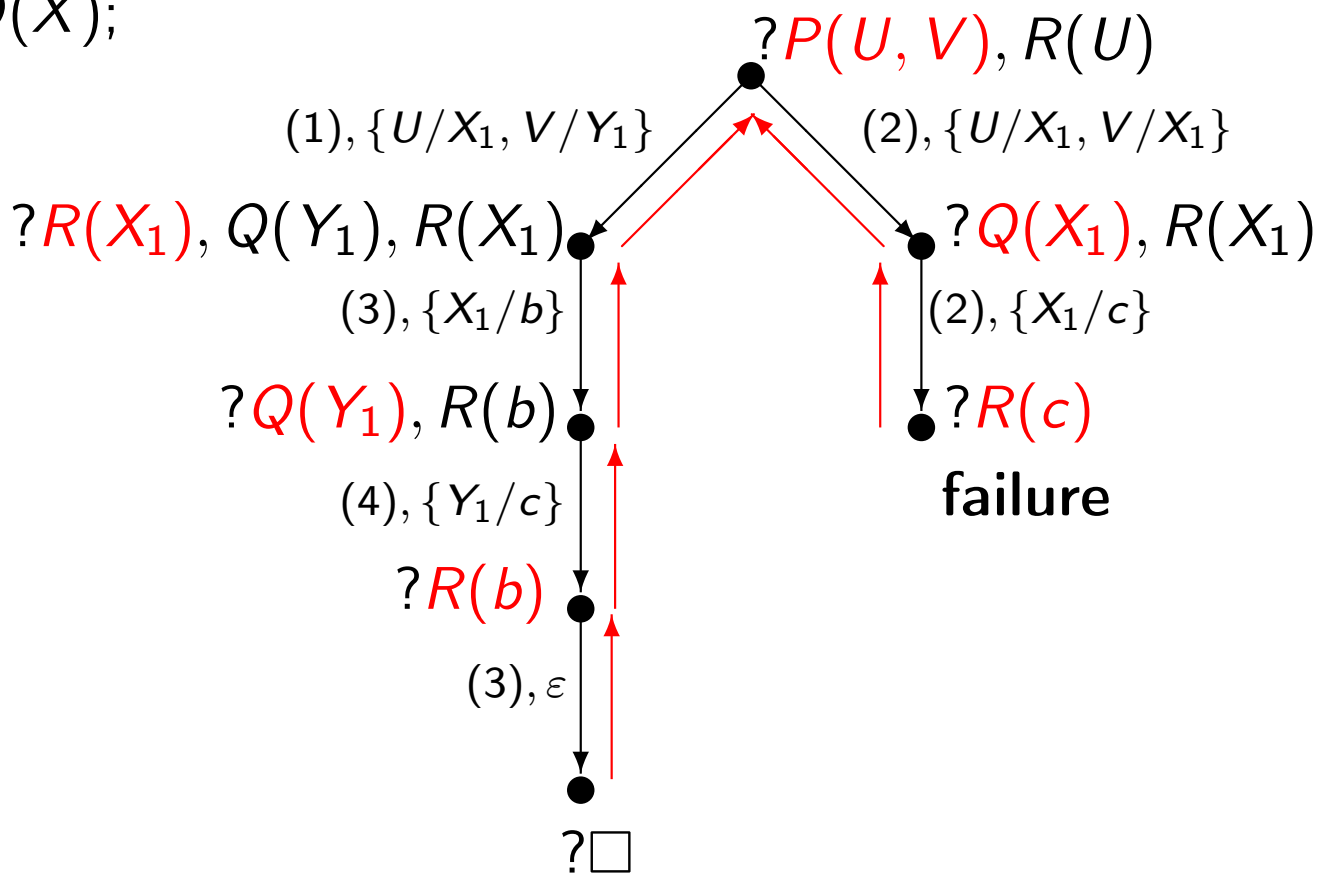
Пример обхода в глубину с возвратом.

$\mathcal{P}:\ P(X,Y) \leftarrow R(X), Q(Y);$

$P(X,X) \leftarrow Q(X);$

$R(b) \leftarrow;$

$Q(c) \leftarrow;$



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Стратегия обхода в глубину с возвратом

- имеет эффективную реализацию: в памяти нужно хранить лишь запросы той ветви, по которой идет обход, и каждый запрос должен вести учет использованных программных утверждений;
- является, к сожалению, вычислительно неполной.

ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

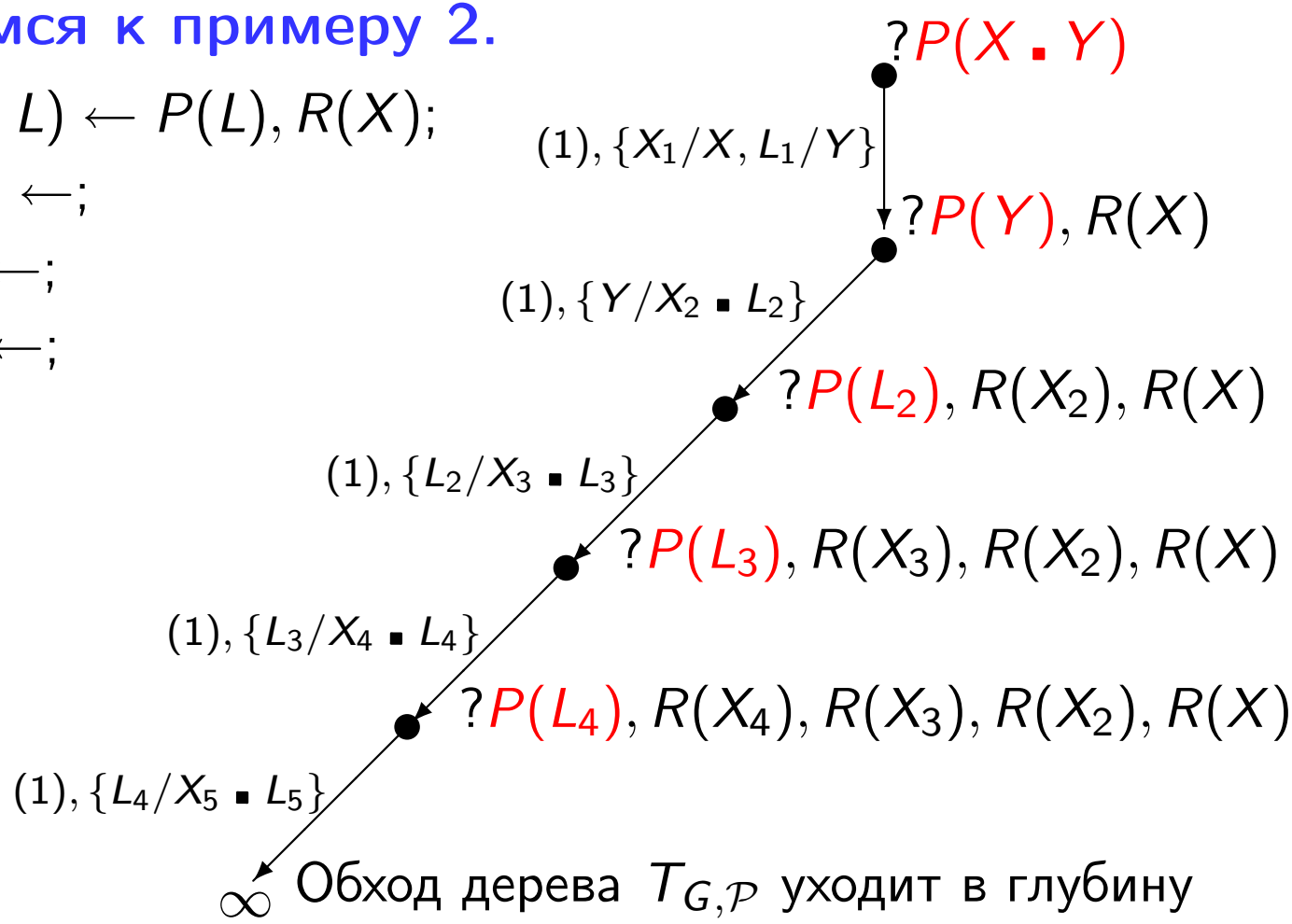
Обратимся к примеру 2.

$\mathcal{P}:\ P(X \cdot L) \leftarrow P(L), R(X);$

$P(\mathbf{nil}) \leftarrow;$

$R(a) \leftarrow;$

$R(c) \leftarrow;$



Обход дерева $T_{G,\mathcal{P}}$ уходит в глубину по бесконечной ветви и не может возвратиться, чтобы обнаружить успешное вычисление.

СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Стратегия обхода в глубину с возвратом чувствительна к порядку расположения программных утверждений в логических программах. Результат вычисления запроса может существенно измениться при перестановке программных утверждений.

ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;

ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

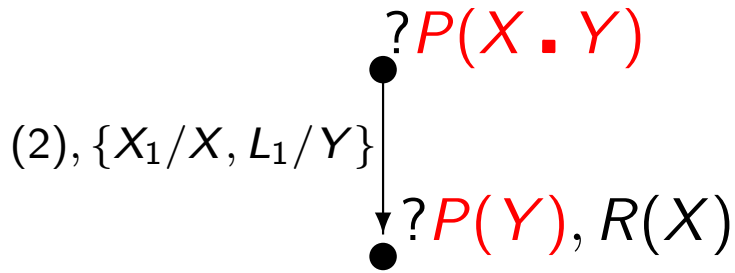
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

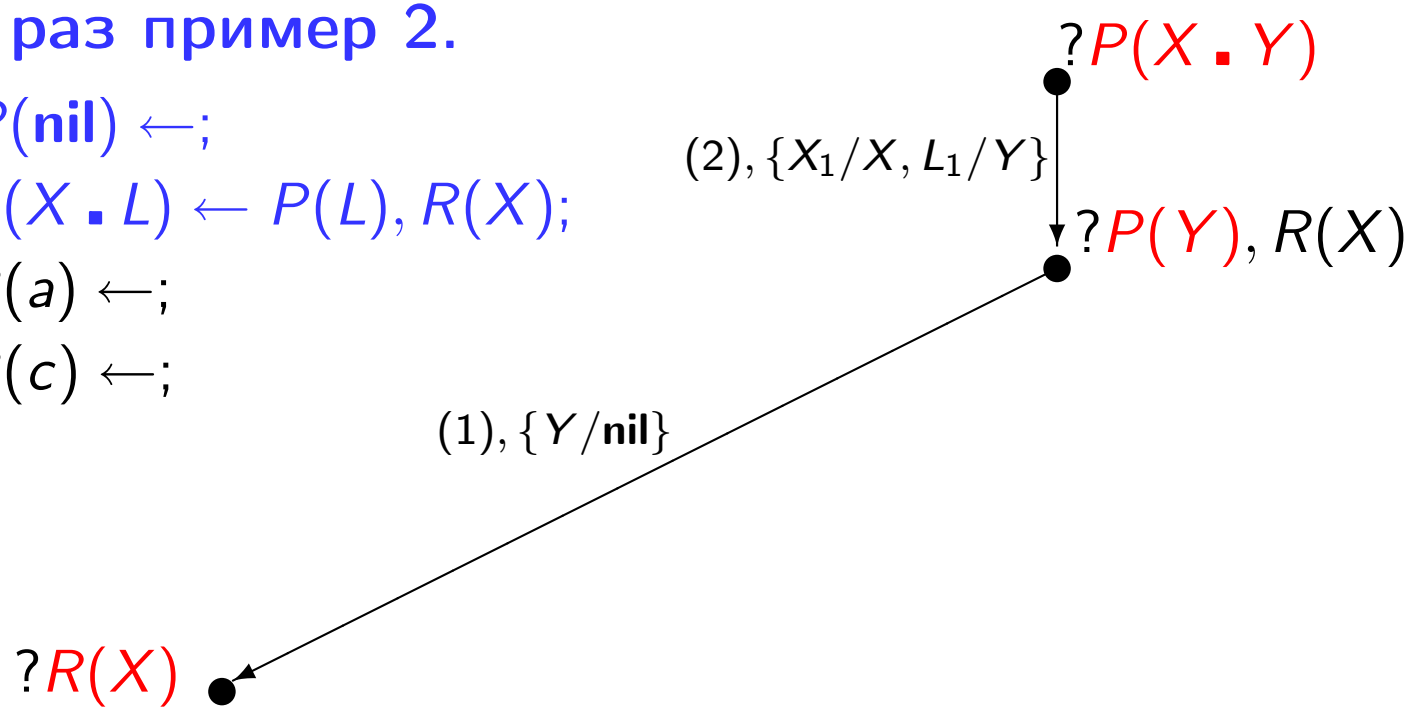
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

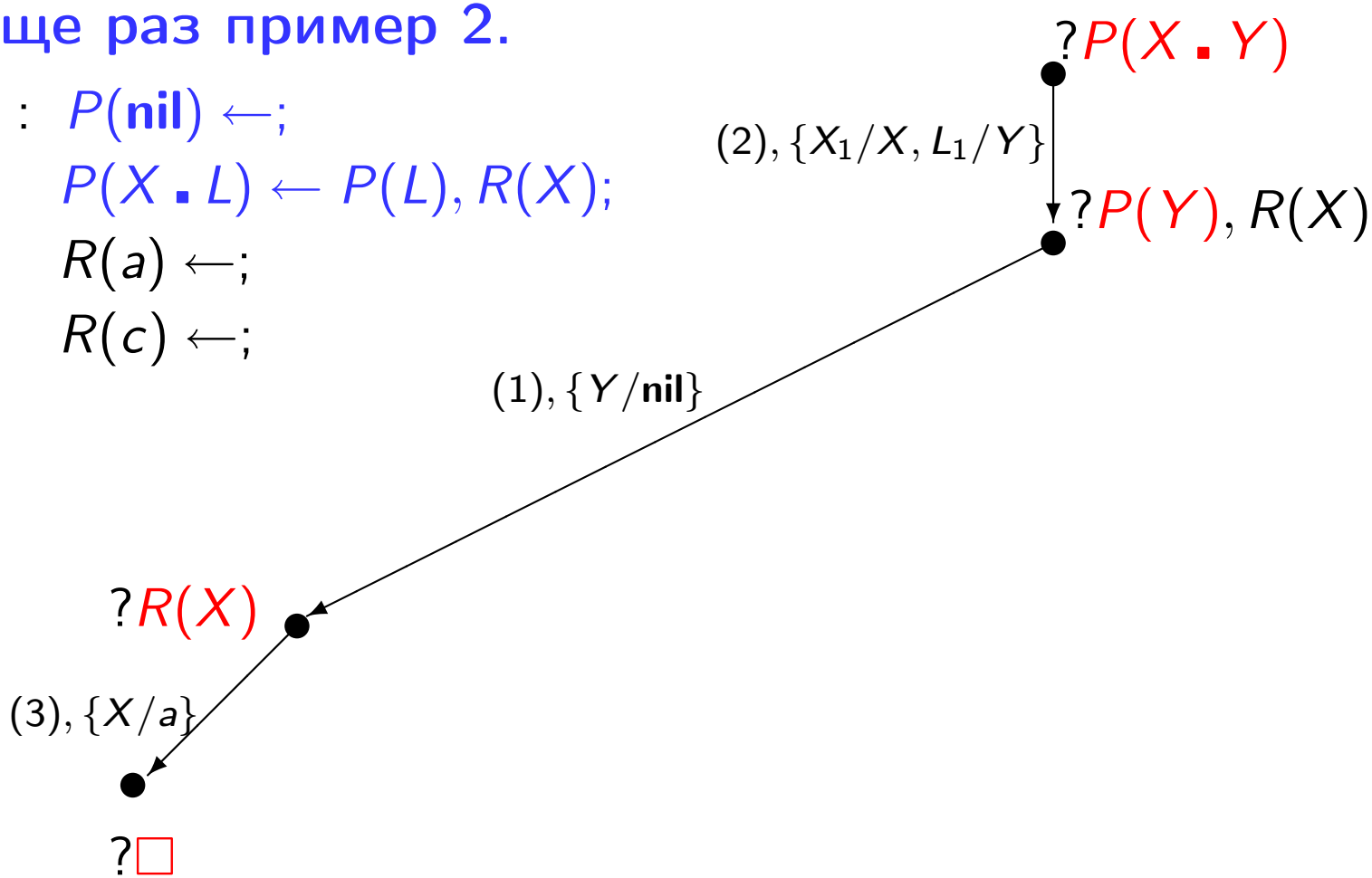
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

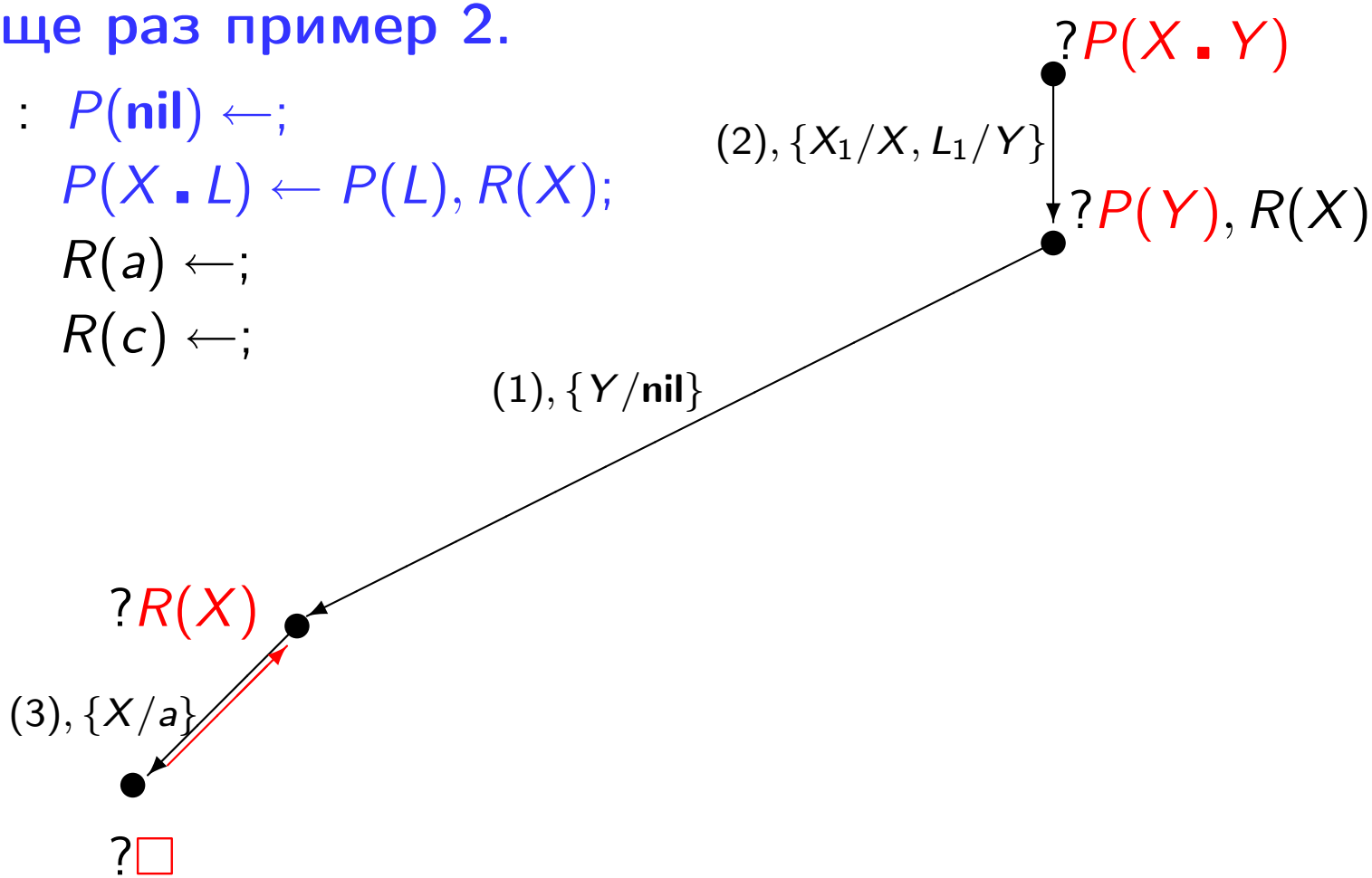
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

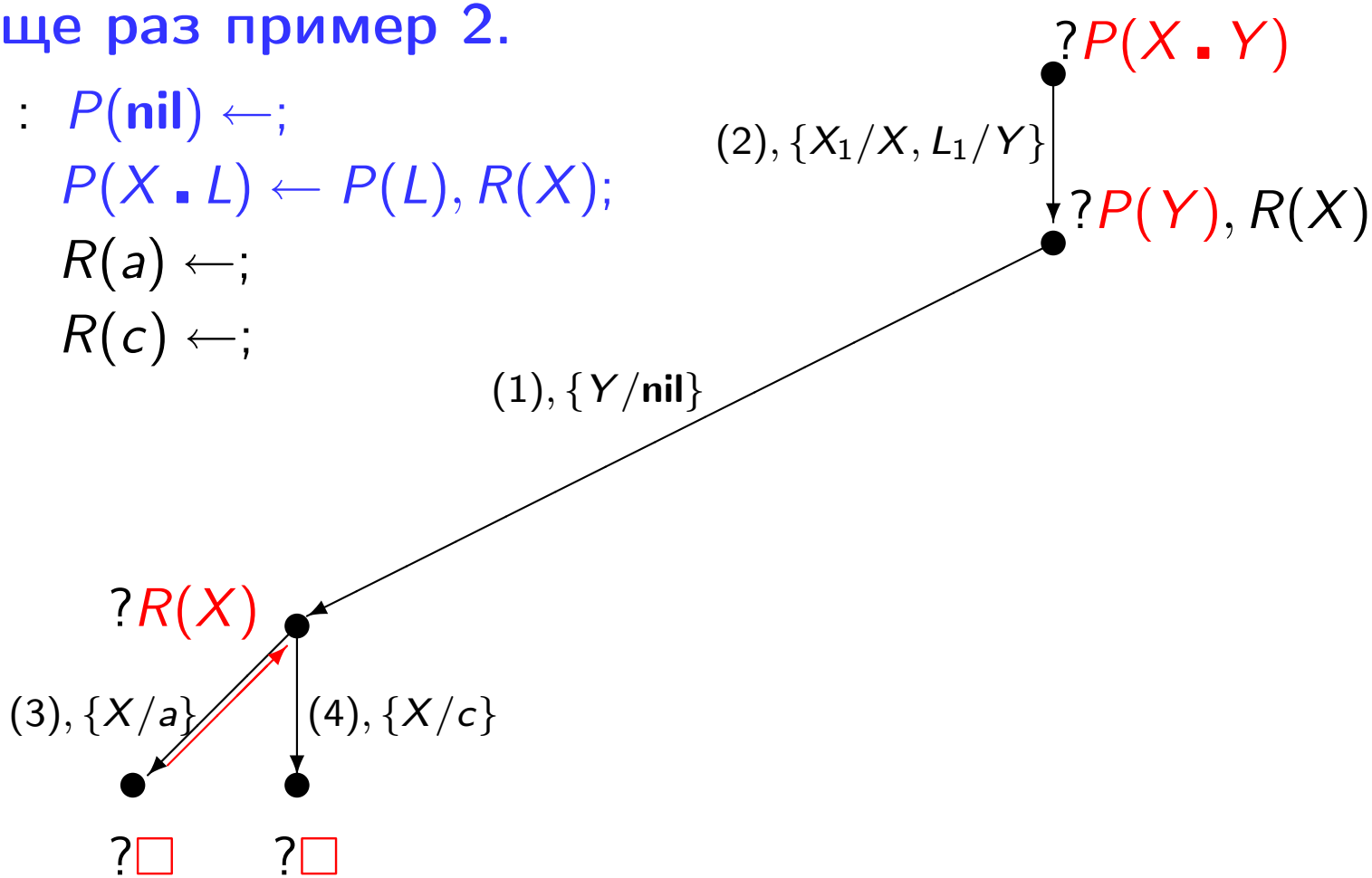
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

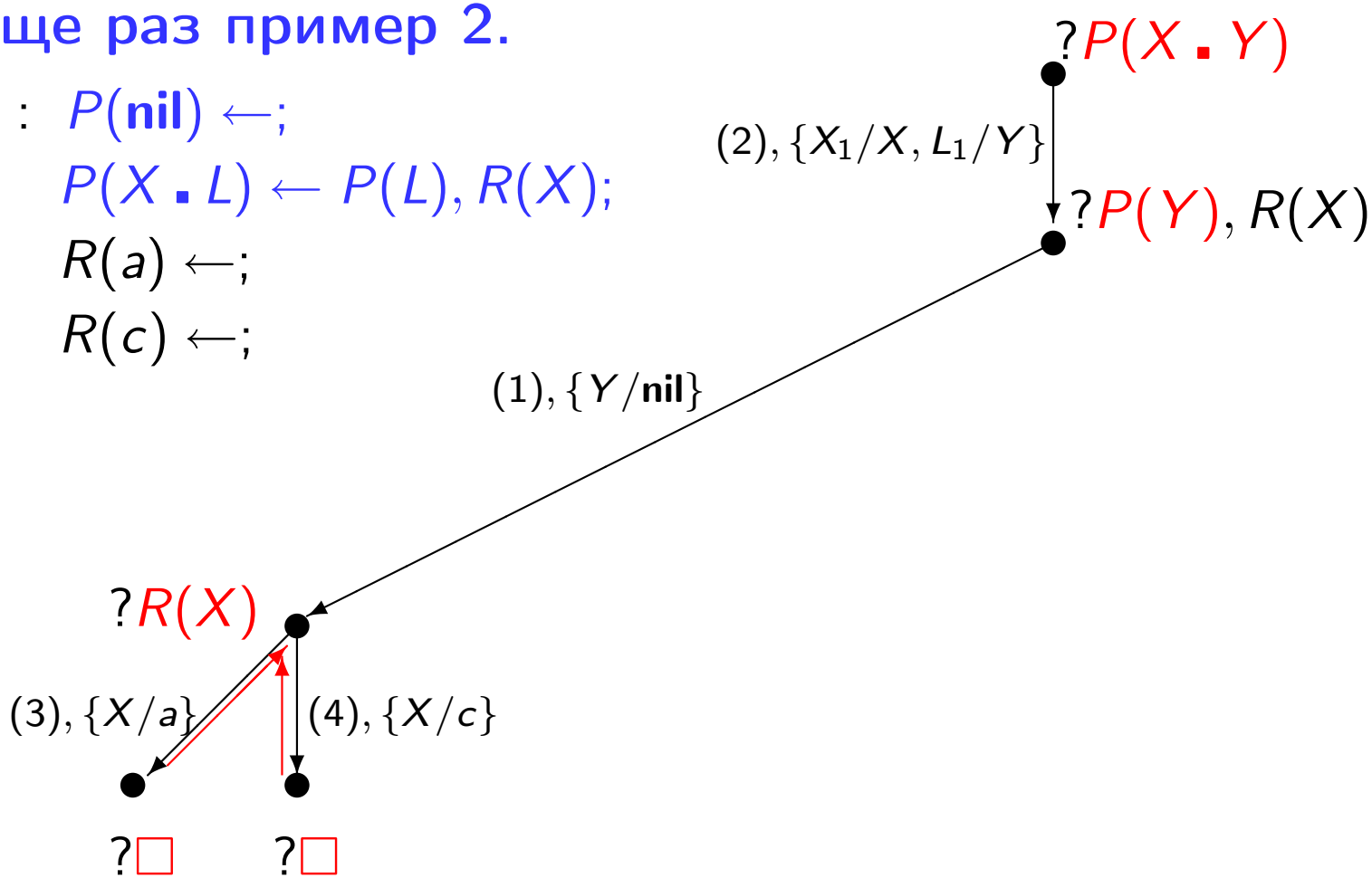
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

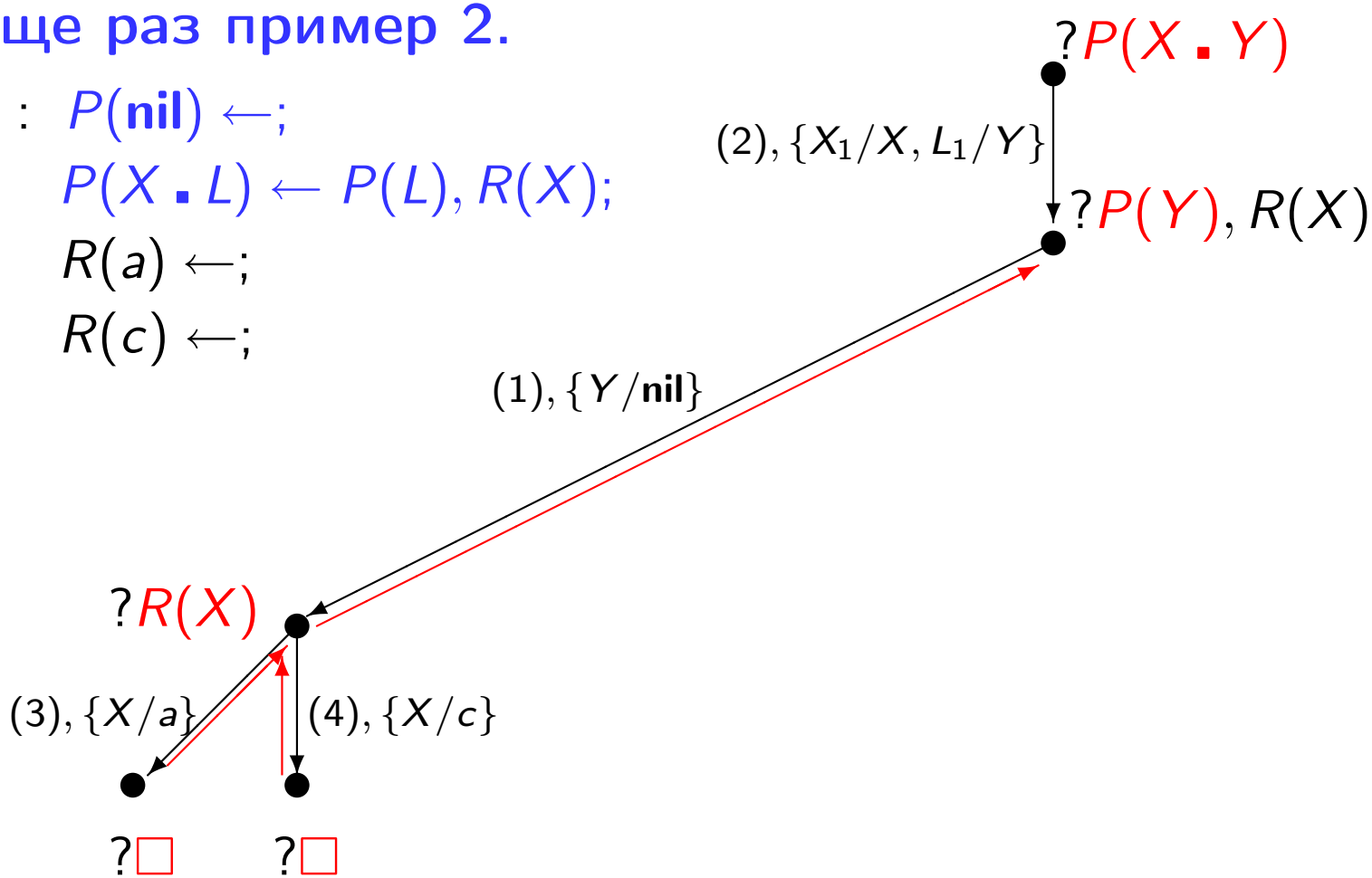
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

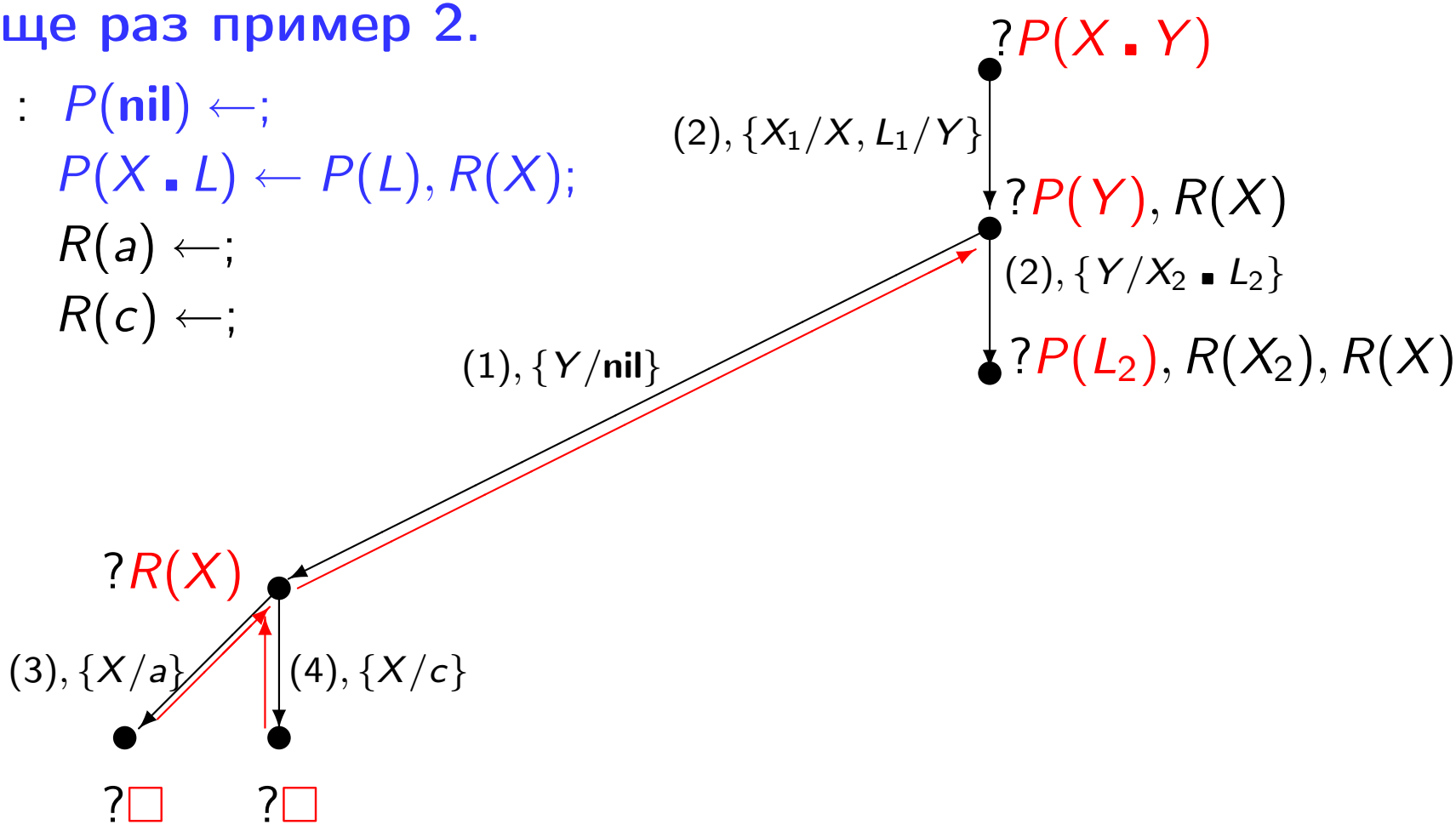
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \cdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

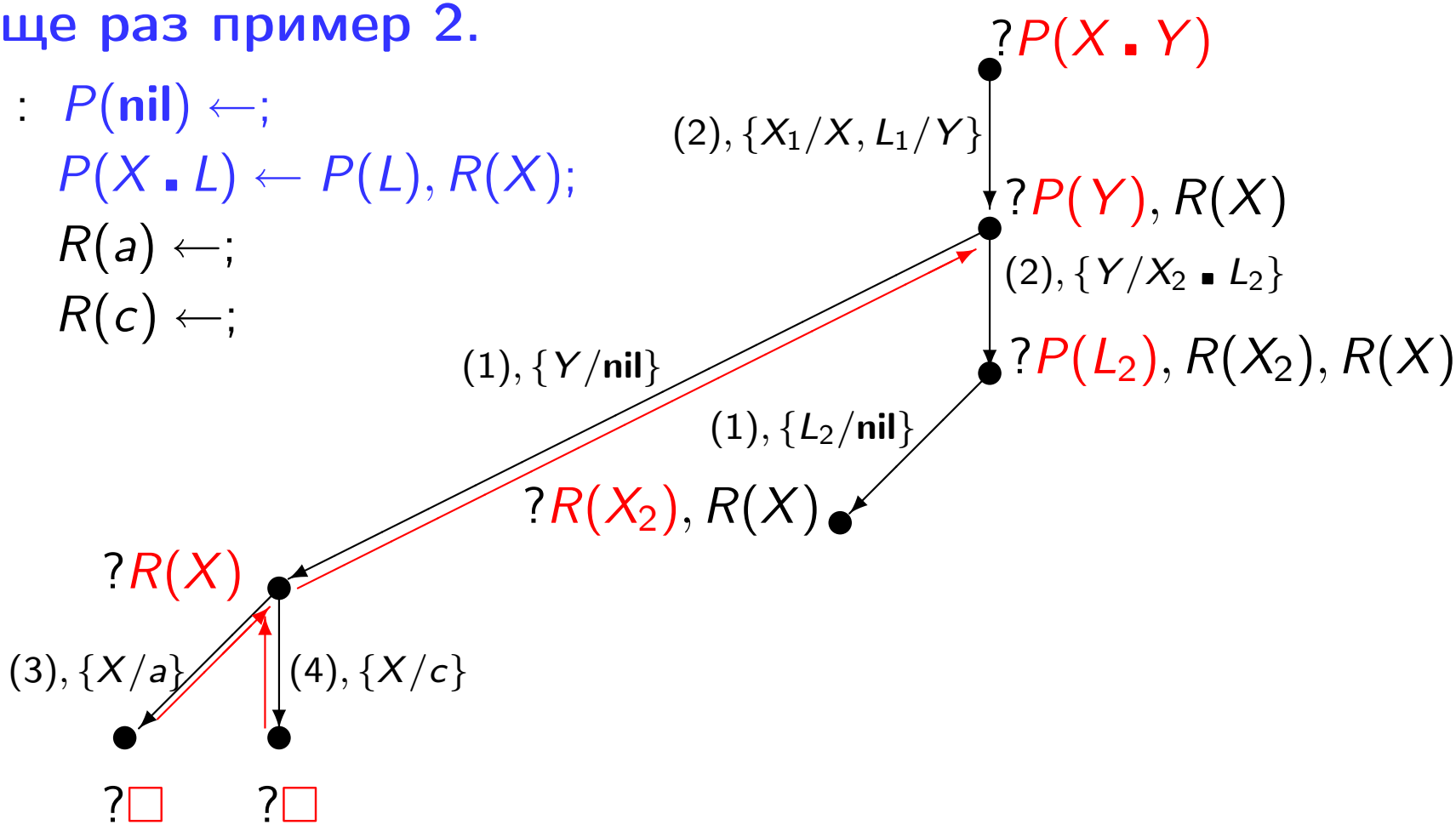
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

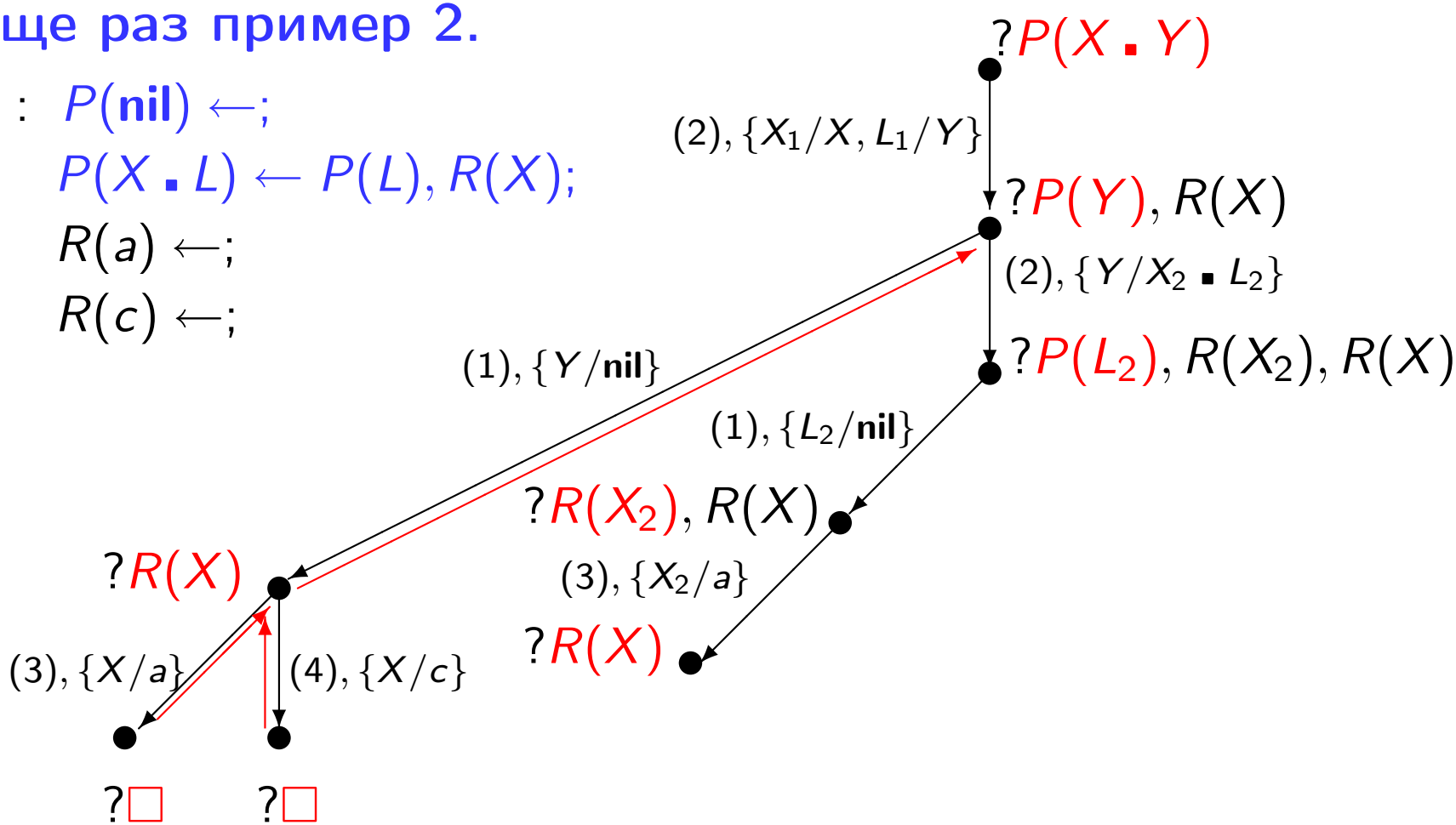
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

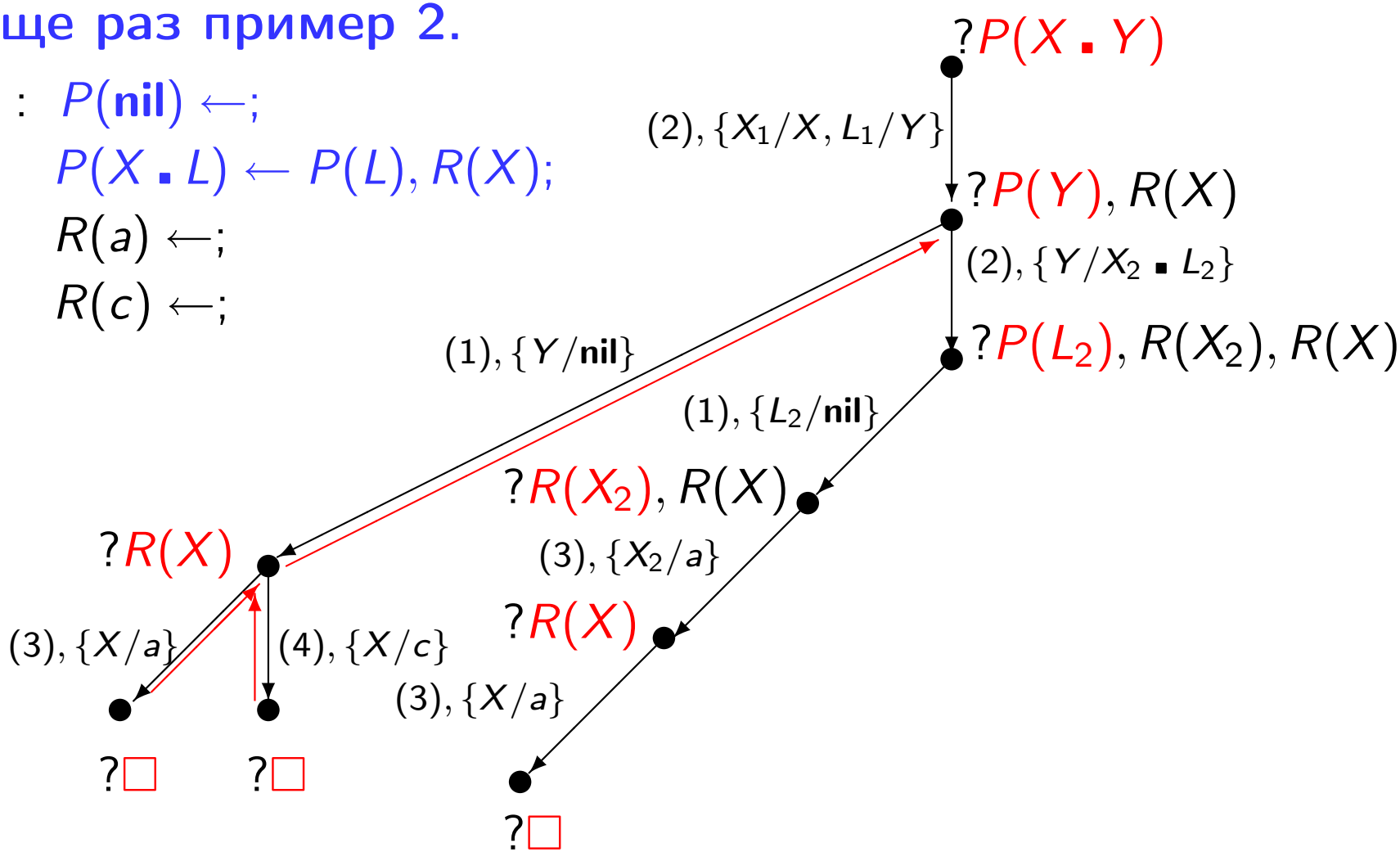
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



ДЕРЕВЬЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

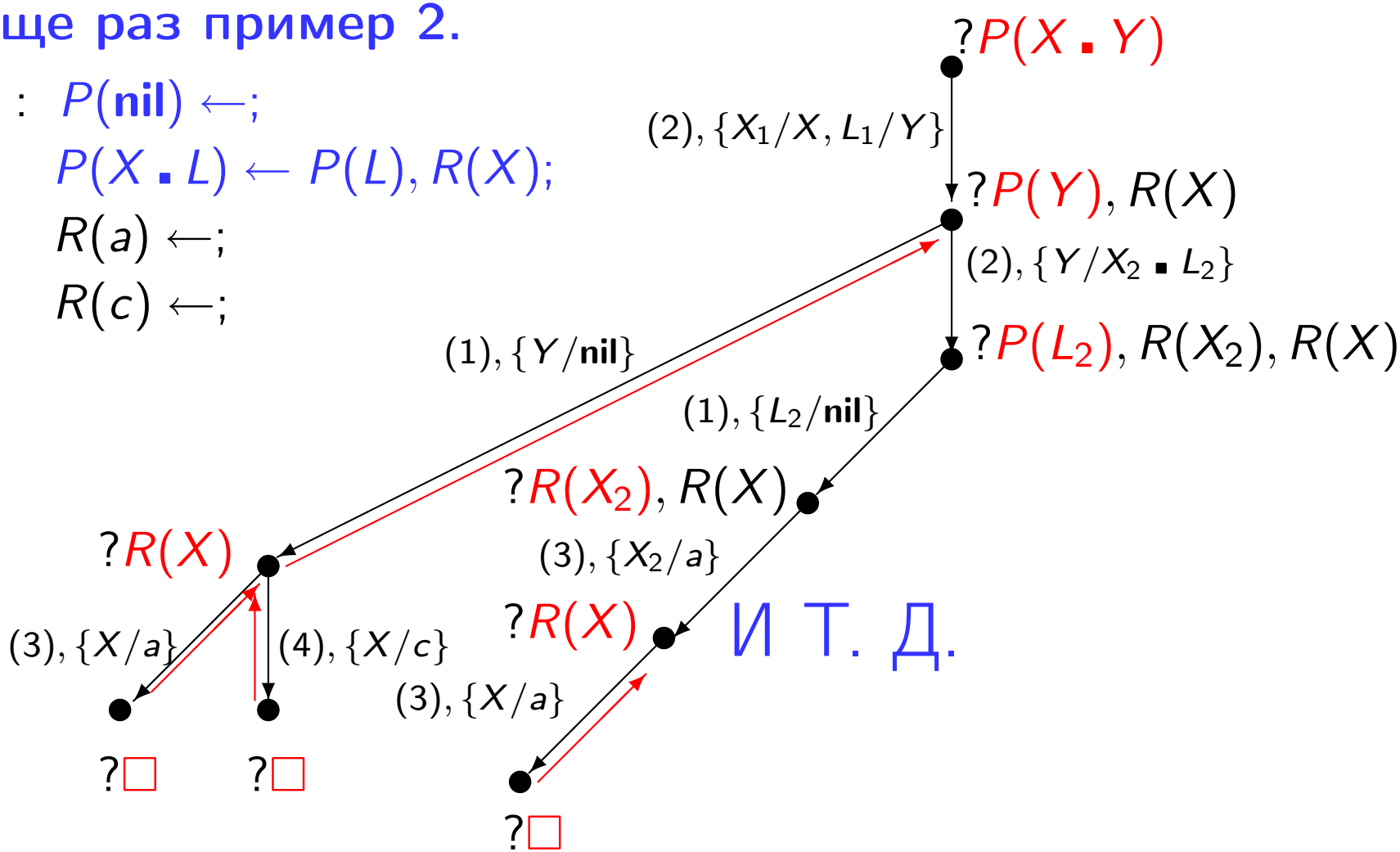
Еще раз пример 2.

$\mathcal{P}$: $P(\mathbf{nil}) \leftarrow$;

$P(X \centerdot L) \leftarrow P(L), R(X)$;

$R(a) \leftarrow$;

$R(c) \leftarrow$;



СТРАТЕГИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Поскольку соображения эффективности превалируют над требованиями вычислительной полноты, в качестве **стандартной стратегии** вычисления логических программ была выбрана стратегия обхода в глубину с возвратом.

Программист должен сам позаботиться о надлежащем порядке расположения программных утверждений, чтобы стандартная стратегия вычисления позволяла отыскать все вычисленные ответы.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 14.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 15.

Алгоритмическая полнота логических программ. Моделирование машин Тьюринга логическим программами. Теорема Черча.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Вопросы:

А что могут вычислять хорновские логические программы?

Какие задачи можно решать с их помощью, а какие нельзя?

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Есть много разных моделей вычислений. Одни из них проводят вычисления над строками (словами), другие — над графами, третьи — над молекулами ДНК, и т. п. Как сравнить их вычислительные способности?

Структуры данных, над которыми работают эти модели, позволяют кодировать натуральные числа. Поэтому чтобы сравнить вычислительные способности алгоритмических моделей, достаточно выяснить, какие функции натурального аргумента способны вычислять эти модели.

Исследования показали, что все известные **алгоритмические модели** способны вычислять только **частично-рекурсивные функции** натурального аргумента. Это открытие дало основание многим математикам (Тьюринг, Черч, Клини, Гедель, Марков, и др.) выдвинуть следующий тезис.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Тезис Черча

Класс эффективно (алгоритмически) вычислимых арифметических функций в точности совпадает с классом арифметических функций, вычислимых в каждой из перечисленных ниже моделей вычислений

- машины Тьюринга—Поста,
- λ-исчисление Черча—Клини,
- системы равенств Эрбрана—Геделя,
- алгорифмы Маркова,
- системы Колмогорова—Шенхаге,
- машины Минского,
- ...

Модели вычислений такого вида называются **алгоритмически полными** . Найдется ли место в этом ряду для хорновских логических программ?

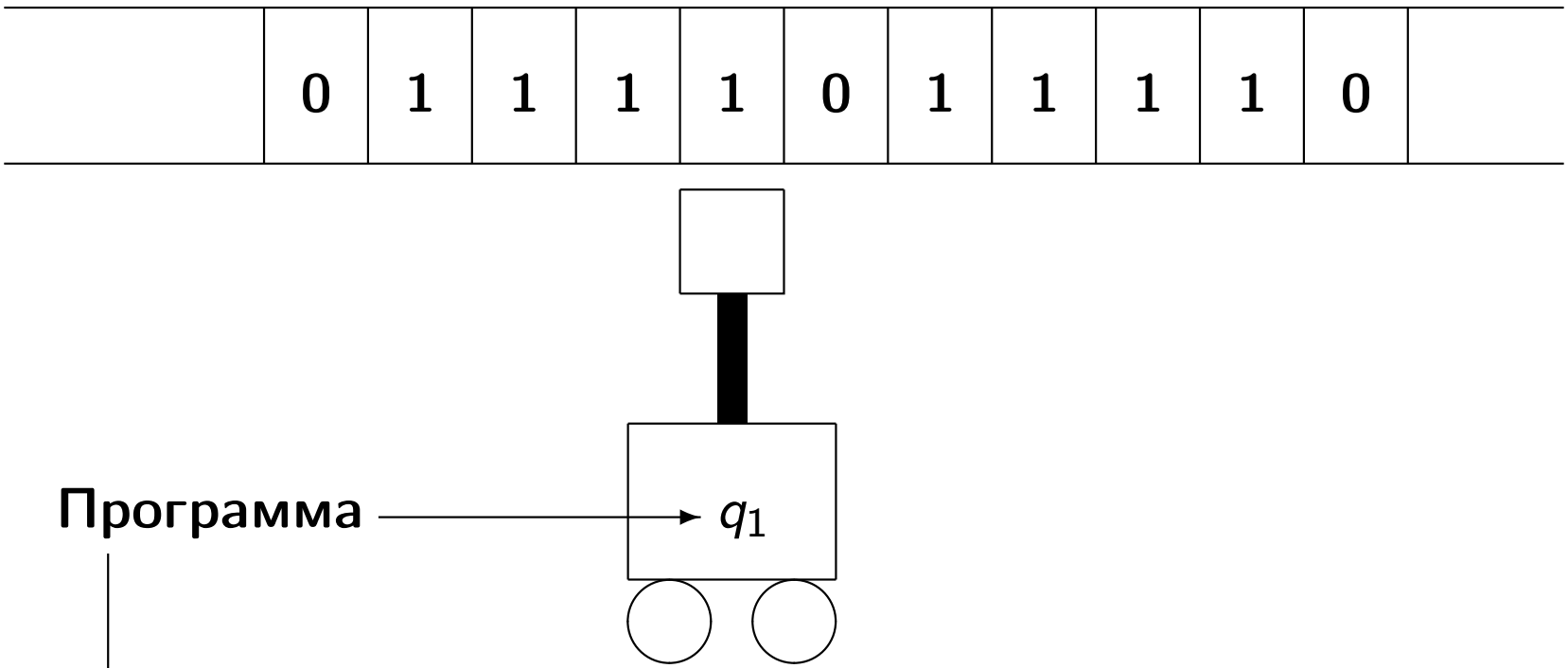
АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Для того чтобы убедиться в алгоритмической полноте хорновских логических программ, достаточно взять любую из перечисленных алгоритмически полных моделей вычислений (например, машины Тьюринга) и показать, что для любой программы П в выбранной модели найдется подходящая логическая программа $\mathcal{P}_{\text{П}}$, воспроизводящая (моделирующая) вычисления программы П.

Итак, вспомним, как устроены машины Тьюринга, и попробуем построить логическую программу-интерпретатор машин Тьюринга.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

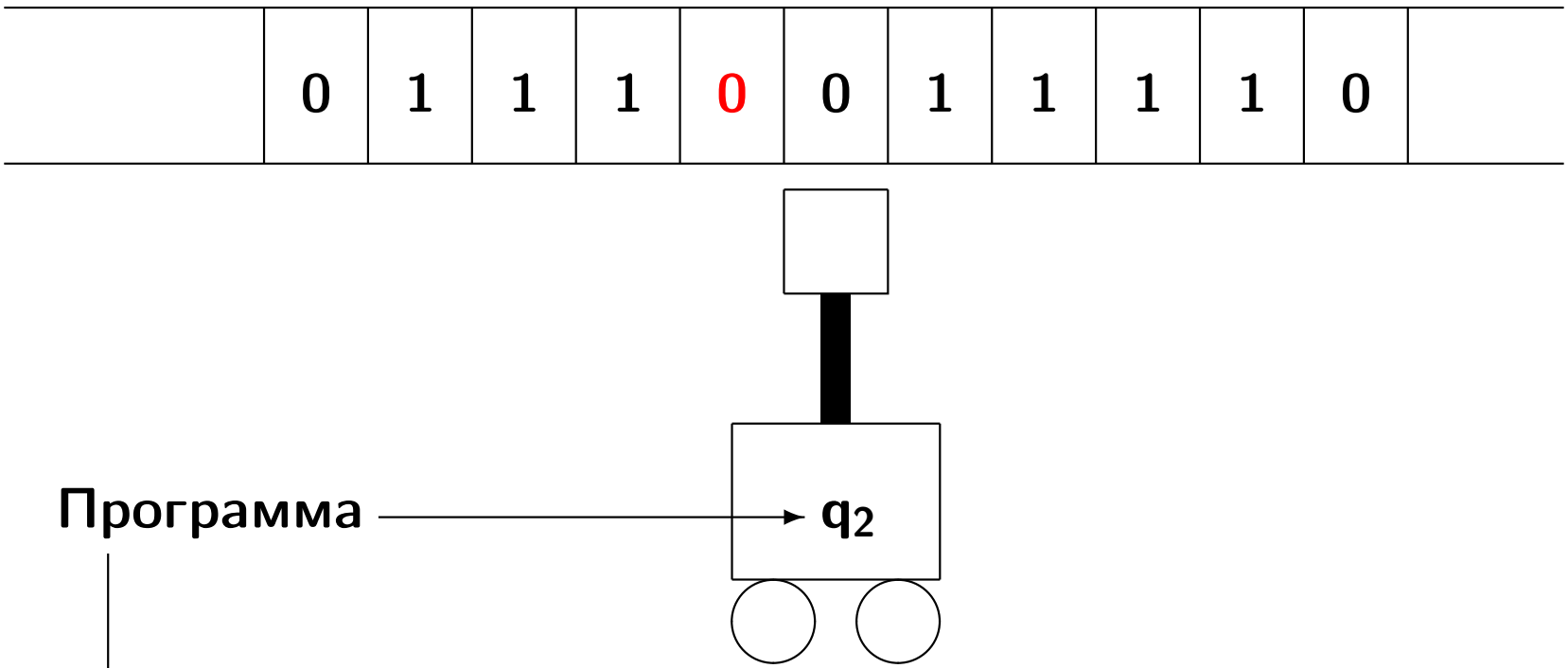


Команды:

увидев "1", стереть его, записать "0"и сдвинуться вправо

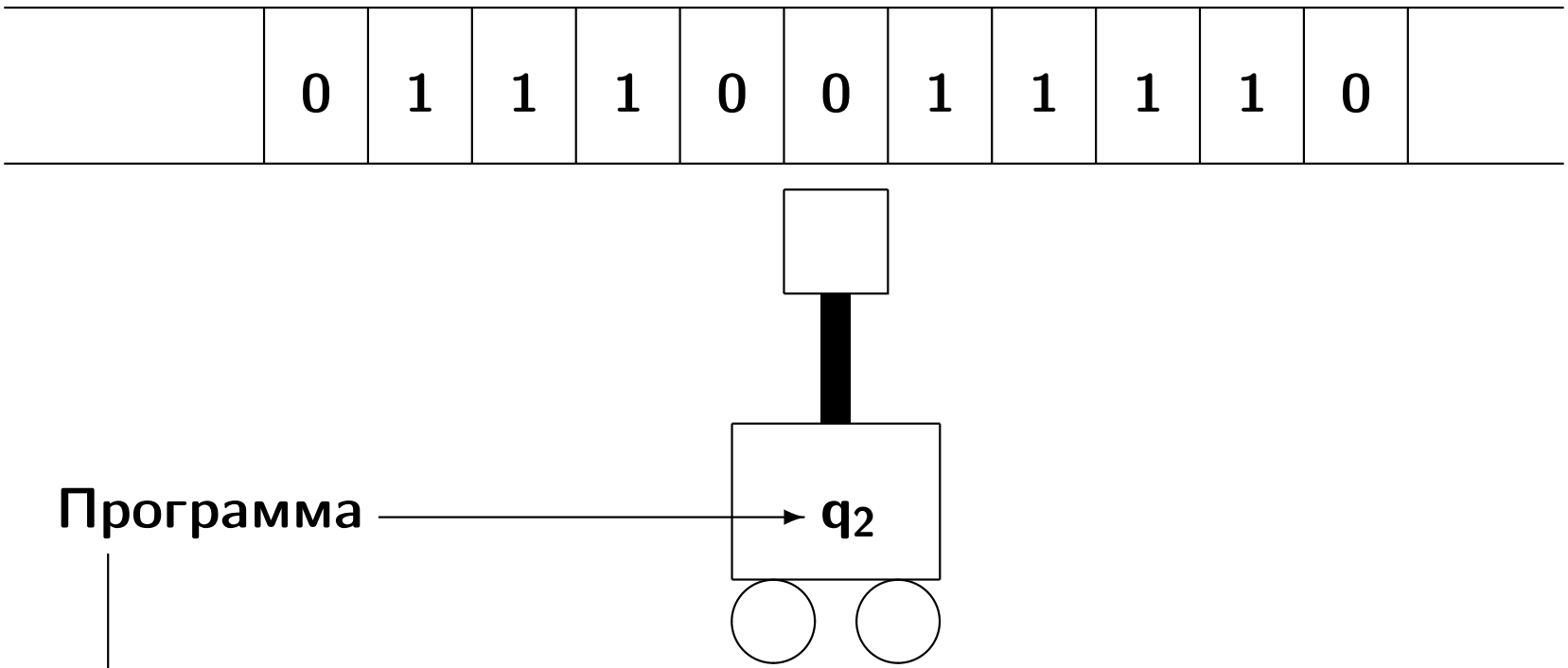
АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга



АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

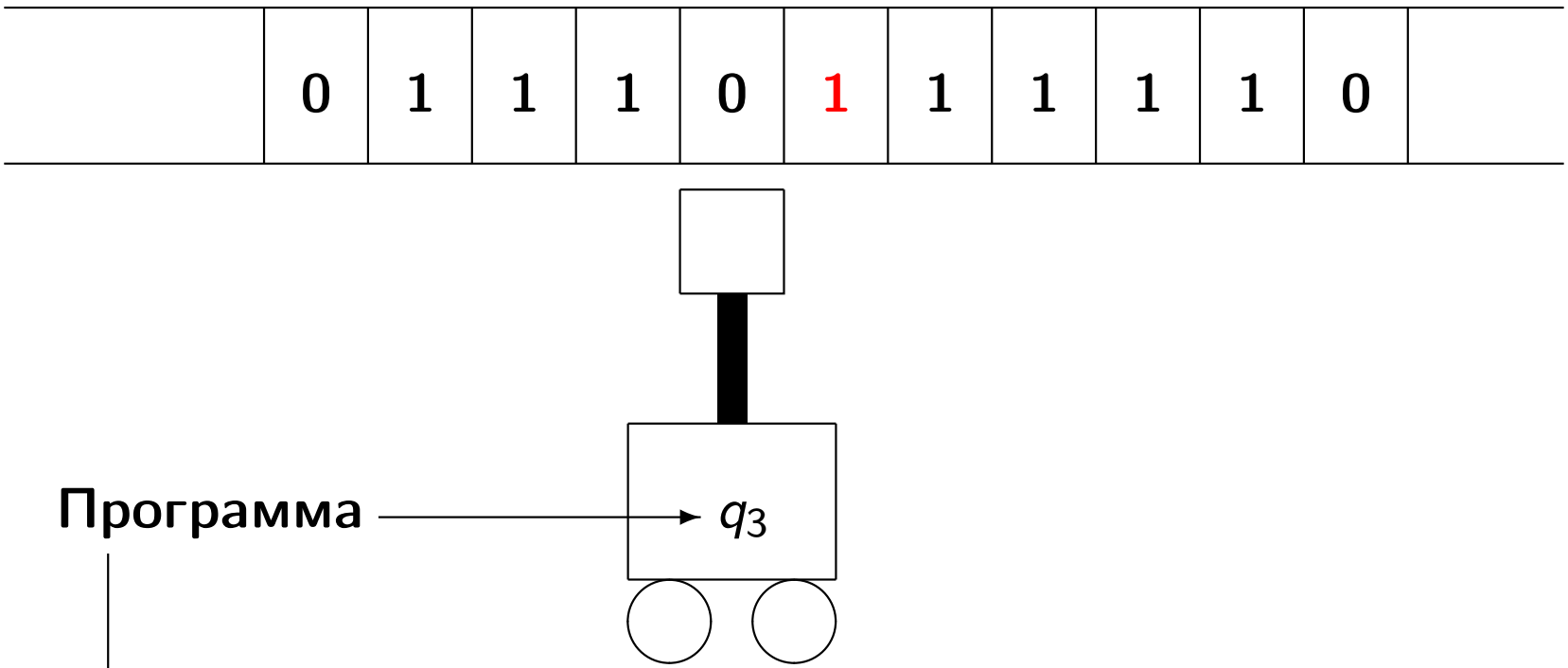


Команды:

увидев "0", стереть его, записать "1"и сдвинуться влево

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга



АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

Более строго модель вычислений машин Тьюринга описывается так.

Задан ленточный алфавит $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, в котором особо выделен одна из букв a_0 (пустой символ).

Ленточным словом называется всякое слово в алфавите $\mathcal{A}$. Множество всех ленточных слов обозначим $\mathcal{A}^*$. Для каждого слова $w = z_1 z_2 \ldots z_{n-1} z_n$ будем использовать запись w^{-1} для обозначения обратного слова $z_n z_{n-1} \ldots z_2 z_1$.

Задан алфавит состояний $\mathcal{Q} = \{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m\}$, в котором особо выделено одно из состояний q_0 (начальное состояние).

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

Ленточной конфигурацией называется всякое слово вида

$$w'\ q\ x\ w'', \qquad \text{где}$$

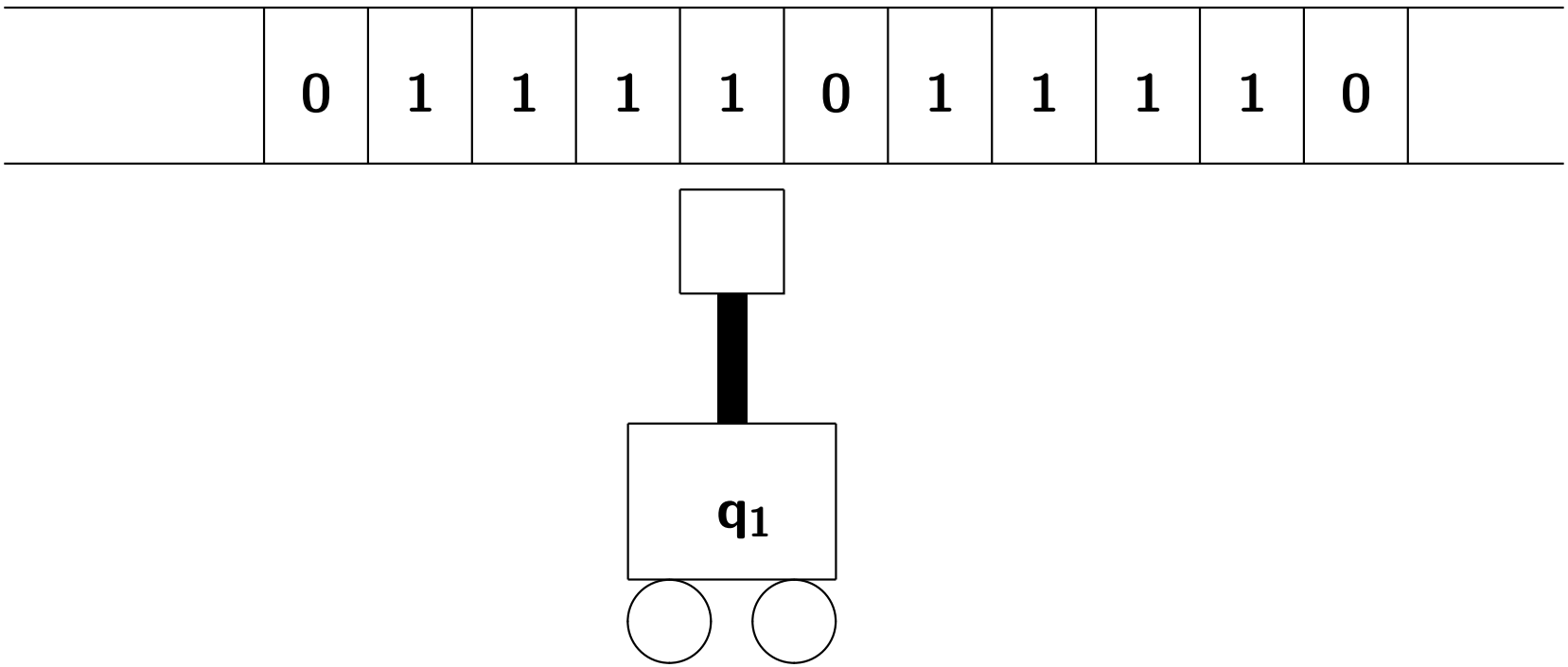
- q — состояние, $q \in \mathcal{Q}$,
- x — ленточная буква, $x \in \mathcal{A}$,
- w', w'' — ленточные слова, $w', w'' \in \mathcal{A}^*$.

- q — это то состояние, в котором находится МТ,
- x — это буква, которая записана в той ячейке ленты, которую обозревает считывающая головка МТ,
- w' — это ленточное слово, составленное из символов, записанных **слева** от обозреваемой ячейки,
- w'' — это ленточное слово, составленное из символов, записанных **справа** от обозреваемой ячейки.

По умолчанию считается, что во всех остальных ячейках ленты записаны пустые символы.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга



Ленточная конфигурация: $0111q_11011110$

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

Ленточная конфигурация вида $u\ q_0\ x\ v$ называется начальной конфигурацией .

Множество всех конфигураций обозначим $Conf_{\mathcal{A},Q}$.

Множество всех начальных конфигураций обозначим $Conf^0_{\mathcal{A},Q}$.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

Командой называется всякая пятерка вида

$$q\ x\ y\ q'\ D, \qquad \text{где}$$

- q, q' — состояния, $q, q' \in \mathcal{Q}$,
- x, y — ленточные буквы, $x, y \in \mathcal{A}$,
- D — направление сдвига головки, $D \in \{L, R\}$.

Эту команду нужно понимать так:
если МТ находится в состянии q и обозревает символ x, то записать в обозреваемую ячейку символ y, перейти в состояние q' и сдвинуть считывающую головку на одну ячейку в направлении D.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

Каждая команда K задает отношение перехода $\to_K$ на множестве ленточных конфигураций

$$\alpha \ \to_K \ \beta$$

Оно определяется так:

- если $\alpha = uzqxv$ и $K = qxyq'L$, то $\beta = uq'zyv$,
- если $\alpha = qxv$ и $K = qxyq'L$, то $\beta = q'a_0yv$,
- если $\alpha = uqxzv$ и $K = qxyq'R$, то $\beta = uyq'zv$,
- если $\alpha = uqx$ и $K = qxyq'R$, то $\beta = uyq'a_0$.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

Программа машины Тьюринга — это произвольное множество команд $\pi = \{K_1, K_2, \ldots, K_N\}$. Программа π называется детерминированной , если для любых двух команд этой программы
$K_i = q_i x y q_i' D_i$,
$K_j = q_j z t q_j' D_j$,
выполняется хотя бы одно из двух условий $q_i \neq q_j$, $x \neq z$.

Программа π задает отношение переходов на множестве ленточных конфигураций $\rightarrow_\pi = \bigcup\limits_{K \in \pi} \rightarrow_K$.

Конфигурация α называется заключительной для программы π, если не существует никакой конфигурации β, для которых выполняется $\alpha \rightarrow_\pi \beta$. Это означает, что $\alpha = u\ q\ x\ v$, и в программе π нет ни одной команды $K = qx\ldots$.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Машины Тьюринга

Вычислением машины Тьюринга с программой π на начальной конфигурации $\alpha_0, \alpha_0 \in Conf^0$ называется последовательность конфигураций

$$\pi(\alpha_0) = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots$$

удовлетворяющая следующим условиям:

- для любого $i, i \geq 0$, верно $\alpha_i \to_\pi \alpha_{i+1}$;
- последовательность $\pi(\alpha_0)$ либо является бесконечной, либо заканчивается заключительной конфигурацией α_N.

В последнем случае α_N называется результатом вычисления . Результат бесконечного вычисления считается неопределенным. Ясно, что вычисление $\pi(\alpha_0)$ детерминированной машины Тьюринга однозначно определяется начальной конфигурацией α_0 и программой π.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Чтобы логические программы могли моделировать вычисления машин Тьюринга, нужно выбрать подходящие логические конструкции для представления конфигураций и команд.

Ленточные слова будем представлять списками:
слово $w = z_1 z_2 \ldots z_n$ будет представлено списком
$\mathit{list}(w) = z_1 \,.\, z_2 \,.\, \ldots \,.\, z_n \,.\, \mathbf{nil}$.

Каждая ленточная конфигурация $\alpha = u\ q\ z\ v$ будет представлена парой списков $\mathit{left}(\alpha),\ \mathit{right}(\alpha)$, где
$\mathit{left}(\alpha) = \mathit{list}(u^{-1})$,
$\mathit{right}(\alpha) = q \,.\, z \,.\, \mathit{list}(v)$.

Например,
$\mathit{left}(0111q_1 1011110) = 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 0 \,.\, \mathbf{nil}$,
$\mathit{right}(0111q_1 1011110) = q_1 \,.\, 1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 0 \,.\, \mathbf{nil}$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Каждой команде $K = q\ b\ c\ q'\ L$ сопоставим пару программных утверждений $D_1(K),\ D_2(K)$:

$$\begin{array}{lrcl} D_1(K): & P(Z \centerdot X, q \centerdot b \centerdot Y, X', Y') & \leftarrow & P(X, q' \centerdot Z \centerdot c \centerdot Y, X', Y'); \\ D_1(K): & P(\mathbf{nil}, q \centerdot b \centerdot Y, X', Y') & \leftarrow & P(\mathbf{nil}, q' \centerdot a_0 \centerdot c \centerdot Y, X', Y'); \end{array}$$

Каждой команде $K = q\ b\ c\ q'\ R$ сопоставим пару программных утверждений $D_1(K),\ D_2(K)$:

$$\begin{array}{lrcl} D_1(K): & P(X, q \centerdot b \centerdot Z \centerdot Y, X', Y') & \leftarrow & P(c \centerdot X, q' \centerdot Z \centerdot Y, X', Y'); \\ D_1(K): & P(X, q \centerdot b \centerdot \mathbf{nil}, X', Y') & \leftarrow & P(c \centerdot X, q' \centerdot a_0 \centerdot \mathbf{nil}, X', Y'); \end{array}$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Кроме того, для каждой пары q, z, где $q \in \mathcal{Q}$, $z \in \mathcal{A}$, введем факт $D_{q,z}$:

$$D_{q,z} : P(X, q \blacksquare z \blacksquare Y, X, q \blacksquare z \blacksquare Y) \ \leftarrow;$$

Теперь для каждой машины Тьюринга $\pi = \{K_1, K_2, \ldots, K_N\}$ выделим множество T_π всех пар qx, которые **не являются** началами ни одной из команд программы π...

и построим хорновскую логическую программу

$$\mathcal{P}_\pi = \{D_1(K), D_2(K) \ : \ K \in \pi\} \cup \bigcup_{(qx \in T_\pi)} D_{qx}.$$

Можно надеяться, что логическая программа $\mathcal{P}_\pi$ воспроизводит все вычисления машины Тьюринга π.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Пример

Пусть $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ и пусть $\pi = \{K_1, K_2, K_3\}$, где
$K_1 = \ q_0\ 0\ 1\ q_1\ R,$
$K_2 = \ q_1\ 0\ 1\ q_0\ L,$
$K_3 = \ q_1\ 1\ 1\ q_1\ R.$

Машина Тьюринга с программой π транслируется в логическую программу $\mathcal{P}_\pi$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Пример

Логическая программа $\mathcal{P}_\pi$:

$$
\begin{array}{lcl}
P(X, q_0 \,.\, 0 \,.\, Z \,.\, Y, X', Y') & \leftarrow & P(1 \,.\, X, q_1 \,.\, Z \,.\, Y, X', Y'); \\
P(X, q_0 \,.\, 0 \,.\, \mathbf{nil}, X', Y') & \leftarrow & P(1 \,.\, X, q_1 \,.\, 0 \,.\, \mathbf{nil}, X', Y'); \\
 & & \\
P(Z \,.\, X, q_1 \,.\, 0 \,.\, Y, X', Y') & \leftarrow & P(X, q_0 \,.\, Z \,.\, 1 \,.\, Y, X', Y'); \\
P(\mathbf{nil}, q_1 \,.\, 0 \,.\, Y, X', Y') & \leftarrow & P(\mathbf{nil}, q_0 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, Y, X', Y'); \\
 & & \\
P(X, q_1 \,.\, 1 \,.\, Z \,.\, Y, X', Y') & \leftarrow & P(1 \,.\, X, q_1 \,.\, Z \,.\, Y, X', Y'); \\
P(X, q_1 \,.\, 1 \,.\, \mathbf{nil}, X', Y') & \leftarrow & P(1 \,.\, X, q_1 \,.\, 0 \,.\, \mathbf{nil}, X', Y'); \\
 & & \\
P(X, q_0 \,.\, 1 \,.\, Z, X, q_0 \,.\, 1 \,.\, Z) & \leftarrow & ;
\end{array}
$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Лемма 1

Для любой пары ленточных конфигураций $\alpha, \beta \in Conf$ и команды K отношение перехода $\alpha \rightarrow_K \beta$ выполняется тогда и только тогда, когда запрос
$G_\alpha : ?P(left(\alpha), right(\alpha), X, Y)$
и одно из программных утверждений $D_1(K),\ D_2(K)$
имеют SLD-резольвенту $G_\beta :?P(left(\beta), right(\beta), X, Y)$.

Доказательство

Самостоятельно.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Лемма 2

Ленточная конфигурация $\alpha \in Conf$ является заключительной для машины Тьюринга π тогда и только тогда, когда запрос $G_\alpha : ?P(left(\alpha), right(\alpha), X, Y)$
и одно из программных утверждений множества $\bigcup_{(qx \in T_\pi)} D_{qx}$
имеют пустой дизъюнкт $\square$ в качестве SLD-резольвенты.

Доказательство

Самостоятельно.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Теорема (о моделировании МТ логическими программами)

Каковы бы ни были машина Тьюринга π и начальная конфигурация α_0, вычисление

$\alpha_0 \to_\pi \alpha_1 \to_\pi \alpha_2 \to_\pi \cdots \to_\pi \alpha_N$

завершается заключительной конфигурацией α_N тогда и только тогда, когда запрос

$G_{\alpha_0} : ?R(\mathit{left}(\alpha_0), \mathit{right}(\alpha_0), X, Y)$

к хорновской логической программе $\mathcal{P}_\pi$ имеет успешное вычисление с вычисленным ответом

$\theta = \{X/\mathit{left}(\alpha_N),\ Y/\mathit{right}(\alpha_N)\}.$

Доказательство

Следует из лемм 1 и 2. □

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАШИН ТЬЮРИНГА ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ

Таким образом, хорновские логические программы обладают не меньшими вычислительными воможностями, чем машины Тьюринга. Значит, логическое программирование — это универсальная модель вычислений, позволяющая вычислять все эффективно вычислимые функции.

Но это также означает, что логическому программированию присущи все те трудности анализа поведения программ, которые присущи и другим универсальным моделям вычислений. Речь идет об алгоритмически неразрешмых задачах.

Например, интересен вопрос о том, можно ли по заданному запросу G к логической программе $\mathcal{P}$ выяснить, имеет ли этот запрос хотя бы одно успешное вычисление. Тогда не пришлось бесполезно тратить время на построение дерева SLD-резолютивных вычислений.

ТЕОРЕМА ЧЕРЧА

Теорема Тьюринга об алгоритмической неразрешимости проблемы останова

Проблема останова машин Тьюринга алгоритмически неразрешима, т. е. не существует алгоритма (машины Тьюринга), способного вычислить следующую функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — это начальная ленточная конфигурация,} \\ & \text{если } y \text{ — это список команд МТ } \pi, \\ & \text{и вычисление } \pi(x) \text{ конечно;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство

Известно каждому первокурснику. □

ТЕОРЕМА ЧЕРЧА

Из теоремы о моделировании машин Тьюринга логическими программами и теоремы об алгоритмической неразрешимости проблемы останова машин Тьюринга получаем несколько важных следствий

Следствие 1.

Не существует алгоритма, способного определить по заданному запросу G к хорновской логической программе $\mathcal{P}$,

- является ли дерево SLD-резолютивных вычислений запроса G конечным;
- содержит ли дерево SLD-резолютивных вычислений запроса G хотя бы одно успешное вычисление;
- является ли заданная подстановка θ вычисленным ответом на запрос G.

ТЕОРЕМА ЧЕРЧА

Следствие 2 (Теорема Черча).

Не существует алгоритма, способного определить по заданной замкнутой формуле логики предикатов φ, является ли эта формула общезначимой, т. е. проблема общезначимости "$\models \varphi$?"алгоритмически неразрешима.

Доказательство

Пусть $G : ?C_1, \ldots, C_m$ произвольный запрос к произвольной логической программе $\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_N\}$.
Тогда...

ТЕОРЕМА ЧЕРЧА

Доказательство

Запрос G к программе $\mathcal{P}$ имеет хотя бы одно успешное SLD-резолютивное вычисление

$$\Longleftrightarrow \qquad \text{(теоремы корректности и полноты)}$$

Запрос G к программе $\mathcal{P}$ имеет хоть один правильный ответ θ

$$\Longleftrightarrow \qquad \text{(определение правильного ответа)}$$

$$\{D_1, \ldots, D_N\} \models \forall z_1 \ldots \forall z_k (C_1 \& \ldots \& C_m)\theta$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \text{(теорема о логическом следовании)}$$

$$\models D_1 \& \ldots \& D_N\} \forall z_1 \ldots \forall z_k (C_1 \& \ldots \& C_m)\theta.$$

$\square$

ТЕОРЕМА ЧЕРЧА

Теорема Черча об алгоритмической неразрешимости проблемы общезначимости показывает, что ни одна система автоматического доказательства теорем не может гарантировать решение следующих вопросов для произвольных формул:

- является ли заданная формула φ общезначимой?
- является ли заданная формула φ выполнимой?
- является ли заданная формула φ логическим следствием заданного множества формул Г?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 15.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 16.

Управление вычислениями логических программ. Оператор отсечения.

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Вопросы:

А как организовано вычисление логических программ на компьютере?

Как устроен интерпретатор логических программ?

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Простейший способ организации работы логических программ на основе стандартной стратегии обхода дерева SLD-резолютивных вычислений в глубину с возвратом — это работа со **стеком** (или **магазином**).
В каждом элементе S_n стека содержится следующая информация:

- Текущее целевое утверждение (запрос) G_n;
- Композиция всех ранее вычисленных унификаторов $\eta_n = (\theta_1 \dots \theta_n)|_{\text{целев.перем}}$;
- Счетчик использованных программных утверждений $count_n$;
- Специальные пометки (о некоторых из них будет рассказано далее).

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$
\begin{array}{ll}
P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); & (1) \\
P(X, X) \leftarrow Q(X); & (2) \\
R(b) \leftarrow; & (3) \\
Q(c) \leftarrow; & (4)
\end{array}
$$

Протокол:

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$

$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$

Протокол:

SLD-резолюция

$HOY = \{X_1/U, Y_1/V\}$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 3$

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 1$

Протокол:

SLD-резолюция

$HOY = \{U/b\}$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 1$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 2$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 3$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

Протокол:

SLD-резолюция

$HOУ = \{V/c\}$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 1$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

Протокол:

Нет унификатора

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 1$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

Протокол:

Нет унификатора

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 2$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

Протокол:

Унификация

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 3$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

Протокол:

SLD-резолюция

$HOУ = \varepsilon$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 3$
$\square$ $\eta = \{U/b, V/c\}$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

Протокол:

Успех: $\eta = \{U/b, V/c\}$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 3$
$\square$ $\eta = \{U/b, V/c\}$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

Протокол:

Откат

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 3$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

Протокол:

Нет унификатора

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 4$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$

Протокол:

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 3$

Протокол:

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$
$?R(U), Q(V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 4$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$

$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$

Протокол:

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$

$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$
$\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 1$

Протокол:

SLD-резолюция

$HOY = \{U/X_1, V/X_1\}$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$
$\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 1$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$
$\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 2$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$
$\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 3$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$
$\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 4$

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$ $\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 4$
$?R(c)$ $\eta = \{U/c, V/c\}; count = 1$

Протокол:

SLD-резолюция

$HOУ = \{X_1/c\}$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$ $\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 4$
$?R(c)$ $\eta = \{U/c, V/c\}; count = 1$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$ $\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 4$
$?R(c)$ $\eta = \{U/c, V/c\}; count = 2$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$ $\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 4$
$?R(c)$ $\eta = \{U/c, V/c\}; count = 3$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$ $\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 4$
$?R(c)$ $\eta = \{U/c, V/c\}; count = 4$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$
$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$
$?Q(X_1), R(X_1)$
$\eta = \{U/X_1, V/X_1\}; count = 4$

Протокол:

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$

$\eta = \varepsilon; \quad count = 2$

Протокол:

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$

$\eta = \varepsilon; \quad count = 3$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$

$?P(U, V), R(U)$

$\eta = \varepsilon; \quad count = 4$

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример стекового вычисления логических программ

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$
\begin{array}{ll}
P(X, Y) \leftarrow R(X), Q(Y); & (1) \\
P(X, X) \leftarrow Q(X); & (2) \\
R(b) \leftarrow; & (3) \\
Q(c) \leftarrow; & (4)
\end{array}
$$

Протокол:

Конец вычислений

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Д. Уоррен предложил более эффективную схему реализации интерпретаторов логических программ (Warren Abstract Machine), в которой вместо единого стека используется несколько стеков, перераспределяющих данные вычисления наиболее оптимальным способом. Эта схема положена в основу всех современных компиляторов логических программ.

А как программист может управлять вычислением логической программы?

Есть два основных способа управления:

- Выбирать правильный порядок расположения атомов в телах процедур (по принципу: вначале решать простые задачи, а потом сложные).
- Выбирать правильный порядок расположения программных утверждений (по принципу: вначале предлагать простые способы решения, а потом сложные).

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример

Рассмотрим две программы поиска маршрута в ориентированном графе.

$$\mathcal{P}_1: \quad Path((X \,.\, Z \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, U, X, Y) \leftarrow Path(U, Z, Y), Arc(X \,.\, Z \,.\, \mathbf{nil});$$
$$Path(nil, X, X) \leftarrow;$$

$$\mathcal{P}_2: \quad Path(nil, X, X) \leftarrow;$$
$$Path((X \,.\, Z \,.\, \mathbf{nil}) \,.\, U, X, Y) \leftarrow Arc(X \,.\, Z \,.\, \mathbf{nil}), Path(U, Z, Y);$$

За счет правильного упорядочения атомов и программных утверждений программа $\mathcal{P}_2$ проводит вычисление маршрута более эффективно чем программа $\mathcal{P}_1$. На самом деле, обе программы несовершенны, поскольку обе могут зациклиться даже в случае простых графов. (Привести пример.)

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Но иногда и этих средств управления вычислением программ недостаточно для эффективного решения задачи.

Предположим, что нам нужно написать программу, которая проверяет, верно ли, что заданная буква содержится в заданном слове (например, буква a в слове $abaa$).

Можно предложить вот такую программу:

$$G: \quad ?Elem(a, a \centerdot b \centerdot a \centerdot a \centerdot \mathbf{nil})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \quad & Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow; \\ & Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y); \end{aligned}$$

Тогда вычисления будут развиваться так.

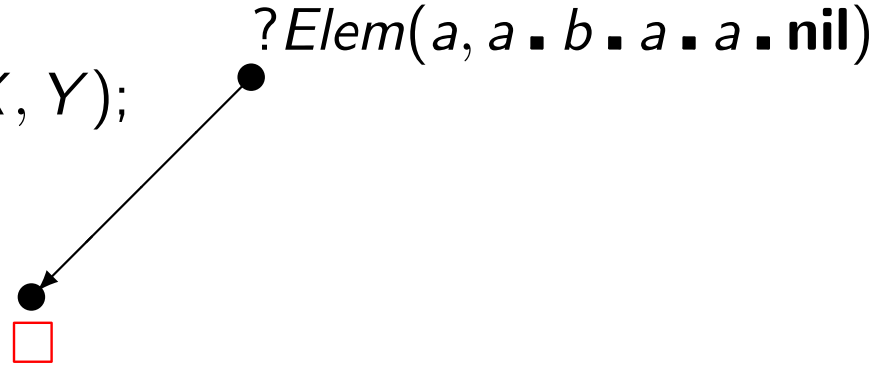
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \,.\, Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \,.\, Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;

$?Elem(a, a \,.\, b \,.\, a \,.\, a \,.\, \mathbf{nil})$

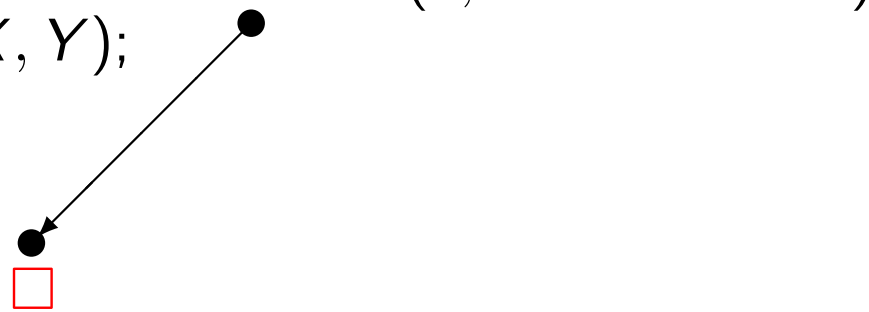
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

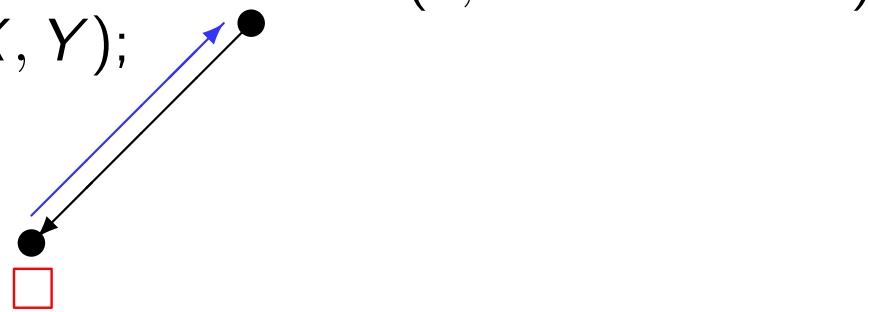
$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \,.\, Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \,.\, Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



Ответ: YES

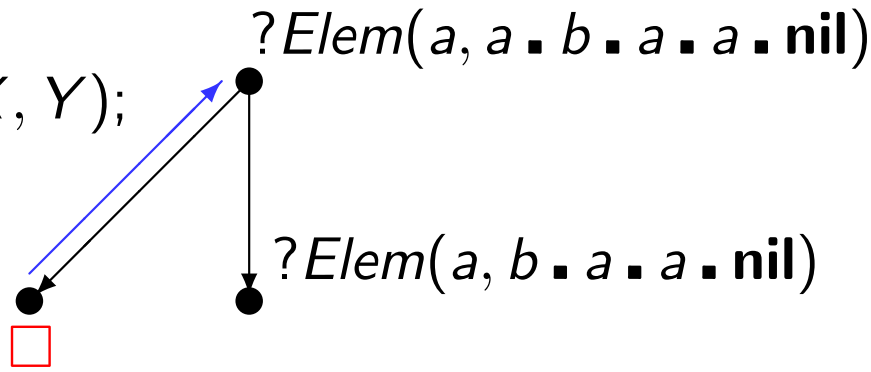
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \,.\, Y) \leftarrow;$
$Elem(X, Z \,.\, Y) \leftarrow Elem(X, Y);$



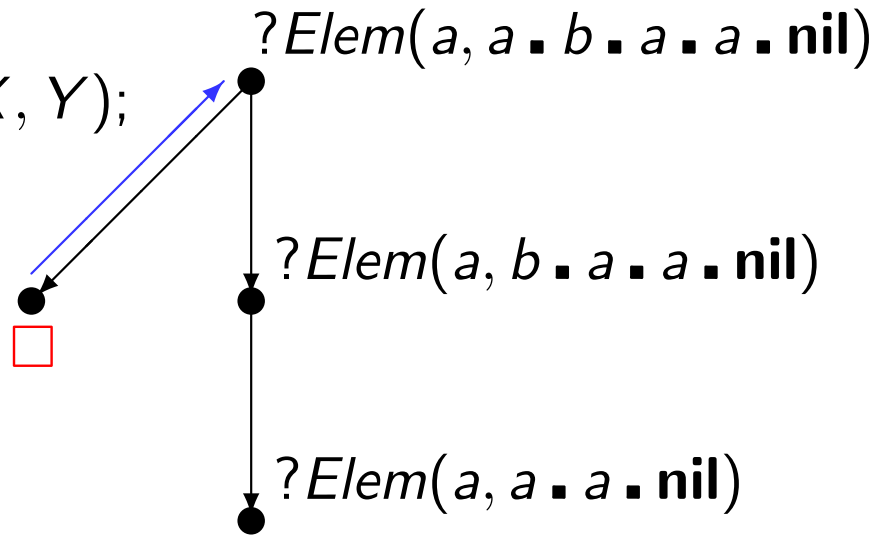
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \,.\, Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \,.\, Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



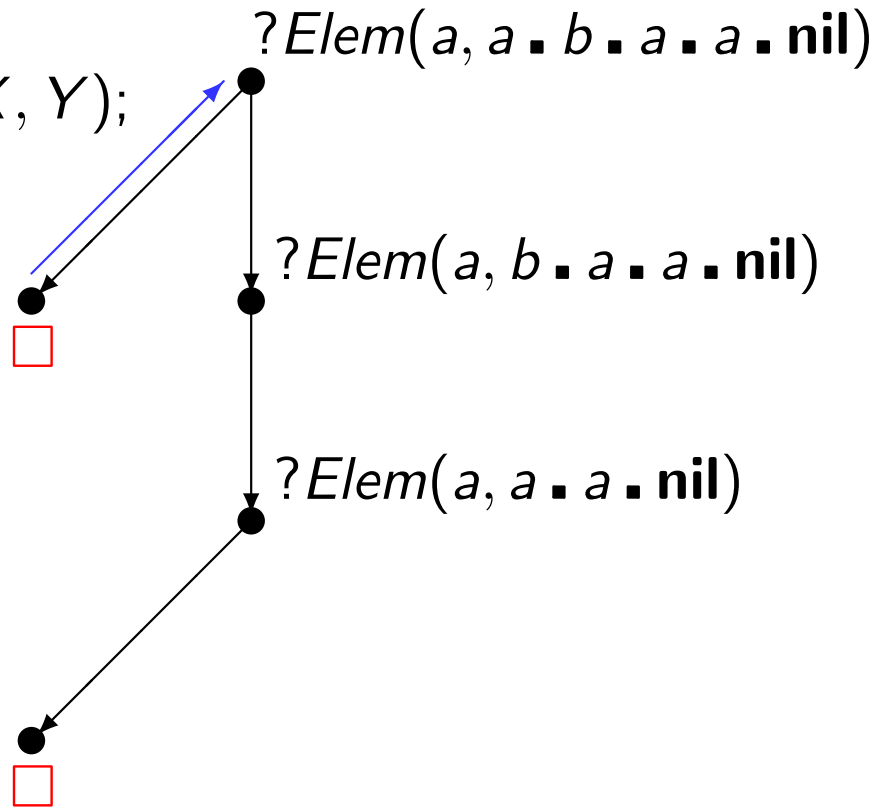
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \,.\, Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \,.\, Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



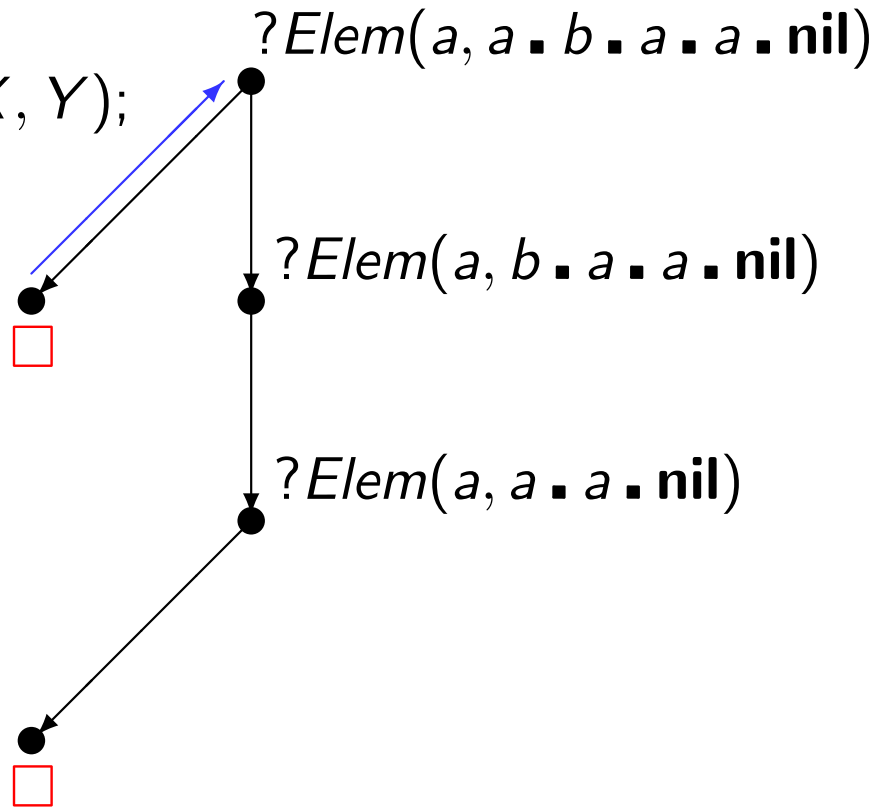
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

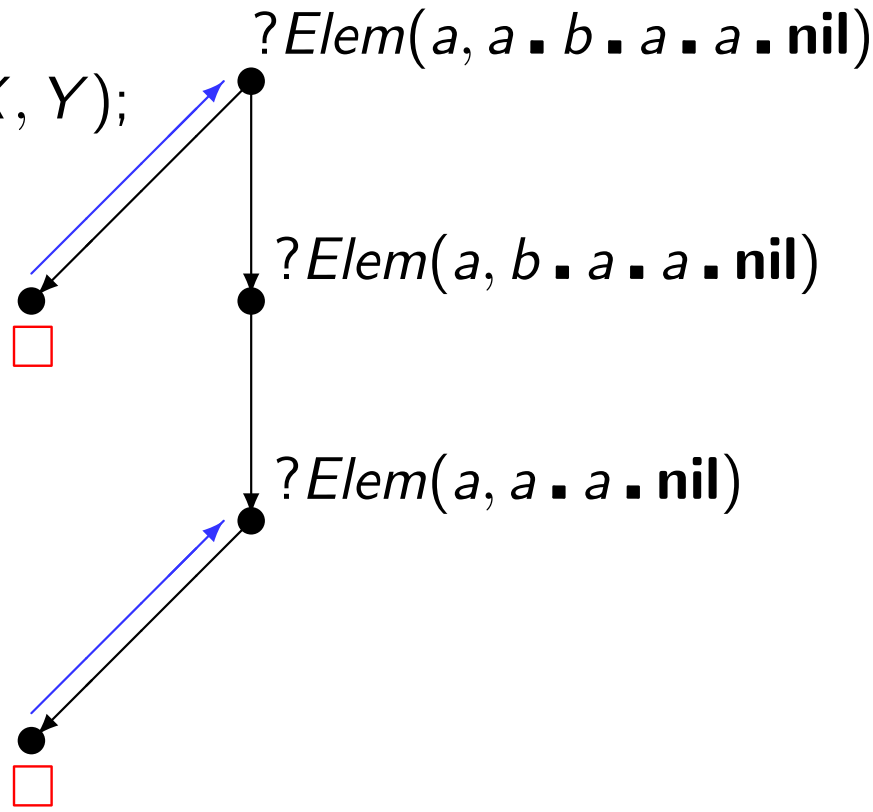
$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



Ответ: YES

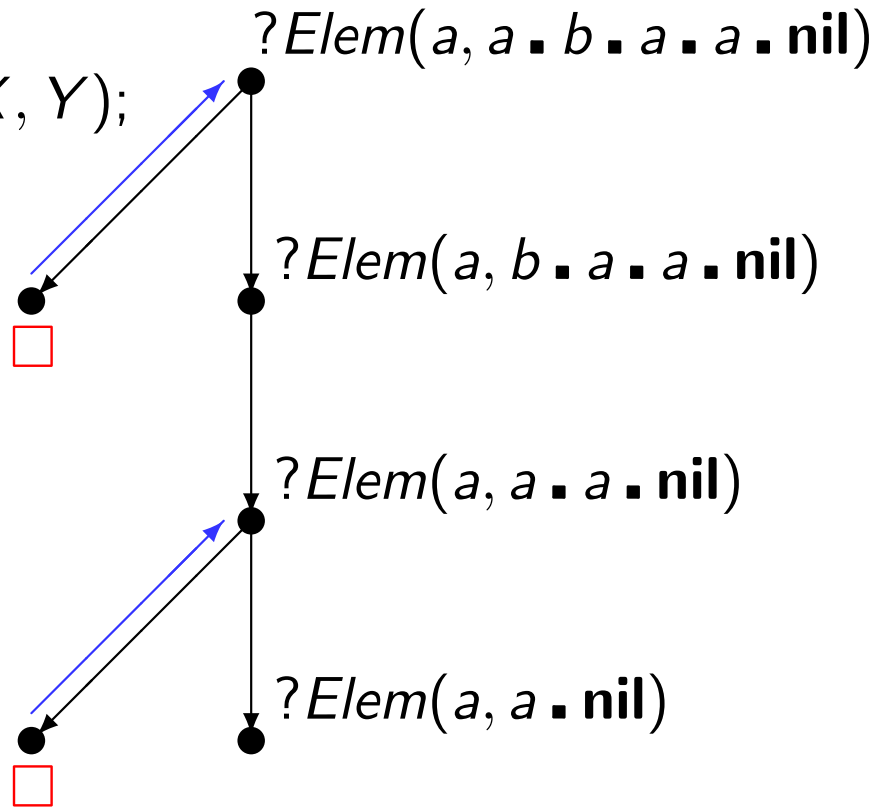
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



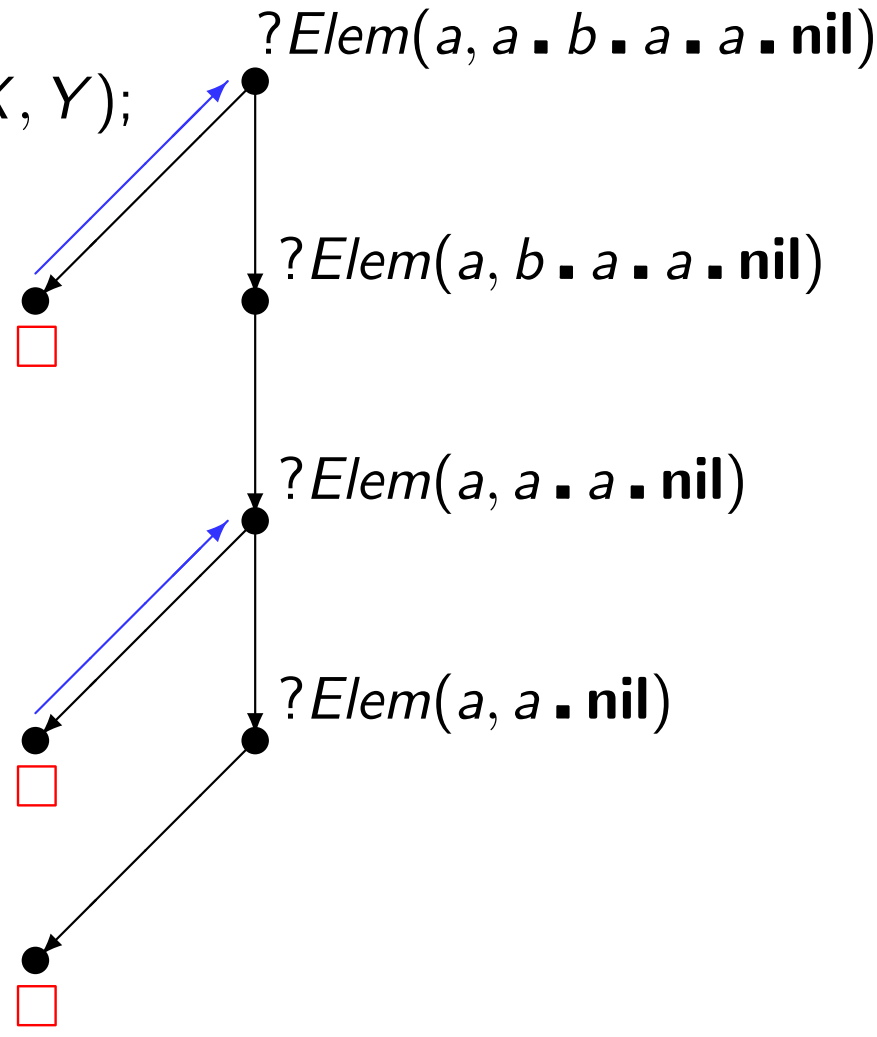
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



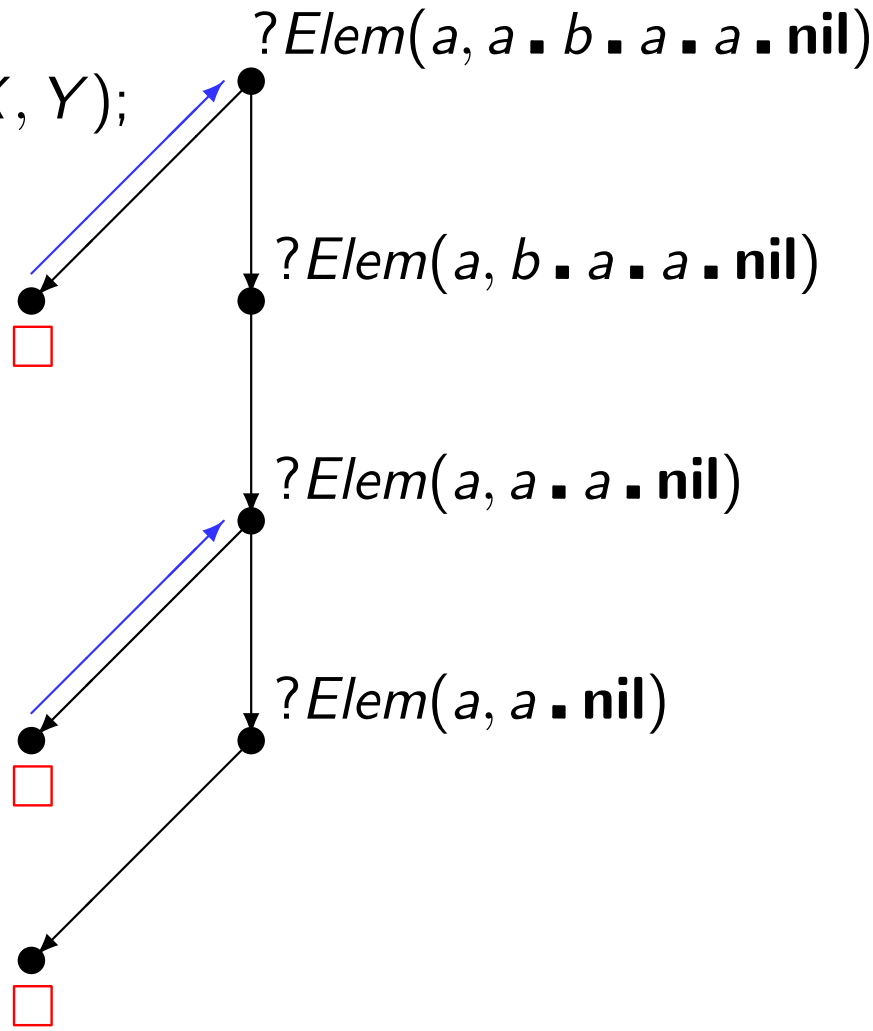
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

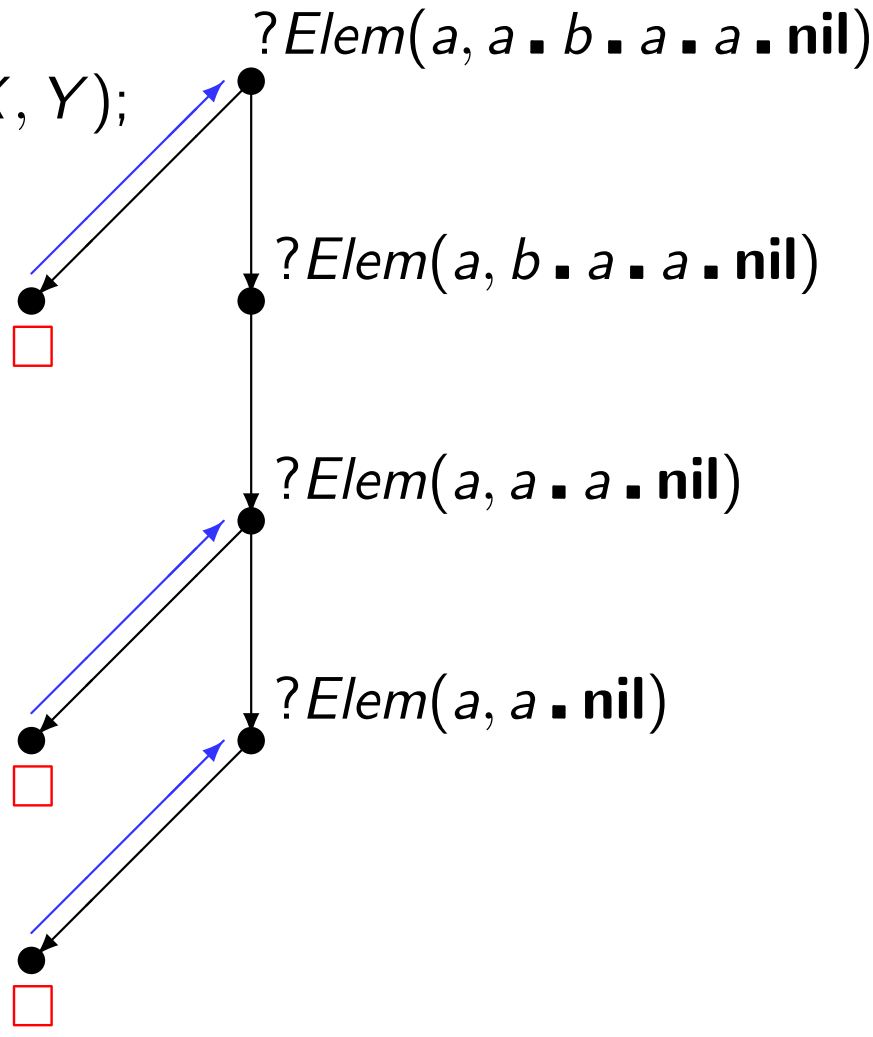
$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



Ответ: YES

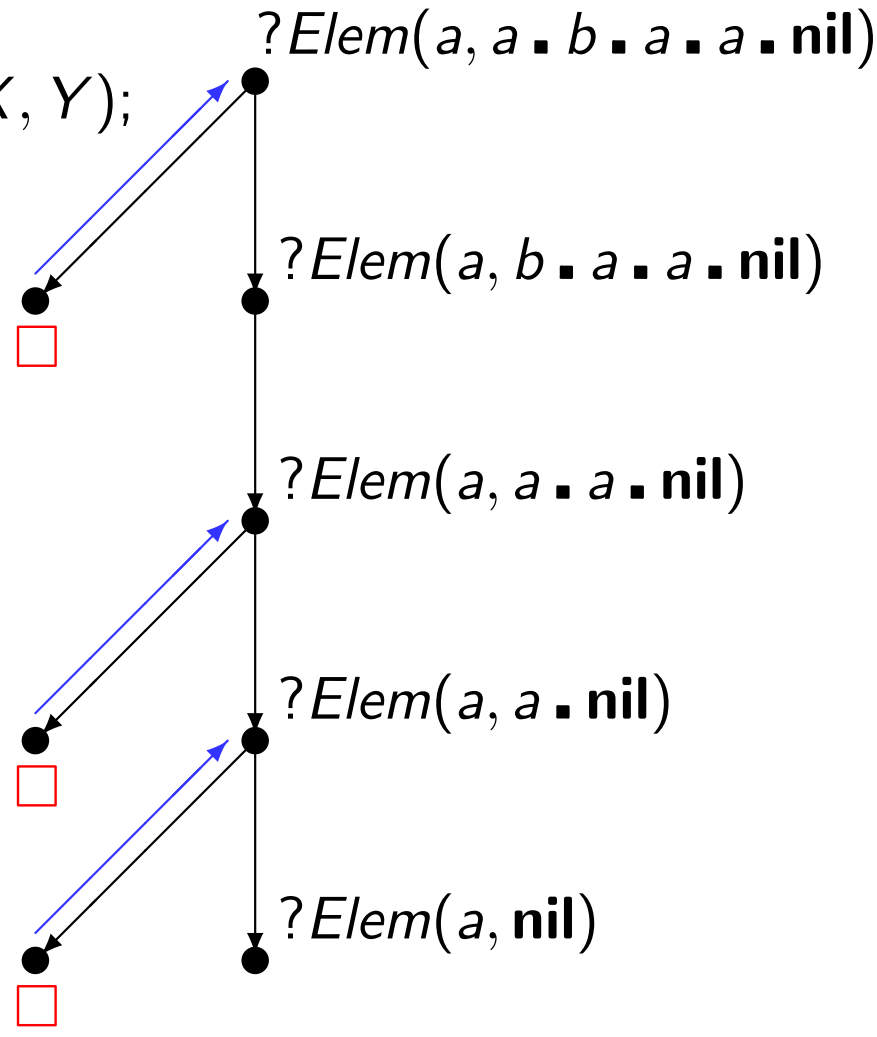
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



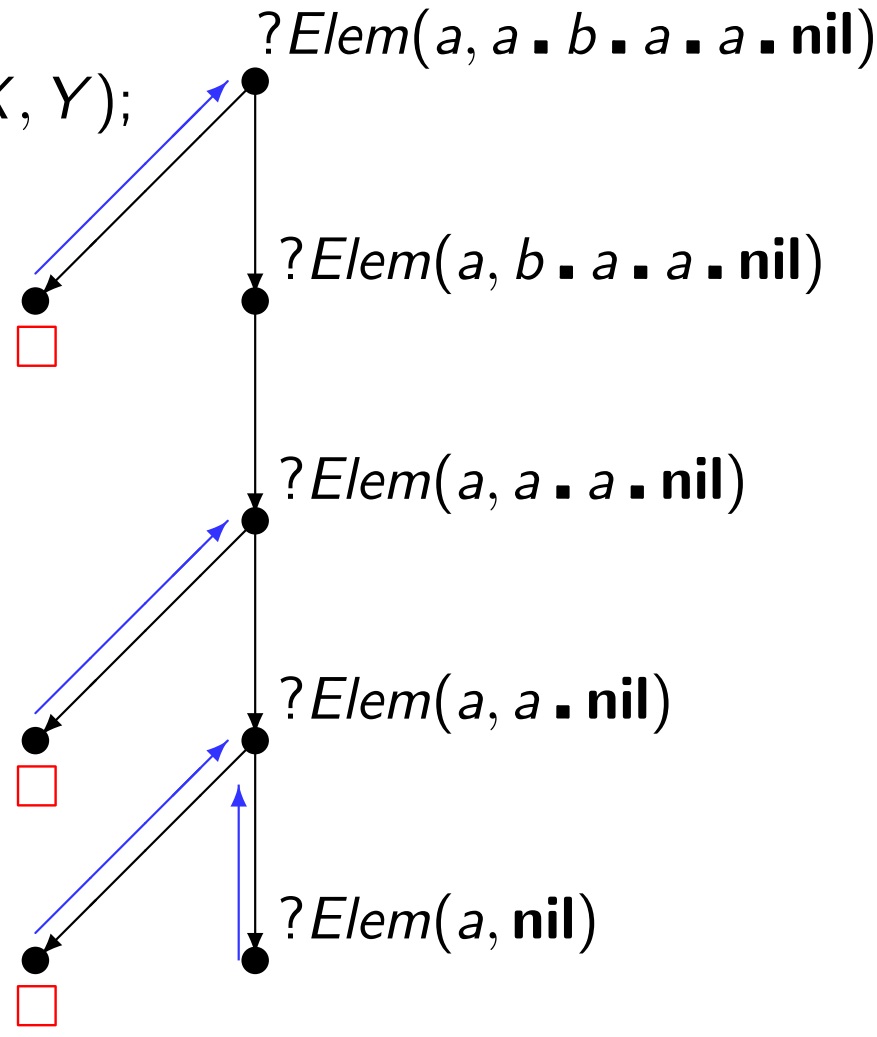
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



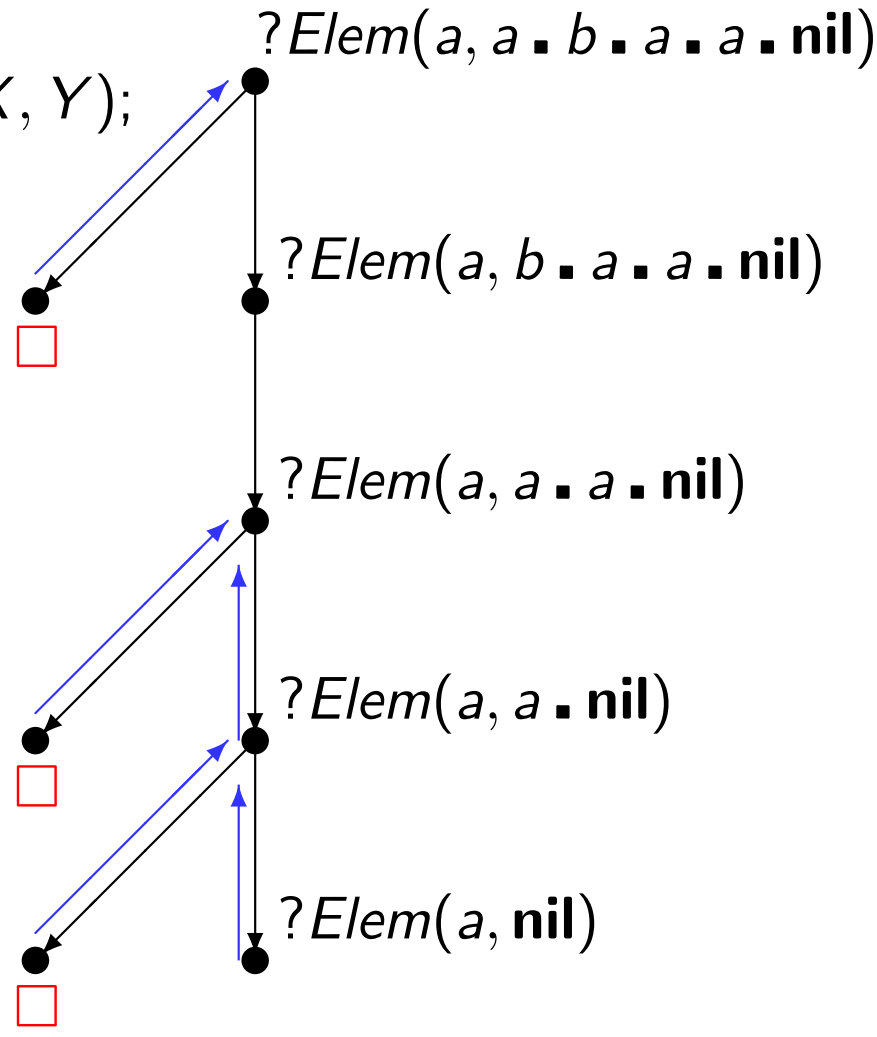
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



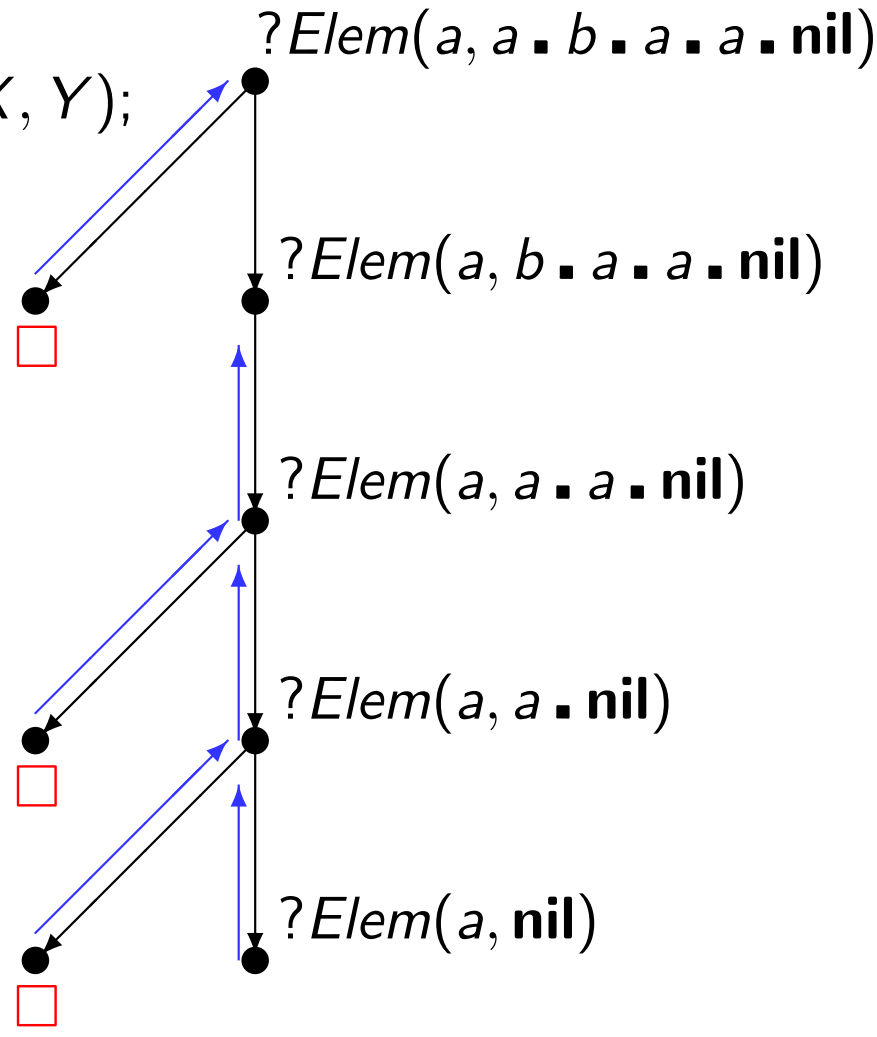
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



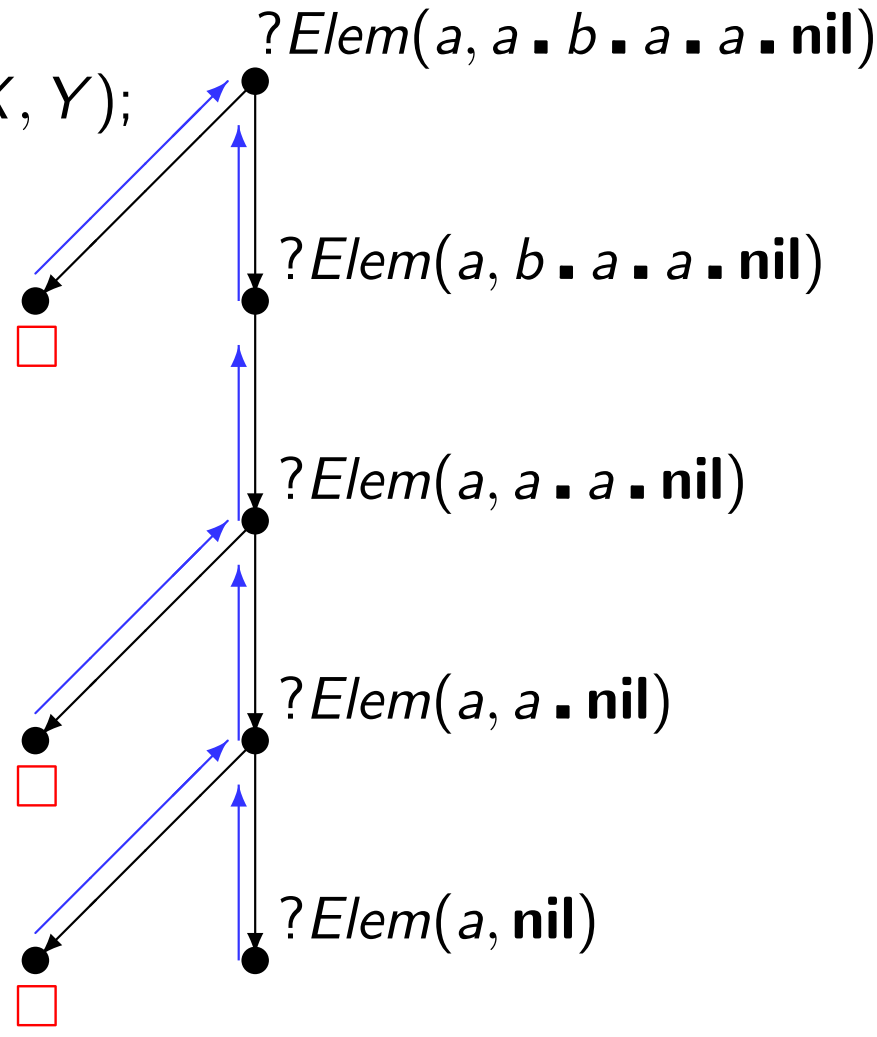
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



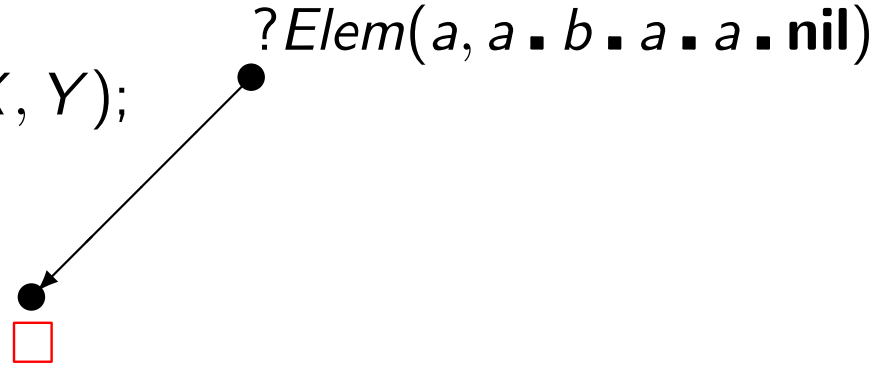
УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;



УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;

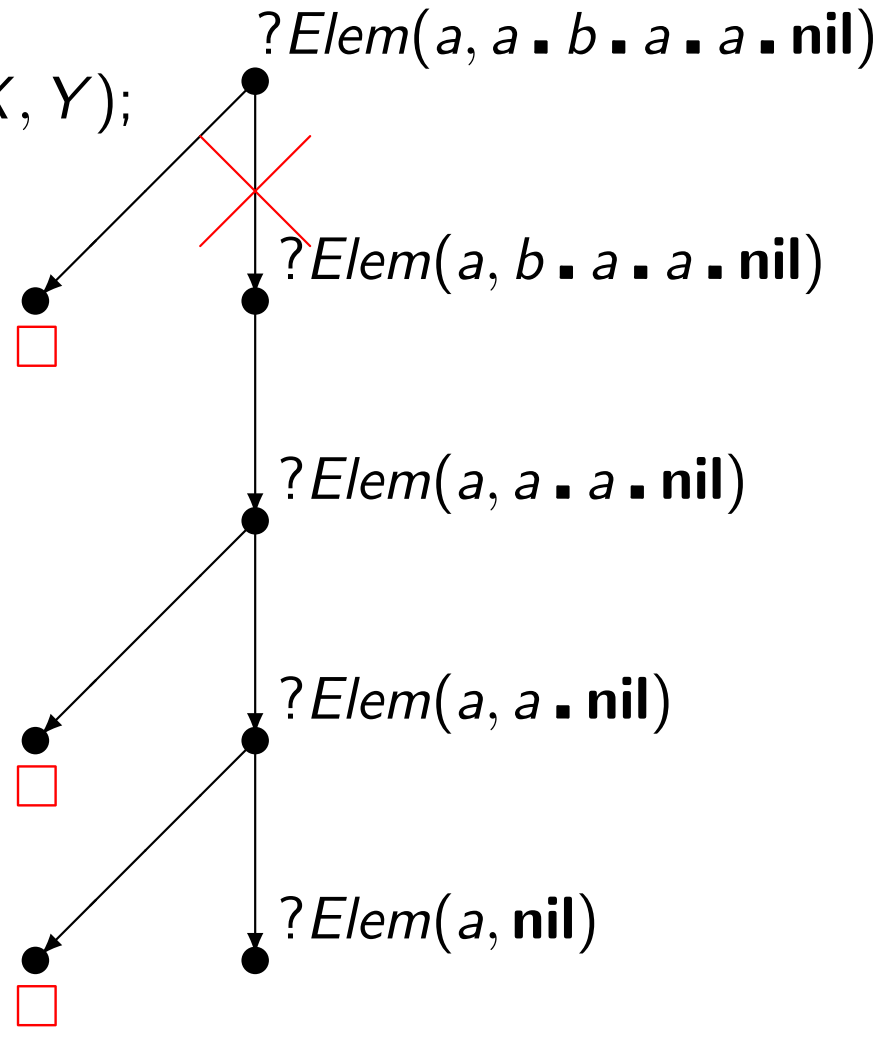


Но зачем нам обходить все дерево,
если для ответа YES достаточно
пройти по одной ветви?

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

$\mathcal{P}$: $Elem(X, X \centerdot Y) \leftarrow$;
$Elem(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem(X, Y)$;

Хотелось бы иметь способ обрезать в дереве вычислений ненужные ветви.



ОПЕРАТОР ОТСЕЧЕНИЯ

Для этого в языках логического программирования вводится **оператор отсечения** (**cut**).

Этот оператор предсталяет собой 0-местный предикат **!**, оказывающий специальный побочный эффект.

С точки зрения декларативной семантики, предикат **!** имеет постоянное значение **true**. Для его описания не требуется никаких программных утверждений (**!** — встроенный предикат). Поэтому оператор отсечения может использоваться в запросах и в телах программных утверждений, не оказывая при этом никакого влияния на их логический смысл.

Однако операционная семантика оператора **!** определяется вне рамок SLD-резолютивного вывода. Оператор отсечения предназначен для выделения тех ветвей в дереве SLD-резолютивных вычислений, которые **не должны** проходиться по ходу вычисления запроса.

ОПЕРАТОР ОТСЕЧЕНИЯ

Операционная семантика оператора отсечения $!$ задается следующими правилами:

- Если запрос G и программное утверждение $D : A_0 \leftarrow A_1, \ldots, !, \ldots, A_n$ порождают SLD-резольвенту G', то в стеке вычислений программы запрос G получает специальную служебную пометку $(*$, индивидуальную для каждого вхождения оператора $!$;
- Если в запросе G оператор $!$ активен, т. е. $G = ?!, C_1, \ldots, C_k$, то в стеке вычислений программы запрос G получает специальную служебную пометку $*)$, индивидуальную для каждого вхождения оператора $!$, и при этом порождается новый запрос $G' = ?C_1, \ldots, C_k$;
- Если по ходу вычисления **при откате** достигается элемент стека вычислений программы, помеченный $*)$, то из стека удаляются все элементы, расположенные между элементами, помеченными $(*$ и $*)$ (включая и сами эти элементы).

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$
\begin{array}{ll}
P(X, Y) \leftarrow R(X), \mathbf{!}, Q(Y); & (1) \\
P(X, X) \leftarrow Q(X); & (2) \\
R(b) \leftarrow; & (3) \\
Q(c) \leftarrow; & (4) \\
Q(b) \leftarrow; & (5)
\end{array}
$$

Протокол:

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

$?P(U, V), R(U)$	
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), \mathbf{!}, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	

Протокол:

SLD-резолюция

Появление оператора $!$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 2$	

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	

Протокол:

SLD-резолюция

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 1$	

Активизация оператора !

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 1$	

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 2$	

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 3$	

Протокол:

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

SLD-резолюция

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 1$	

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 1$	

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 2$	

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 3$	

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

SLD-резолюция

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 3$	
$\square$ $\eta = \{U/b, V/c\};$	

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

Успех: $\eta = \{U/b, V/c\}$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 3$	
$\square$ $\eta = \{U/b, V/c\};$	

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 3$	

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 4$	

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 3$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/c\}; count = 5$	

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 4$	

Протокол:

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	

Протокол:

Унификация

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

SLD-резолюция

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 1$	

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 1$	

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 2$	

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

Унификация

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 3$	

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

SLD-резолюция

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 3$	
$\square$ $\eta = \{U/b, V/b\};$	

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

Успех: $\eta = \{U/b, V/b\}$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 3$	
$\square$ $\eta = \{U/b, V/b\};$	

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 3$	

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 4$	

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	
$?R(b)$ $\eta = \{U/b, V/b\}; count = 5$	

Нет унификатора

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$
$?Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\}; \quad count = 5$	

Протокол:

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$(*$
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	
$?!, Q(V), R(b)$ $\eta = \{U/b\};$	$*)$

Протокол:

Откат

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)

$?P(U, V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	$($*
$?R(U), !, Q(V), R(U)$ $\eta = \varepsilon; \quad count = 4$	

Протокол:

Срабатывание оператора !

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

$?P(U, V), R(U)$	(*
$\eta = \varepsilon; \quad count = 1$	

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), \mathbf{!}, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

Срабатывание оператора $\mathbf{!}$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), \mathbf{!}, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

Срабатывание оператора $\mathbf{!}$

УПРАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ

Пример вычисления логических программ с оператором отсечения

Запрос: $?P(U, V), R(U)$

Программа $\mathcal{P}$:

$$P(X, Y) \leftarrow R(X), \mathbf{!}, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$

Протокол:

Конец вычислений

Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

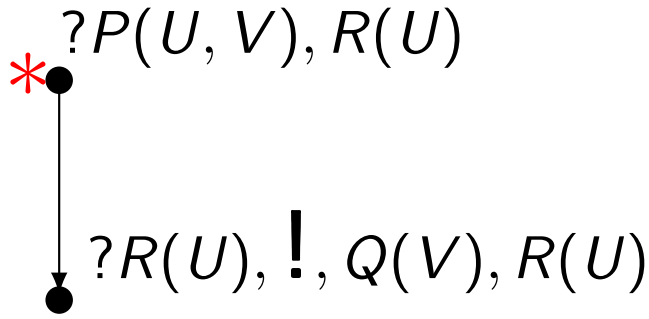
$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)

$?P(U, V), R(U)$

Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

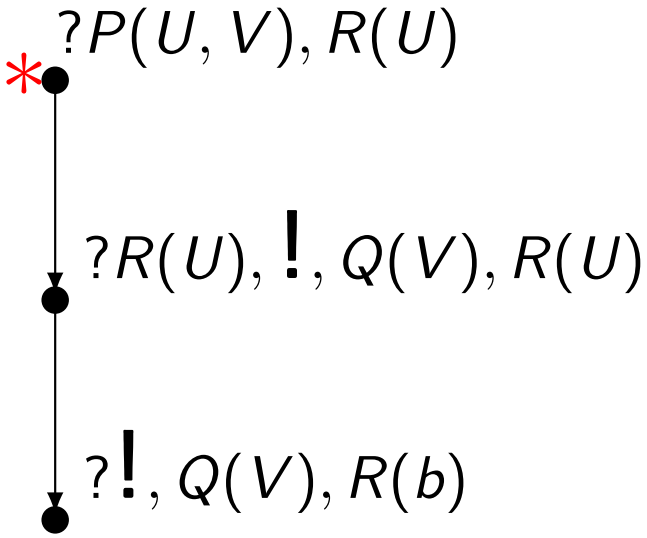
$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

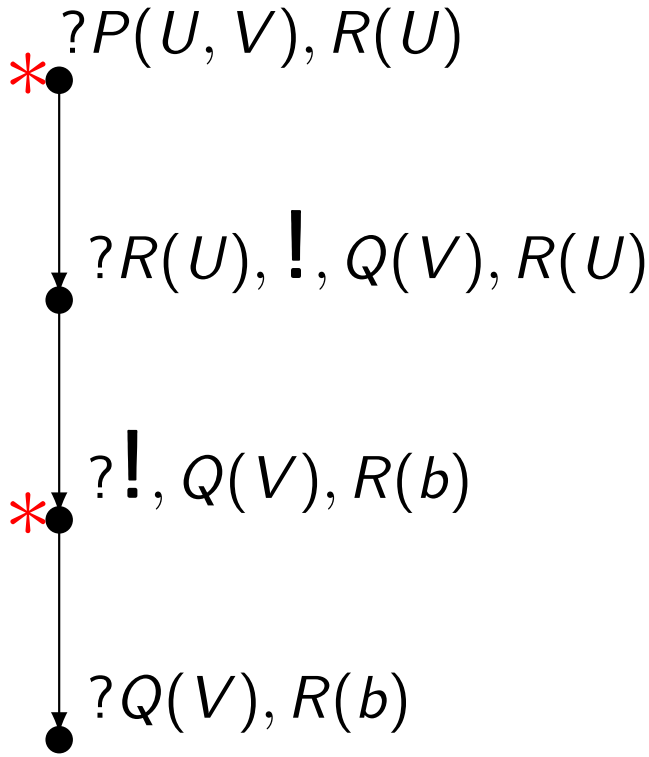
$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

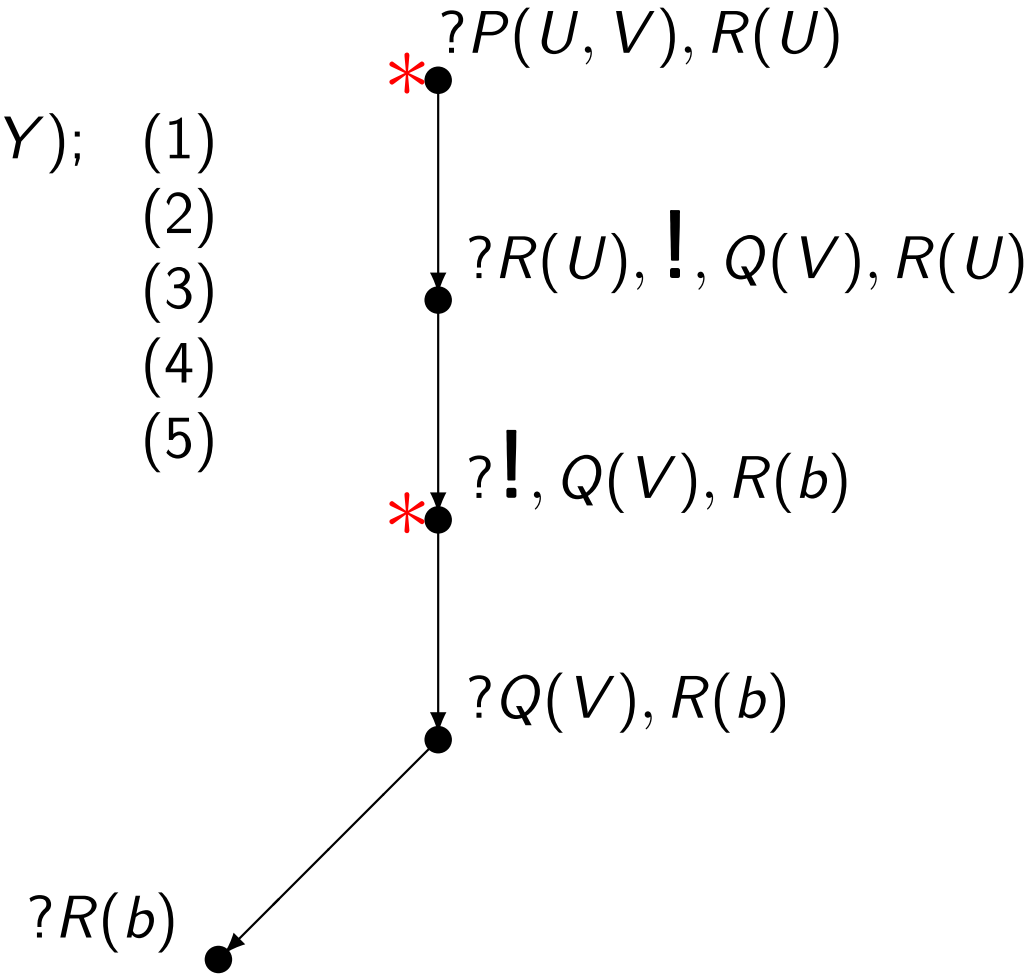
$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

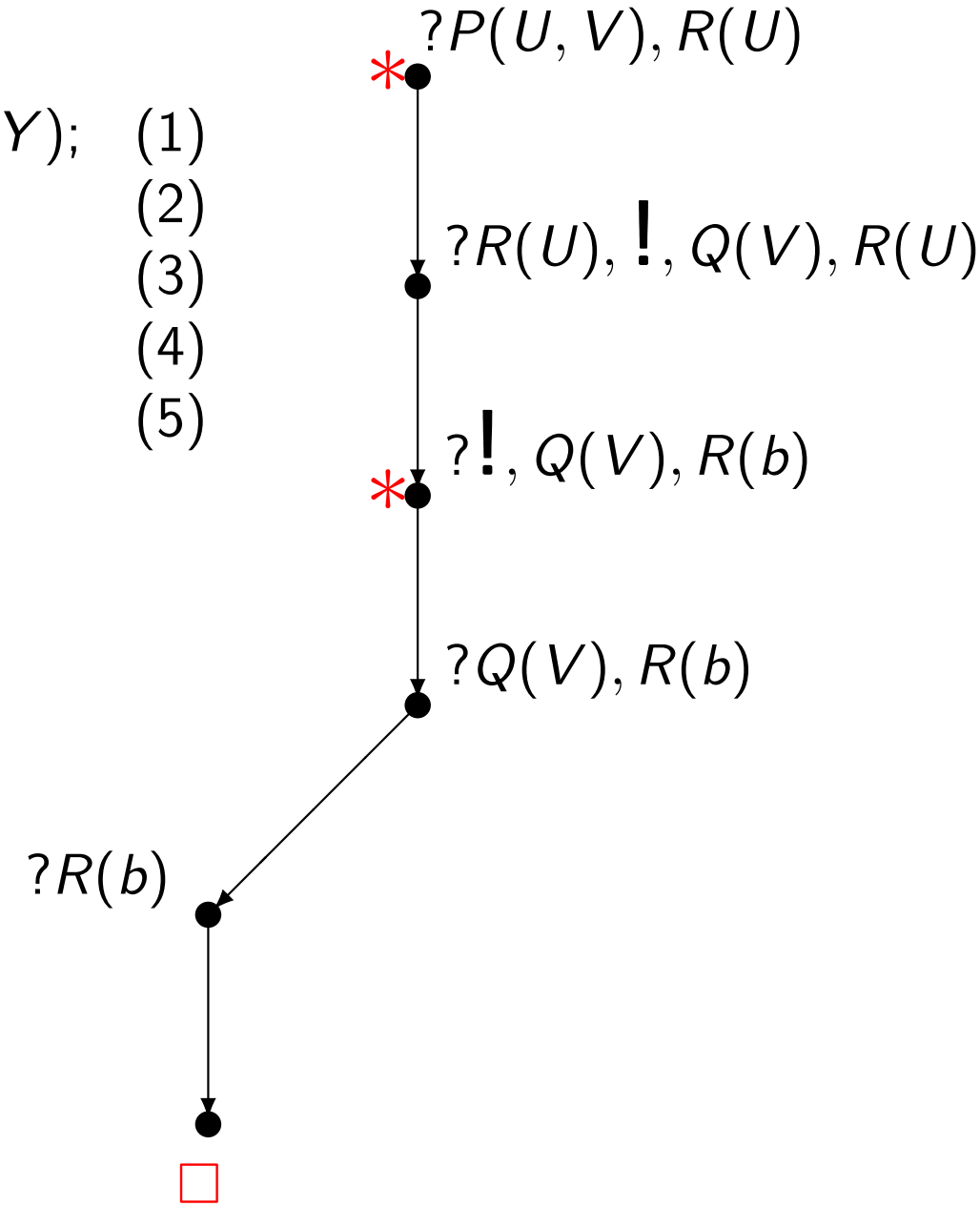
$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

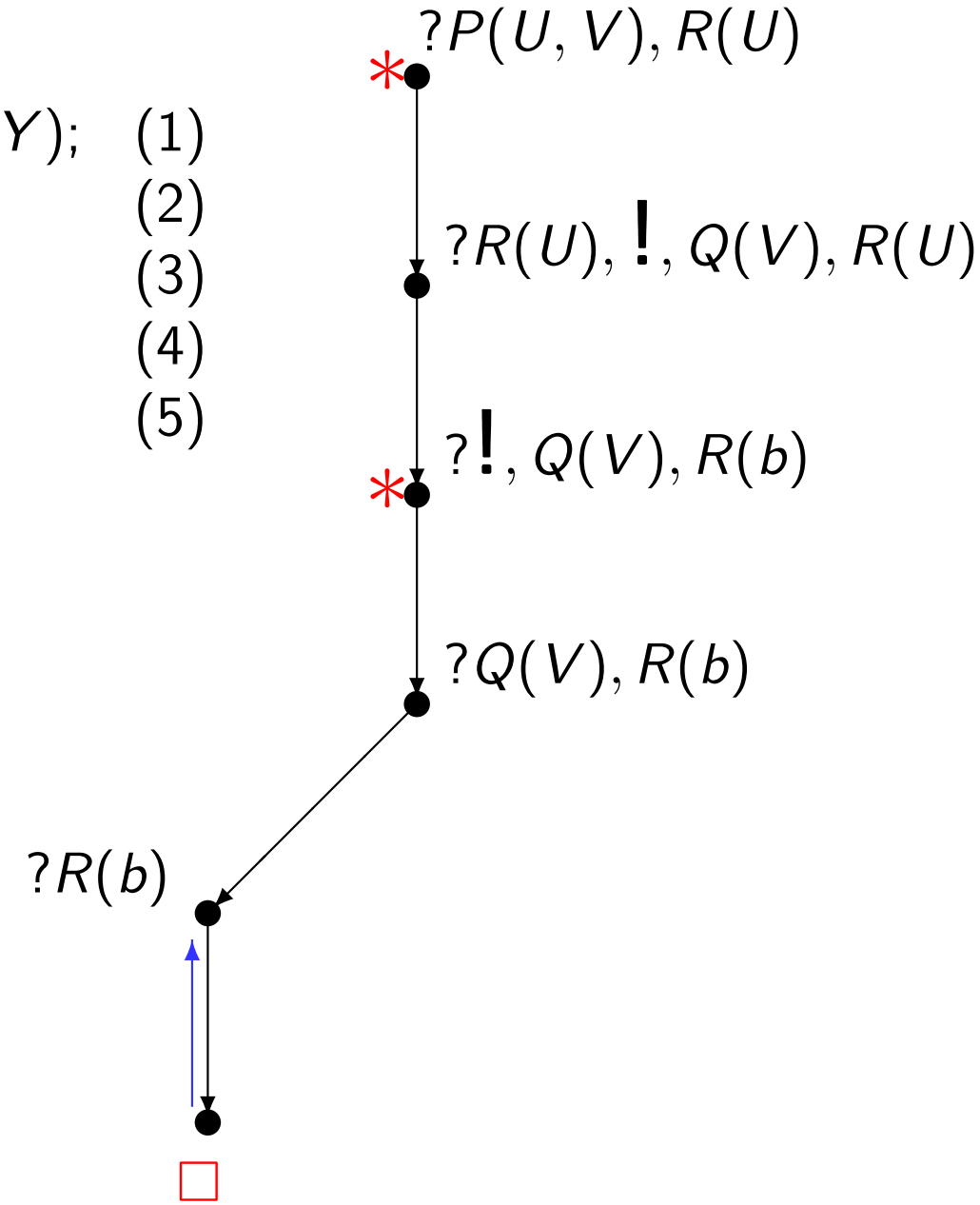
$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

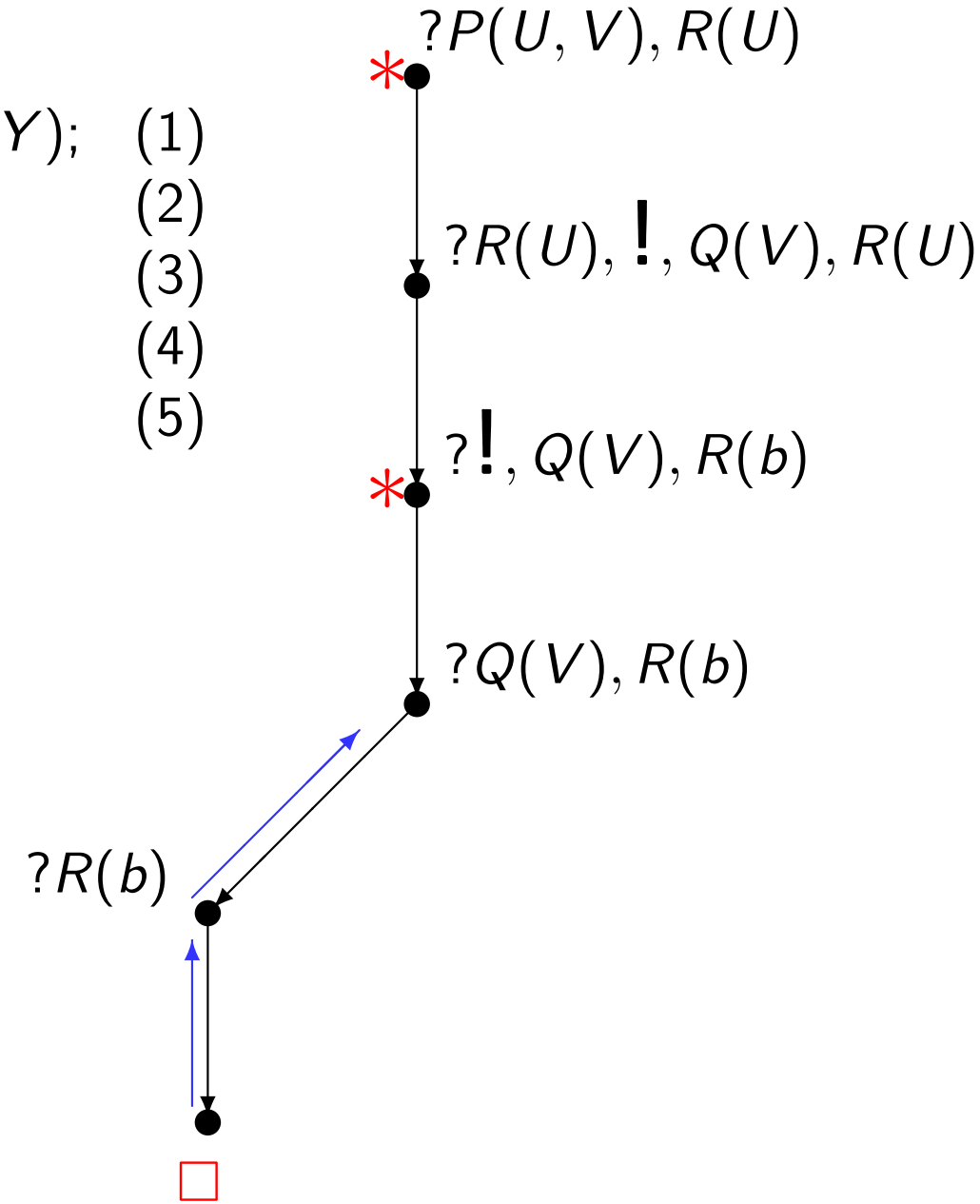
$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

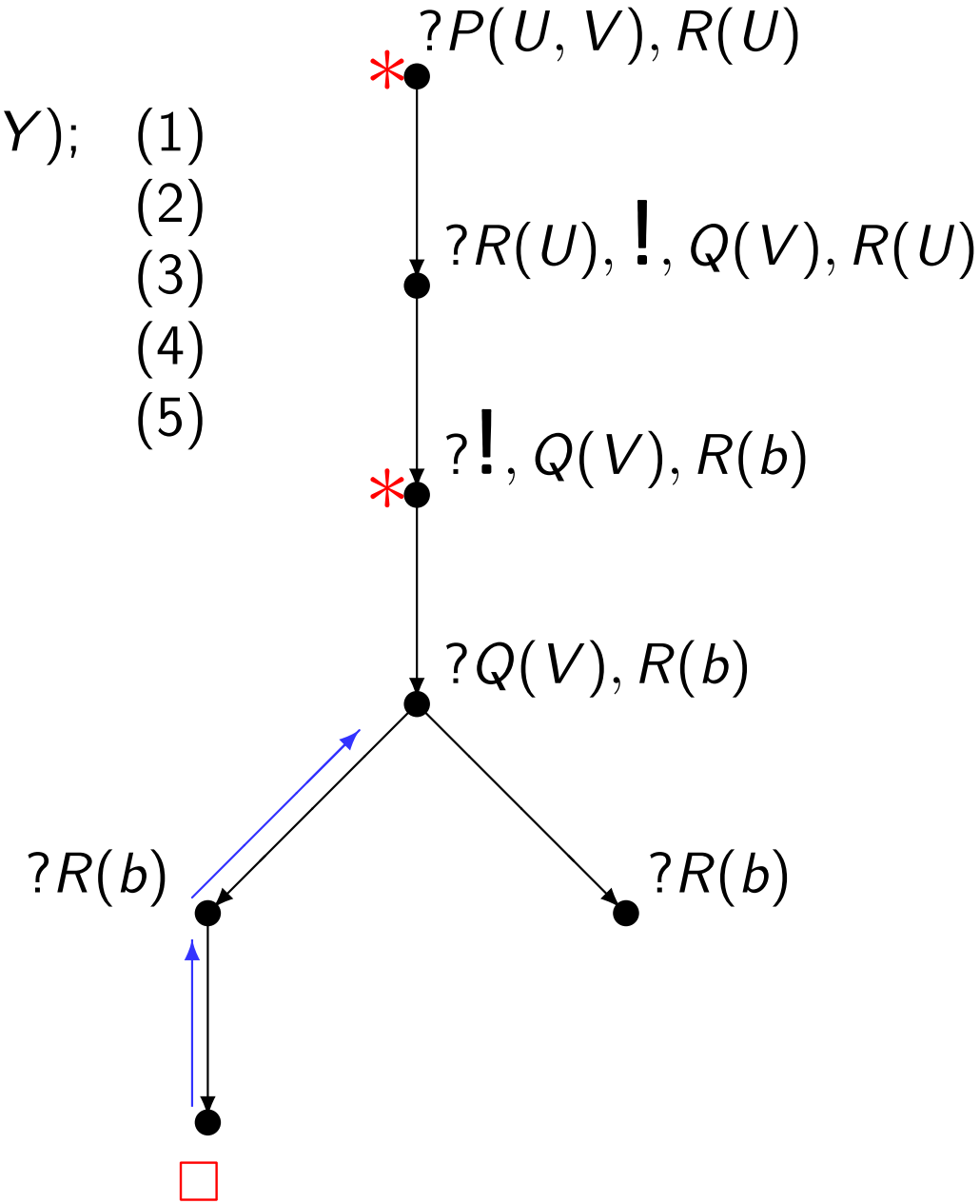
$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

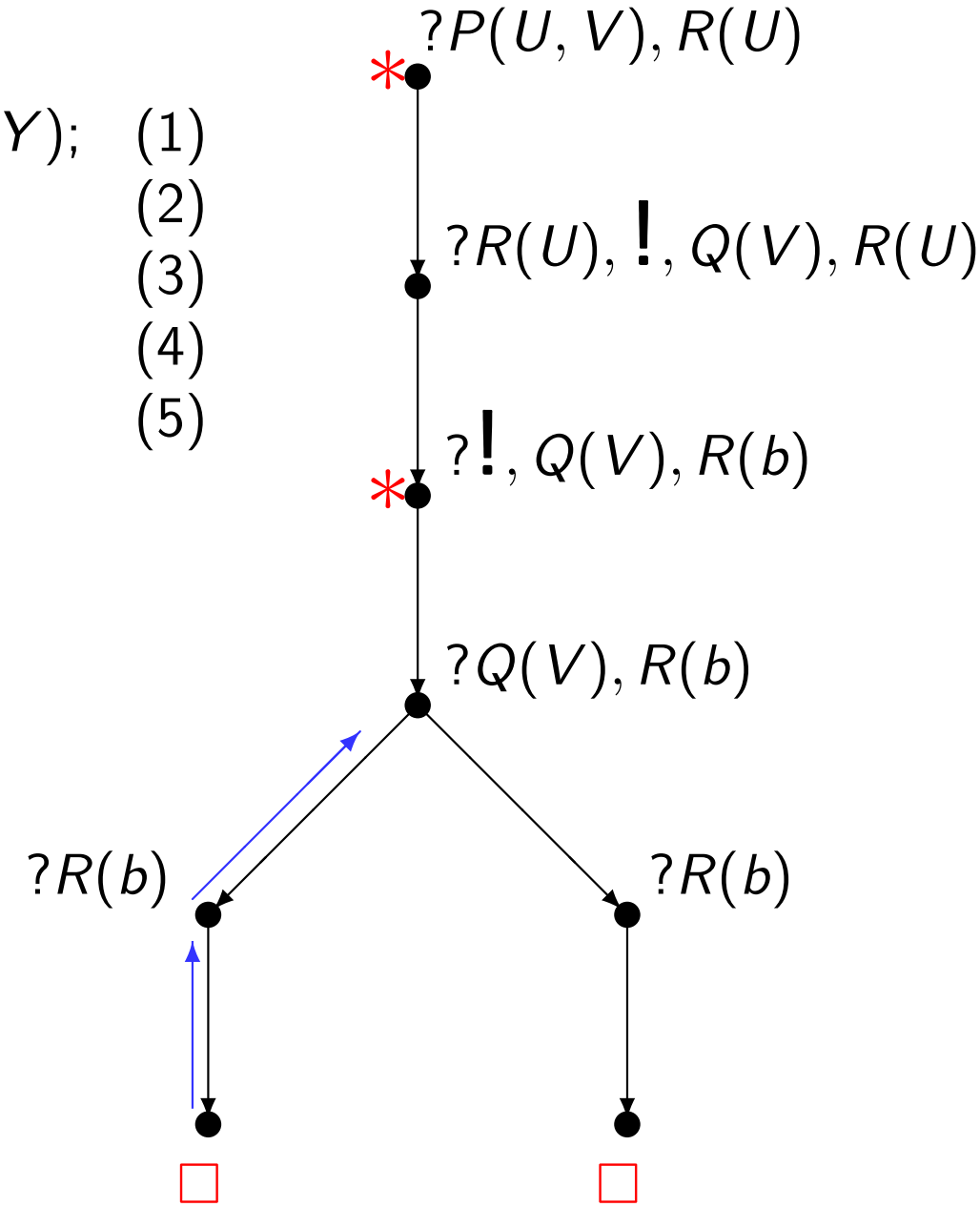
$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

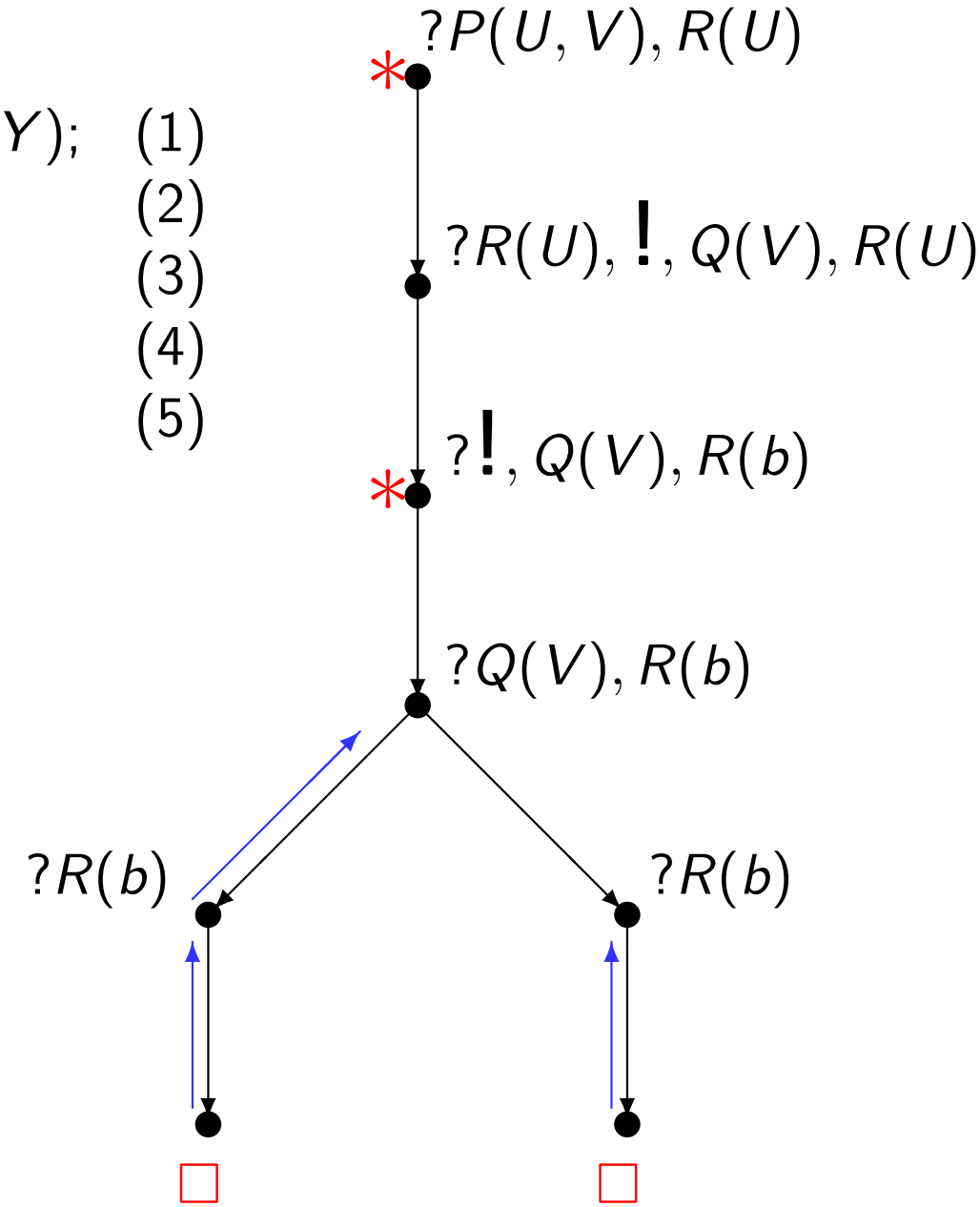
$$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y); \quad (1)$$
$$P(X, X) \leftarrow Q(X); \quad (2)$$
$$R(b) \leftarrow; \quad (3)$$
$$Q(c) \leftarrow; \quad (4)$$
$$Q(b) \leftarrow; \quad (5)$$



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

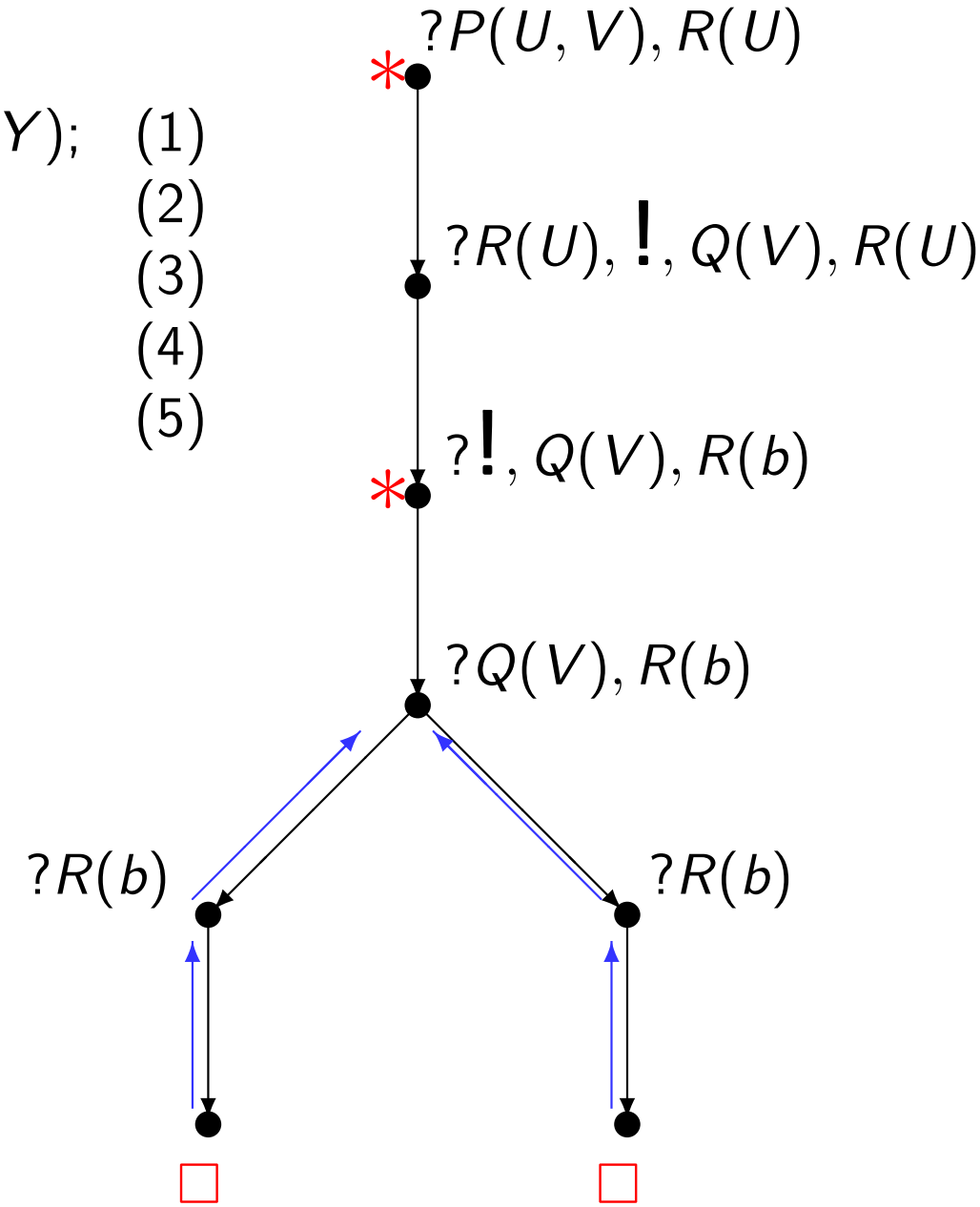
$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

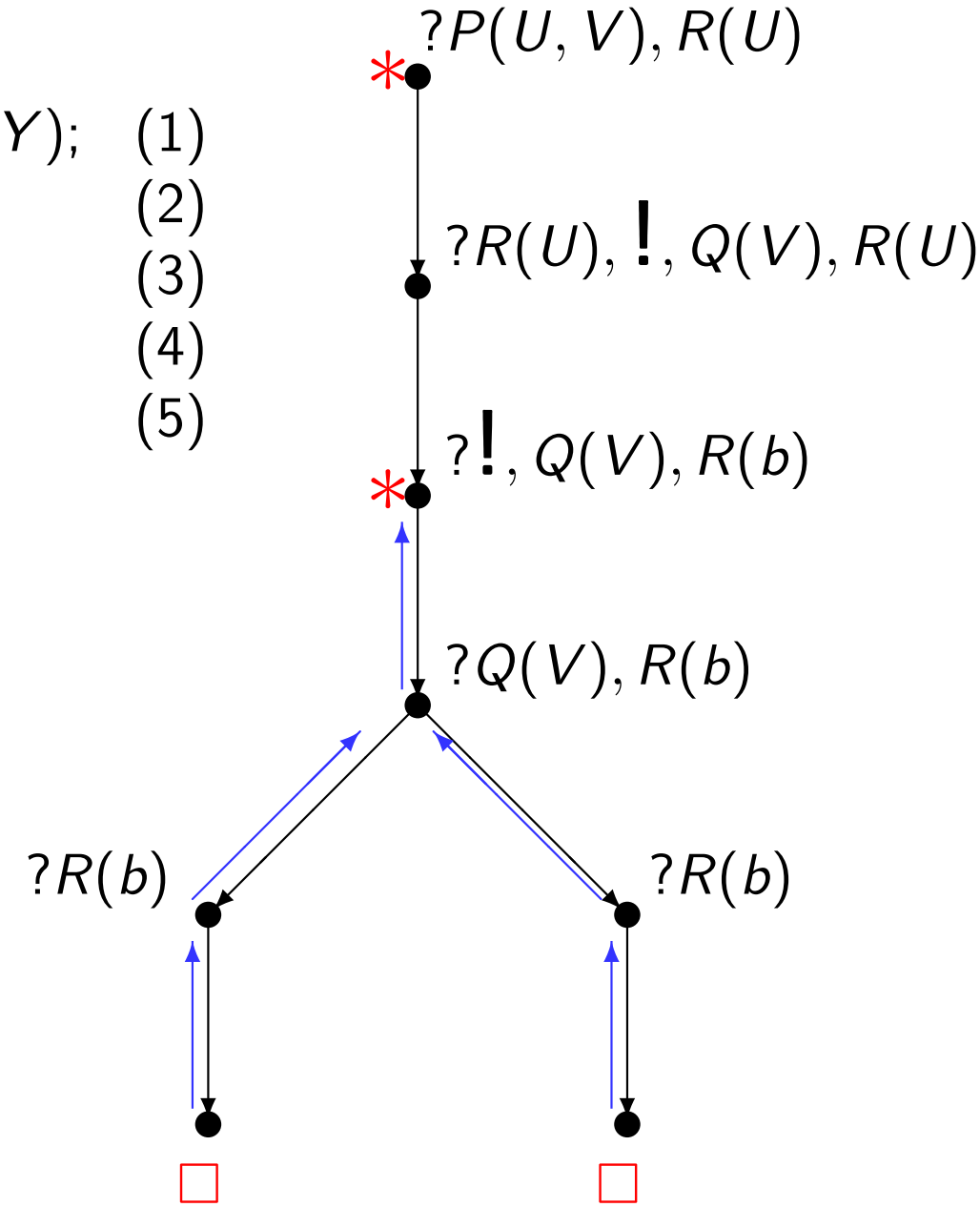
$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

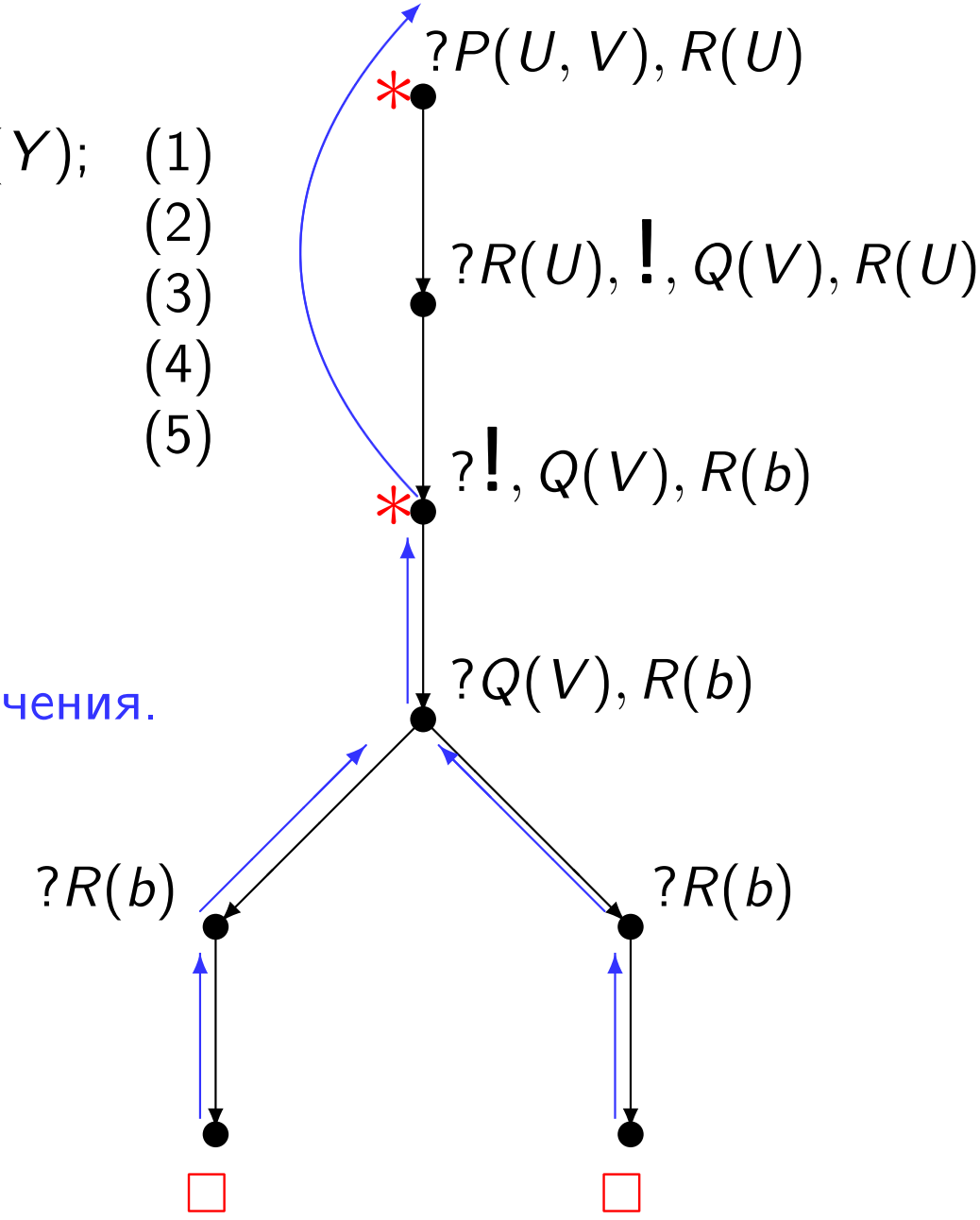
$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)



Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)



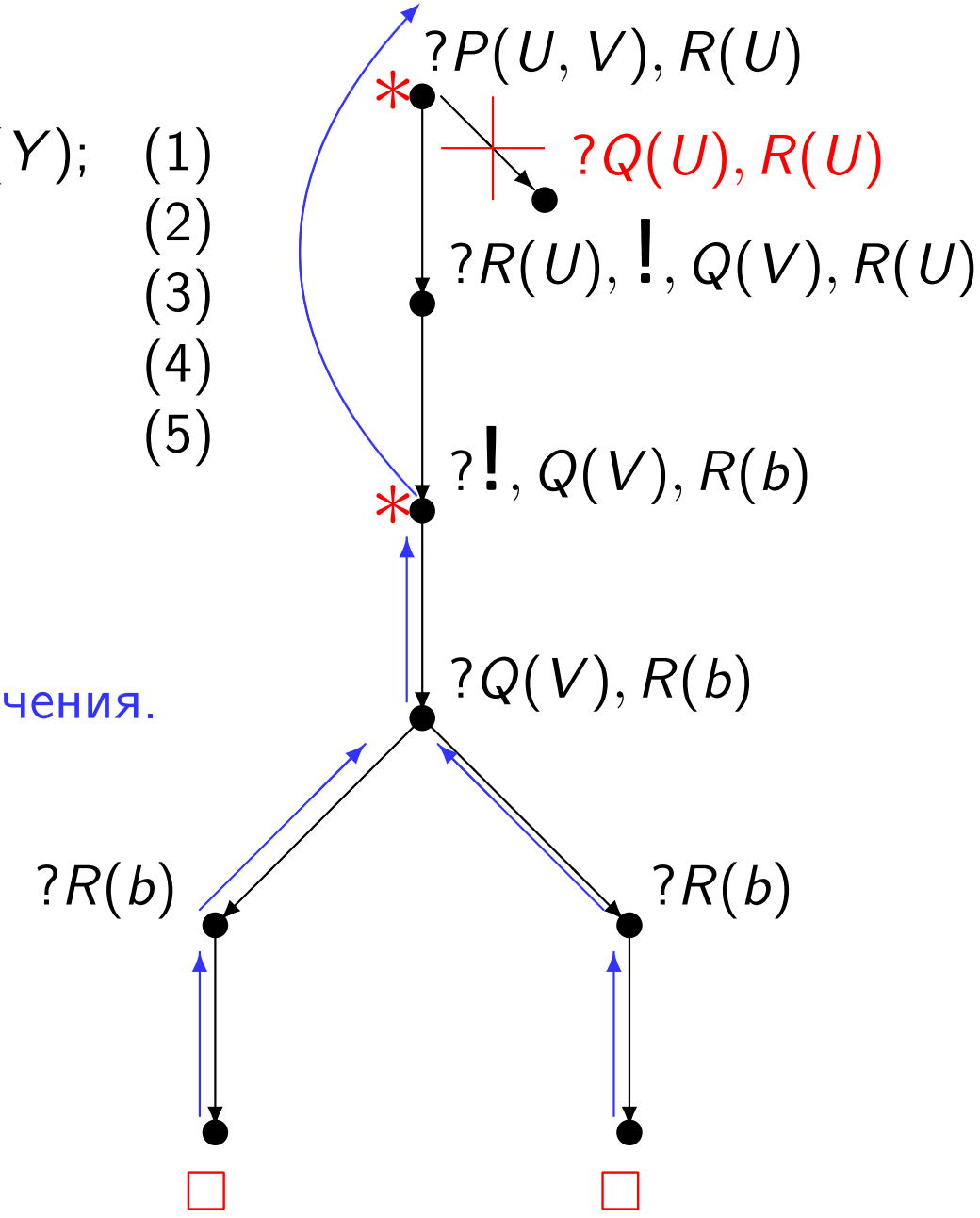
Сработал оператор отсечения.

Построение дерева вычислений завершено.

Дерево SLD-резолютивных вычислений

Программа $\mathcal{P}$:

$P(X, Y) \leftarrow R(X), !, Q(Y);$ (1)
$P(X, X) \leftarrow Q(X);$ (2)
$R(b) \leftarrow;$ (3)
$Q(c) \leftarrow;$ (4)
$Q(b) \leftarrow;$ (5)



Сработал оператор отсечения.

Построение дерева вычислений завершено.

При этом часть ветвей была отсечена.

ОПЕРАТОР ОТСЕЧЕНИЯ

Программное утверждение

$$A_0 \leftarrow A_1, \ldots, A_k, !, A_{k+1}, \ldots, A_n;$$

содержащее оператор отсечения можно прочитывать двояко:

- Чтобы решить задачу A_0 нужно найти **только первое** решение задач $A_1, \ldots, A_k$ и далее решать задачи $A_{k+1}, \ldots, A_n$. Если решение задач $A_1, \ldots, A_k$ найти не удается, то воспользоваться альтернативными процедурами решения задачи A_0.
- Чтобы решить задачу A_0 нужно проверить условия $A_1, \ldots, A_k$. Если эти условия выполнены, то приступить к решению задач $A_{k+1}, \ldots, A_n$ и не обращаться к другим вариантам решения задачи A_0. Если же эти условия не выполнены, то обратиться к альтернативным способам решения задачи A_0.

ОПЕРАТОР ОТСЕЧЕНИЯ

Таким образом, оператор отсечения позволяет удобно использовать в логическом программировании стандартные конструкции императивного программирования.

- **Ветвление.** S_0: **if** P **then** S_1 **else** S_2 **fi**

$$\mathcal{P}_{if-then-else}: \quad \begin{array}{l} S_0 \leftarrow P, !, S_1; \\ S_0 \leftarrow S_2; \end{array}$$

- **Итерация.** S_0: **while** P **do** S_1 **od**

$$\mathcal{P}_{while-do}: \quad \begin{array}{l} S_0 \leftarrow P, !, S_1, S_0; \\ S_0 \leftarrow; \end{array}$$

ОПЕРАТОР ОТСЕЧЕНИЯ

С введением в логические программы оператора отсечения теорема полноты операцинной семантики относительно декларативной семантики перестают быть справедливыми.

ОПЕРАТОР ОТСЕЧЕНИЯ

Программы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ вычисления гласных букв

$\mathcal{P}_1$

$Elem\_Vow(X, X \blacksquare Y) \leftarrow Vowel(X);$
$Elem\_Vow(X, Z \blacksquare Y) \leftarrow Elem\_Vow(X, Y);$
$Vowel(a) \leftarrow;$
$Vowel(e) \leftarrow;$
$Vowel(i) \leftarrow;$
$Vowel(o) \leftarrow;$
$Vowel(u) \leftarrow;$
$Vowel(y) \leftarrow;$

$\mathcal{P}_2$

$Elem\_Vow(X, X \blacksquare Y) \leftarrow Vowel(X), !;$
$Elem_Vow(X, Z \blacksquare Y) \leftarrow Elem\_Vow(X, Y);$
$Vowel(a) \leftarrow;$
$Vowel(e) \leftarrow;$
$Vowel(i) \leftarrow;$
$Vowel(o) \leftarrow;$
$Vowel(u) \leftarrow;$
$Vowel(y) \leftarrow;$

равносильны в декларативной семантике , и запрос

$$G :? Elem\_Vow(X, o \blacksquare n \blacksquare e \blacksquare \mathbf{nil})$$

для обеих программ имеет два правильных ответа $\theta_1 = \{X/o\}$ и $\theta_2 = \{X/e\}$.

ОПЕРАТОР ОТСЕЧЕНИЯ

Программы $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ вычисления гласных букв

$\mathcal{P}_1$

$Elem\_Vow(X, X \centerdot Y) \leftarrow Vowel(X);$
$Elem\_Vow(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem\_Vow(X, Y);$
$Vowel(a) \leftarrow;$
$Vowel(e) \leftarrow;$
$Vowel(i) \leftarrow;$
$Vowel(o) \leftarrow;$
$Vowel(u) \leftarrow;$
$Vowel(y) \leftarrow;$

$\mathcal{P}_2$

$Elem\_Vow(X, X \centerdot Y) \leftarrow Vowel(X), !;$
$Elem_Vow(X, Z \centerdot Y) \leftarrow Elem\_Vow(X, Y);$
$Vowel(a) \leftarrow;$
$Vowel(e) \leftarrow;$
$Vowel(i) \leftarrow;$
$Vowel(o) \leftarrow;$
$Vowel(u) \leftarrow;$
$Vowel(y) \leftarrow;$

но **неравносильны** в операционной семантике : запрос

$$G :? Elem\_Vow(X, o \centerdot n \centerdot e \centerdot \mathbf{nil})$$

к $\mathcal{P}_1$ вычисляет $\theta_1 = \{X/o\}$ и $\theta_2 = \{X/e\}$,
а тот же запрос к $\mathcal{P}_2$ вычисляет только $\theta_1 = \{X/o\}$.

ОПЕРАТОР ОТСЕЧЕНИЯ

С введением в логические программы оператора отсечения теорема полноты операцинной семантики относительно декларативной семантики перестает быть справедливыми.

Поэтому оператором отсечения ! нужно пользоваться очень осторожно.

А что еще полезного и удобного
можно встроить в логические программы?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 16.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 17.

Отрицание в логическом программировании. Оператор not. Встроенные предикаты и функции. Оператор вычисления значений. Модификация баз данных.

ОТРИЦАНИЕ В ЛОГИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Отрицание $\neg$ — это очень полезная логическая связка. Часто мы обращаемся с вопросами, используя отрицание.

Пример

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}: \quad & \text{птица}(\text{орел}) \leftarrow; \\
& \text{птица}(\text{воробей}) \leftarrow; \\
& \text{птица}(\text{пингвин}) \leftarrow; \\
& \text{летает}(\text{орел}) \leftarrow; \\
& \text{летает}(\text{воробей}) \leftarrow; \\
& \text{летает}(\text{самолет}) \leftarrow;
\end{aligned}
$$

Сформулируем вопрос: какая птица не летает?

$$G: ?\ \text{птица}(X), \neg\text{летает}(X)$$

Какой ответ мы ожидаем получить на этот запрос?

ОТРИЦАНИЕ В ЛОГИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Пример

С точки зрения декларативной семантики, для получения ответа на этот запрос нужно выяснить, выполняется ли логическое следование

$$\mathcal{P} \models \exists X(\text{птица}(X)\&\neg\text{летает}(X)),$$

$$\text{где } \mathcal{P} = \{\text{птица}(\text{орел}), \text{птица}(\text{воробей}), \text{птица}(\text{пингвин}), \text{летает}(\text{орел}), \text{летает}(\text{воробей}), \text{летает}(\text{самолет})\}$$

Оно не выполняется, т. к.

$$B_{\mathcal{P}} \models \mathcal{P},\ B_{\mathcal{P}} \not\models \exists X(\text{птица}(X)\&\neg\text{летает}(X)).$$

Значит, ответ на этот запрос должен быть отрицательным: такой птицы нет .

ОТРИЦАНИЕ В ЛОГИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Пример

Однако в обыденной жизни мы в таких случаях даем совсем другой ответ.

Обнаружив, что в нашей базе знаний $\mathcal{P}$
есть сведение $\text{птица}(\text{пингвин})$ и
нет никаких сведений о том, что $\text{летает}(\text{пингвин})$,
мы отвечаем:

«Насколько позволяет судить наша база знаний, нелетающая птица — это пингвин».

В юрипруденции такой подход к решению вопроса о виновности человек называется **презумпцией невиновности** :

в случае отсутствия свидетельств виновности
человек считается невиновным.

ОТРИЦАНИЕ В ЛОГИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Мы можем распространить принцип презумпции невиновности и на логические программы.

Допущение Замкнутости Мира

Пусть имеется некоторое непротиворечивое множество замкнутых формул Γ (например, хорновская логическая программа) и замкнутая формула φ (например, запрос или отдельная подцель).

Тогда формула $\neg\varphi$ является логическим следствием множества Γ в допущении замкнутости мира

$$\Gamma \models_{CWA} \neg\varphi,$$

если **неверно**, что φ логически следует из Γ, т. е. $\Gamma \not\models \varphi$.

Здесь CWA — аббревиатура Closed World Assumption.

ОТРИЦАНИЕ В ЛОГИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Суть Допущения Замкнутости Мира (CWA) состоит в том, что при извлечении CWA-логических следствий из базы знаний Γ ($\models_{CWA}$) нужно рассматривать не все модели для Γ, а только такую минимальную модель, в которой истинными являются одни лишь классические следствия ($\models$) из Γ.

Такая минимальная модель существует, вообще говоря, не всегда (например, если $\Gamma = \{A \vee B\}$).

Но в случае хорновских логических программ, минимальной моделью для программы $\mathcal{P}$ является наименьшая эрбрановская модель $\mathbf{M}_{\mathcal{P}}$.

ОТРИЦАНИЕ В ЛОГИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Обратимся к орнитологическому примеру.

Пример

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{\text{птица}(\text{орел}), \text{птица}(\text{воробей}), \text{птица}(\text{пингвин}),\\ &\quad \text{летает}(\text{орел}), \text{летает}(\text{воробей}), \text{летает}(\text{самолет})\}\end{aligned}$$

$$\varphi = \text{птица}(\text{пингвин}) \;\&\; \neg\text{летает}(\text{пингвин})$$

Тогда

$\mathcal{P} \models_{CWA} \text{птица}(\text{пингвин})$, поскольку $\mathbf{M}_{\mathcal{P}} \models \text{птица}(\text{пингвин})$,

$\mathcal{P} \models_{CWA} \neg\text{летает}(\text{пингвин})$, поскольку $\mathbf{M}_{\mathcal{P}} \not\models \text{летает}(\text{пингвин})$.

Значит, $\mathcal{P} \models_{CWA} \text{птица}(\text{пингвин}) \;\&\; \neg\text{летает}(\text{пингвин})$.

ОПЕРАТОР not

Итак, теперь к логическим программам можно обращаться с запросами, содержащими отрицания подцелей, и декларативная семантика умеет разумно обращаться с таким отрицательными подцелями.

Нам остается научить этому обращению компьютер, т. е. ввести в операционную семантику правила для обработки отрицательных подцелей.

Однако здесь нас ожидает неприятный сюрприз.

ОПЕРАТОР not

Предположим, что имеется запрос $G : ?\neg C_0$ к программе $\mathcal{P}$.

Чтобы получить утвердительный ответ на запрос G (т. е. доказать, что $\mathcal{P} \models_{CWA} \neg C_0$), интерпретатор должен проверить, что $\mathbf{M}_{\mathcal{P}} \not\models C_0$.

Для этого интерпретатор должен убедиться, что запрос $G' : ?C_0$ к программе $\mathcal{P}$ **не имеет ни одного успешного вычисления**.

Но эта задача является алгоритмически неразрешимой (почему?).
Да потому, что к ней сводится проблема останова машин Тьюринга.

Следовательно, никакой интерпретатор логических программ не может гарантировать получение утвердительного ответа на запрос $G : ?\neg C_0$ даже в том случае, если этот ответ существует.

ОПЕРАТОР not

Алгоритмическая неразрешимость проблемы существования (отсутствия) успешного вычисления логических программ — это непреодолимое препятствие на пути создания такой операционной семантики, которая была бы адекватна декларативной семантике в рамках Допущения Замкнутости Мира.

Можно лишь построить такой интерпретатор (операционной семантики), который как можно лучше соответствует CWA при обращении с отрицательными подцелями $\neg C_0$.

Для этого в язык логического программирования был введен специальный (встроенный) оператор **not**.

ОПЕРАТОР not

Аргументами оператора **not** являются атомы.

Для вычисления ответов на запрос ? **not**(C_0) вводится правило SLDNF-резолюции (Not as Failure), которое определяется следующим образом.

Правило SLDNF-резолюции

Пусть имеется запрос G_0 : ? **not**$(C_0), C_1, \ldots, C_n$ к программе $\mathcal{P}$.

Для вычисления SLDNF-резольвенты G_1

1. формируется запрос G' : ? C_0 к программе $\mathcal{P}$;
2. проводится построение (обход) дерева вычислений T запроса G' : ? C_0;
3. в зависимости от устройства дерева T возможен один из трех исходов.

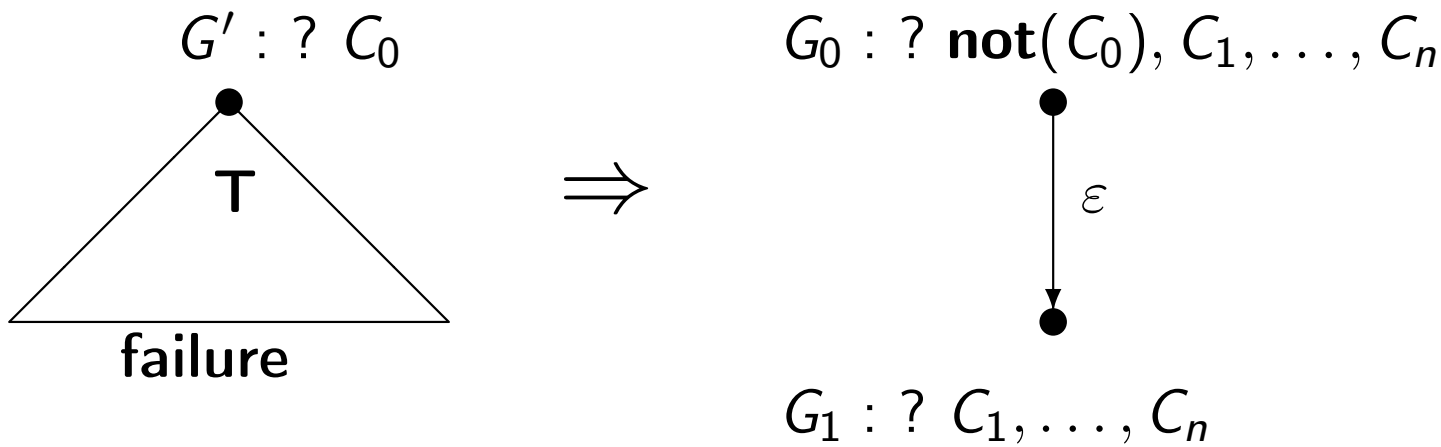
ОПЕРАТОР not

Правило SLDNF-резолюции

Вариант 1: **Успех.**

Дерево T конечно, и все его ветви (SLD-резолютивные вычисления) являются тупиковыми.

Тогда запрос $G_0 : ?\ \mathbf{not}(C_0), C_1, \ldots, C_n$ имеет SLDNF-резольвенту $G_1 = ?\ C_1, \ldots, C_n$, которая получается с использованием пустой подстановки ε.



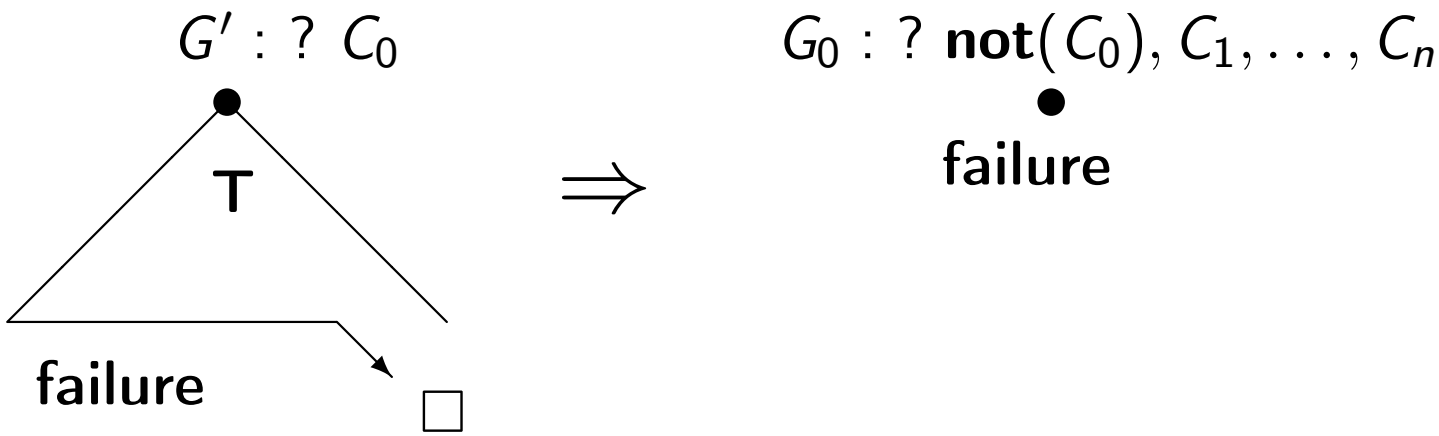
ОПЕРАТОР not

Операционная семантика оператор not

Вариант 2: **Неудача.**

При построении (обходе) дерева T было обнаружено успешное вычисление.

Тогда запрос $G_0 : ?\ \mathbf{not}(C_0), C_1, \ldots, C_n$ не имеет SLDNF-резольвент, и вычисление этого запроса является тупиковым .



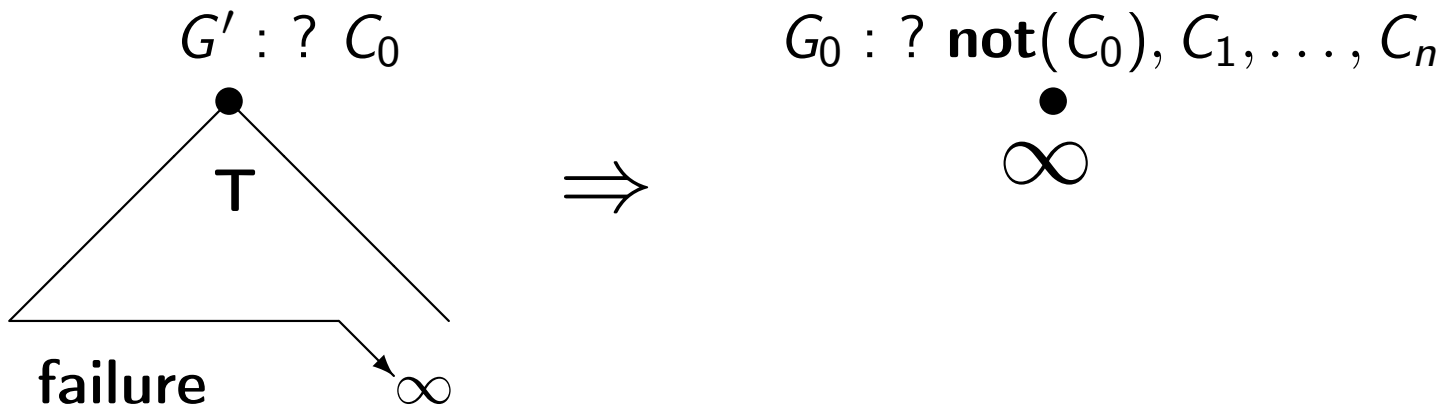
ОПЕРАТОР not

Операционная семантика оператор not

Вариант 3: **Бесконечное вычисление.**

Дерево T бесконечно и при его построении (обходе) не было обнаружено успешных вычислений.

Тогда запрос $G_0 : ?\ \mathbf{not}(C_0), C_1, \ldots, C_n$ не имеет SLDNF-резольвент, и вычисление этого запроса является бесконечным («сингулярная бесконечность»).



ОПЕРАТОР not

Операционная семантика оператор not

Вариант 3: **Бесконечное вычисление.**

Дерево T бесконечно и при его построении (обходе) не было обнаружено успешных вычислений.

Тогда запрос $G_0 : ?\ \mathbf{not}(C_0), C_1, \ldots, C_n$ не имеет SLDNF-резольвент, и вычисление этого запроса является бесконечным («сингулярная бесконечность»).

Условие существования бесконечного вычисления запроса $\mathbf{not}(C_0)$ описано не вполне строго, поскольку обнаружение успешного вычисления существенно зависит от стратегии обхода дерева SLD-резолютивных вычислений. Так, например, стандартная стратегия обхода в глубину может не обнаружить существующего успешного вычисления (почему?).

ОПЕРАТОР not

Теорема (корректности SLDNF-резолюции)

Если запрос G : ? **not**(C_0) к хорновской логической программе $\mathcal{P}$ имеет успешное SLDNF-резолютивное вычисление, то $\mathcal{P} \models_{CWA} \neg\exists\overline{y}\ C_0$.

Доказательство

Самостоятельно .

А вот обратное утверждение (теорема полноты) для SLDNF-резолютивного вычисления будет уже неверно.

ОПЕРАТОР not

Пример.

Рассмотрим программу поиска всех тех букв X слова L', которые не содержатся в слове L''.

$$\begin{array}{lrcl} \mathcal{P}: & S(X, L', L'') & \leftarrow & E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L'')); \\ & E(X, X \,.\, L) & \leftarrow & ; \\ & E(X, Y \,.\, L) & \leftarrow & E(X, L); \end{array}$$

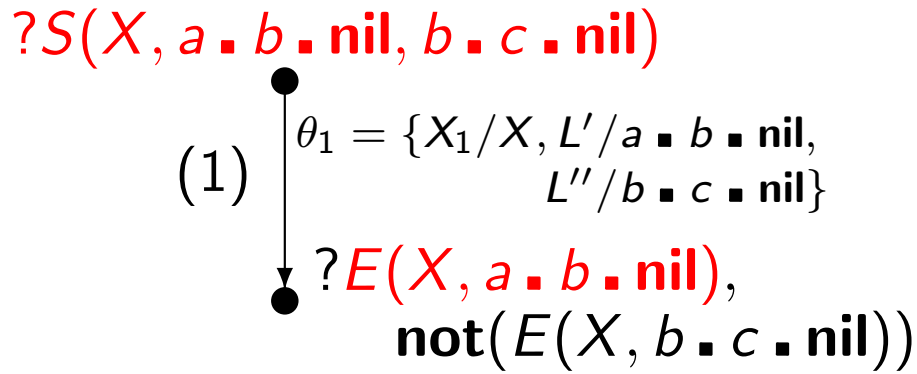
и обратимся к ней с запросом

$$G_0 : ?\ S(X, a \,.\, b \,.\, \mathbf{nil}, b \,.\, c \,.\, \mathbf{nil}).$$

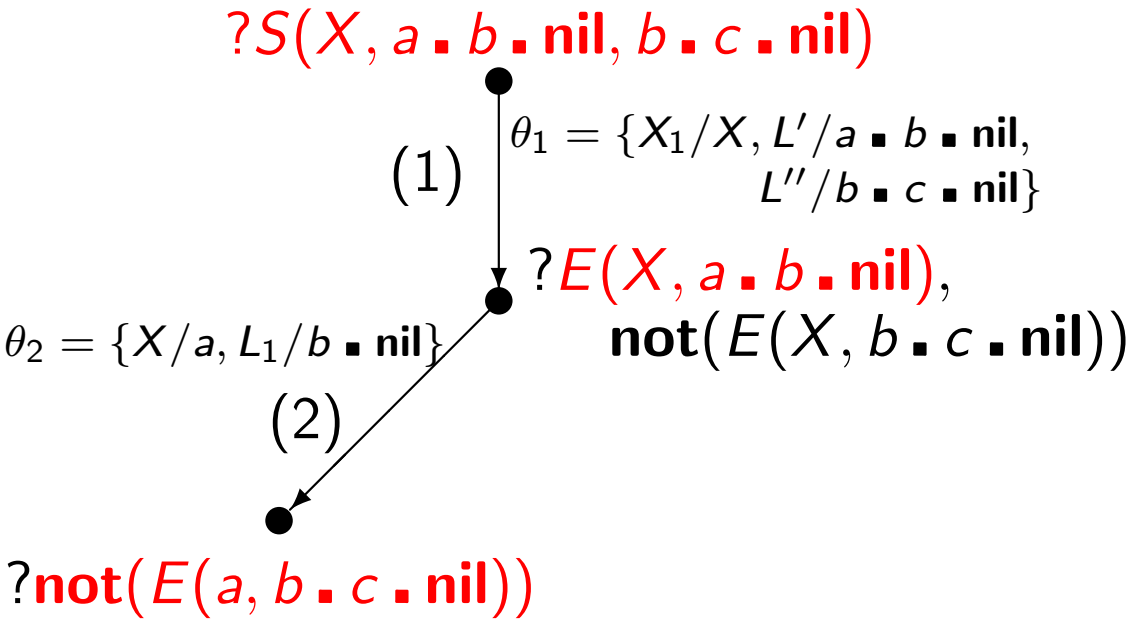
$$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L'')); \quad (1)$$
$$E(X, X \centerdot L) \leftarrow; \quad (2)$$
$$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L); \quad (3)$$

$$?S(X, a \centerdot b \centerdot \mathbf{nil}, b \centerdot c \centerdot \mathbf{nil})$$

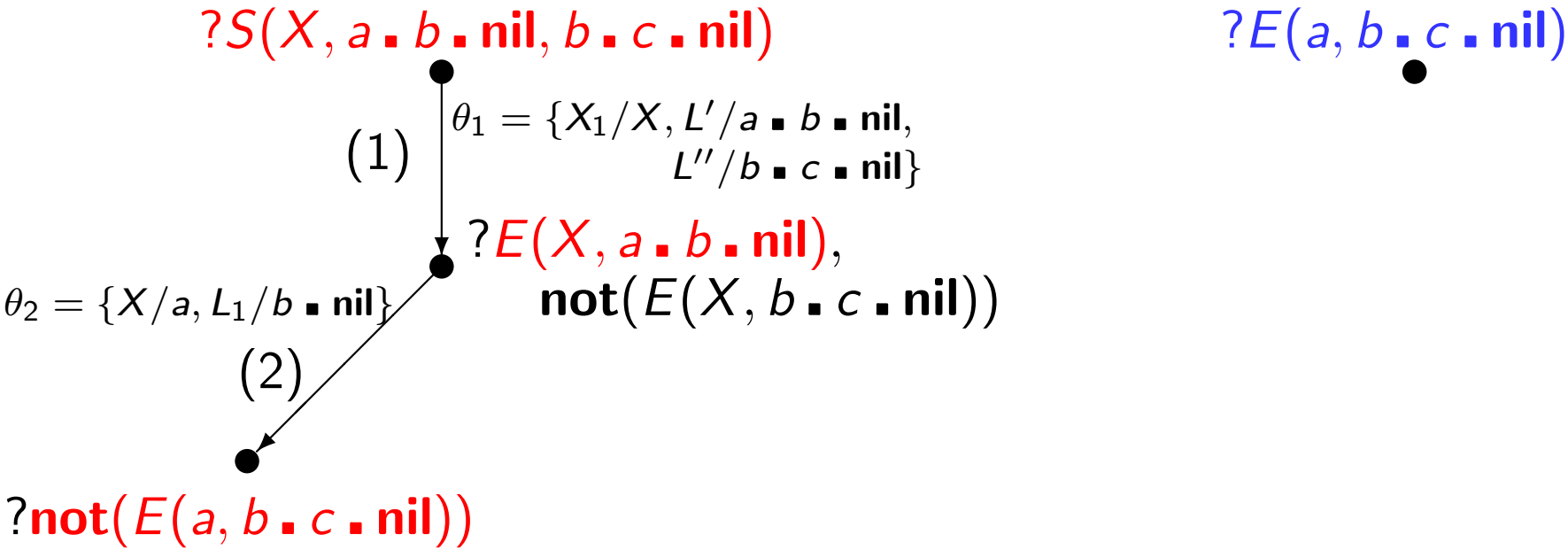
$$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L'')); \quad (1)$$
$$E(X, X \centerdot L) \leftarrow; \quad (2)$$
$$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L); \quad (3)$$



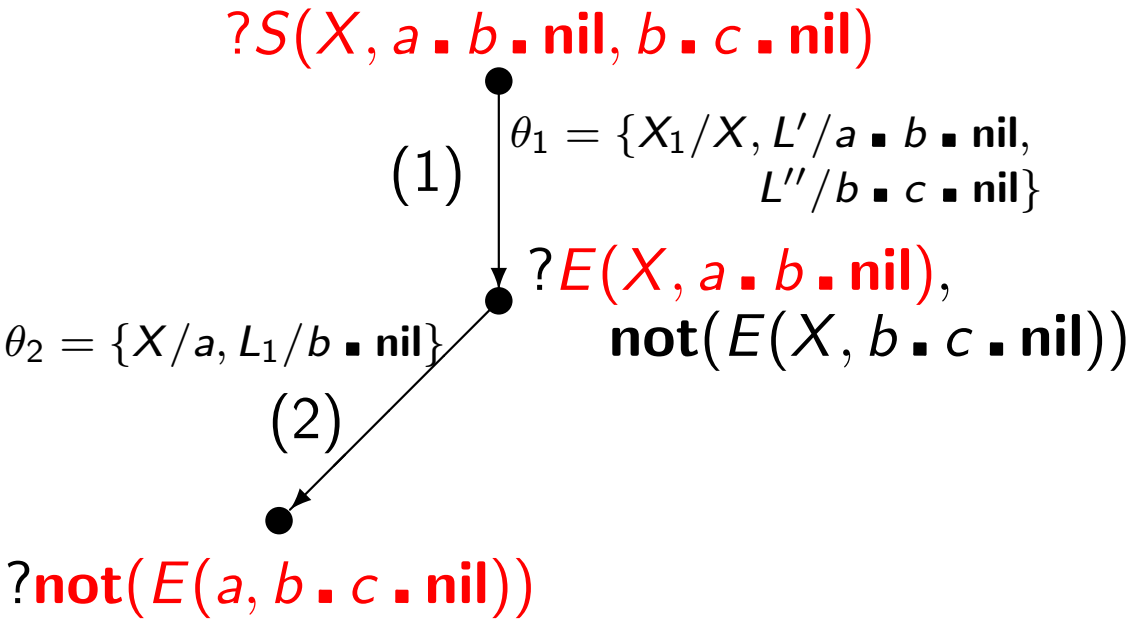
$$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L'')); \quad (1)$$
$$E(X, X \centerdot L) \leftarrow; \quad (2)$$
$$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L); \quad (3)$$

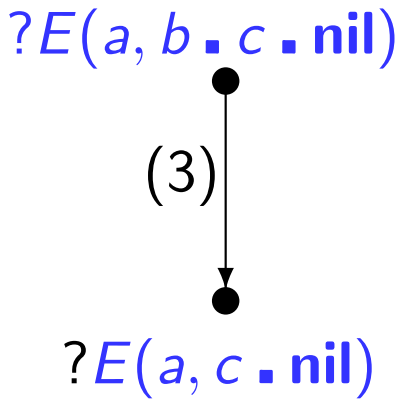


$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L)$; (3)

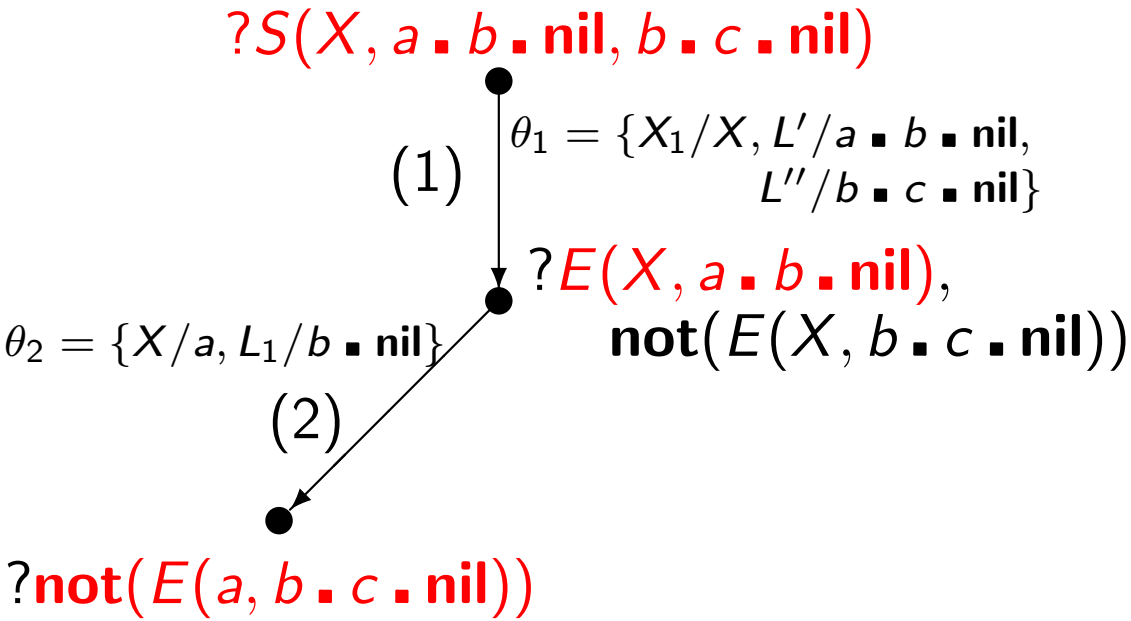


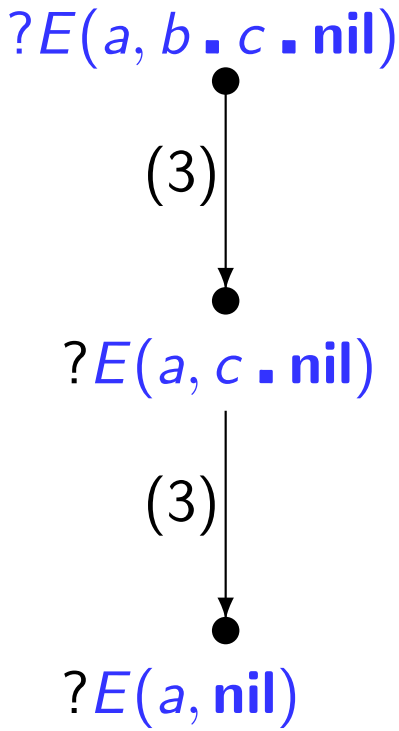
$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



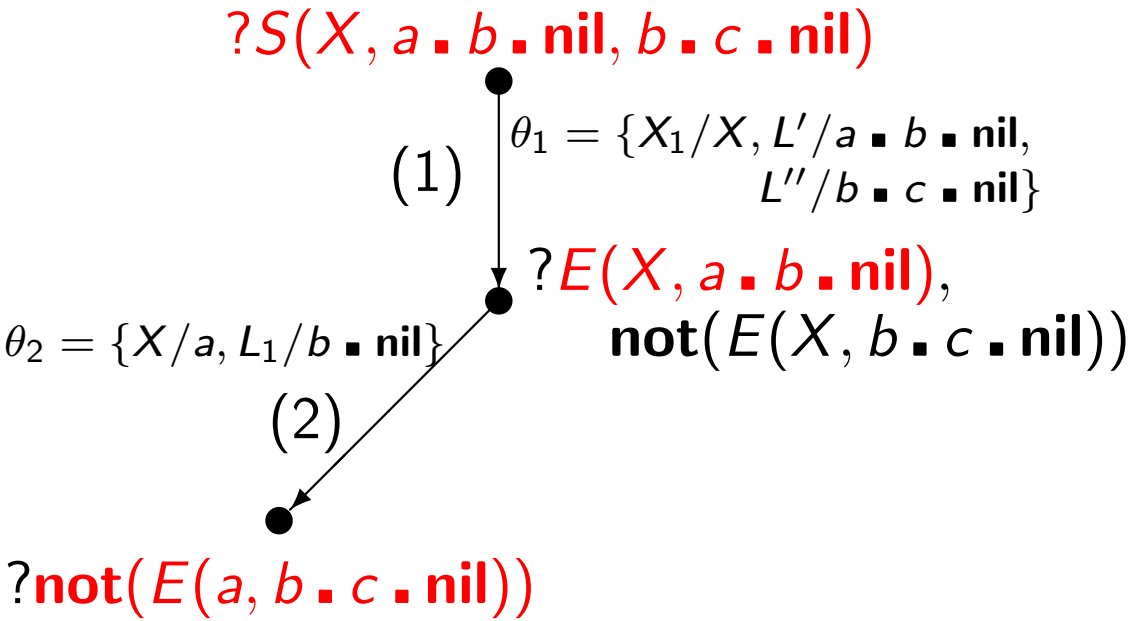


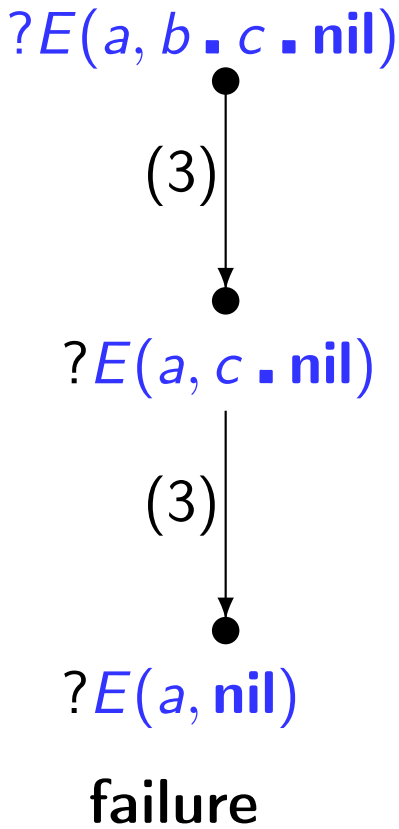
$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L);$ (3)



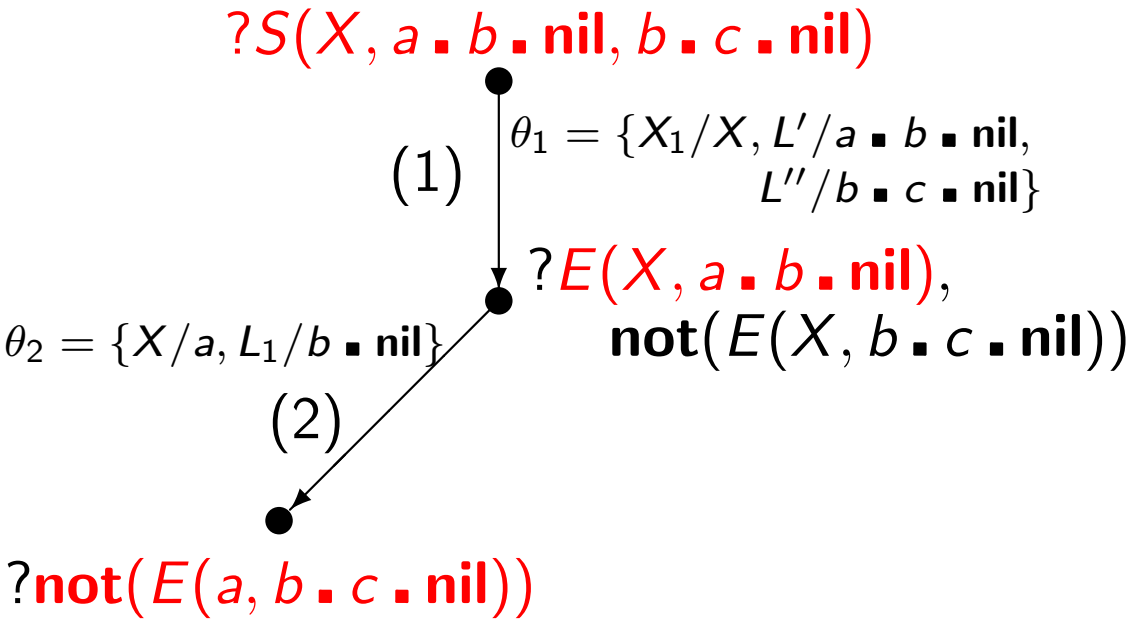


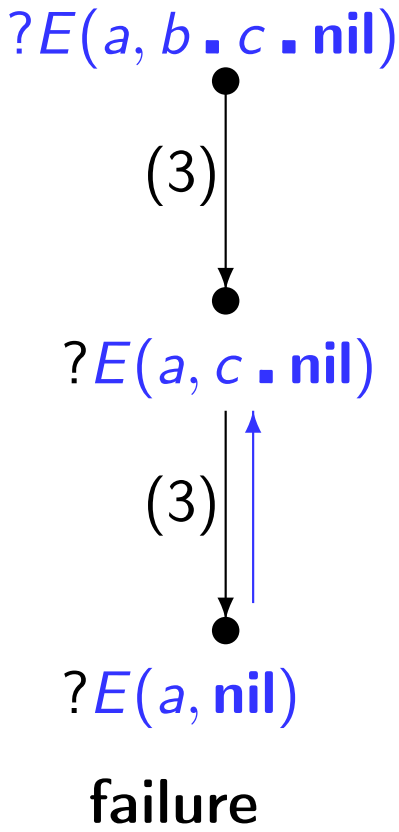
$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L);$ (3)



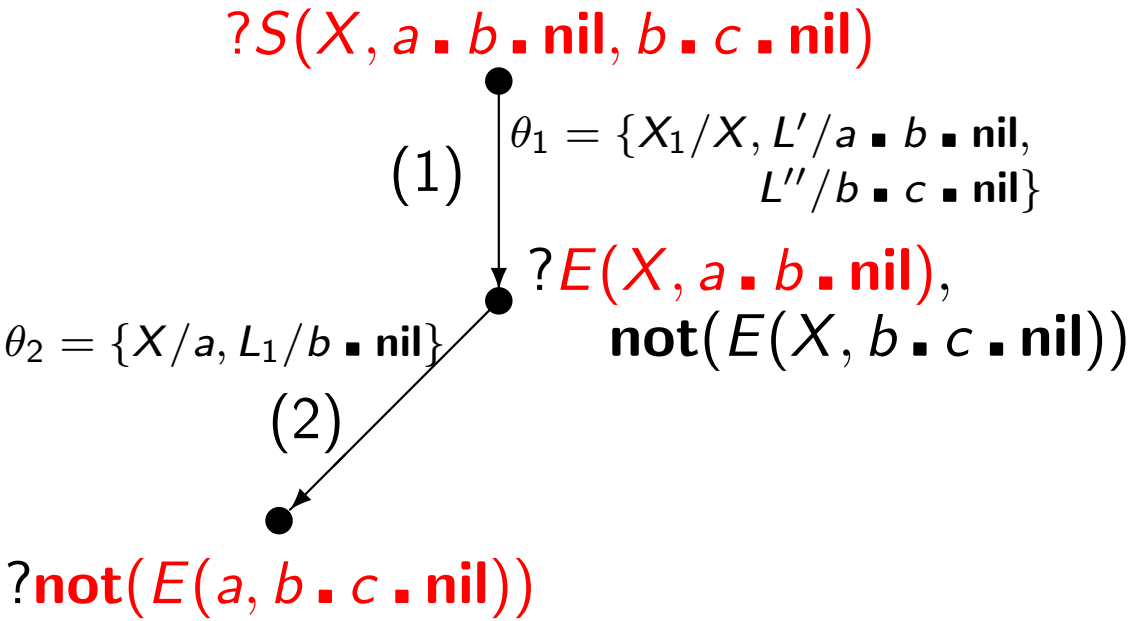


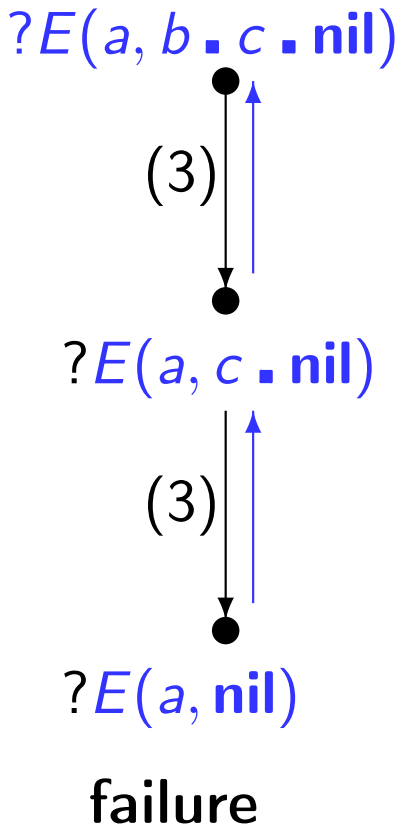
$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L);$ (3)



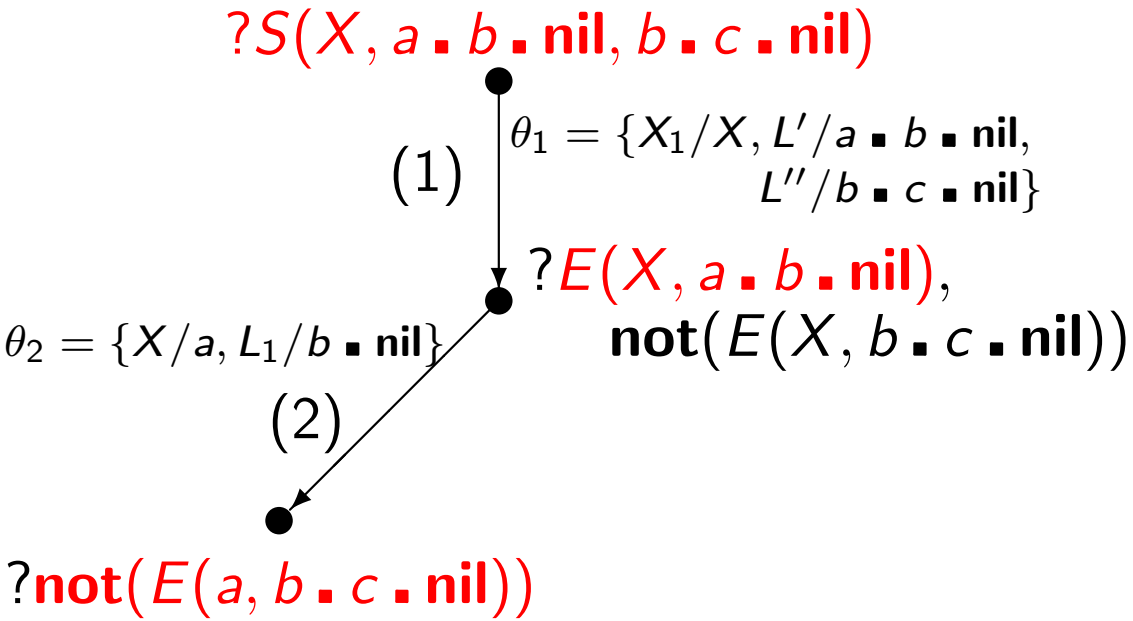


$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L);$ (3)

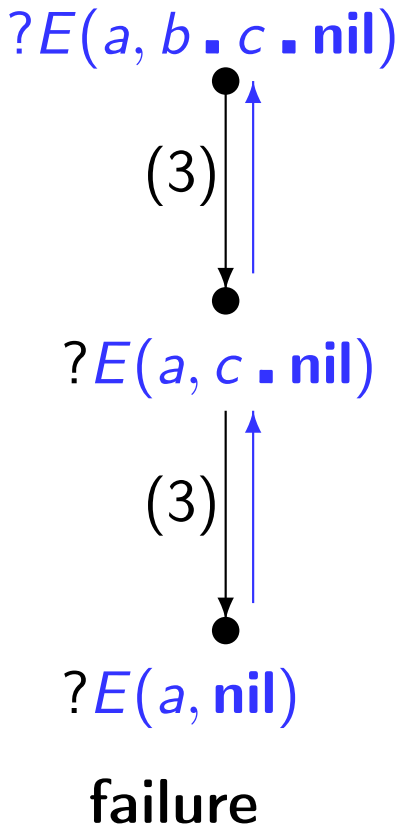




$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L);$ (3)

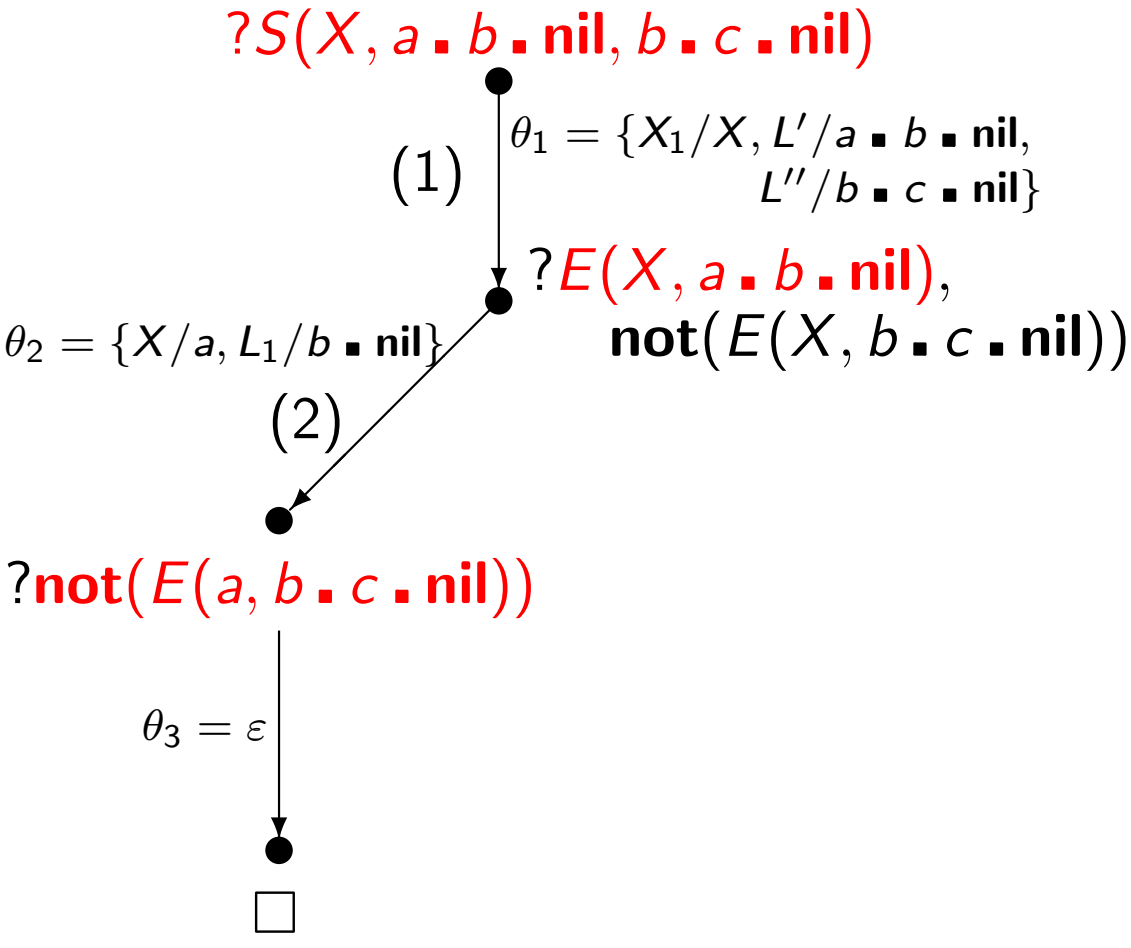


Успех



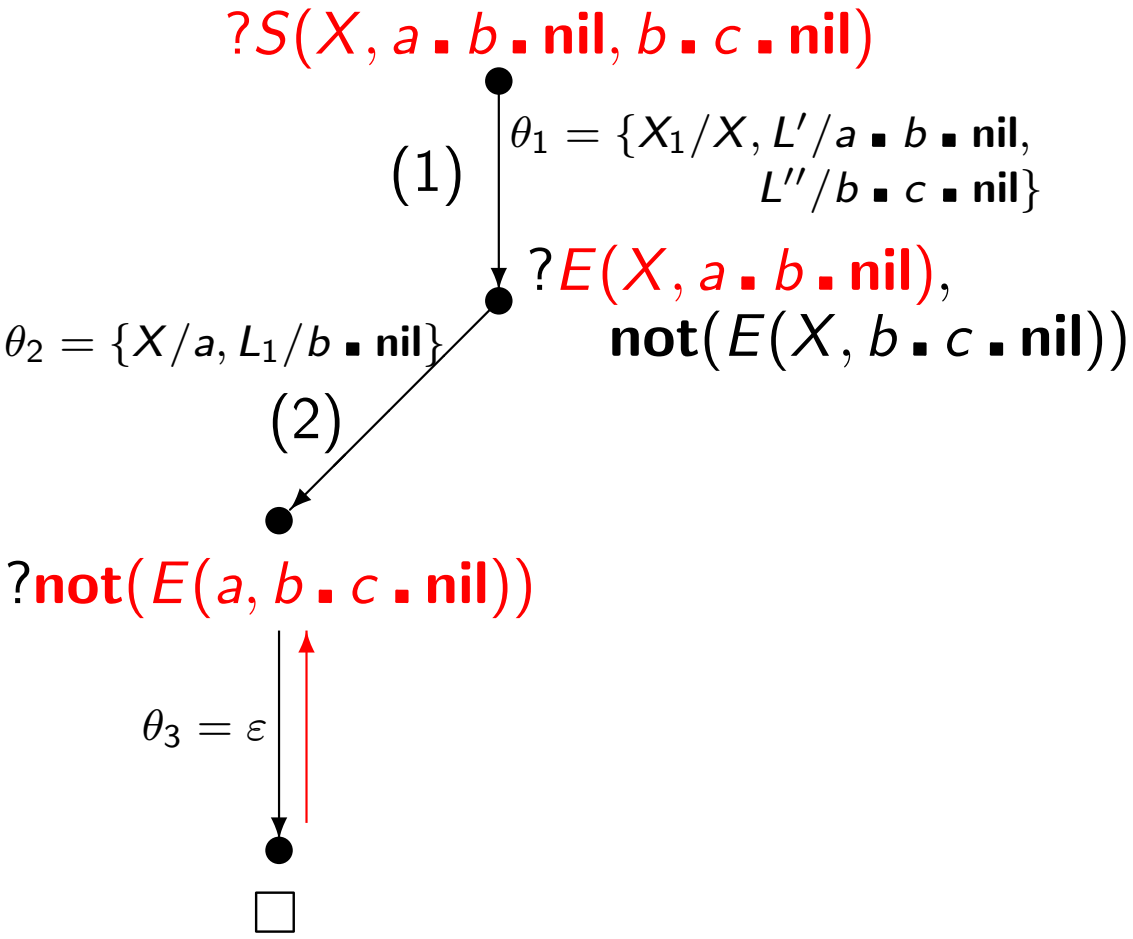
failure

$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



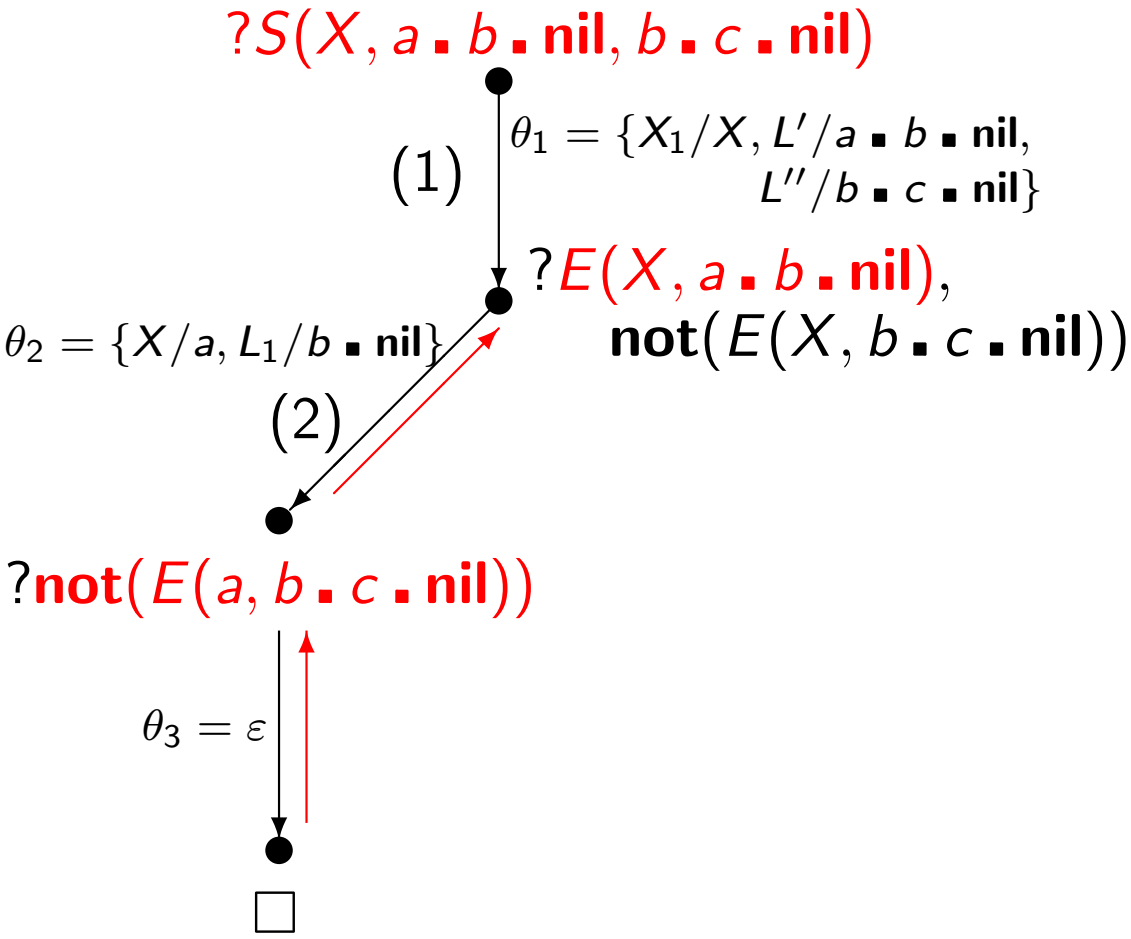
Ответ: $\{X/a\}$

$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



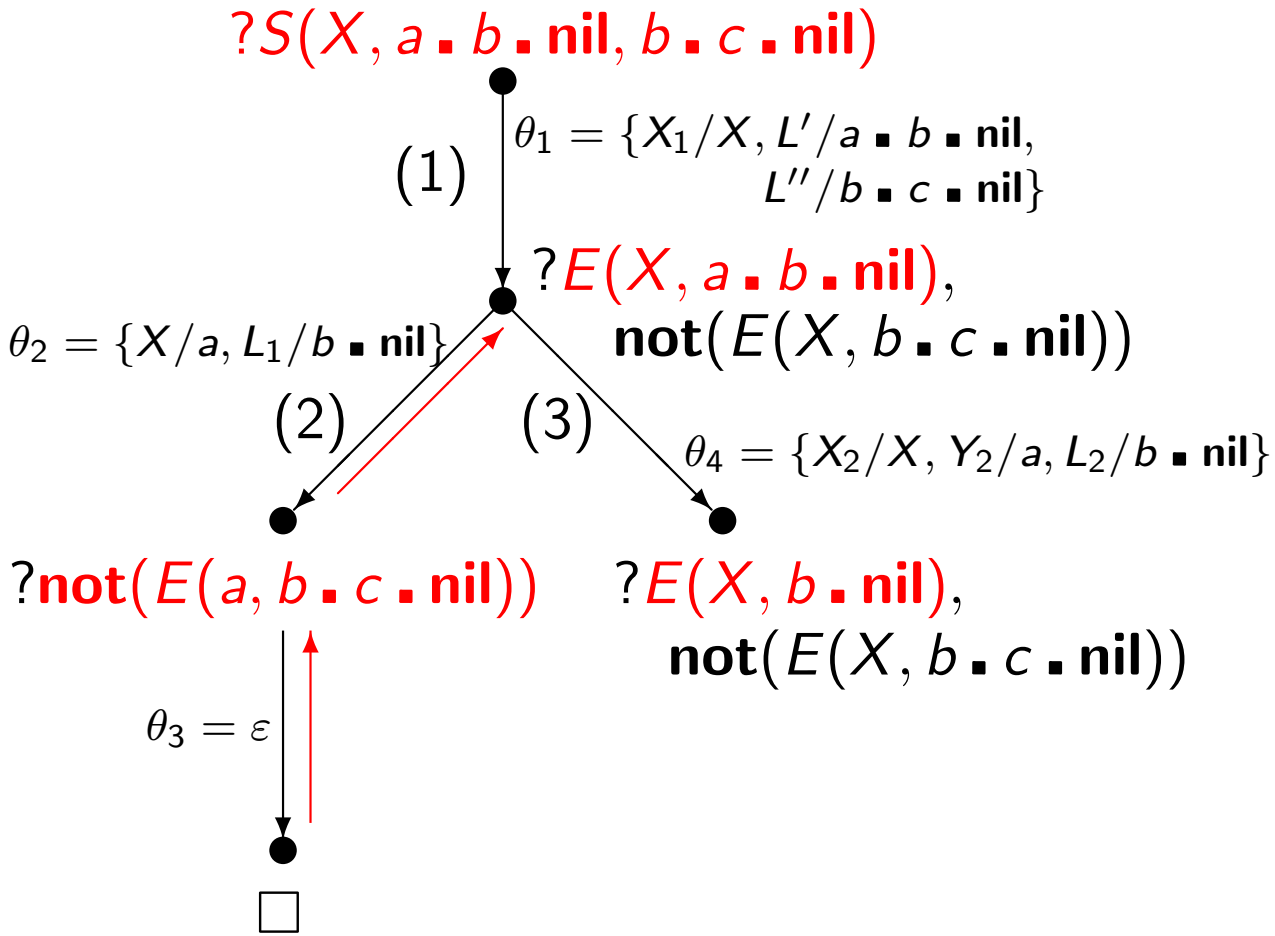
Ответ: $\{X/a\}$

$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



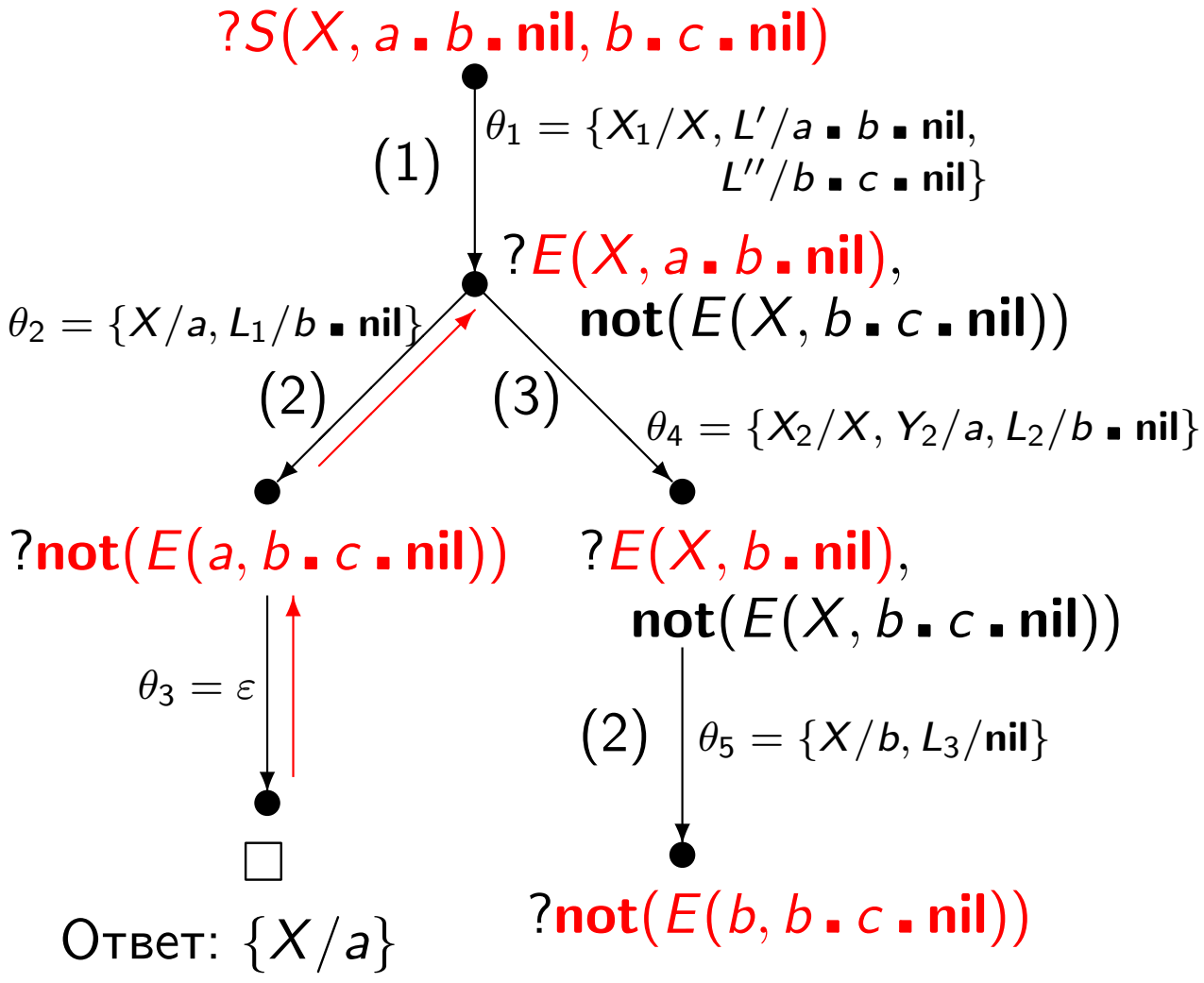
Ответ: $\{X/a\}$

$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L);$ (3)



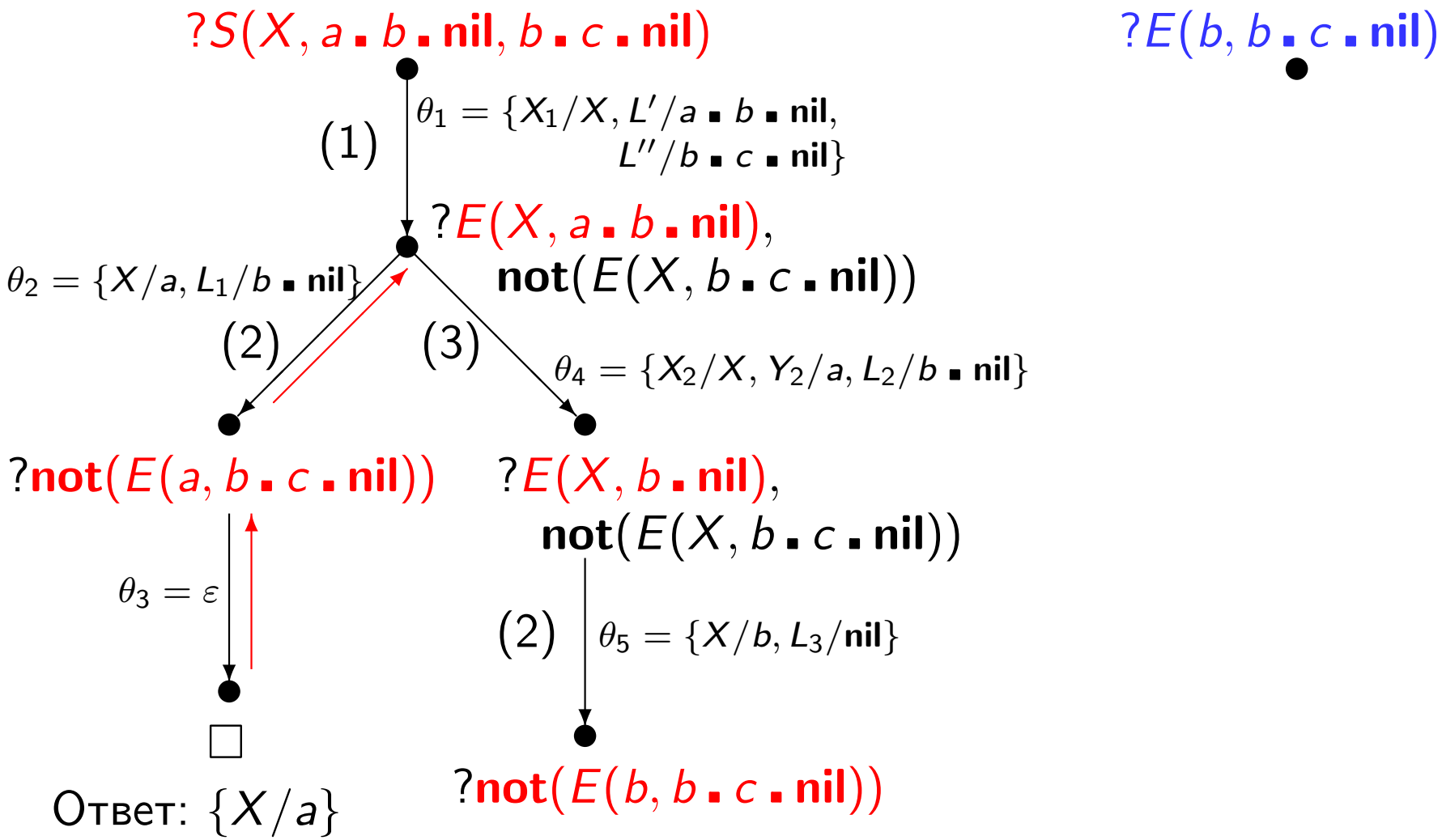
Ответ: $\{X/a\}$

$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L)$; (3)

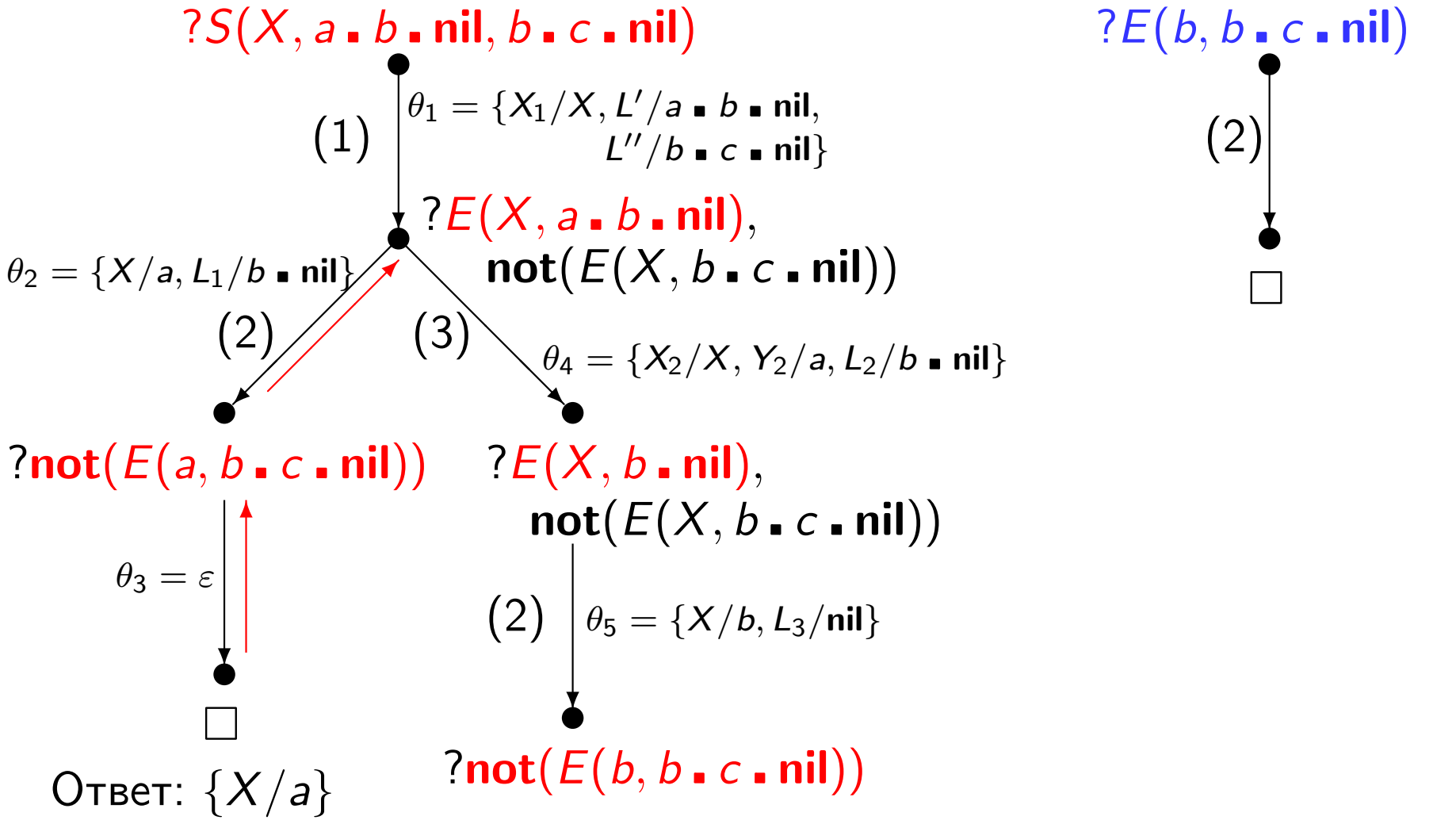


Ответ: $\{X/a\}$

$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



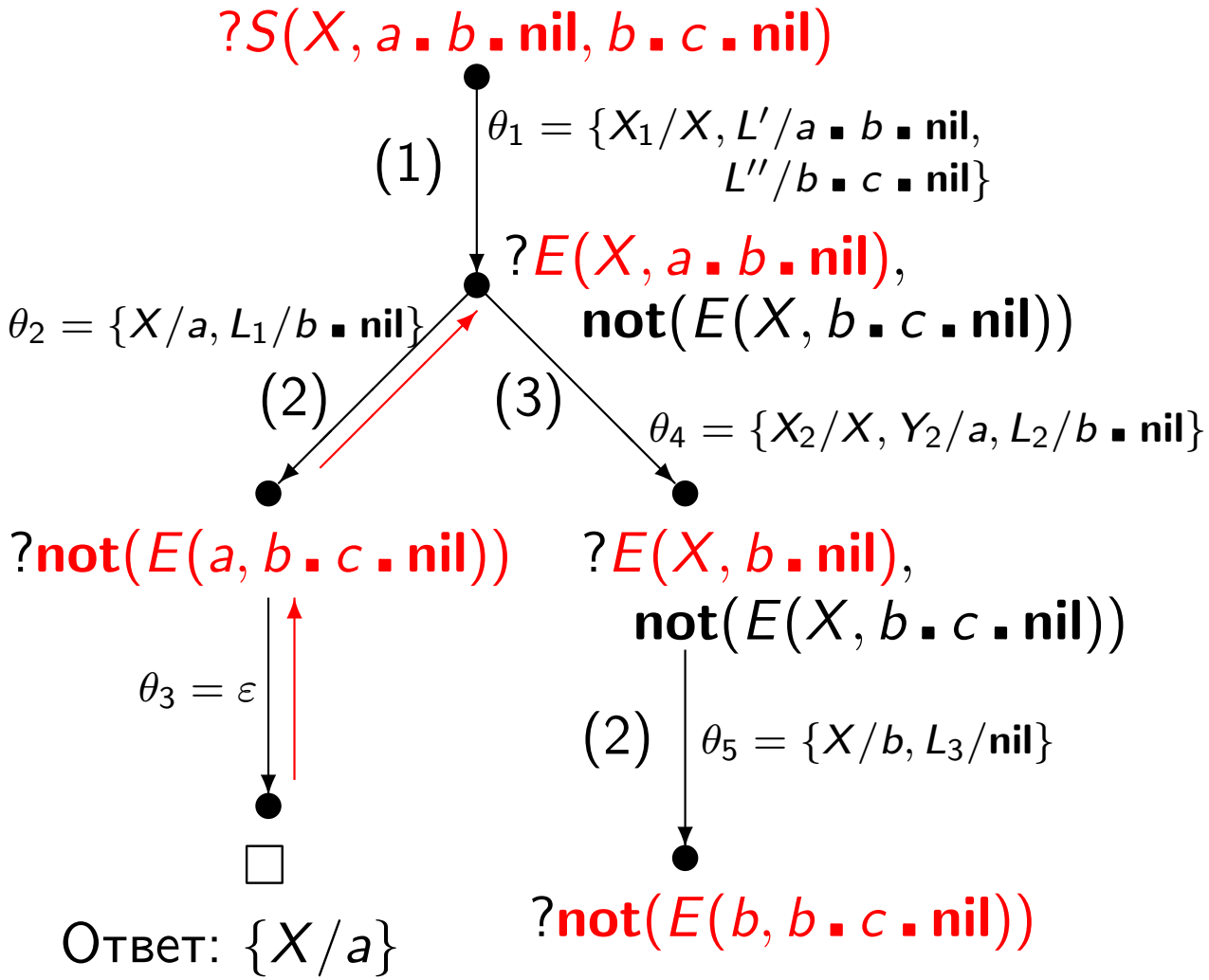
$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



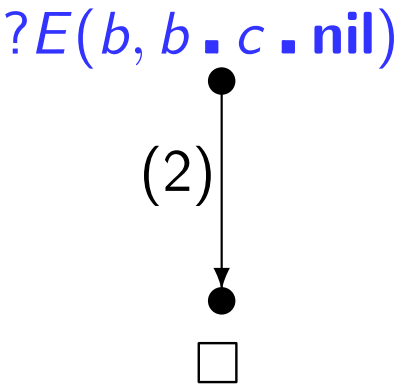
Ответ: $\{X/a\}$

$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L);$ (3)

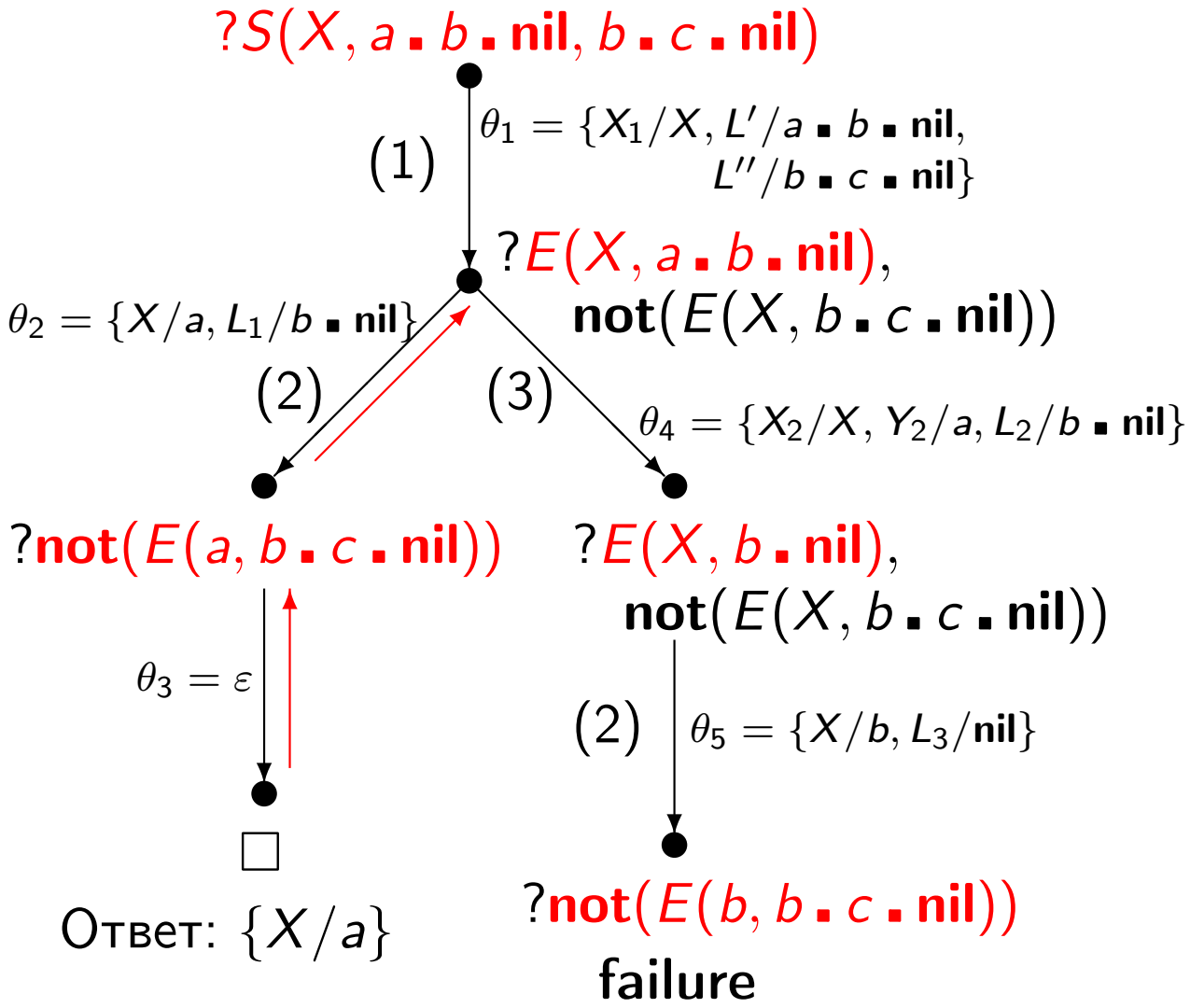
Неудача



Ответ: $\{X/a\}$

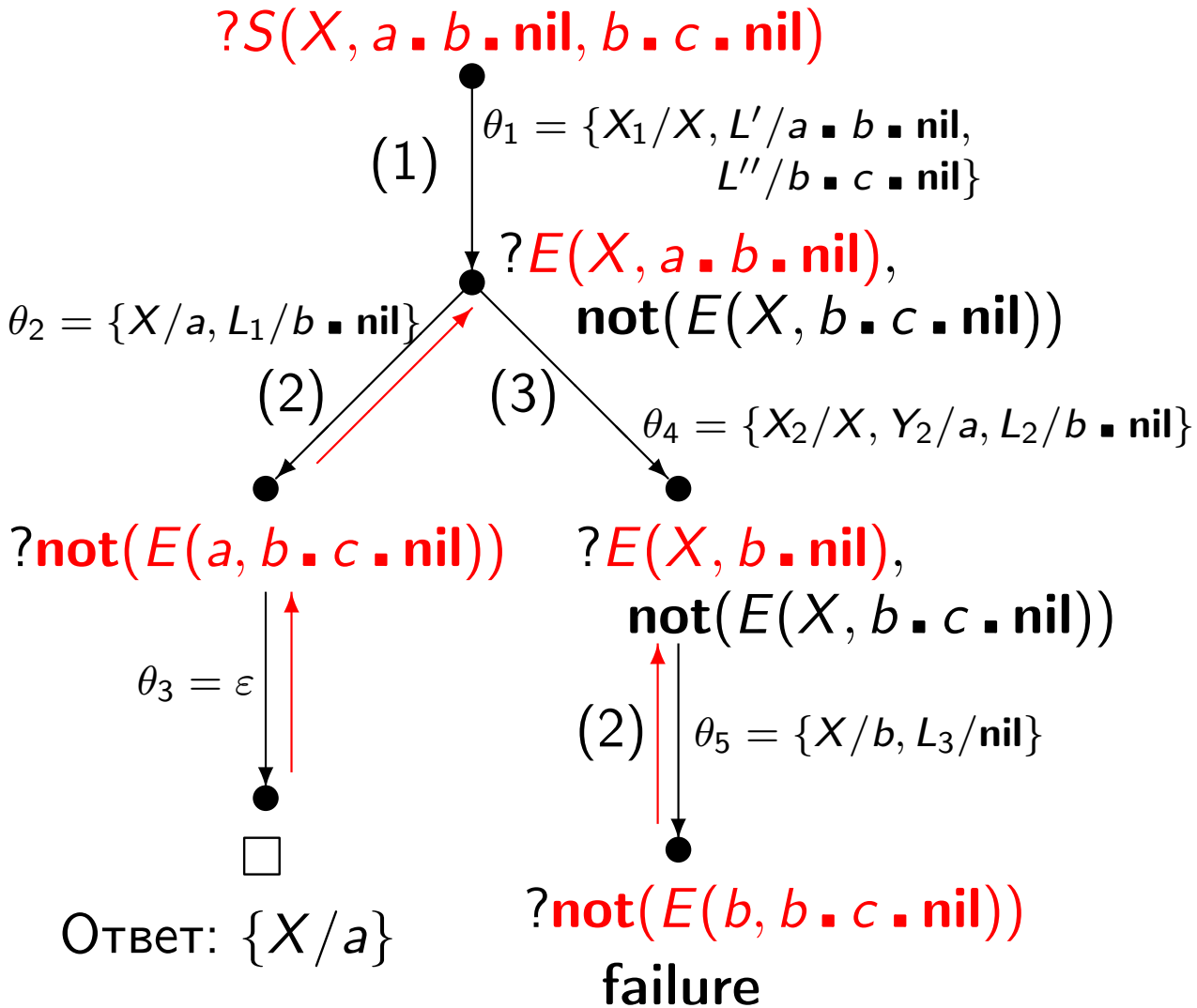


$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



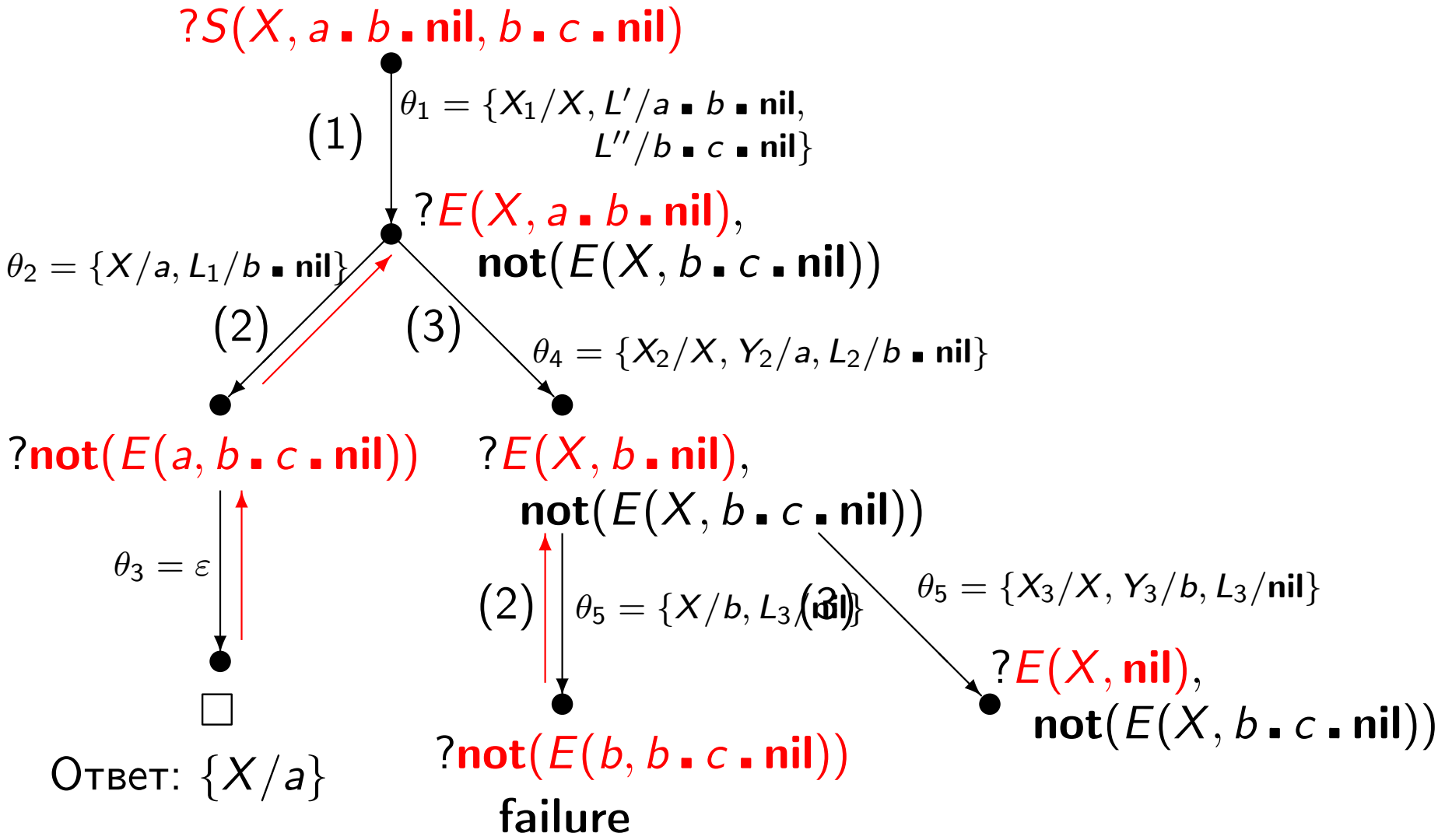
Ответ: $\{X/a\}$

$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \blacksquare L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \blacksquare L) \leftarrow E(X, L)$; (3)

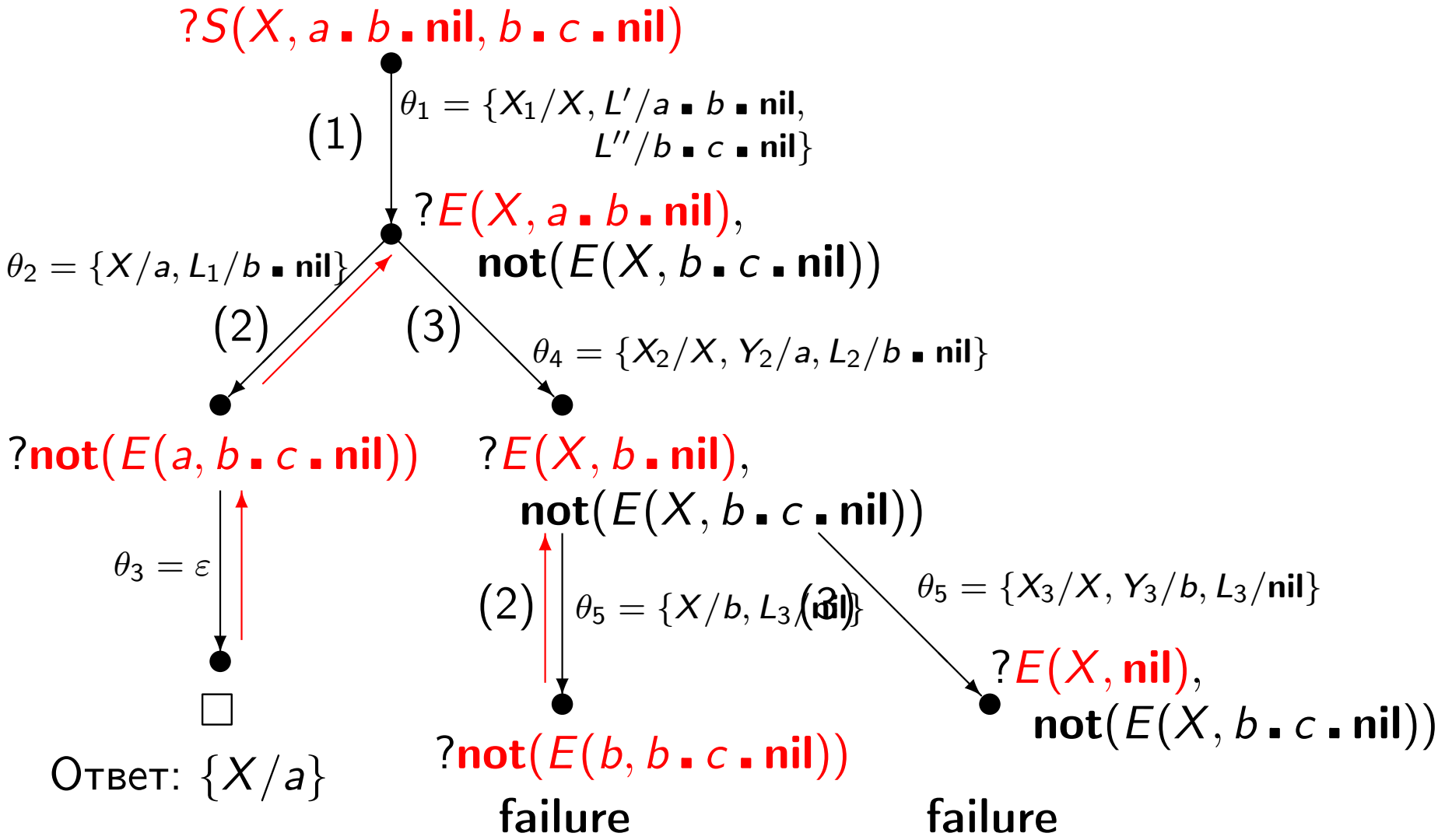


Ответ: $\{X/a\}$

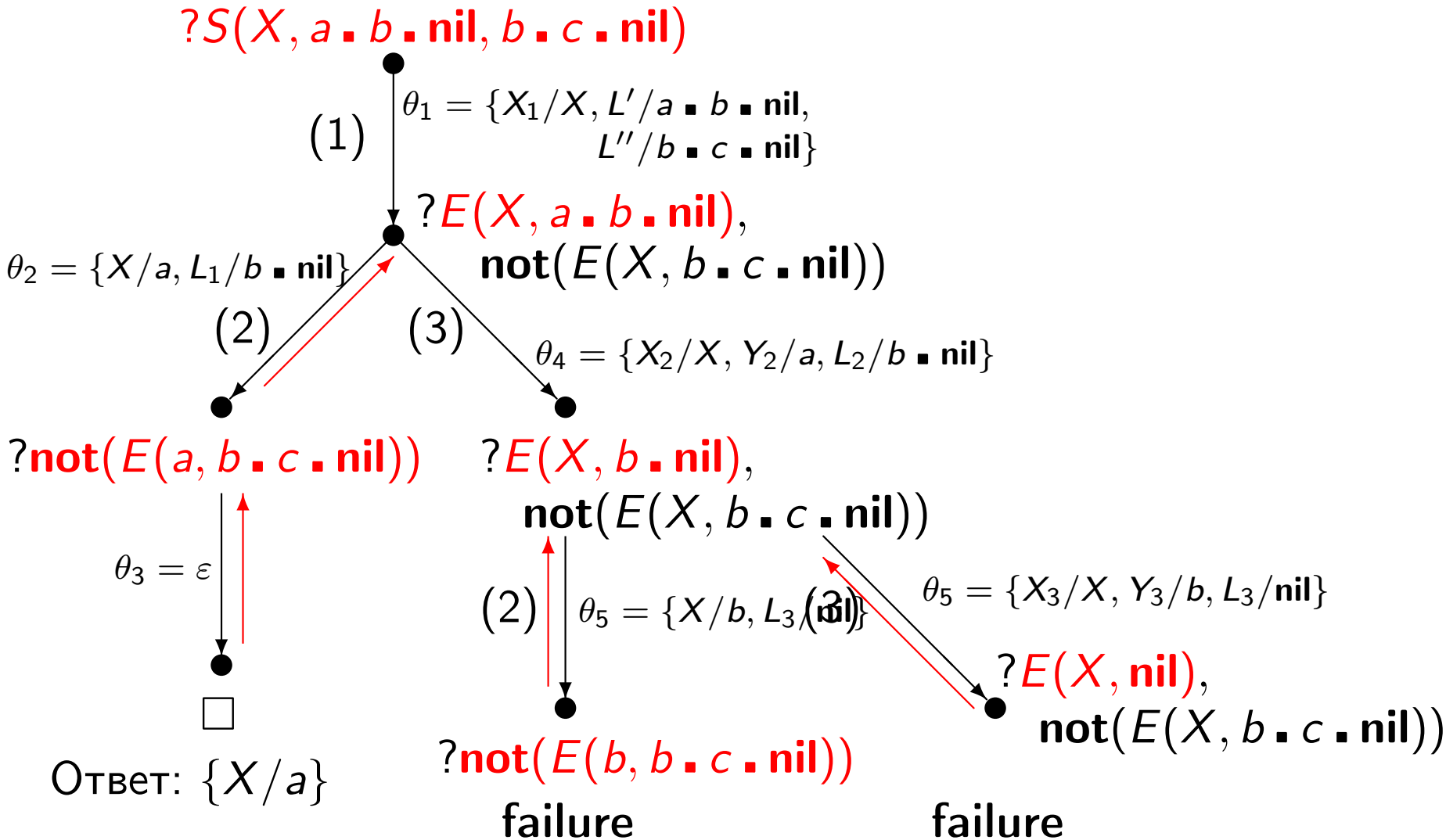
$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L);$ (3)



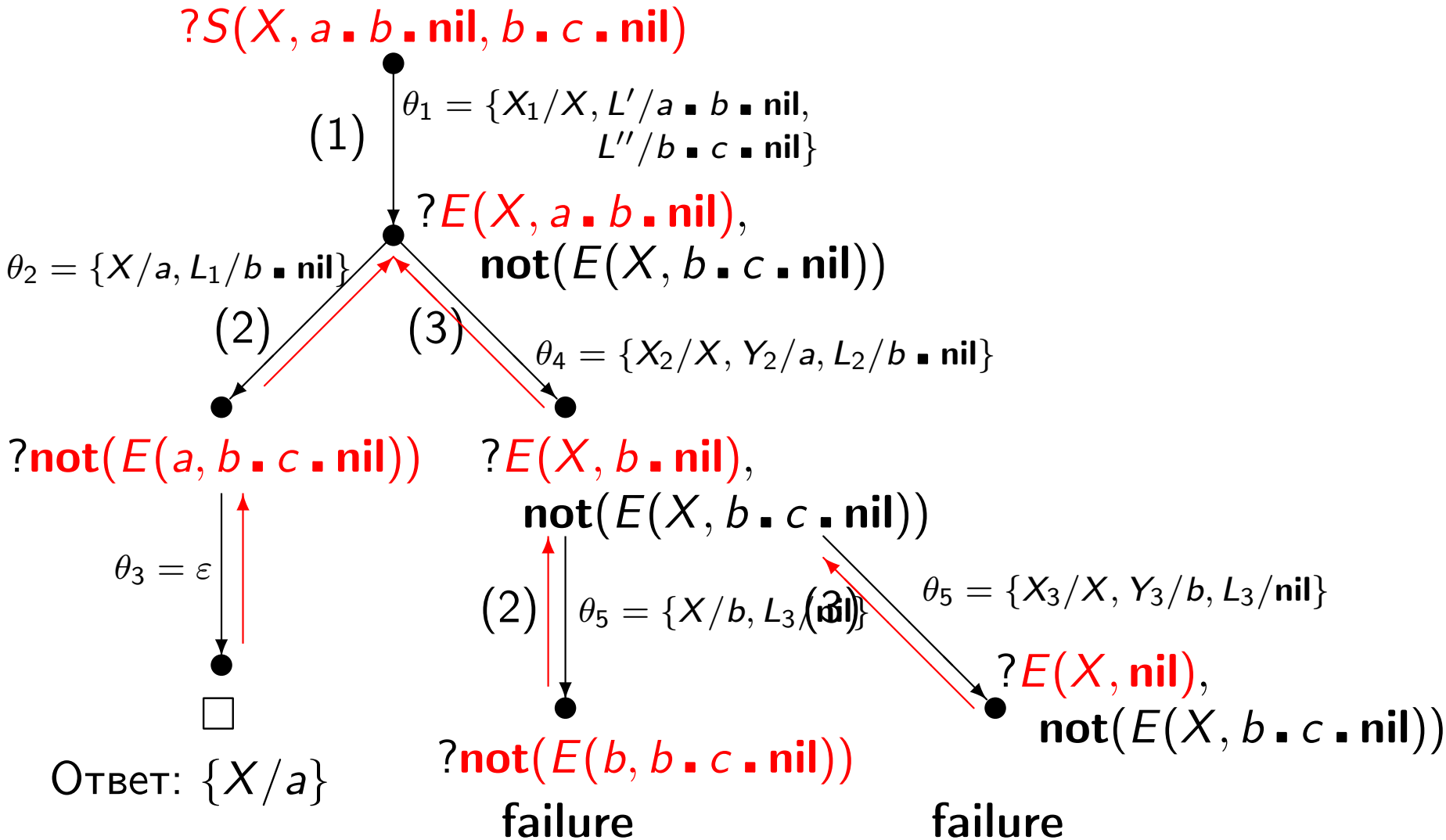
$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



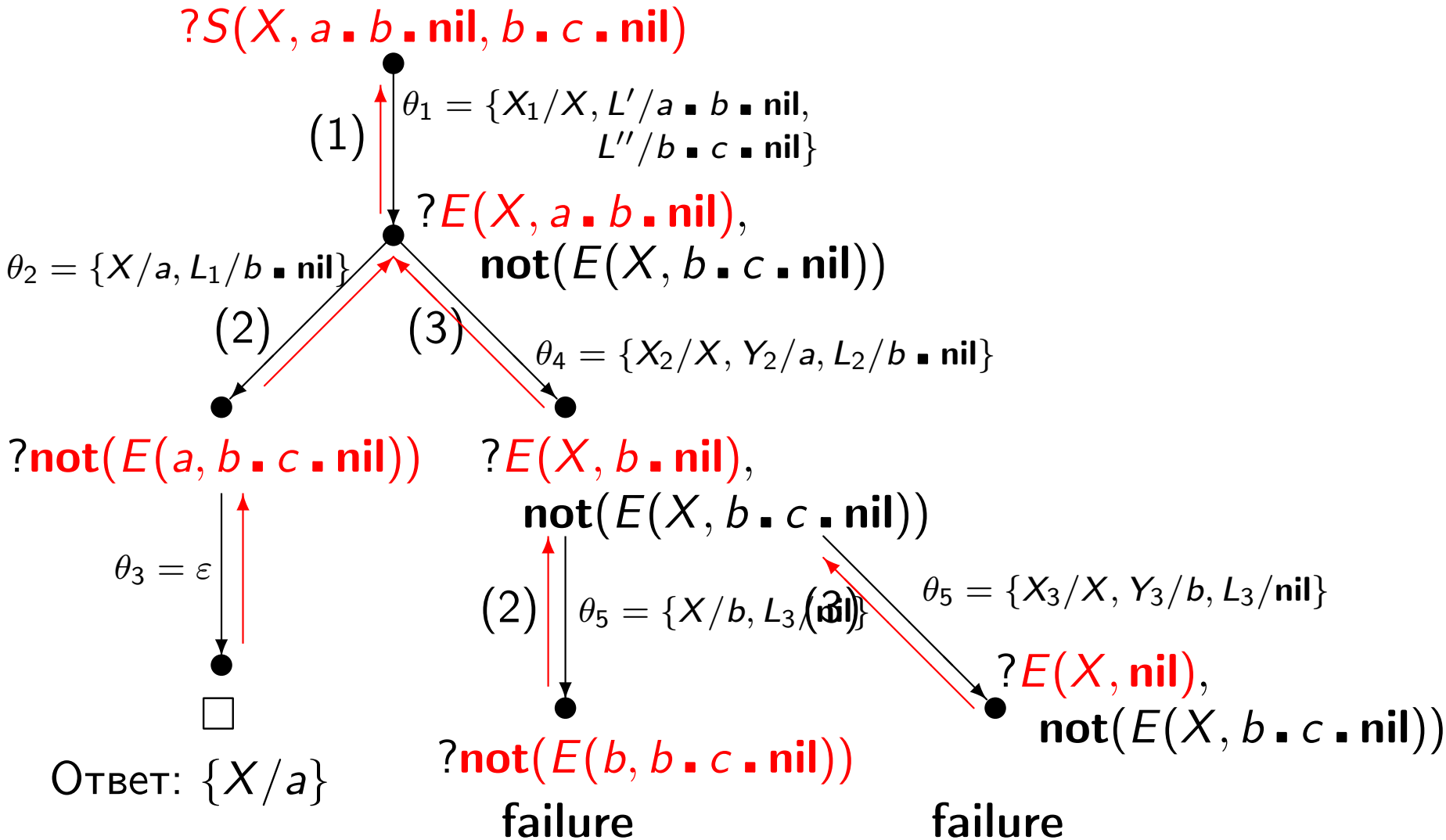
$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''))$; (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow$; (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L)$; (3)



$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \centerdot L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \centerdot L) \leftarrow E(X, L);$ (3)



$S(X, L', L'') \leftarrow E(X, L'), \mathbf{not}(E(X, L''));$ (1)
$E(X, X \cdot L) \leftarrow;$ (2)
$E(X, Y \cdot L) \leftarrow E(X, L);$ (3)



ОПЕРАТОР not

В том случае, когда построение дерева SLD-резолютивных вычислений проводится по стандартной стратегии, оператор **not** можно выразить через оператор отсечения **!**.

Для этого введем логическую константу **fail** — 0-местный предикат, имеющий постоянное значение *false*. С точки зрения операционной семантики, **fail** — это задача, которая не имеет решений. Тогда...

для обработки запроса ? **not**(C_0) в рамках SLD-резолютивного вывода с отсечением достаточно добавить к программе $\mathcal{P}$ два дополнительных программных утверждения

$$\begin{aligned} \mathbf{not}(C_0) &\leftarrow C_0, \mathbf{!}, \mathbf{fail}; \\ \mathbf{not}(C_0) &\leftarrow ; \end{aligned}$$

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Хорновские логические программы — это универсальная модель вычислений, в которой можно реализовать любой алгоритм. Однако для удобства пользования логическими программами к ним можно добавлять специальные встроенные функции и предикаты, операционная семантика которых определяется **вне рамок** SLD- резолютивного вывода.

Рассмотрим некоторые наиболее широко используемые встроенные средства логического программирования.

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикат равенства $=$

Предикат равенства $t_1 = t_2$ — это 2-х местный предикат, предназначенный для унификации термов. Его операционная семантика задается следующими правилами:

$? \; t_1 = t_2$

$$\theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} HOU(t_1, t_2) \neq \emptyset \\ \theta \in HOU(t_1, t_2) \end{cases}$$

$\square$

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикат равенства $=$

Предикат равенства $t_1 = t_2$ — это 2-х местный предикат, предназначенный для унификации термов. Его операционная семантика задается следующими правилами:

$? \; t_1 = t_2$

θ

$\Leftrightarrow \begin{cases} HOY(t_1, t_2) \neq \emptyset \\ \theta \in HOY(t_1, t_2) \end{cases}$

$? \; t_1 = t_2$

failure

$\Leftrightarrow \; HOY(t_1, t_2) = \emptyset$

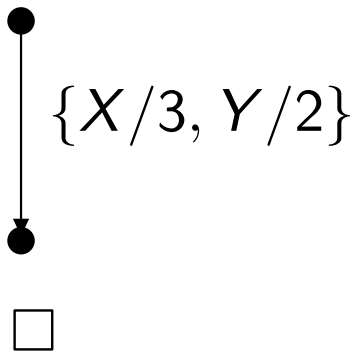
$\square$

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикат равенства $=$

Пример

$? \; X + 2 = 3 + Y$

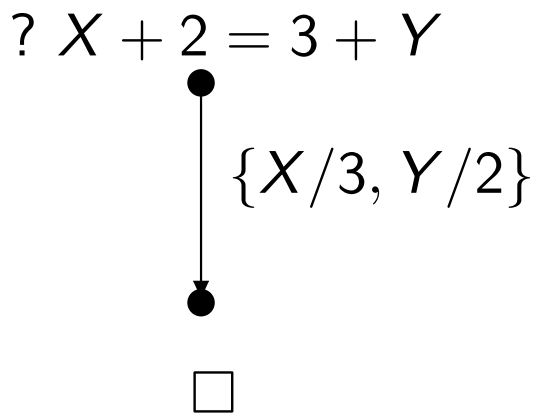


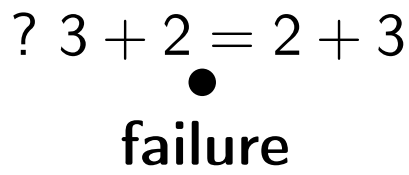
$\square$

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикат равенства $=$

Пример



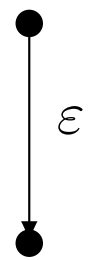


ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикат тождества $==$

Предикат тождества $t_1 == t_2$ — это 2-х местный предикат, предназначенный для проверки тождественности (синтаксической идентичности) термов. Его операционная семантика задается следующими правилами:

$? \; t == t$



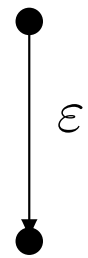
$\square$

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикат тождества $==$

Предикат тождества $t_1 == t_2$ — это 2-х местный предикат, предназначенный для проверки тождественности (синтаксической идентичности) термов. Его операционная семантика задается следующими правилами:

$? \; t == t$



$\square$

$? \; t_1 == t_2$

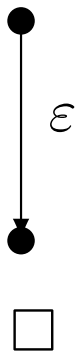
failure $\Leftrightarrow$ t_1, t_2 — разные термы

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикат тождества $==$

Пример

$$? \; X + 2 == X + 2$$

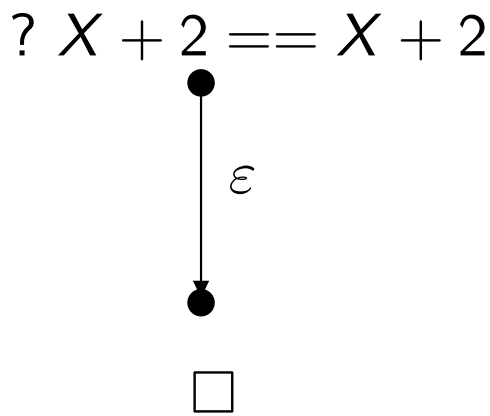


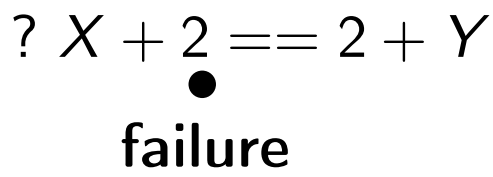
$\square$

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикат тождества ==

Пример





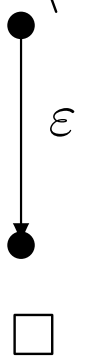
ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикаты неравенства $\backslash =$, $= \backslash =$

Предикаты неравенства $t_1 \backslash = t_2$, $t_1 = \backslash = t_2$ определяются при помощи оператора отрицания выражениями $\mathbf{not}(t_1 = t_2)$ и $\mathbf{not}(t_1 == t_2)$.

Пример

$$? \; 3 + 2 \backslash = 2 + 3$$



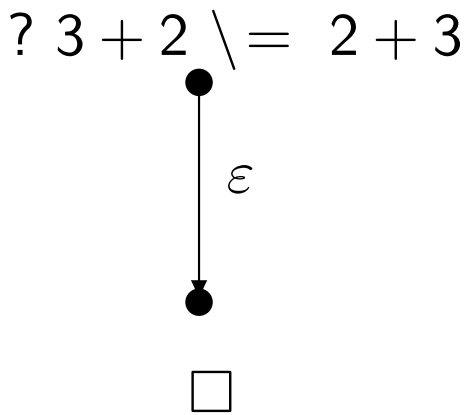
$\square$

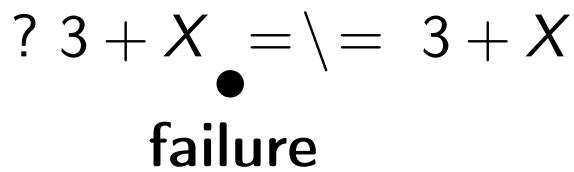
ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Предикаты неравенства $\backslash =$, $= \backslash =$

Предикаты неравенства $t_1 \backslash = \ t_2$, $t_1 \ = \backslash = t_2$ определяются при помощи оператора отрицания выражениями $\mathbf{not}(t_1 = t_2)$ и $\mathbf{not}(t_1 == t_2)$.

Пример





ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Типы данных

Для определения более сложных встроенных предикатов вводятся типы данных

$$\textbf{integer}, \textbf{real}, \textbf{boolean}, \textbf{char}, \text{ и т. д.}$$

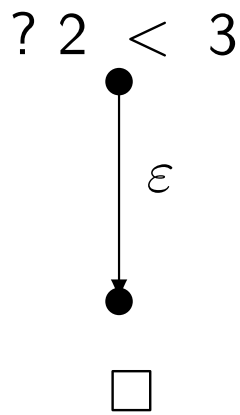
Каждый тип данных определяется множеством констант, обозначающих элементы этого типа данных. Например, **boolean** $= \{true, false\}$.

Тогда в каждом типе данных вводятся необходимые отношения, присущие элементам этого типа. Например, в типе данных **integer** можно ввести отношения сравнения $<,\ <=,\ >=,\ >,$ и др.

ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Типы данных

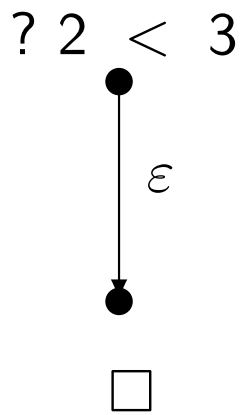
Пример

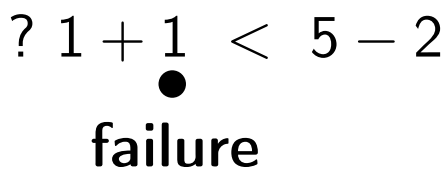


ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Типы данных

Пример



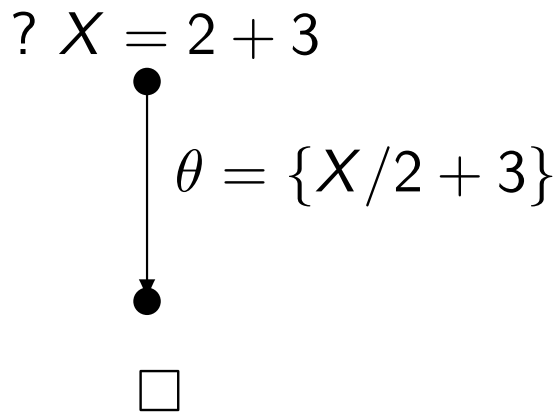


ВСТРОЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПРЕДИКАТЫ

Типы данных

Для введенных типов данных можно ввести встроенные функции (операции), присущие элементам этих типов
Например, в типе данных **integer** можно ввести двухместные функции (операции) $+$, $-$, $\times$, **div**, и др.

Однако чтобы вычисленные значения можно было передавать переменным, необходимо специальное средство. Предикат равенства $=$ для этой цели не годится, поскольку он занимается лишь унификацией термов.



ПРЕДИКАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

Предикат вычисления значений **is** — это встроенный предикат, предназначенный для вычисления значений встроенных функций. Операционная семантика этого предиката задается следующими правилами.

Условимся использовать запись $val(t)$ для обозначения значение терма t, составленного из встроенных функций и констант. Тогда...

? t_1 **is** t_2

$\theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 \in Var, \\ \text{определено } val(t_2) \end{cases}$

$\square \qquad \theta = \{t_1 / val(t_2)\}$

ПРЕДИКАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

Предикат вычисления значений **is** — это встроенный предикат, предназначенный для вычисления значений встроенных функций. Операционная семантика этого предиката задается следующими правилами.

Условимся использовать запись $val(t)$ для обозначения значение терма t, составленного из встроенных функций и констант. Тогда...

? t_1 **is** t_2

$\theta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 \in Var, \\ \text{определено } val(t_2) \end{cases}$

$\square \qquad \theta = \{t_1 / val(t_2)\}$

ПРЕДИКАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

Предикат вычисления значений **is** — это встроенный предикат, предназначенный для вычисления значений встроенных функций. Операционная семантика этого предиката задается следующими правилами.

Условимся использовать запись $val(t)$ для обозначения значение терма t, составленного из встроенных функций и констант. Тогда...

? t_1 **is** t_2

θ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} t_1 \in Var, \\ \text{определено } val(t_2) \end{cases}$

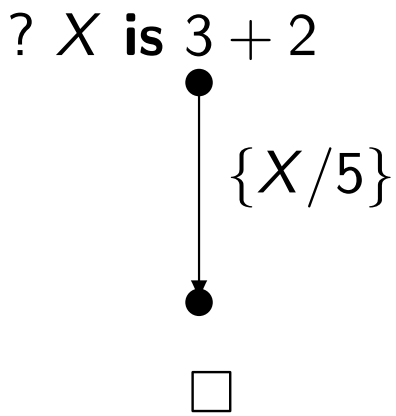
? t_1 **is** t_2 $\Leftrightarrow$ в остальных случаях

failure

$\square$ $\theta = \{t_1/val(t_2)\}$

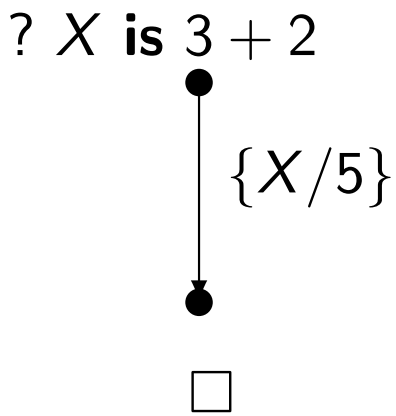
ПРЕДИКАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

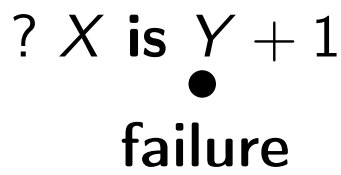
Пример



ПРЕДИКАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

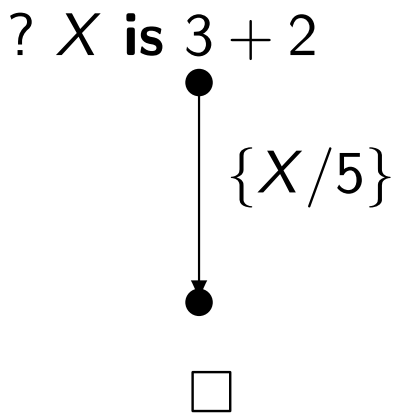
Пример

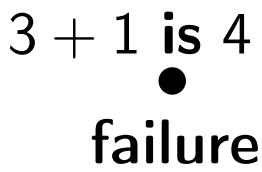




ПРЕДИКАТ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ

Пример





МОДИФИКАЦИЯ БАЗ ДАННЫХ

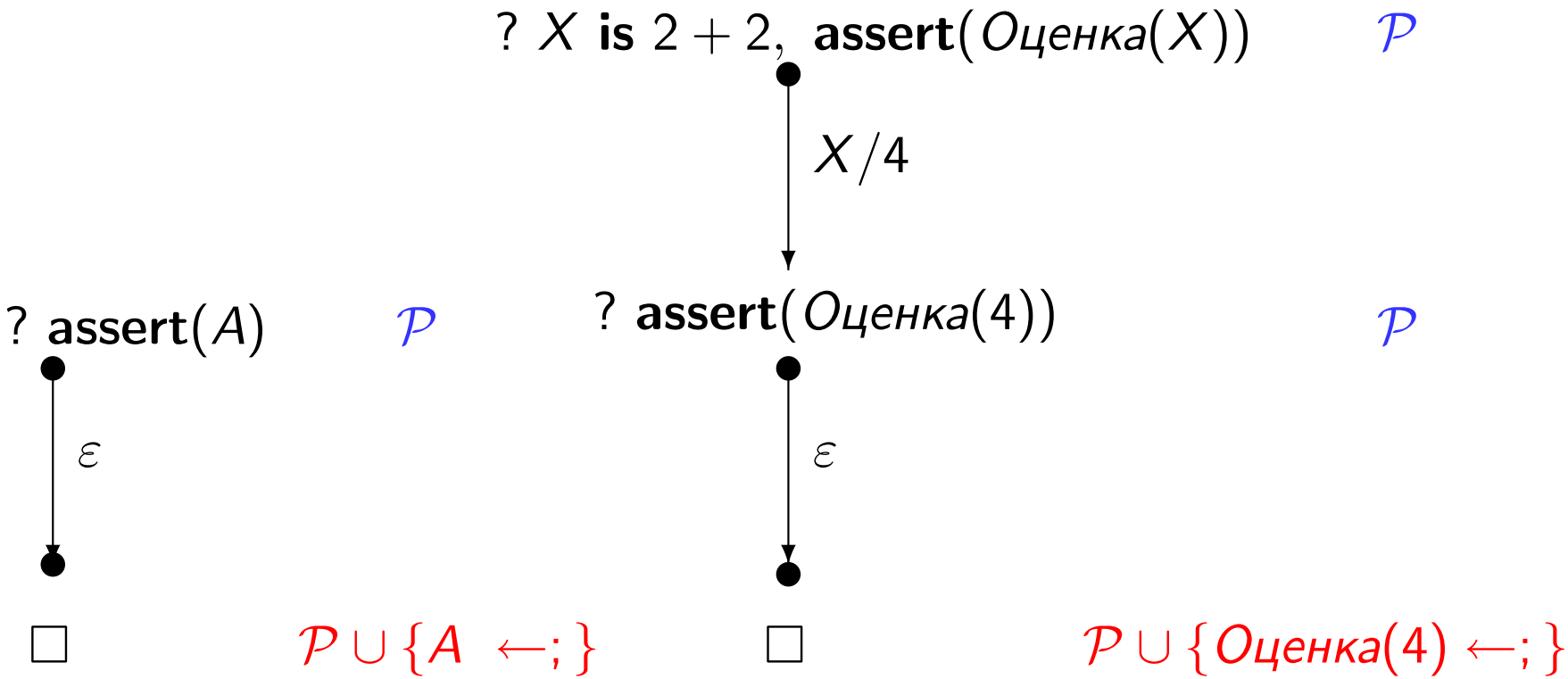
Обычно логическая программа $\mathcal{P}$ разделяется на две части — систему правил $\mathcal{P}_{clauses}$ и базу данных $\mathcal{P}_{database}$. База данных состоит из всех основных фактов программы.

Система правил $\mathcal{P}_{clauses}$ представляет, по сути дела, алгоритм решения задачи, и его неразумно изменять по ходу решения задачи.

А вот базу данных $\mathcal{P}_{database}$ по ходу вычисления можно модиифцировать. И для этой цели в системах логического программирования есть специальные встроенные операторы пополнения и сокращения базы данных.

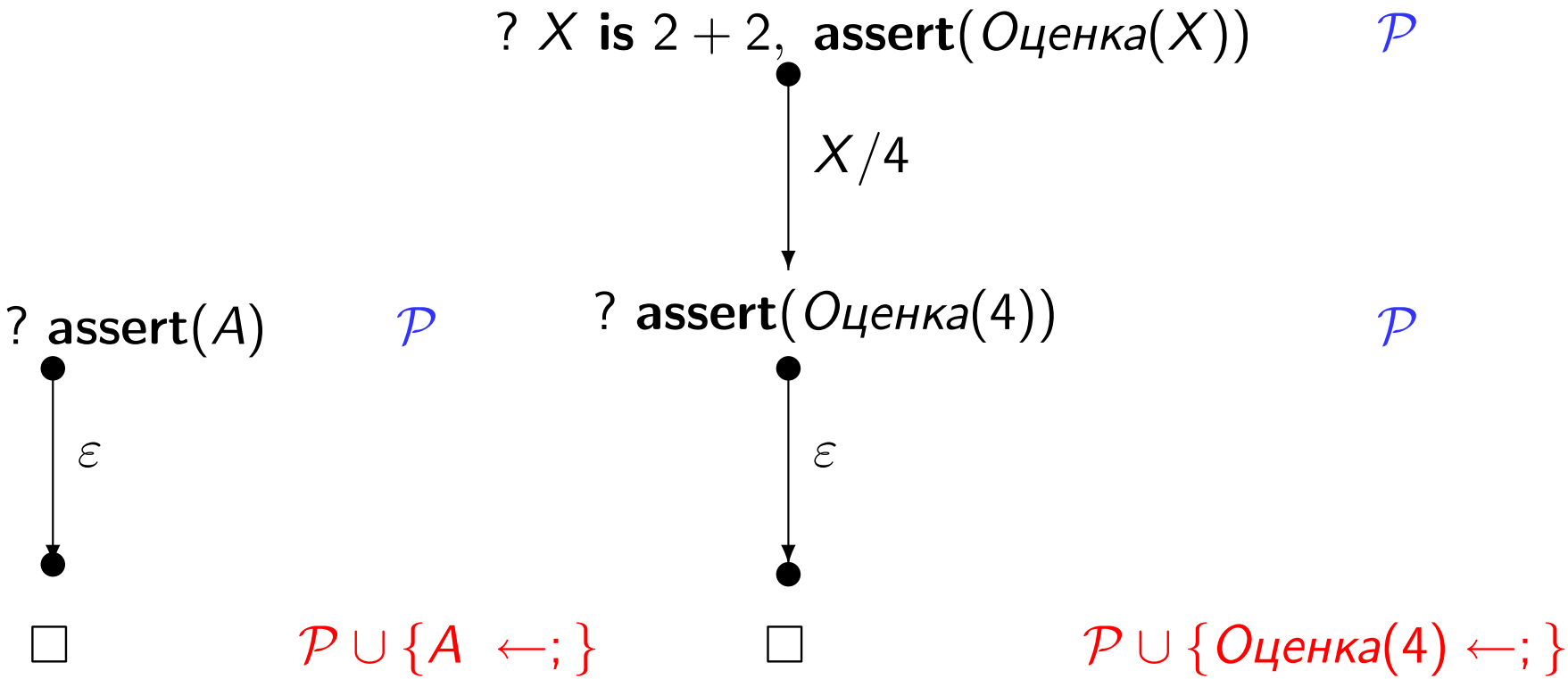
МОДИФИКАЦИЯ БАЗ ДАННЫХ

Оператор пополнения базы данных **assert**(A), где A — атом, добавляет к базе данных факт $A \leftarrow$;



МОДИФИКАЦИЯ БАЗ ДАННЫХ

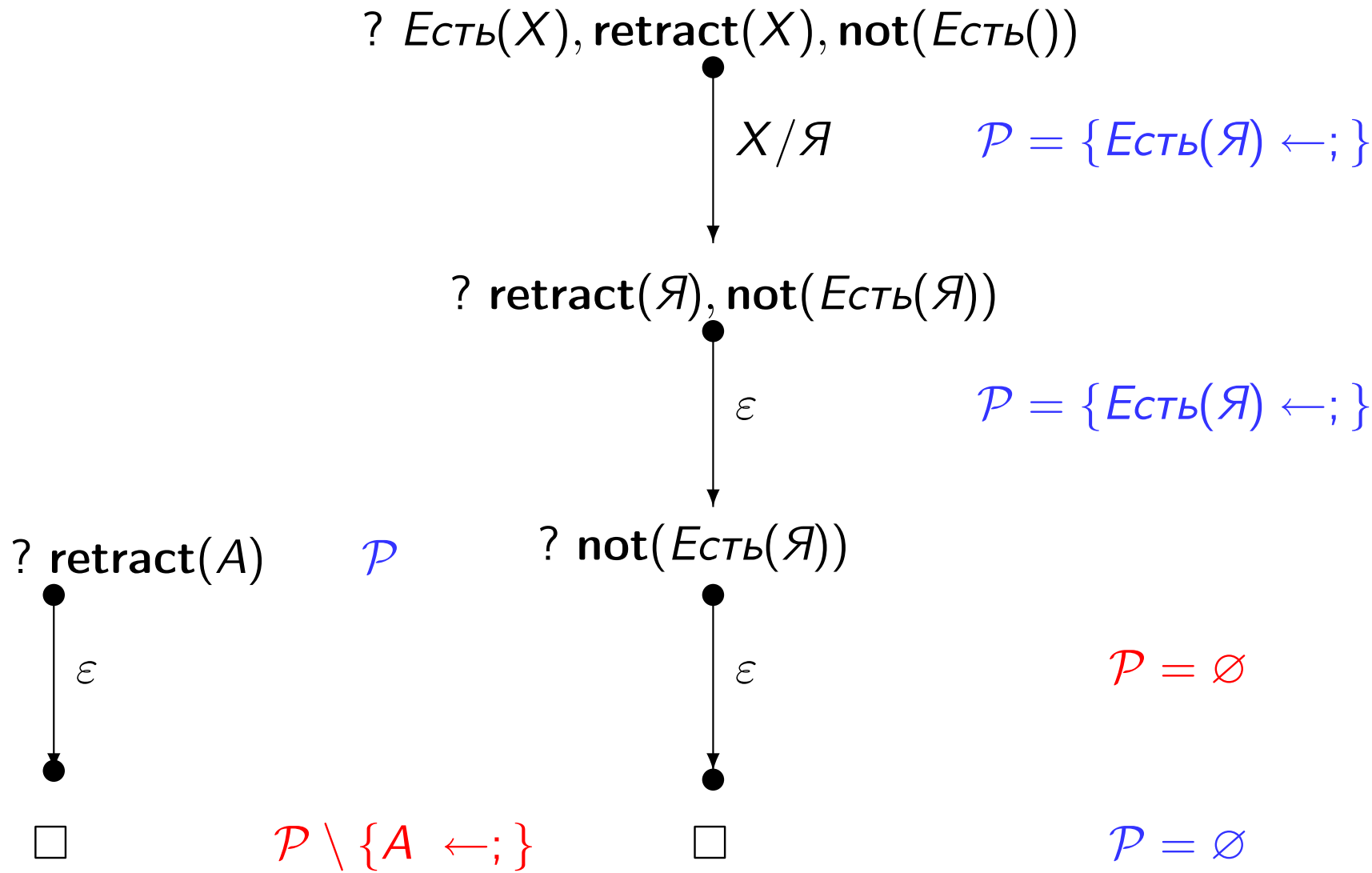
Оператор пополнения базы данных **assert**(A), где A — атом, добавляет к базе данных факт $A \leftarrow$;



Поскольку в логических программах правила и факты упорядочены, нужны два варианта оператора пополнения баз данных: **asserta**(A) и **assertz**(A).

МОДИФИКАЦИЯ БАЗ ДАННЫХ

Оператор сокращения базы данных **retract**(A), где A — атом, удаляет из базы данных факт $A \leftarrow$;



МОДИФИКАЦИЯ БАЗ ДАННЫХ

Творческая задача

А что если разрешить в теле правила использовать наряду с атомами также и программные утверждения? Как то, например,

$$A_0 \leftarrow A_1, \ldots, A_i, (B_0 \leftarrow B_1, \ldots, B_m), A_{i+1}, \ldots, A_n;$$

или $$A_0 \leftarrow A_1, \ldots, A_i, (B_0 \leftarrow), A_{i+1}, \ldots, A_n;$$

1. Как определить разумную декларативную семантику таких «составных» правил?
2. Как определить адекватную операционную семантику таких правил?
3. Можно ли определить адекватную операционную семантику «составных» правил на основе резолютивного вывода?

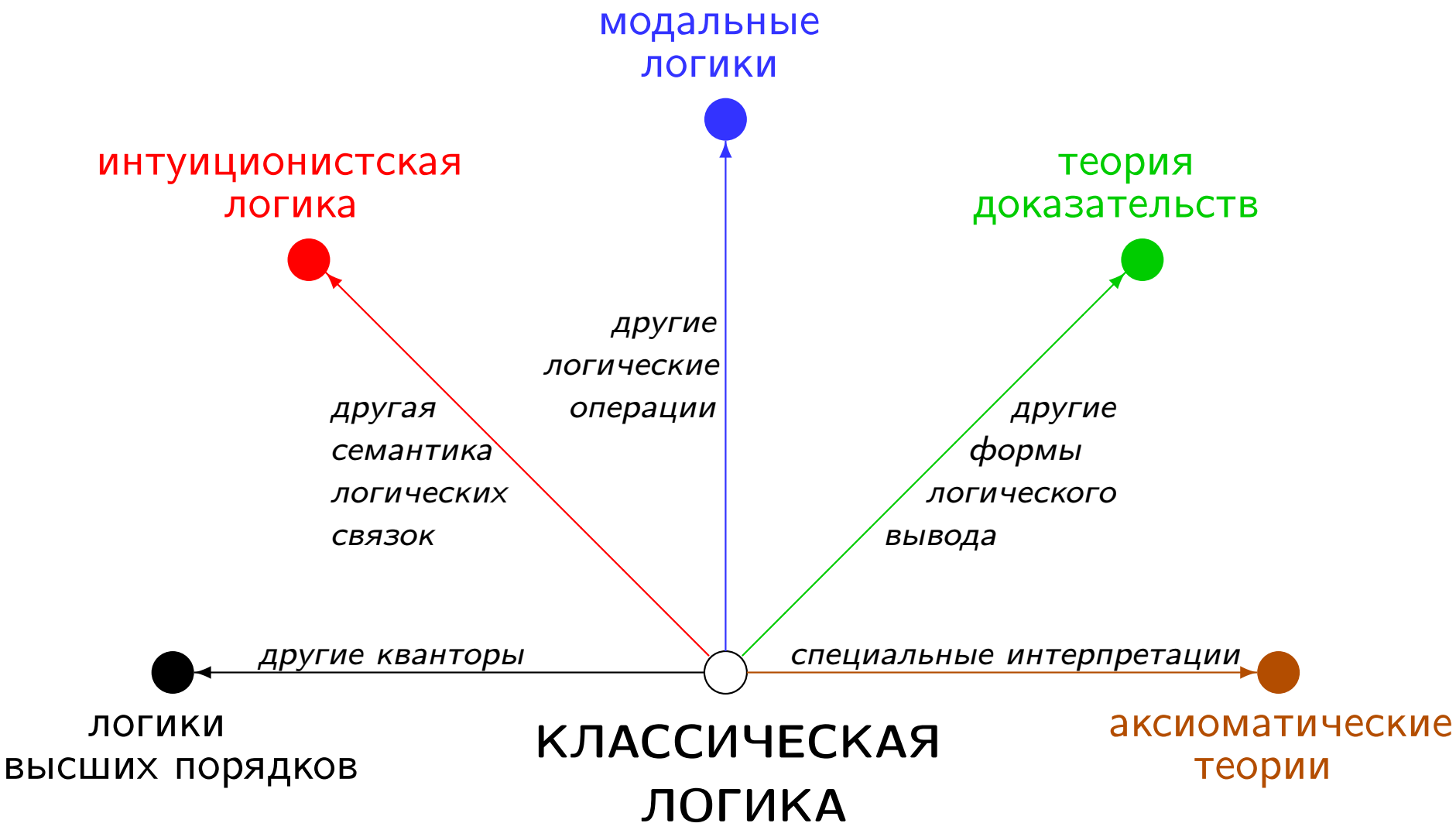
КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 17.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 18-19.

Интуиционистская логика. Модальные логики.


модальные
логики
интуиционистская
логика
теория
доказательств
другие
логические
операции
другая
семантика
логических
связок
другие
формы
логического
вывода
другие кванторы
специальные интерпретации
логики
высших порядков
КЛАССИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
аксиоматические
теории

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Интуиционизм — это философское течение в математике, возникшее в начале 20 века как критический отклик на неограниченное применение формальных логических методов в математике, приводящее к парадоксам (антиномиям).
По мнению интуиционистов (Брауэр, Вейль, Пуанкаре), парадоксы возникают в связи с тем, что законы логики, справедливые для конечных множеств, безосновательно переносятся на бесконечные множества.

Не все математические утверждения, верные для конечных множеств, остаются справедливыми и для бесконечных множеств. Например, для конечных множеств верен принцип Архимеда «**Часть всегда меньше целого**», а для бесконечных множеств — нет.

Вполне возможно, что не все законы классической (аристотелевой) логики допускают неограниченное и безоговорочное использование в математике.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Например, рассмотрим одну широко распространенную схему доказательства.

Доказать: Если выполнены условия A, то $\exists x\ P(x)$.

Схема доказательства: Предположим противное, т. е. $\forall x\ \neg P(x)$.
Тогда ...(фа-фа, ля-ля)..., что противоречит условиям A.
Значит, предположение $\forall x\ \neg P(x)$ неверно, и поэтому $\exists x\ P(x)$.
QED

Все хорошо, но где же та x, для которой верно $P(x)$?
Из такого доказательства это значение извлечь невозможно.

Но тогда, по мнению интуиционистов, это не доказательство, а словоблудие.

Чтобы исключить доказательства такого рода, нужно пересмотреть семантику логических связок и кванторов.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

Попробуем взглянуть на логические формулы как на утверждения о разрешимости математических задач.

Каждая атомарная формула A будет обозначать некоторую задачу. Истинность A будет означает, что задача имеет решение, и это решение можно предъявить. Ложность A будет означать, что задача решения не имеет.

Логические связки позволяют конструировать из простых задач составные задачи.

Оценим, как (не)разрешимость составных задач зависит от (не)разрешимости простых задач.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

$\varphi \,\&\, \psi$: Решить обе задачи φ и ψ и предъявить решение;

$\varphi \vee \psi$: Выбрать одну из двух задач φ и ψ, решить выбранную задачу и предъявить решение;

$\varphi \to \psi$: Показать, что решение задачи ψ сводится к решению задачи φ, т. е. предъявить способ, который позволяет, располагая решением задачи φ, построить решение задачи ψ;

$\neg \varphi$: Доказать, что задача φ не имеет решения.

Законами интуиционистской логики считаются только те формулы, которые соответствуют описаниям составных задач, имеющих решение при любых условиях.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Законы интуиционистской логики

- $P \to P$ — каждую задачу можно свести к ней самой;
- $(P \to Q)\&(Q \to R) \to (P \to R)$ — чтобы свести задача R к задаче P достаточно найти задачу Q, к которой можно свести задачу R, и которую, в свою очередь, можно свести к задаче P;
- $P \to \neg\neg P$ — чтобы убедиться в том, что не существует доказательства неразрешимости задачи P, достаточно найти решение задачи P;
- $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P\&Q)$ — чтобы показать, что обе задачи P и Q нельзя решить одновременно, достаточно выбрать одну из этих задач и показать, что она неразрешима.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Формулы, не являющиеся законами интуиционистской логики

- $\neg\neg P \to P$ — если вы можете обосновать, что нельзя построить доказательства неразрешимости задачи P, то этого еще недостаточно, чтобы получить решение самой задачи P;
- $P \vee \neg P$ — неправда, что для любой задачи можно либо получить решение, либо доказать, что никакого решения не существует;
- $\neg(P\&Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ — если можно доказать, что обе задачи P и Q нельзя решить одновременно, то это не дает основания считать, что хотя бы одна из них является неразрешимой.

Да как же это так?

Уж не скрывается ли здесь простая игра слов?

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Попробуем строго определить семантику утверждений, касающихся разрешимости задач.
Истинность формул оценивается в интерпретациях. Поскольку задачи решают люди, в качестве интерпретаций могут выступать способности людей решать задачи.
Но эти способности у людей со временем изменяются. Значит, интерпретации должны быть динамическими .
Рассмотрим модель идеального математика (**Dutch Mathematician**), который

- может пребывать в разных состояниях знания и переходить из одних состояний знания в другие;
- в каждом состоянии знания он точно знает, какие из элементарных задач он умеет решать, а какие нет;
- не утрачивает навыков в решении задач при переходе из одного состояния знания в другое.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Определение (модель Крипке)

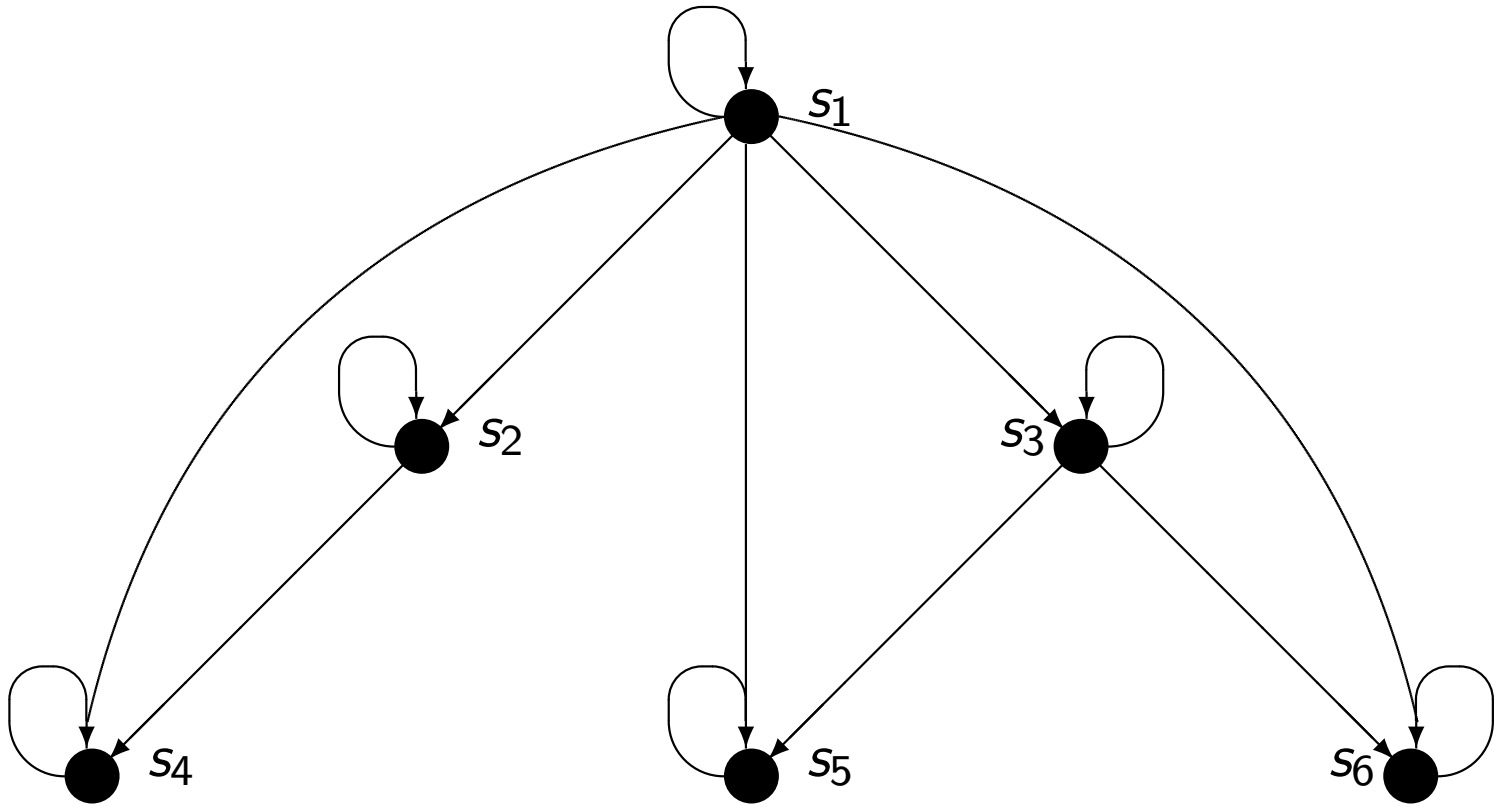
Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ — множество атомарных формул (названия задач).

Интуиционистская интерпретация — это реляционная система $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$, в которой

1. $S \neq \emptyset$ — множество состояний (состояний знания);
2. $\mathbf{R} \subseteq S \times S$ — отношение переходов на S, которое является отношением нестрогого частичного порядка:
   рефлексивное $R(s, s)$;
   транзитивное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_3) \Rightarrow R(s_1, s_3)$;
   антисимметричное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_1) \Rightarrow s_1 = s_2$;
3. $\xi : S \times \mathcal{P} \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ — оценка атомарных формул, удовлетворяющая условию монотонности:
   $R(s_1, s_2)\ \&\ \xi(P, s_1) = \mathbf{true} \ \Rightarrow\ \xi(P, s_2) = \mathbf{true}$.

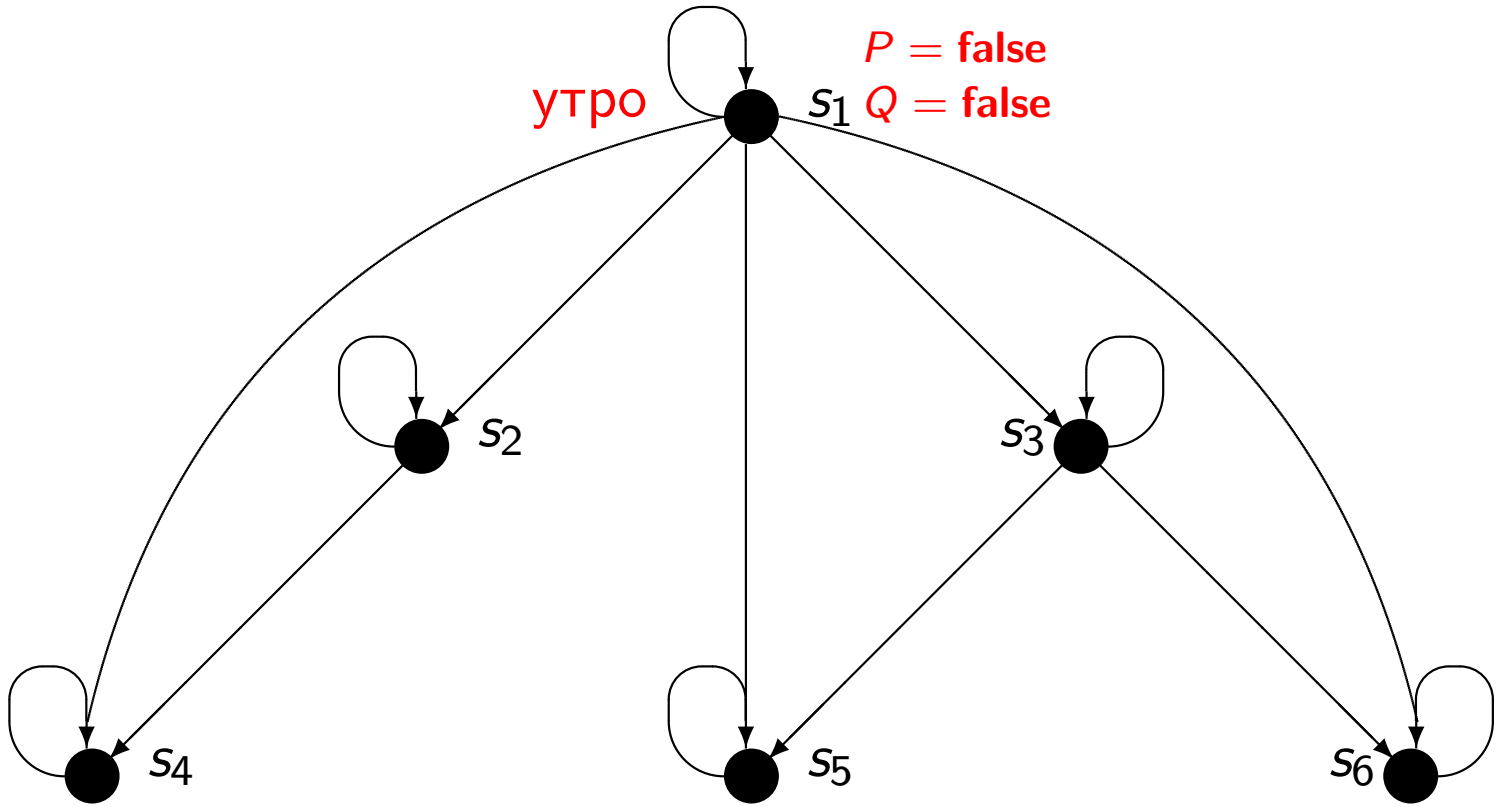
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



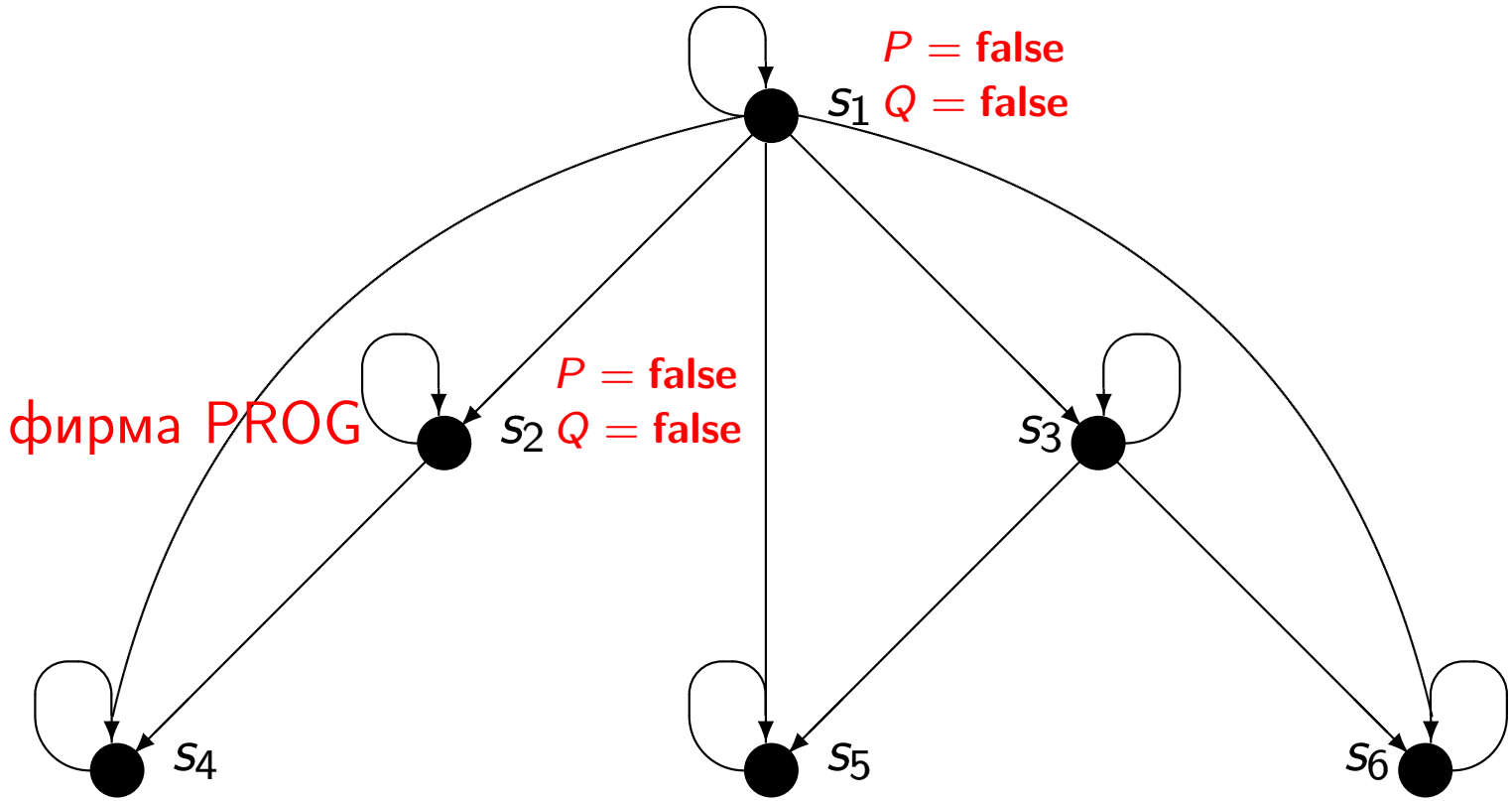
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



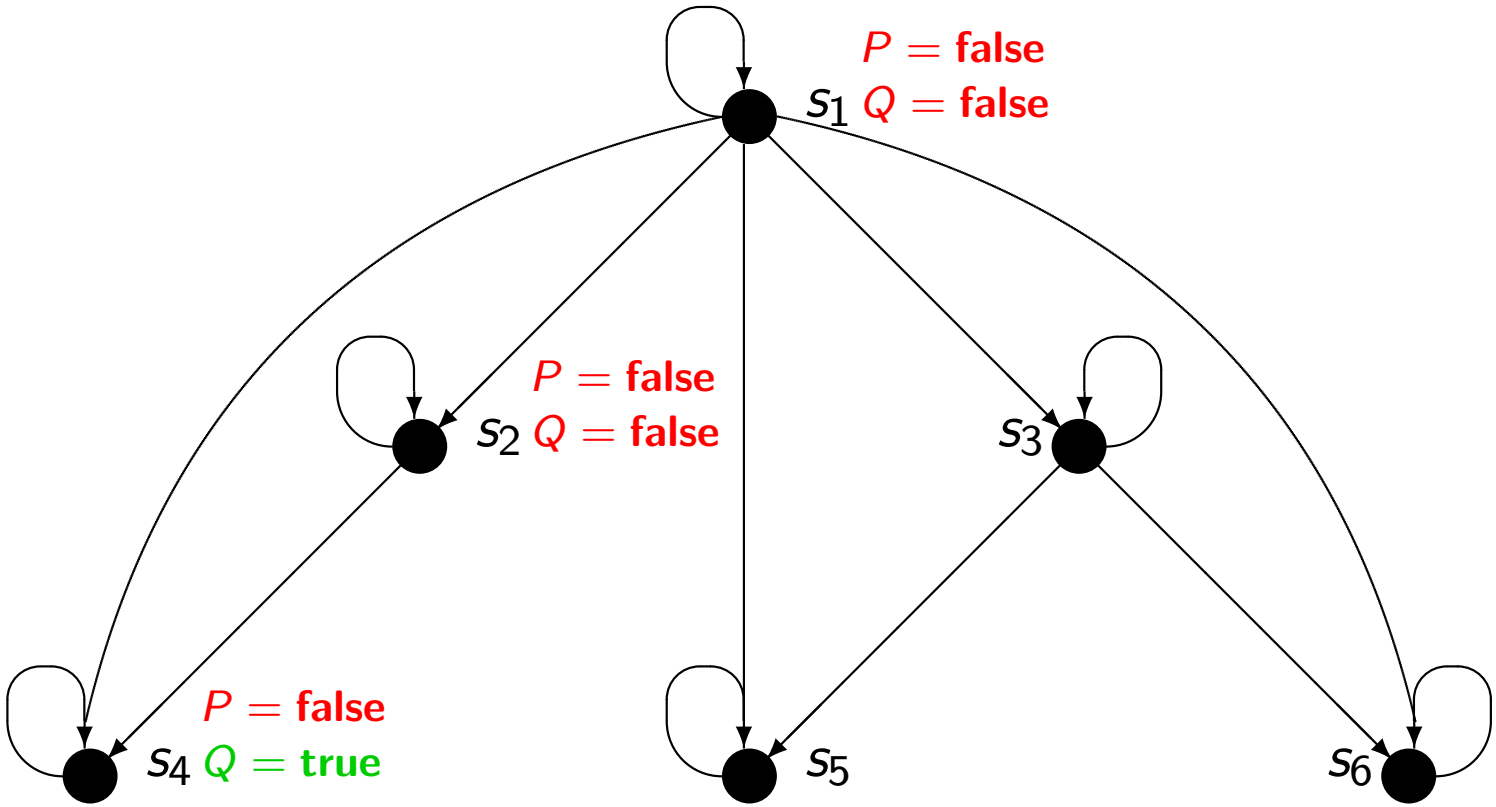
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

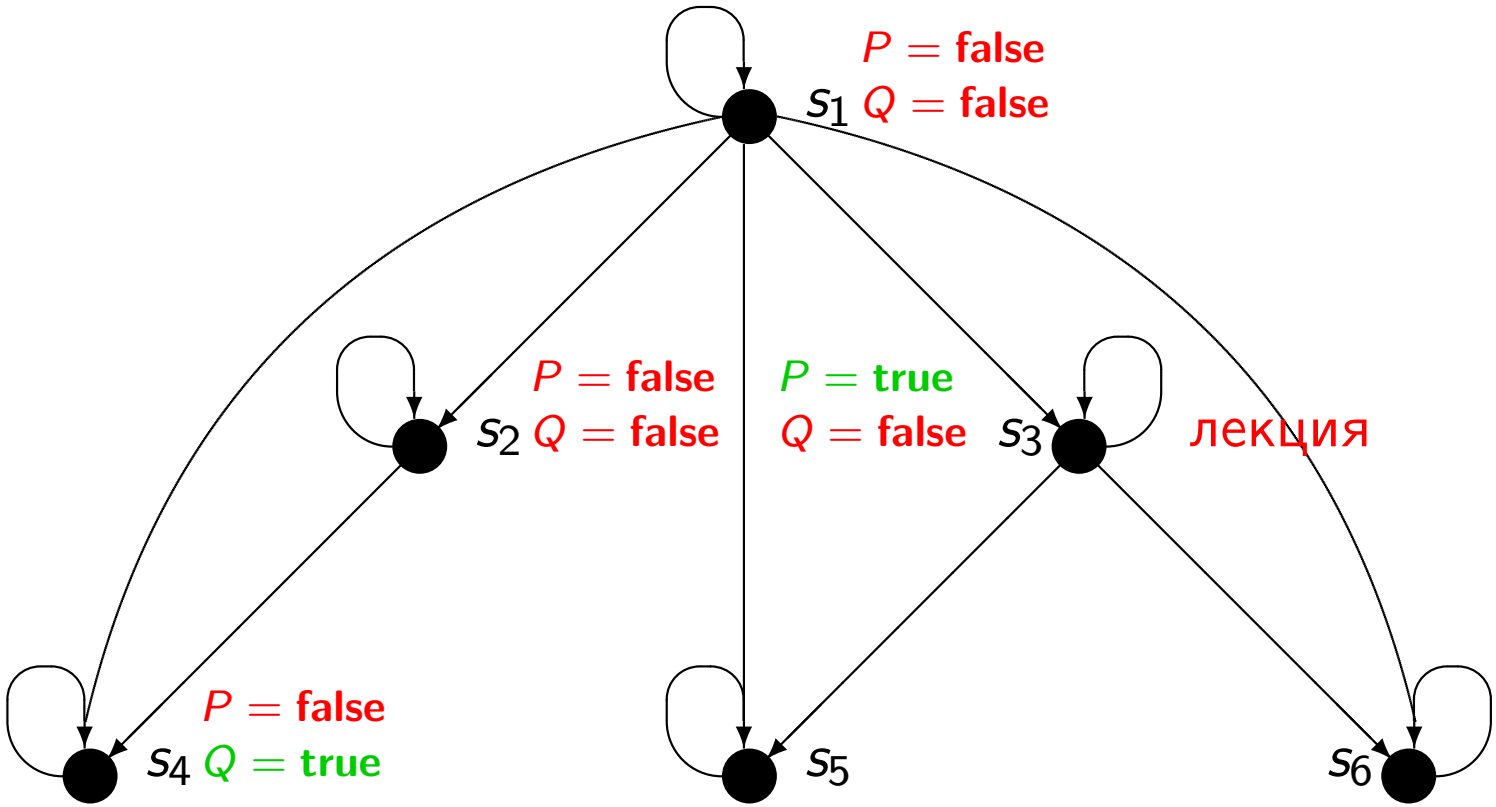
Пример интуиционистской интерпретации



экзамен

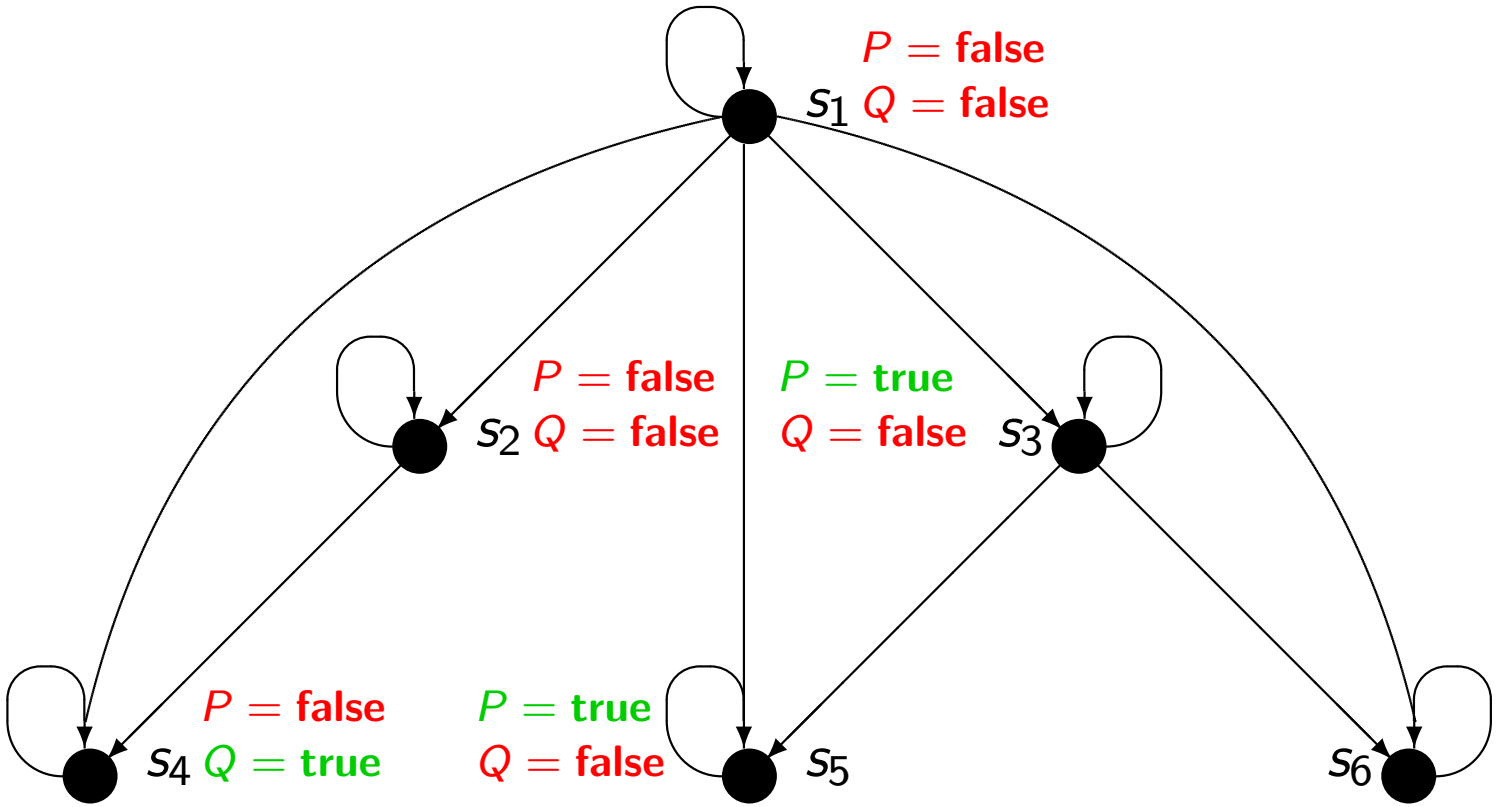
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

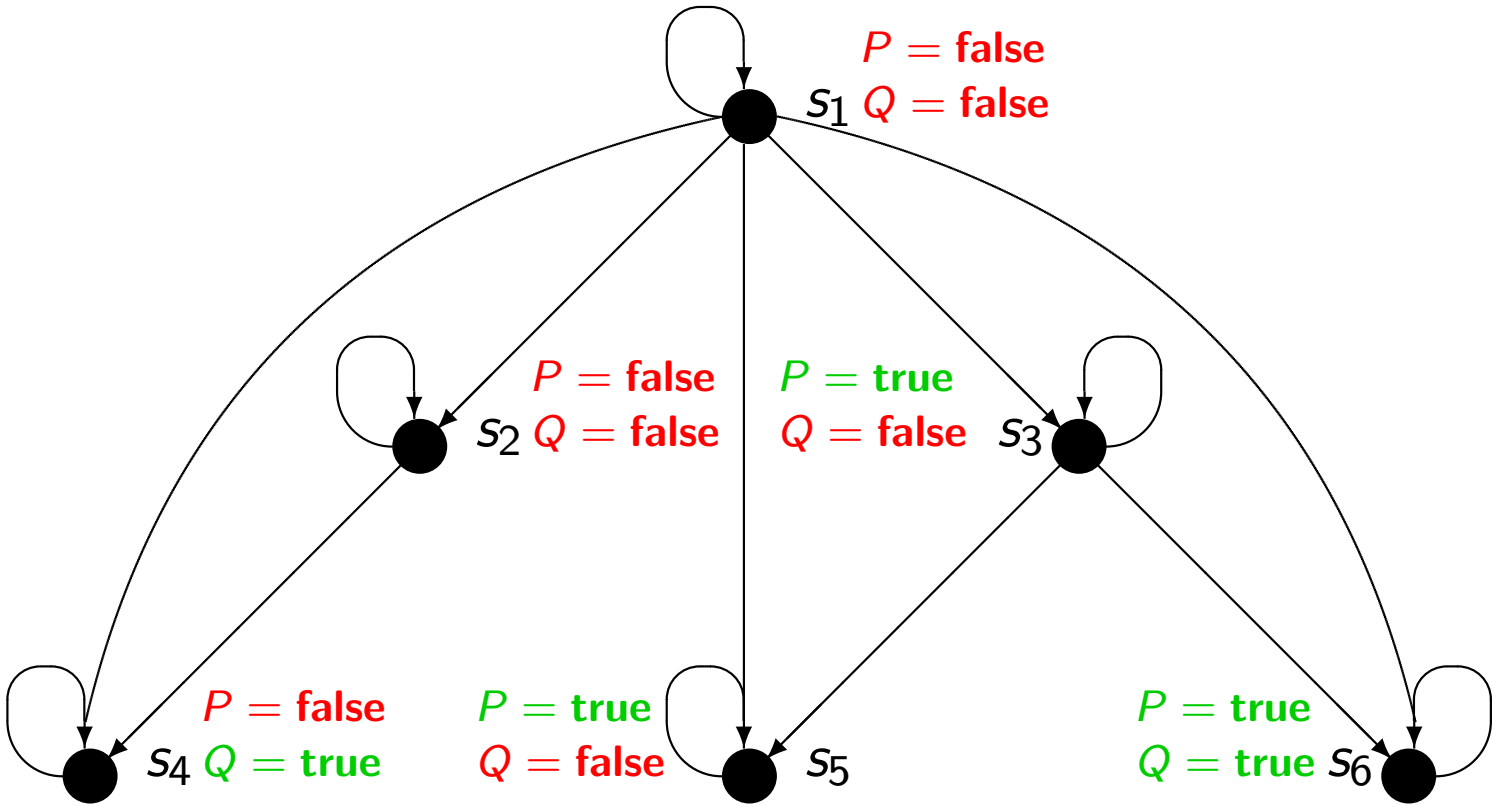
Пример интуиционистской интерпретации



экзамен

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

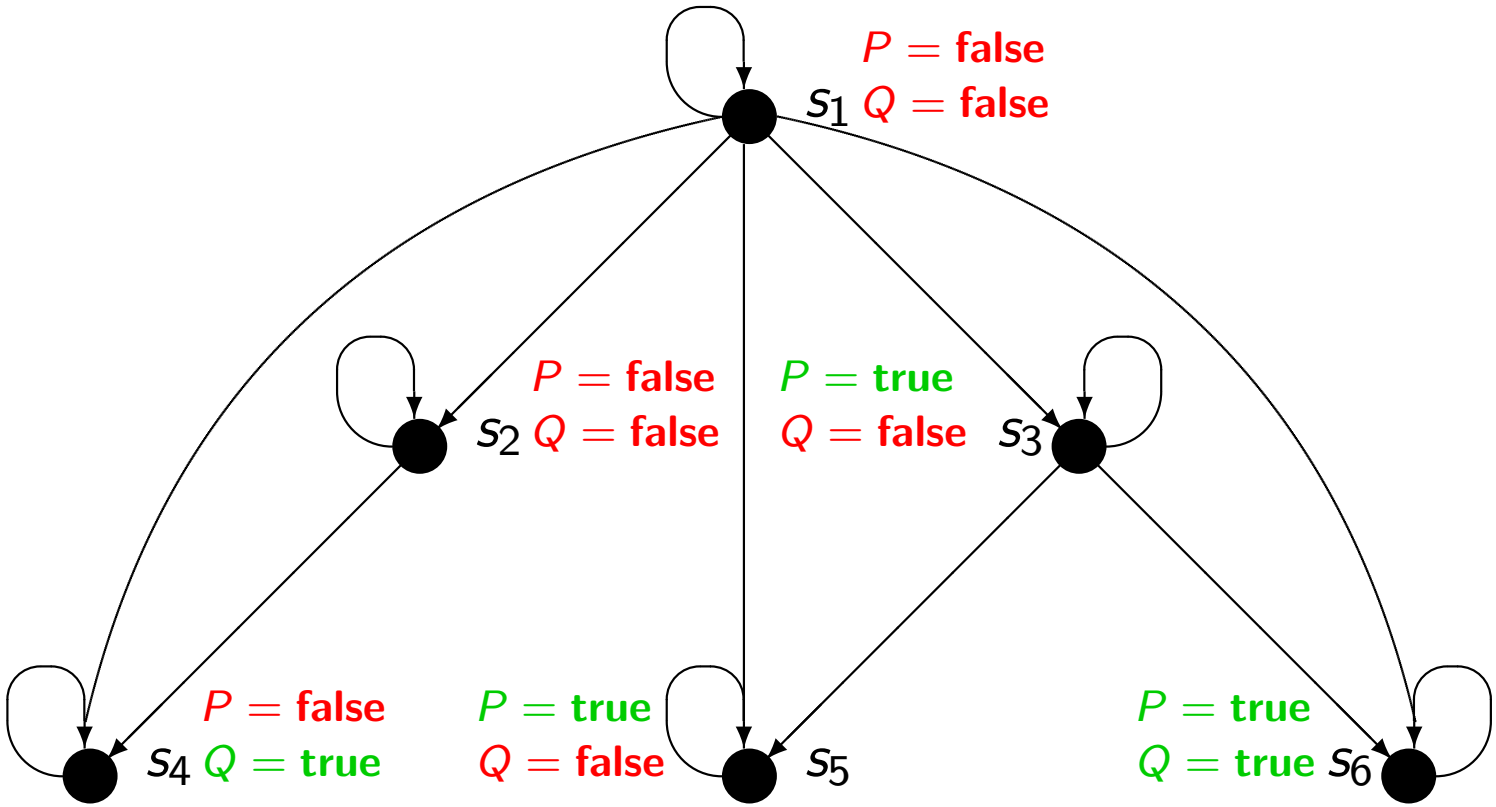
Пример интуиционистской интерпретации



экзамен

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Определение (семантика Крипке)

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — интуиционистская интерпретация. Тогда отношение выполнимости $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$ формулы φ в состоянии s интерпретации I определяется так:

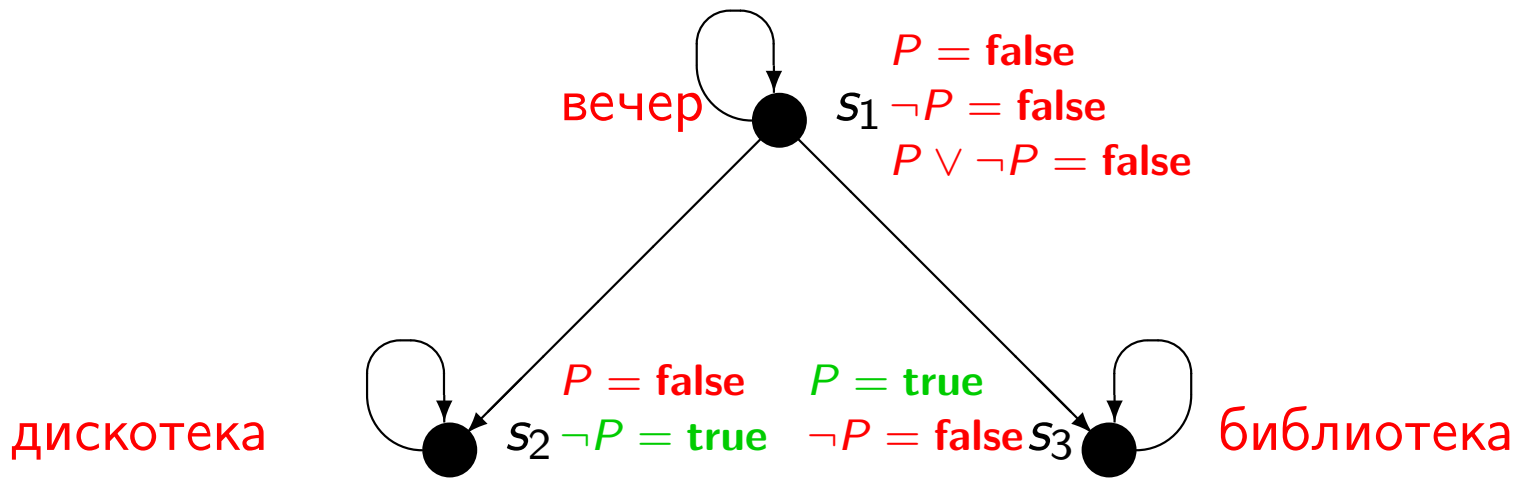
1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi \iff \xi(s, P) = \mathbf{true}$;
2. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ и $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
3. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ или $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
4. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \to \varphi_2 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$ и $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$, то $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
5. $I, s \models_{\mathcal{I}} \neg \varphi_1 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$, то $I, s' \not\models_{\mathcal{I}} \varphi_1$.

Формула φ называется интуиционистски общезначимой (законом интуиционистской логики), если для любой интерпретации I и для любого состояния s верно $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример необщезначимой формулы

$$\not\models_{\mathcal{I}} P \vee \neg P$$



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Другие необщезначимые формулы

Докажите самостоятельно, выбрав подходящую интерпретацию (контрмодель) I,

$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg\neg P \to P$$

$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg(P \& Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$$

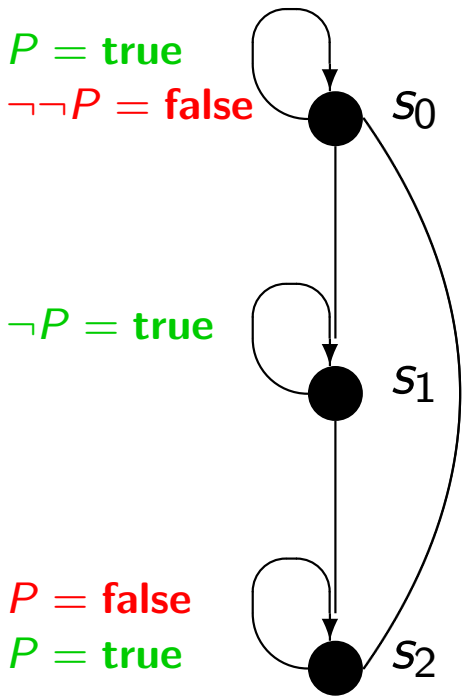
$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg(P \vee Q) \to (\neg P \& \neg Q)$$

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример общезначимой формулы

$$\models_{\mathcal{I}} P \to \neg\neg P$$

От противного. Допустим, что $I, s_0 \not\models P \to \neg\neg P$. Тогда



Полученное противоречие свидетельствует о невозможности построения контрмодели для формулы $P \to \neg\neg P$.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Другие общезначимые формулы

Докажите самостоятельно интуиционистскую общезначимость следующих формул

$$\models_{\mathcal{I}} \neg\neg\neg P \to \neg P$$

$$\models_{\mathcal{I}} (\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \& Q)$$

$$\models_{\mathcal{I}} \neg P \vee \neg\neg P$$

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Некоторые особенности интуиционистской логики

Теорема 1

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \implies \models_{\mathcal{C}} \varphi$

Теорема 2 (дизъюнктивное свойство)

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \vee \psi \iff \models_{\mathcal{I}} \varphi$ или $\models_{\mathcal{I}} \psi$

Теорема 3 (экзистенциальное свойство)

$$\models_{\mathcal{I}} \forall x_1 \ldots \forall x_1 \exists y \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$$
$$\iff$$
существует такой терм $t(x_1, \ldots, x_n)$, что
$$\models_{\mathcal{I}} \varphi(x_1, \ldots, x_n, t(x_1, \ldots, x_n))$$

$t(x_1, \ldots, x_n)$ — это программа решения задачи φ.

Это называется «изоморфизмом Карри–Ховарда».

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Зимой идет снег

Зимой всегда идет снег

Зимой иногда идет снег

Это разные высказывания. И поэтому они должны быть записаны разными формулами.

Эти высказывания по смыслу связаны друг с другом. И это должно быть отражено в формулах. Поскольку высказывания отличаются лишь словами **всегда**, **иногда** (модальности времени), нужно ввести какие-то логические конструкции для выражения этих модальностей.

Может быть для этой цели пригодны кванторы?

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Студенты посещают лекции

Студенты обязаны посещать лекции

Студенты имеют право посещать лекции

обязан, **имею право** — деонтические модальности .

А будут ли пригодны кванторы в этом случае для выражения модальностей?

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Задача имеет решение

Известно, что задача имеет решение

Можно допустить, что задача имеет решение

знаю, **предполагаю** — эпистемические модальности.

А как быть здесь?

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Модальности (в естественном языке они, как правило, представлены наречиями или служебными глаголами) выражают различные оттенки истинности (уверенность, необходимость, доказуемость, осведомленность и др.).

Эти оттенки можно классифицировать:

Модальности необходимого	Модальности возможного
необходимо	возможно
обязательно	не исключено
всегда	иногда
должна	имею право
знаю	предполагаю
доказуемо	непротиворечиво
$\Box$	$\Diamond$

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Синтаксис модальных формул

Расширим синтаксис классической логики предикатов, введя два логических оператора
$\Box$ (модальность необходимого) и
$\Diamond$ (модальность возможного),
при помощи которых разрешается строить формулы следующего вида:

$(\Box\varphi)$ «необходимо φ»,

$(\Diamond\varphi)$ «возможно φ».

Во избежание большого количества скобок, будем считать, что модальные операторы имеют такой же приоритет, что и кванторы.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Семантика модальных формул многообразна и непроста. Рассмотрим

Пример

Верно ли, что формула $\Box\varphi \to \varphi$ — это закон модальной логики?

Если $\Box$ — модальность времени, «всегда», то $\Box\varphi \to \varphi$ — это закон модальной логики.

Если студенты всегда ходят на лекции, то они ходят на лекции.

А вот если $\Box$ — деонтическая модальность, «должны», то формула $\Box\varphi \to \varphi$ уже не может претендовать на статус логического закона.

Если студенты должны ходить на лекции, то они ходят на лекции.

Это неправда, а законы логики не зависят от прихоти студентов.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Семантика Крипке модальных формул

Определим самое общее отношение выполнимости для модальных формул.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots\}$ — множество атомарных формул (элементарные высказывания).

Модальная интерпретация или модель Крипке — это реляционная система $I = \langle W, \mathbf{R}, \xi \rangle$, в которой

1. $W \neq \emptyset$ — множество состояний (возможные миры);
2. $\mathbf{R} \subseteq S \times S$ — отношение достижимости на W,
3. $\xi : W \times \mathcal{P} \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ — оценка атомарных формул.

Система $\langle W, \mathbf{R} \rangle$ называется шкалой Крипке (frame).

Если $(w, w') \in \mathbf{R}$, то возможный мир w' называется альтернативным миром для s.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Отношение выполнимости для модальных формул

Пусть $I = \langle W, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — модель Крипке. Тогда отношение выполнимости $I, s \models \varphi$ формулы φ в мире s модели I определяется так:

1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models \varphi \iff \xi(w, P) = \mathbf{true}$;
2. $I, w \models \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, w \models \varphi_1$ и $I, w \models \varphi_2$;
3. $I, w \models \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff I, w \models \varphi_1$ или $I, w \models \varphi_2$;
4. $I, w \models \varphi_1 \to \varphi_2 \iff I, w \not\models \varphi_1$ или $I, w \models \varphi_2$;
5. $I, w \models \neg\varphi_1 \iff I, w \not\models \varphi_1$;
6. $I, w \models \Box\varphi \iff$
   для любого альтернативного мира w'
   если $\langle w, w' \rangle \in \mathbf{R}$, то $I, w' \models \varphi$;
7. $I, w \models \Diamond\varphi \iff$
   существует такой альтернативный мир w',
   что $\langle w, w' \rangle \in \mathbf{R}$ и $I, w' \models \varphi$.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Пример

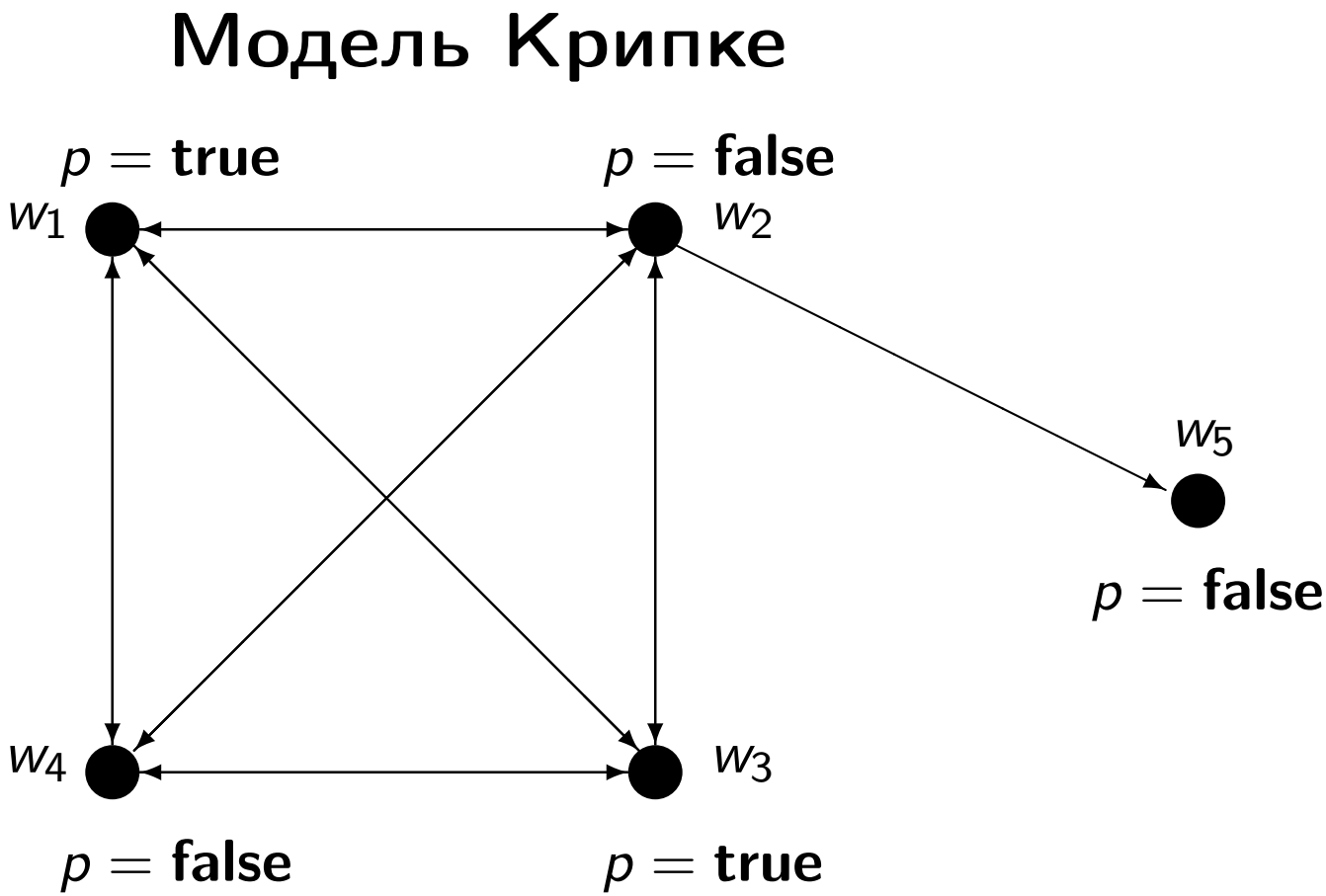
$I, w_1 \models \Diamond p$

$I, w_1 \not\models \Box p$

$I, w_1 \models \Box\Diamond p$

$I, w_5 \models \Box p$

$I, w_5 \not\models \Diamond p$



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Простейшие свойства

1. $\models \Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$;
2. $\models \Box(\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\Box\varphi_1 \to \Box\varphi_2)$;
3. $\models \varphi \Longrightarrow \models \Box\varphi$ (правило необходимости).

В разных приложениях модальность необходимого может пониматься по разному. Отсюда большое разнообразие модальных логик. В разных модальных логиках отношение выполнимости определяется на разных классах шкал. Каждая разновидность шкал (отношения достижимости $\mathbf{R}$) характеризуется определенным законом (формулой) модальной логики.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Характеристические формулы

1. $\Box\varphi \to \varphi$

   рефлексивные шкалы

   $\forall w \mathbf{R}(w, w)$;
2. $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

   транзитивные шкалы

   $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 (\mathbf{R}(w_1, w_2) \& \mathbf{R}(w_2, w_3) \to \mathbf{R}(w_1, w_3))$;
3. $\Diamond\Box\varphi \to \Box\varphi$

   симметричные шкалы

   $\forall w_1 \forall w_2 (\mathbf{R}(w_1, w_2) \to \mathbf{R}(w_2, w_1))$.

Рассмотрим некоторые разновидности модальных логик, которые используются информатике.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Эпистемические логики и мультагентные системы

Эпистемические логики — это разновидности модальных логик, изучающие модальности знания и мнения (веры) идеализированных агентов. Интерес представляют вопросы о том, какими знаниям располагает субъект, насколько он осознает свои знания (и незнания), и какие причинно-следственные связи возникают между утверждениями, касающимися вопросов знания и веры.

В эпистемической логике модальный оператор $\Box\varphi$ следует прочитывать «Я знаю, что φ», а $\Diamond\varphi$ — «Я допускаю, что φ».

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Эпистемические логики и мультагентные системы

Основные законы (аксимы) эпистемической логики:

1. Аксиома адекватности знания: $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
   «Мои знания верны».
2. Аксиома позитивной интроспекции: $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
   «Я вполне представляю все, что мне известно».
3. Аксиома негативной интроспекции: $\Diamond\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi$
   «Я вполне сознаю, что именно мне неизвестно».

Но чаще всего возникают задачи, когда коллектив субъектов (мультиагентная система) пытается совместными усилиями или в конкурентной борьбе достичь какой-то цели. В таком случае каждый агент должен принимать в расчет не только знания о предметной области, но и представления о том, какими знаниями располагают другие агенты.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Задача.

Три мудреца спорили о том, кто из них мудрее. Прохожий взялся разрешить их спор. Он сказал: «У меня в мешке пять шапок: 3 черных и 2 белых. Я завяжу вам глаза, надену каждому на голову одну из шапок, а потом развяжу глаза. Тот из вас, кто первым догадается, какого цвета шапка у него на голове, будет признан мудрейшмим». Мудрецы согласились, и прохожий исполнил все то, о чем он говорил. После того, как с глаз мудрецов были сняты повязки, некоторое время никто не произнес ни слова. И после этого один из мудрецов заявил: «На моей голове черная шапка». Он оказался прав, и был признан мудрейшим.

Вопрос: Докажите, что мудрейший из мудрых слеп.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Эпистемические логики и мультагентные системы

В мультиагентных системах нужно ввести более специальные модальные операторы.

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ — множество агентов. Тогда

$\Box_a \varphi$ означает «Агент a знает, что φ верно».

$\Box_C \varphi$ означает «Все агенты знают, что φ верно».

Специальные разновидности эпистемических логик применяются для описания и проверки требований безопасности сетевых протоколов.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Темпоральные логики

Темпоральные (временные) логики применяются для описания и исследования причинно-следственных зависимостей, развивающихся во времени.
Модальный оператор $\Box$ означает «всегда»,
а оператор $\Diamond$ — «когда-нибудь».

Семантика темпоральных логик существенно зависит от той математической модели, которая используется для описания феномена времени. В самом общем случае в качестве модели времени можно взять любое частично упорядоченное множество. Элементы этого множества соответствуют различным моментам времени.

В качестве темпоральных моделей могут выступать любые модели Крипке, построенные на основе частично упорядоченных шкал. Разные отношения частичного порядка порождают разные темпоральные логики.

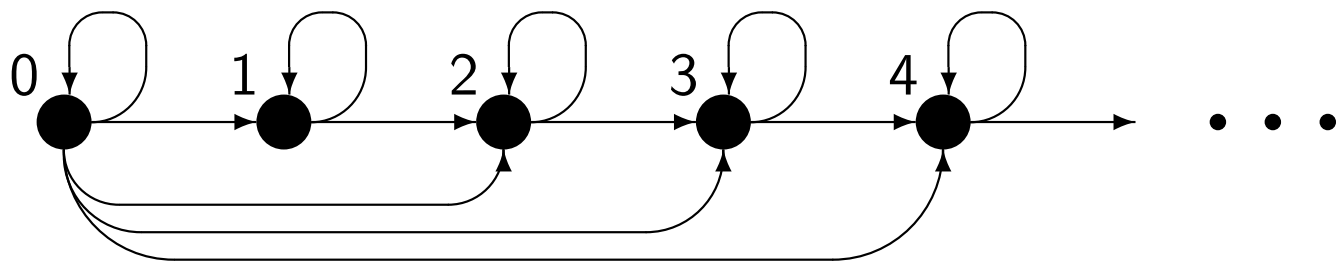
МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Темпоральные логики

Поскольку вычисление — это процесс, развивающийся во времени, состояния которого находятся в причинно-следственной связи друг с другом, темпоральные логики используются для спецификации и верификации программ. Наиболее широкое распространение получили две разновидности темпоральных логик.

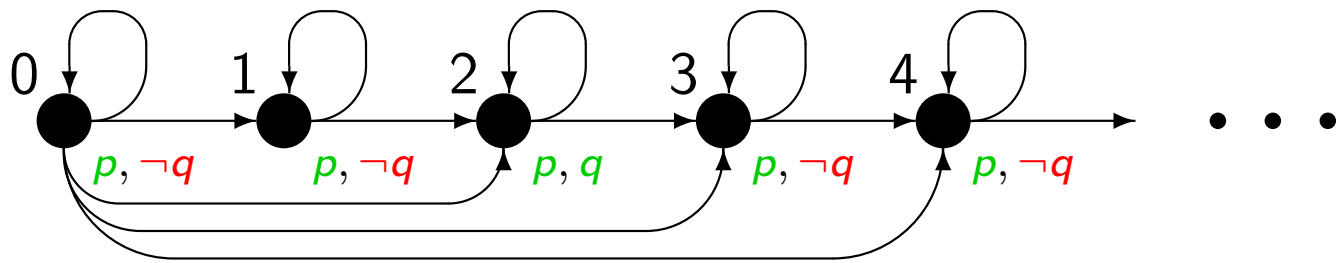
Логика линейного времени LTL

Шкала Крипке для LTL (L inear T emporal L ogics) — это натуральный ряд с естественным отношением порядка $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.



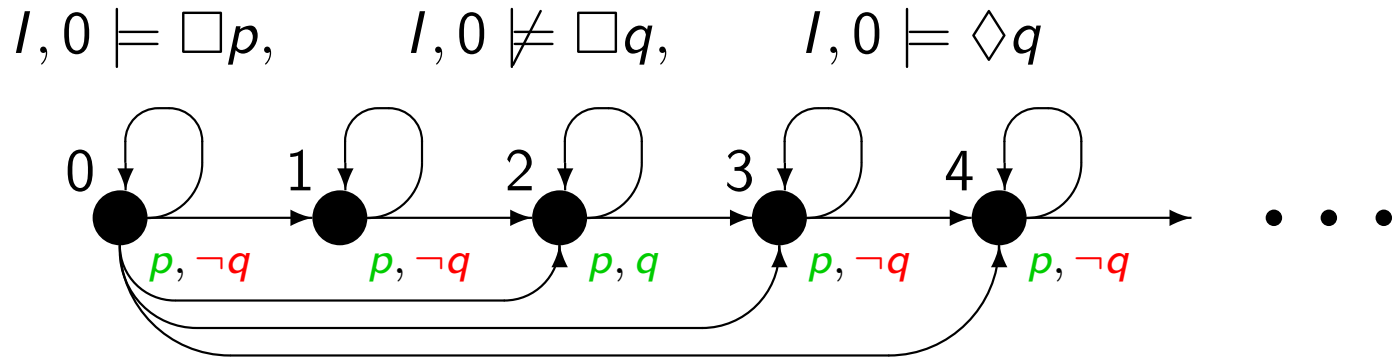
МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика линейного времени LTL



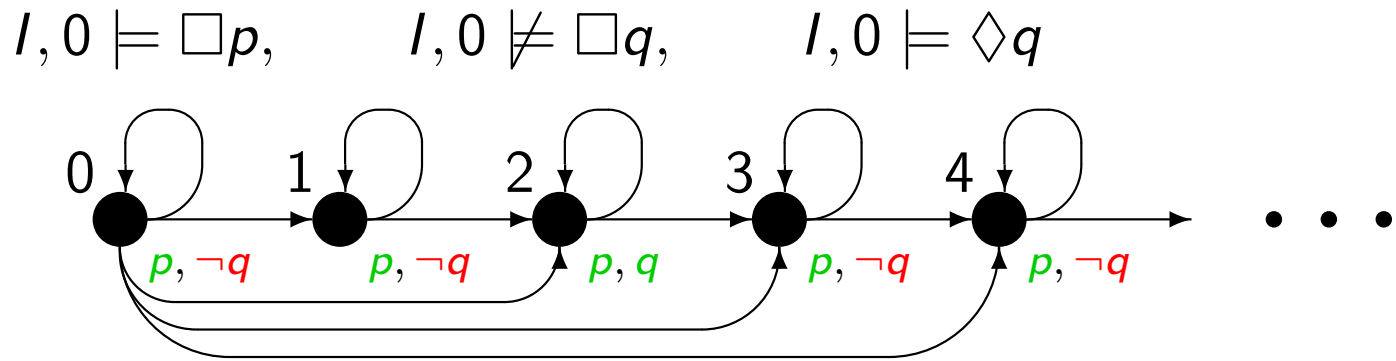
МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика линейного времени LTL



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика линейного времени LTL

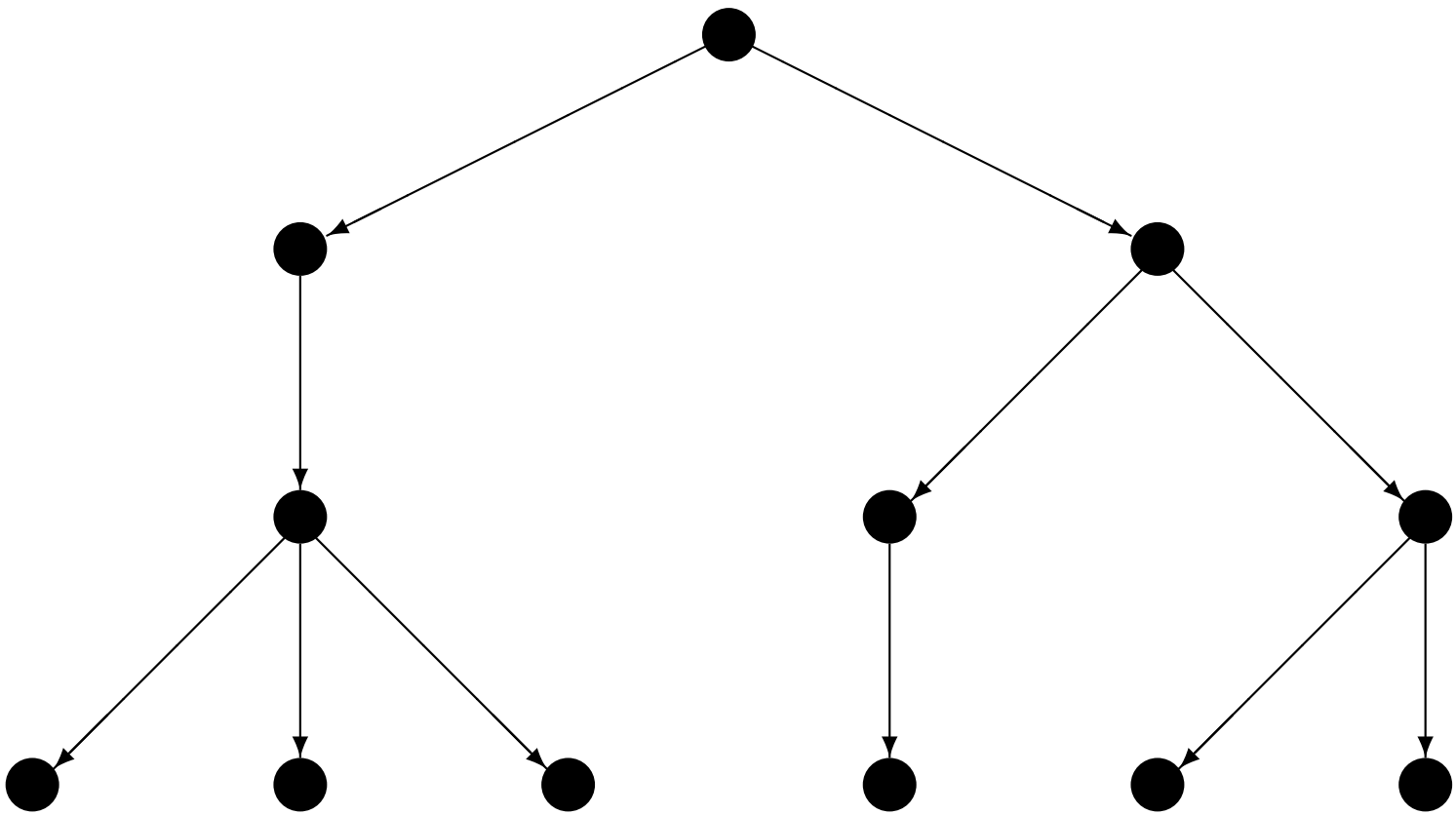


Применение LTL для верификации моделей программ более подробно будет обсуждаться в последующих лекциях.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Темпоральные логики

В других темпоральных логиках время — это ветвящаяся структура; в каждый момент времени может быть несколько альтернатив дальнейшего развития событий.



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика деревьев вычислений CTL

Темпоральные логики такого вида называются логиками ветвящегося времени (BTL, Branching Time Logics).

Одной из логик ветвящегося времени является логика деревьев вычислений (CTL, Computational Tree Logic), используемая для спецификации и верификации распределенных программ и микроэлектронных схем.

В логике CTL имеются темпоральные операторы двух типов — универсальные и экзистенциальные.

$$\forall\Box, \quad \forall\Diamond, \qquad\qquad \exists\Box, \quad \exists\Diamond.$$

Тип темпорального оператора указывет на то, будет ли выполнимость формулы проверяться на всех ветвях древесной модели или только на одной ветви.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика деревьев вычислений CTL

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — древесная модель Крипке для логики CTL, $s_0 \in S$ — одно из состояний модели. Тогда

$I, s_0 \models \forall\Box\varphi \iff$
в каждом состоянии s, достижимом из состояния s_0, верно $I, s \models \varphi$;

$I, s_0 \models \exists\Box\varphi \iff$
существует ветвь, исходящая из состояния s_0, в каждом состоянии s которой верно $I, s \models \varphi$;

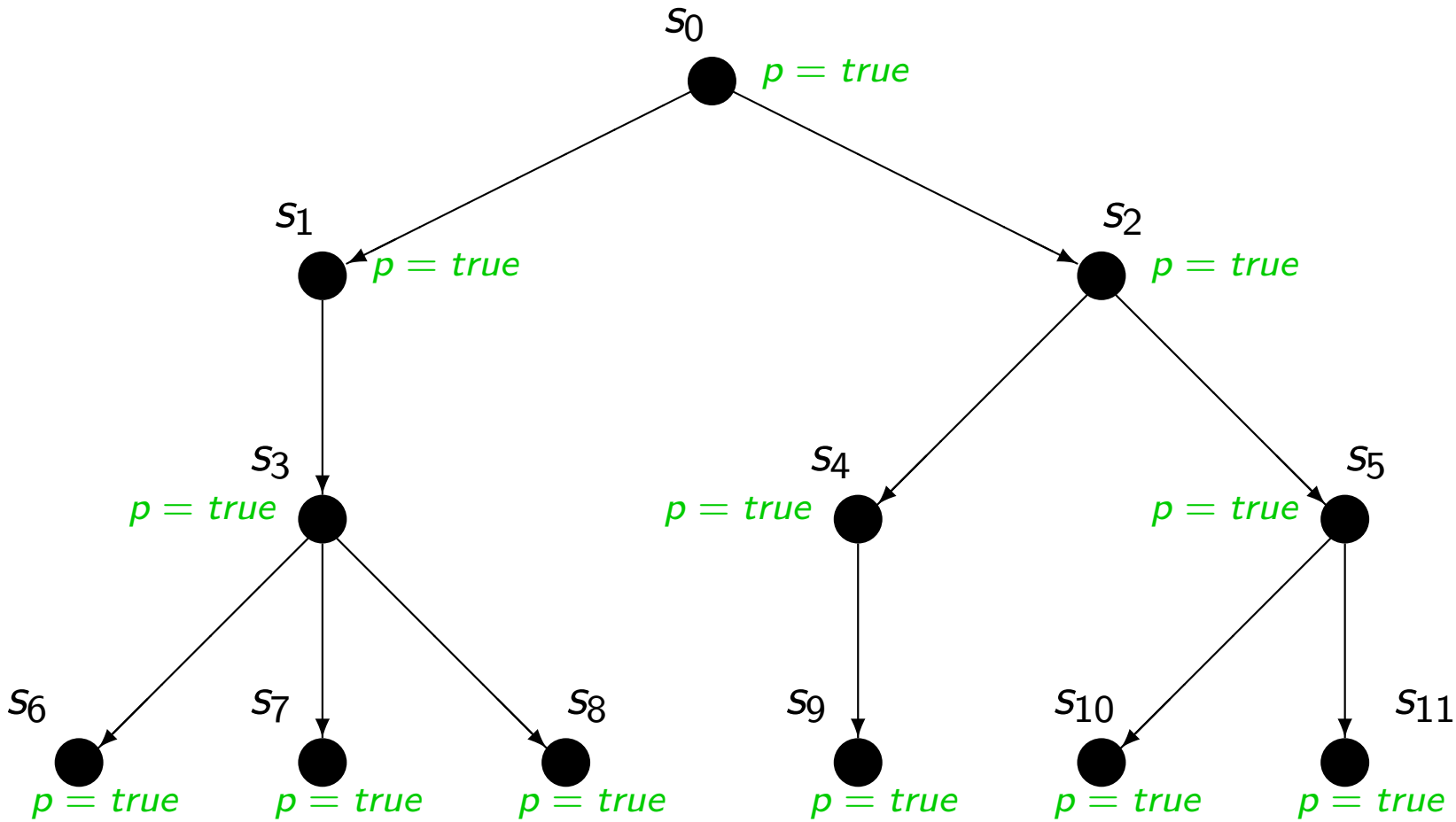
$I, s_0 \models \forall\Diamond\varphi \iff$
в каждой ветви, исходящей из состояния s_0, есть состояние s, в котором верно $I, s \models \varphi$;

$I, s_0 \models \exists\Diamond\varphi \iff$
существует ветвь, исходящая из состояния s_0, в одном из состоянии s которой верно $I, s \models \varphi$.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика деревьев вычислений CTL

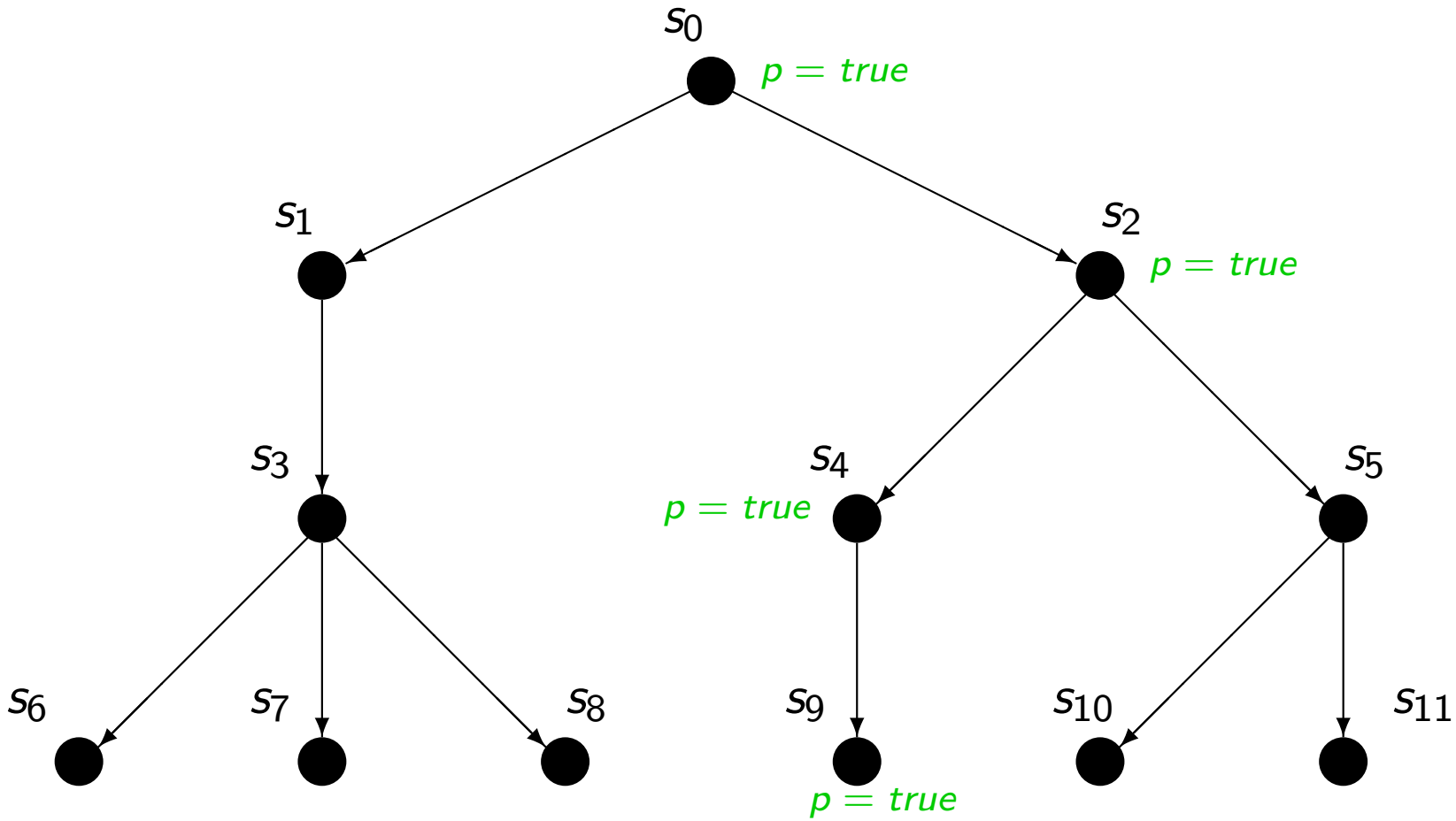
$$I, s_0 \models \forall\Box p$$



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика деревьев вычислений CTL

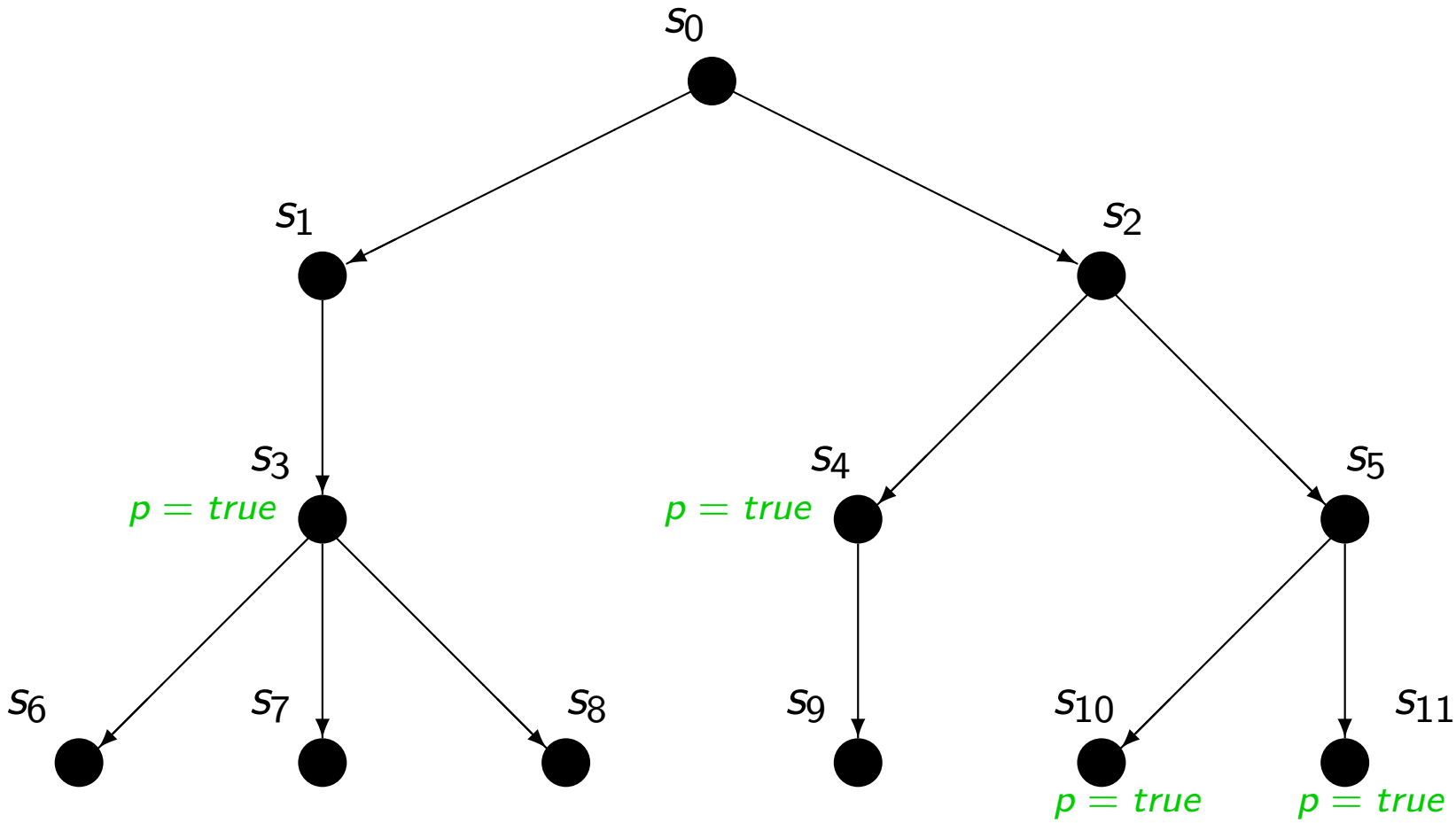
$$I, s_0 \models \exists\Box p$$



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика деревьев вычислений CTL

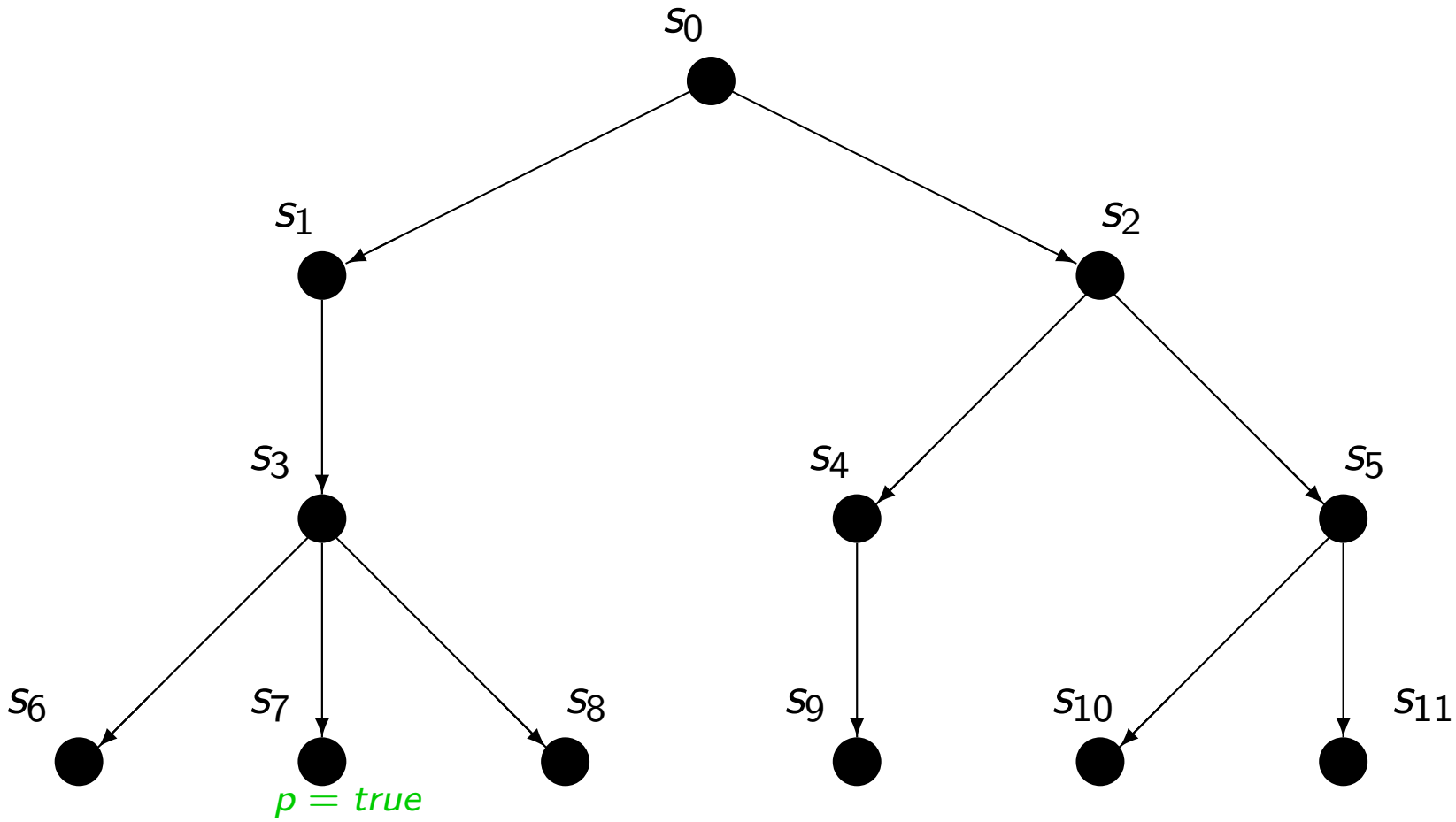
$$I, s_0 \models \forall \Diamond p$$



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика деревьев вычислений CTL

$$I, s_0 \models \exists \Diamond p$$



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика деревьев вычислений CTL

Формулы CTL можно использовать для формальной спецификации многих интересных свойств поведения программ

$\forall\Box\ \exists\Diamond\ \mathit{Restart}$:
на любом этапе функционирования системы можно осуществить ее перезапуск;

$\forall\Box\ (\mathit{Request}\ \rightarrow\ \forall\Diamond\ \mathit{Response})$:
когда бы ни был послан запрос, рано или поздно на него обязательно поступит отклик.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

А как проверить,
что вычисления программ
удовлетворяют заданным спецификациям?

И можно ли эту проверку
автоматизировать?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 18-19.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 20.

Правильные программы. Императивные программы. Задача верификации программ. Логика Хоара. Автоматическая проверка правильности программ.

ПРАВИЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ

Какая компьютерная программа считается хорошей?

Та, которая работает ПРАВИЛЬНО и **эффективно** .

А какая программа считается правильной?

Правильной считается та программа, которая выполняет в точности то, что от нее требуется.

А как убедиться, что программа выполняет то, что от нее требуется?

Для этого нужно

1. Описать строго (формально) требования правильности вычислений;
2. Проверить, что все вычисления программы удовлетворяют этим требованиям.

ПРАВИЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ

Описание требований правильности функционирования программы называется спецификацией программы.

Проверка соблюдения вычислениями программы требований правильности функционирования называется верификацией программы.

Если спецификации программ записать на формальном логическом языке и строго определить операционную семантику программ, то для доказательства правильности программ можно использовать методы математической логики (логический вывод).

ПРАВИЛЬНЫЕ ПРОГРАММЫ

Формальная верификация программ

Преимущества	Проблемы
1. Абсолютно точная проверка правильности программ.	1. Как заставить программистов писать формальные спецификации?
2. Возможность автоматизации построения логического вывода.	2. Как заставить прувер работать эффективно?

И, тем не менее, попробуем...

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Определим синтаксис и семантику императивных программ.

Пусть задана сигнатура $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$, в которой определно множество термов $Term$ и множество атомарных формул $Atom$.
Условимся, что $\Leftarrow$ — это служебный символ, не принадлежащий сигнатуре σ.

Определение

присваивание ::= «переменная» $\Leftarrow$ «терм»
условие ::= «атом» | ($\neg$условие) |
(условие & условие) | (условие $\vee$ условие)
программа ::= присваивание |
программа ; программа |
if «условие» **then** программа **else** программа **fi** |
while условие **do** программа **od**

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Пример

Программа вычисления наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

$Const = \{0, 1, 2, \dots\}$,
$Func = \{+^{(2)}, -^{(2)}\}$,
$Pred = \{=^{(2)}, >^{(2)}, <^{(2)}\}$

while $\neg(x = y)$
do
if $x > y$
then $x \Leftarrow x - y$
else $y \Leftarrow y - x$
fi
od

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Операционная семантика императивных программ

Семантика задает смысл (значение) синтаксических конструкций (слов, формул, программ и пр.).

Значением императивной программы является **отношение вход–выход** между входными данными и результатом вычисления.

Отношение вход–выход программы определяется при помощи отношения переходов между **состояниями вычисления** программы.

Состояние вычисления программы определяется двумя компонентами — **состоянием управления** и **состоянием данных** .

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Определение (состояния вычисления)

Пусть **Var** — это множество переменных, а *GTerm* — это множество основных термов сигнатуры σ.

Оценкой переменных (состоянием данных) будем называть всякое отображение (подстановку) $\theta : \mathbf{Var} \to \mathit{GTerm}$.

Состоянием управления будем называть всякую программу, а также специальный символ $\varnothing$.

Состоянием вычисления будем называть всякую пару $\langle \pi, \theta \rangle$, где π — состояние управления, а θ — оценка переменных.

Запись State_σ будет обозначать множество всевозможных состояний вычислений сигнатуры σ.

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Определение (отношения переходов)

Пусть I — это интерпретация сигнатуры σ.

Тогда отношение переходов для императивных программ — это бинарное отношение $\longrightarrow_I$ на множестве состояний вычисления $State_\sigma$, удовлетворяющее следующим требованиям:

ASS: $\langle x \Rightarrow t,\ \theta\rangle \longrightarrow_I \langle \varnothing,\ \{x/t\}\theta\rangle$;

COMP_$\varnothing$: $\langle \pi_1; \pi_2,\ \theta\rangle \longrightarrow_I \langle \pi_2,\ \eta\rangle$
тогда и только тогда, когда $\langle \pi_1,\ \theta\rangle \longrightarrow_I \langle \varnothing,\ \eta\rangle$;

COMP: $\langle \pi_1; \pi_2,\ \theta\rangle \longrightarrow_I \langle \pi_1'; \pi_2,\ \eta\rangle$
тогда и только тогда, когда $\langle \pi_1,\ \theta\rangle \longrightarrow_I \langle \pi_1',\ \eta\rangle$ и $\pi_1' \neq \varnothing$;

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Определение (отношения переходов)

IF_1: $\langle \textbf{if } C \textbf{ then } \pi_1 \textbf{ else } \pi_2 \textbf{ fi}, \ \theta \rangle \ \longrightarrow_I \ \langle \pi_1, \ \theta \rangle$
тогда и только тогда, когда $I \models C\theta$;

IF_0: $\langle \textbf{if } C \textbf{ then } \pi_1 \textbf{ else } \pi_2 \textbf{ fi}, \ \theta \rangle \ \longrightarrow_I \ \langle \pi_2, \ \theta \rangle$
тогда и только тогда, когда $I \not\models C\theta$;

WHILE_1: $\langle \textbf{while } C \textbf{ do } \pi \textbf{ od}, \ \theta \rangle \ \longrightarrow_I \ \langle \pi; \textbf{ while } C \textbf{ do } \pi \textbf{ od}, \ \theta \rangle$
тогда и только тогда, когда $I \models C\theta$;

WHILE_0: $\langle \textbf{while } C \textbf{ do } \pi \textbf{ od}, \ \theta \rangle \ \longrightarrow_I \ \langle \varnothing, \ \theta \rangle$
тогда и только тогда, когда $I \not\models C\theta$.

Отношение переходов $\longrightarrow_I$ определяет, как изменяется состояние вычисления за один шаг работы интерпретатора императивных программ.

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Определение (вычисления программы)

Пусть π_0 — это императивная программа, θ_0 — оценка переменных.

Частичным вычислением программы π_0 на оценке переменных θ_0 в интерпретации I называется последовательность (конечная или бесконечная) состояний вычисления

$$\langle \pi_0, \theta_0 \rangle, \langle \pi_1, \theta_1 \rangle, \ldots, \langle \pi_{n-1}, \theta_{n-1} \rangle, \langle \pi_n, \theta_n \rangle, \ldots,$$

в которой для любого n, $n \geq 1$, выполняется отношение $\langle \pi_{n-1}, \theta_{n-1} \rangle \longrightarrow_I \langle \pi_n, \theta_n \rangle$.

Вычислением программы π_0 на оценке переменных θ_0 в интерпретации I называется всякое частичное вычисление, которое нельзя продолжить.

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Пример

Пусть I — интерпретация сигнатуры $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$:
$Const = \{0, 1, 2, \ldots, \}$, $Func = \{+^{(2)}, -^{(2)}\}$,
$Pred = \{=^{(2)}, >^{(2)}, <^{(2)}\}$,
предметной областью которой является множество натуральных чисел $\mathcal{N}_0$ с обычными арифметическими операциями и отношениями.

Рассмотрим вычисление программы

π_0: **while** $\neg(x = y)$
do if $x > y$ **then** $x \Leftarrow x - y$ **else** $y \Leftarrow y - x$ **fi od**

на оценке переменных $\theta_0 = \{x/4, y/6\}$.

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

π_0: **while** $\neg(x = y)$
do if $x > y$ **then** $x \Leftarrow x - y$ **else** $y \Leftarrow y - x$ **fi od**

$\theta_0 = \{x/4, y/6\}$

Пример

$$\langle \pi_0,\ \{x/4, y/6\} \rangle$$
$$\downarrow_I$$
$$\langle \textbf{if } x > y \textbf{ then } x \Leftarrow x - y \textbf{ else } y \Leftarrow y - x \textbf{ fi } ; \pi_0,\ \{x/4, y/6\} \rangle$$
$$\downarrow_I$$
$$\langle y \Leftarrow y - x; \pi_0,\ \{x/4, y/6\} \rangle$$
$$\downarrow_I$$
$$\langle \pi_0,\ \{x/4, y/6 - 4\} \rangle$$

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

π_0: **while** $\neg(x = y)$
do if $x > y$ **then** $x \Leftarrow x - y$ **else** $y \Leftarrow y - x$ **fi od**

$\theta_0 = \{x/4, y/6\}$

Пример

$$\langle \pi_0,\ \{x/4, y/6-4\}\rangle$$
$$\downarrow_I$$
$$\langle \textbf{if } x > y \textbf{ then } x \Leftarrow x - y \textbf{ else } y \Leftarrow y - x \textbf{ fi } ; \pi_0,\ \{x/4, y/6-4\}\rangle$$
$$\downarrow_I$$
$$\langle x \Leftarrow x - y; \pi_0,\ \{x/4, y/6-4\}\rangle$$
$$\downarrow_I$$
$$\langle \pi_0,\ \{x/4-(6-4), y/6-4\}\rangle$$
$$\downarrow_I$$
$$\langle \varnothing,\ \{x/4-(6-4), y/6-4\}\rangle$$

ИМПЕРАТИВНЫЕ ПРОГРАММЫ

Как следует из определения, любое вычисление либо является бесконечной последовательностью, либо завершается состоянием $\langle \varnothing, \eta \rangle$. В последнем случае оценка η называется результатом вычисления.

Будем использовать запись $\longrightarrow_I^*$ для обозначения рефлексивного и транзитивного замыкания отношения переходов $\longrightarrow_I$.

Тогда оценка переменных η является результатом вычисления программы π на оценке переменных θ в интерпретации I в том и только том случае, когда выполняется отношение

$$\langle \pi, \theta \rangle \longrightarrow_I^* \langle \varnothing, \eta \rangle.$$

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ ПРОГРАММ

Неформальная постановка.

Программа π считается (частично) корректной , если для любых начальных данных, удовлетворяющих определенному условию φ, результат вычисления (если вычисление завершается) удовлетворяет определенному условию ψ.

Ограничение φ, которое налагается на начальные данные, называется предусловием , а требование ψ, которому должны удовлетворять результаты вычисления, называется постусловием программы.

Задача верификации программы π заключается в проверке частичной корректности программы π относительно заданного предусловия φ и заданного постусловия ψ.

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ ПРОГРАММ

Формальная постановка.

Расширим множество формул логики предикатов, введя в рассмотрение в качестве формул выражения нового специального вида.

Определение

Триплетом Хоара (тройкой Хоара) называется всякое выражение вида

$$\varphi\{\pi\}\psi,$$

где φ, ψ — формулы логики предикатов,
а π — императивная программа.

Обозначим HT_σ множество триплетов Хоара сигнатуры σ.

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ ПРОГРАММ

Выполнимость триплетов Хоара в интерпретациях определяется так:

$$I \models \varphi\{\pi\}\psi \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{для любых оценок переменных } \theta, \eta, \\ \text{если } I \models \varphi\theta \text{ и } \langle \pi, \theta \rangle \longrightarrow_I^* \langle \varnothing, \eta \rangle, \\ \text{то } I \models \psi\eta. \end{array}$$

Определение (частичной корректности программы)

Пусть φ, ψ — формулы логики предикатов, а π — императивная программа.

Программа π называется частично корректной в интерпретации I относительно предусловия φ и постусловия ψ, если триплет $\varphi\{\pi\}\psi$ выполним в интерпретации I, т. е.

$$I \models \varphi\{\pi\}\psi \ .$$

ЛОГИКА ХОАРА

Как же доказать частичную корректность программы?

Попробуем построить систему правил вывода, аналогичных правилам вывода для семантических таблиц.

Такую систему предложил в 1968 г. Хоар. Правила вывода Хоара имеют вид

$$\frac{\Phi}{\Psi}, \quad \frac{\Phi}{\varphi}, \quad \frac{\Phi}{\Psi_1, \Psi_2}, \frac{\Phi}{\varphi, \Psi, \psi},$$

где $\Phi, \Psi, \Psi_1, \Psi_2$ — триплеты Хоара,
φ, ψ — формулы логики предикатов.

ЛОГИКА ХОАРА

Правила вывода Хоара

ASS: $$\frac{\varphi\{x/t\}\ \{x \Leftarrow t\}\ \varphi}{\textbf{true}},$$

CONS: $$\frac{\varphi\{\pi\}\psi}{\varphi \to \varphi',\ \varphi'\{\pi\}\psi',\ \psi' \to \psi},$$

COMP: $$\frac{\varphi\{\pi_1;\ \pi_2\}\psi}{\varphi\{\pi_1\}\chi,\ \chi\{\pi_2\}\psi},$$

IF: $$\frac{\varphi\ \{\textbf{if}\ C\ \textbf{then}\ \pi_1\ \textbf{else}\ \pi_2\ \textbf{fi}\}\ \psi}{(\varphi\&C)\ \{\pi_1\}\ \psi,\ (\varphi\&\neg C)\ \{\pi_2\}\ \psi},$$

WHILE: $$\frac{\varphi\ \{\textbf{while}\ C\ \textbf{do}\ \pi\ \textbf{od}\}\ (\varphi\&\neg C)}{(\varphi\&C)\ \{\pi\}\ \varphi}.$$

ЛОГИКА ХОАРА

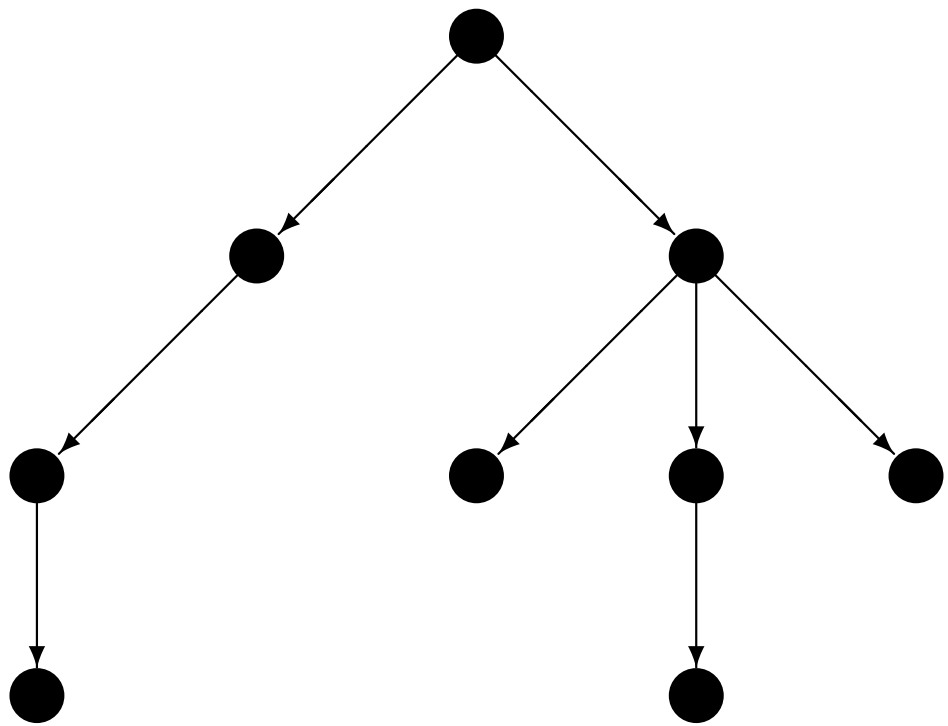
Определение вывода в логике Хоара

Вывод в логике Хоара триплета $\Phi_0 = \varphi_0 \ \{\pi_0\} \ \psi_0$ — это корневое дерево,

ЛОГИКА ХОАРА

Определение вывода в логике Хоара

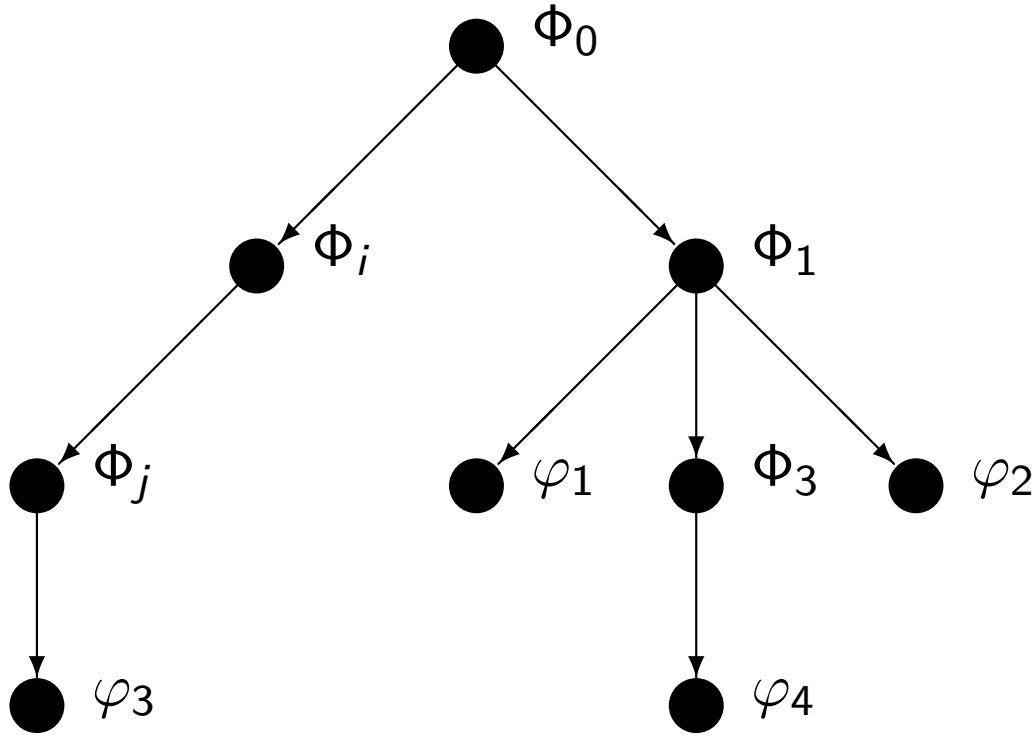
Вывод в логике Хоара триплета $\Phi_0 = \varphi_0 \ \{\pi_0\} \ \psi_0$ — это корневое дерево,



ЛОГИКА ХОАРА

Определение вывода в логике Хоара

Вывод в логике Хоара триплета $\Phi_0 = \varphi_0 \{\pi_0\} \psi_0$ — это корневое дерево, вершинами которого служат триплеты и формулы логики предикатов и при этом

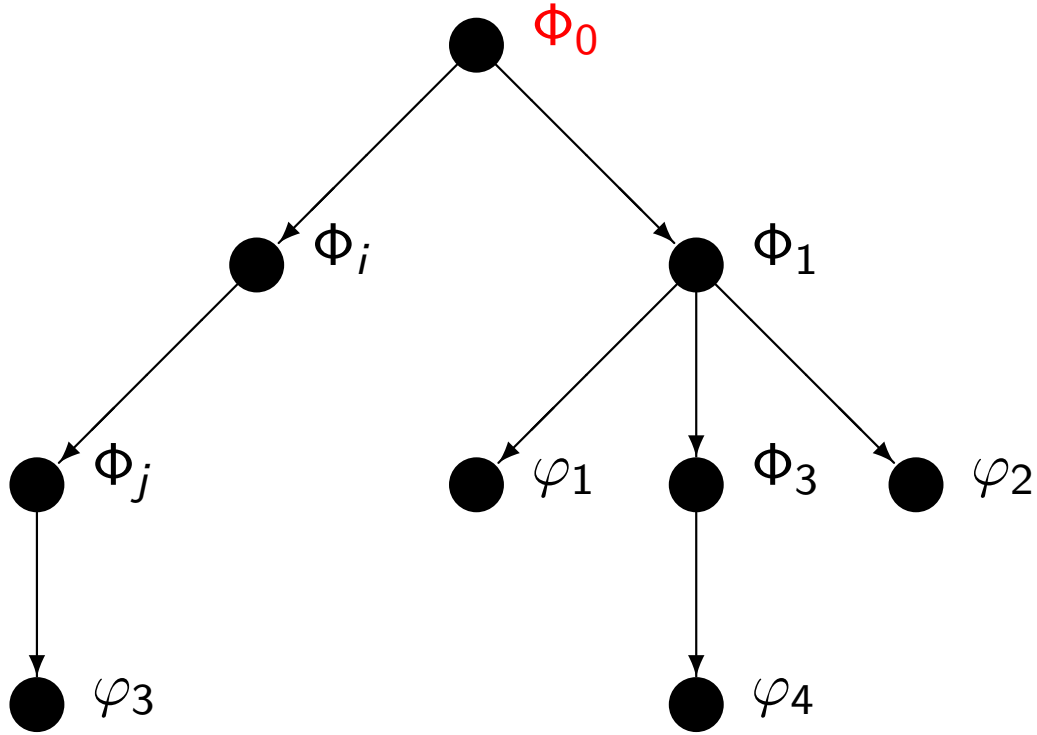


ЛОГИКА ХОАРА

Определение вывода в логике Хоара

Вывод в логике Хоара триплета $\Phi_0 = \varphi_0 \{\pi_0\} \psi_0$ — это корневое дерево, вершинами которого служат триплеты и формулы логики предикатов и при этом

1) корнем дерева является триплет Φ_0;



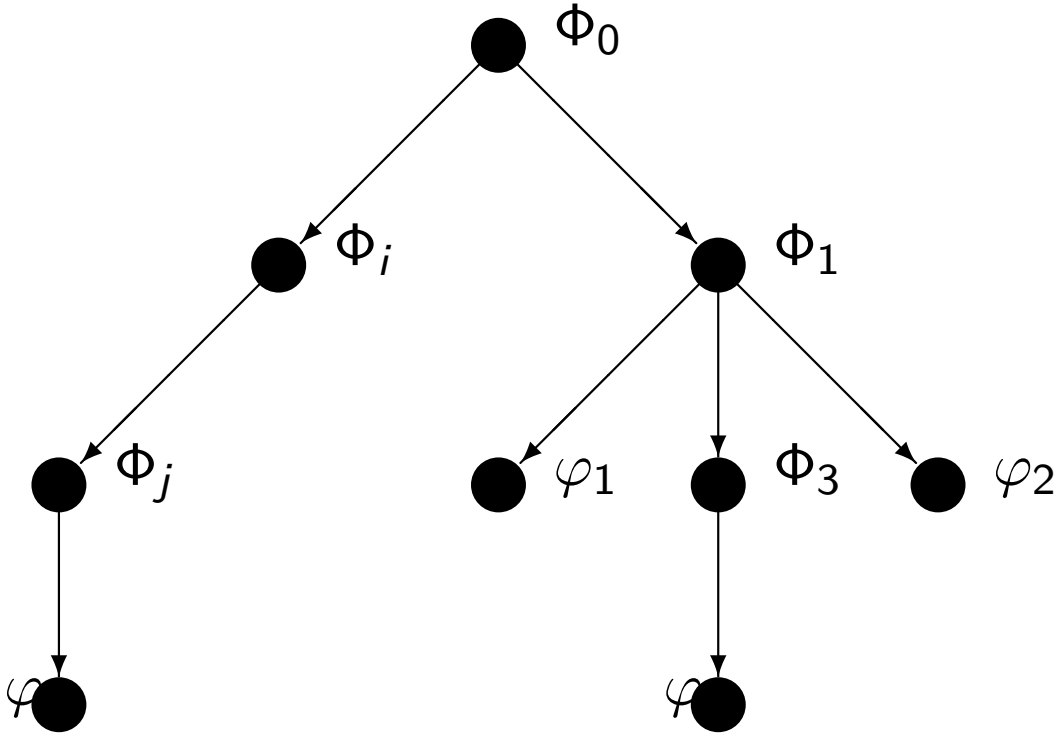
ЛОГИКА ХОАРА

Определение вывода в логике Хоара

2) из вершины Φ_i исходят дуги в вершину Φ_j

$\Longleftrightarrow$

$\frac{\Phi_i}{\Phi_j}$ — правило табличного вывода;



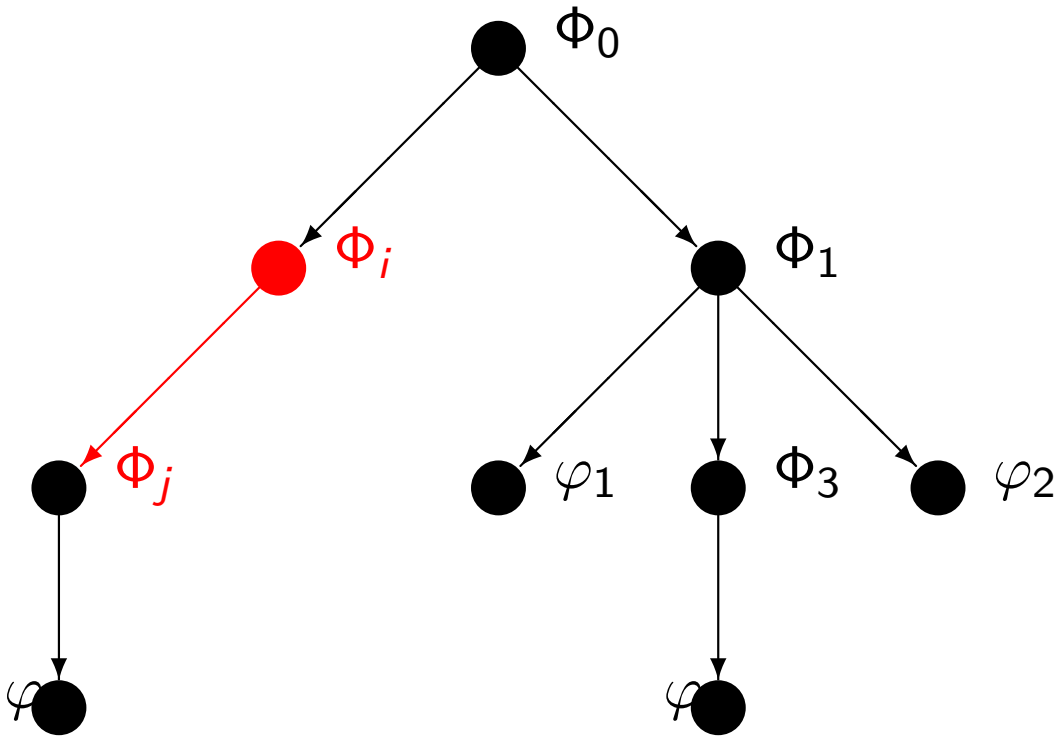
ЛОГИКА ХОАРА

Определение вывода в логике Хоара

2) из вершины Φ_i исходят дуги в вершину Φ_j

$\Longleftrightarrow$

$\frac{\Phi_i}{\Phi_j}$ — правило табличного вывода;



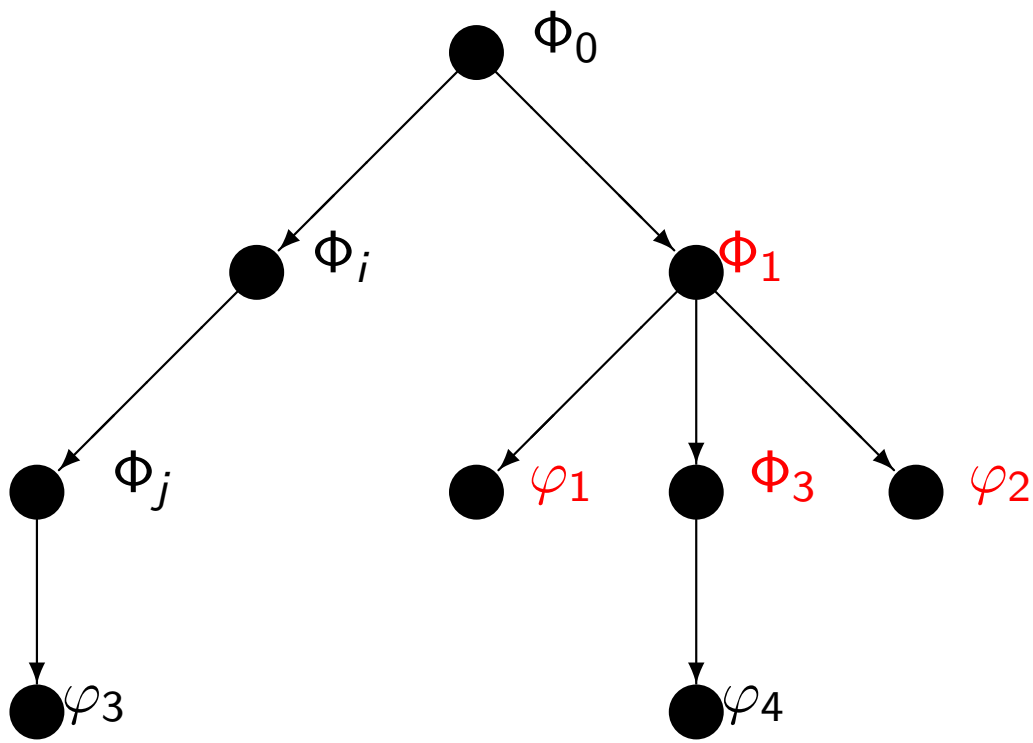
ЛОГИКА ХОАРА

Определение вывода в логике Хоара

2) из вершины Φ_1 исходят дуги в вершины φ_1, Φ_3, φ_2

$\Longleftrightarrow$

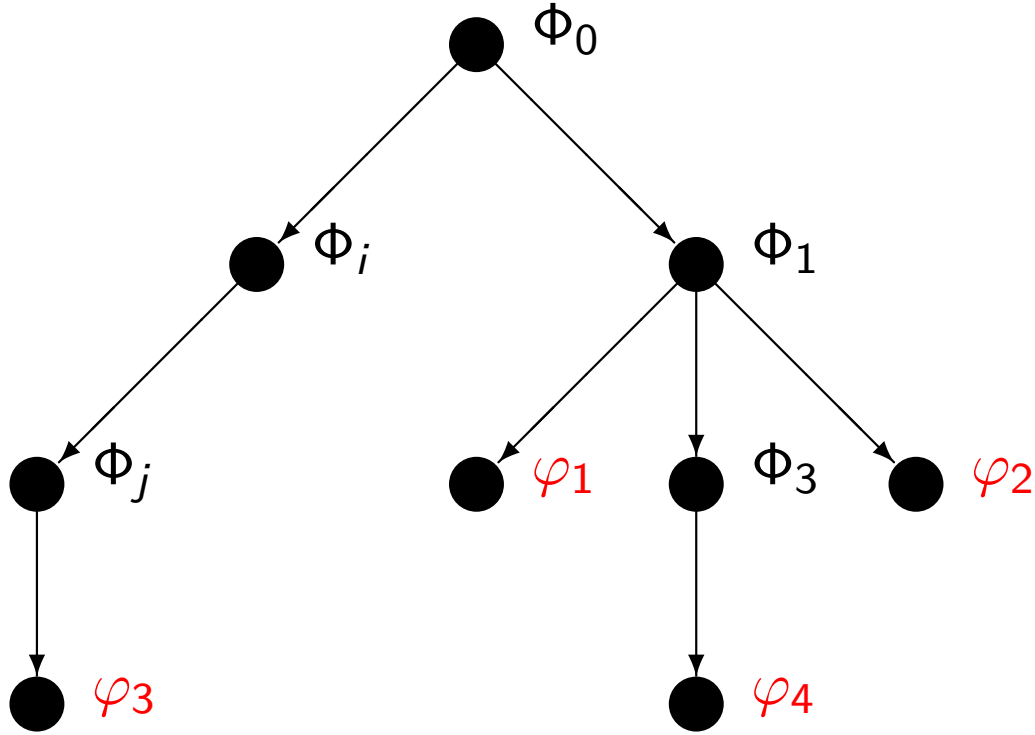
$$\frac{\Phi_1}{\varphi_1,\ \Phi_3,\ \varphi_2}$$ — правило табличного вывода;



ЛОГИКА ХОАРА

Определение вывода в логике Хоара

3) листьями дерева являются формулы логики предикатов.



ЛОГИКА ХОАРА

Определение вывода в логике Хоара

Вывод триплета $\Phi_0 = \varphi_0 \ \{\pi_0\} \ \psi_0$ в логике Хоара называется успешным в интерпретации I, если дерево вывода является конечным, и все его листовые вершины — это истинные в интерпретации I формулы логики предикатов.

ЛОГИКА ХОАРА

Пример

Покажем, что программа

π_0: **while** $\neg(x = y)$
do if $x > y$ **then** $x \Leftarrow x - y$ **else** $y \Leftarrow y - x$ **fi od**

правильно вычисляет наибольший общий делитель двух положительных целых чисел.

Для этого необходимо сформулировать предусловие φ_0 и постусловие ψ_0, соответствующее этому требованию, и построить успешный вывод триплета $\varphi_0 \ \{\pi_0\} \ \psi_0$ в логике Хоара.

ЛОГИКА ХОАРА

Пример

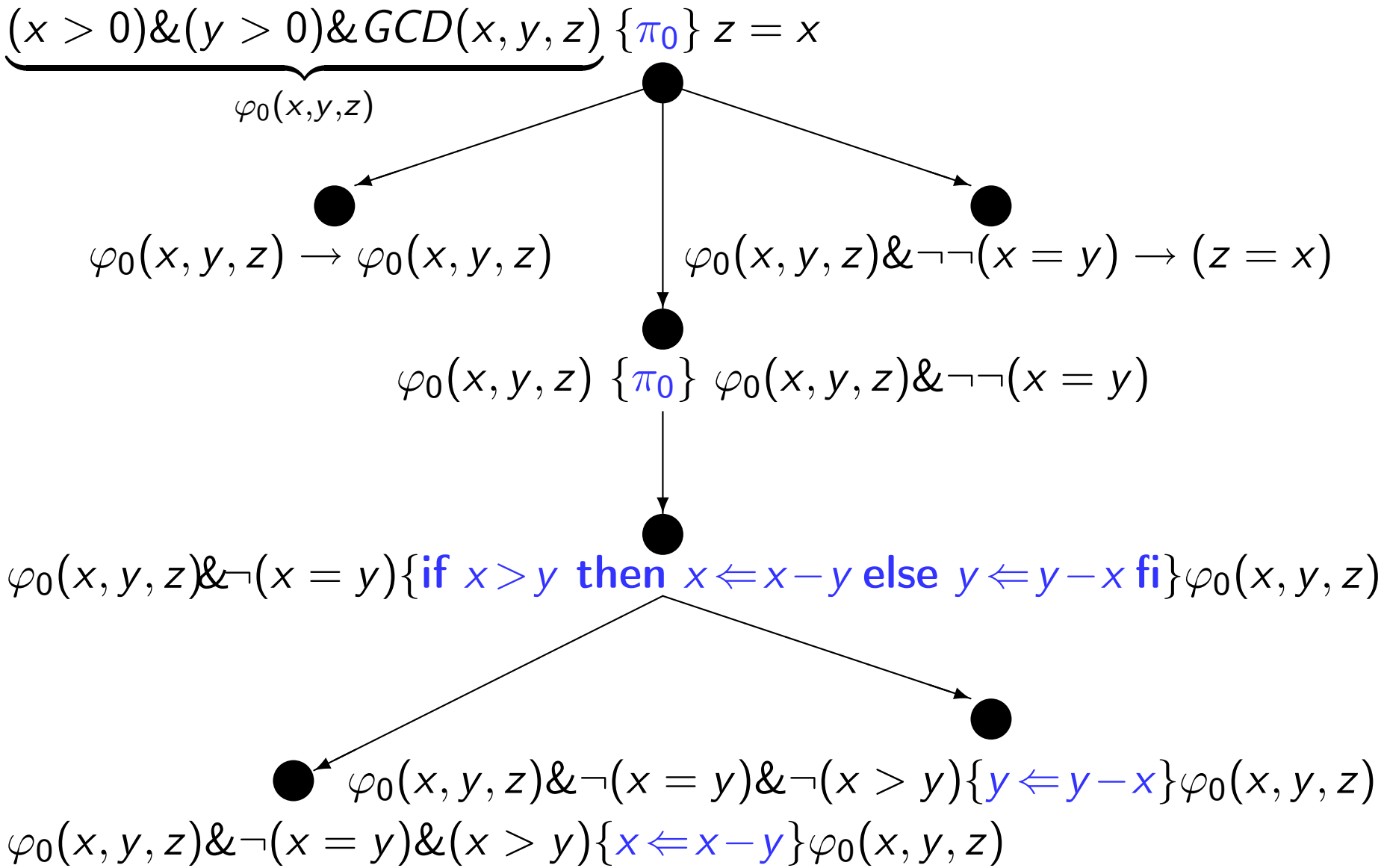
Для удобства обозначений введем некоторые вспомогательные формулы:

$$\begin{array}{lcl} DIV(x,z) & : & \exists u\ (u \times z = x), \\ GCD(x,y,z) & : & DIV(x,z)\ \&\ DIV(y,z)\ \& \\ & & \forall u\ (DIV(x,u) \& DIV(y,u) \rightarrow (u \leq z)). \end{array}$$

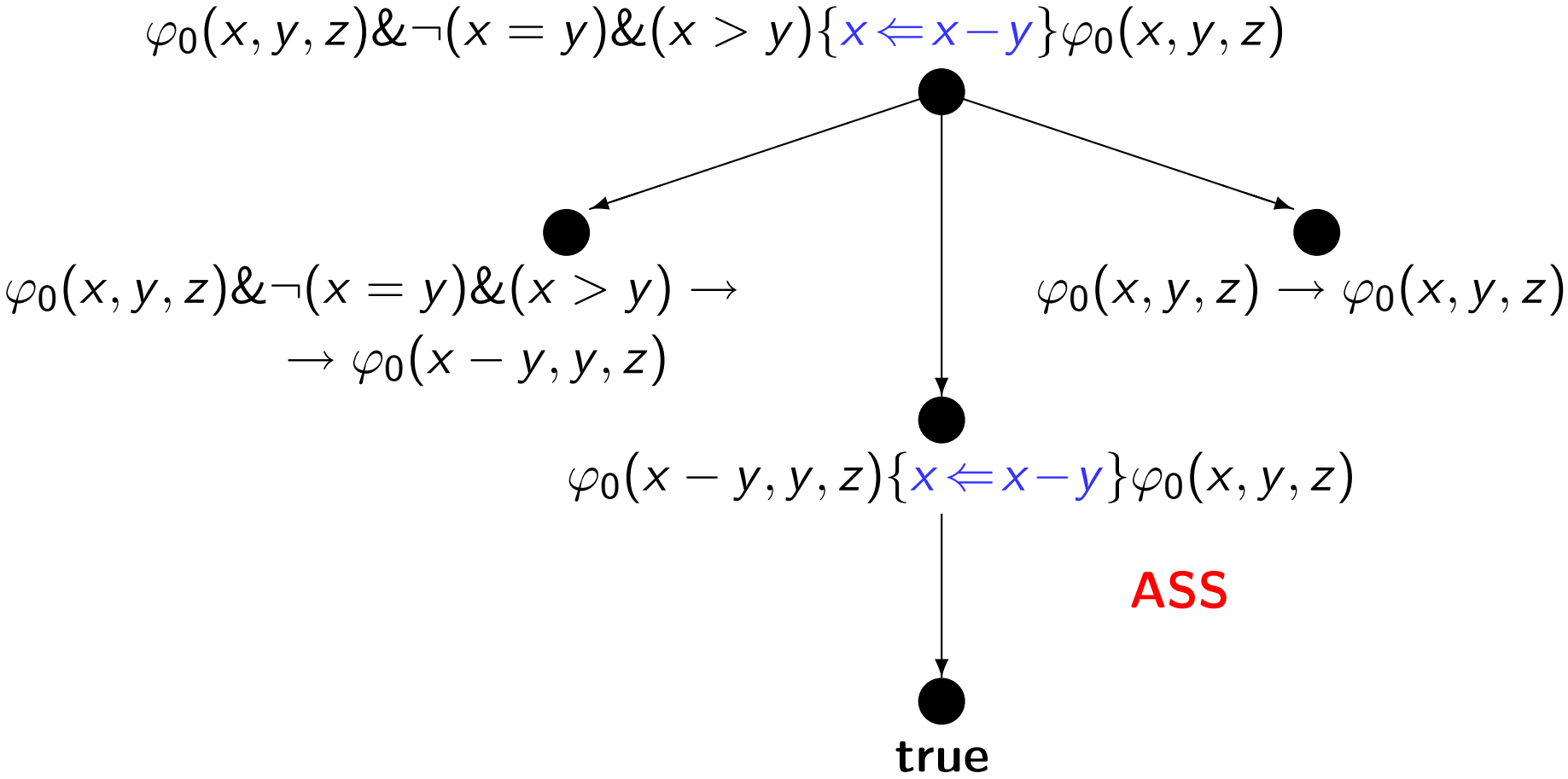
Тогда

$$\begin{array}{lcl} \varphi_0(x,y,z) & : & (x > 0)\ \&\ (y > 0)\ \&\ GCD(x,y,z), \\ \psi_0(x,z) & : & z = x. \end{array}$$

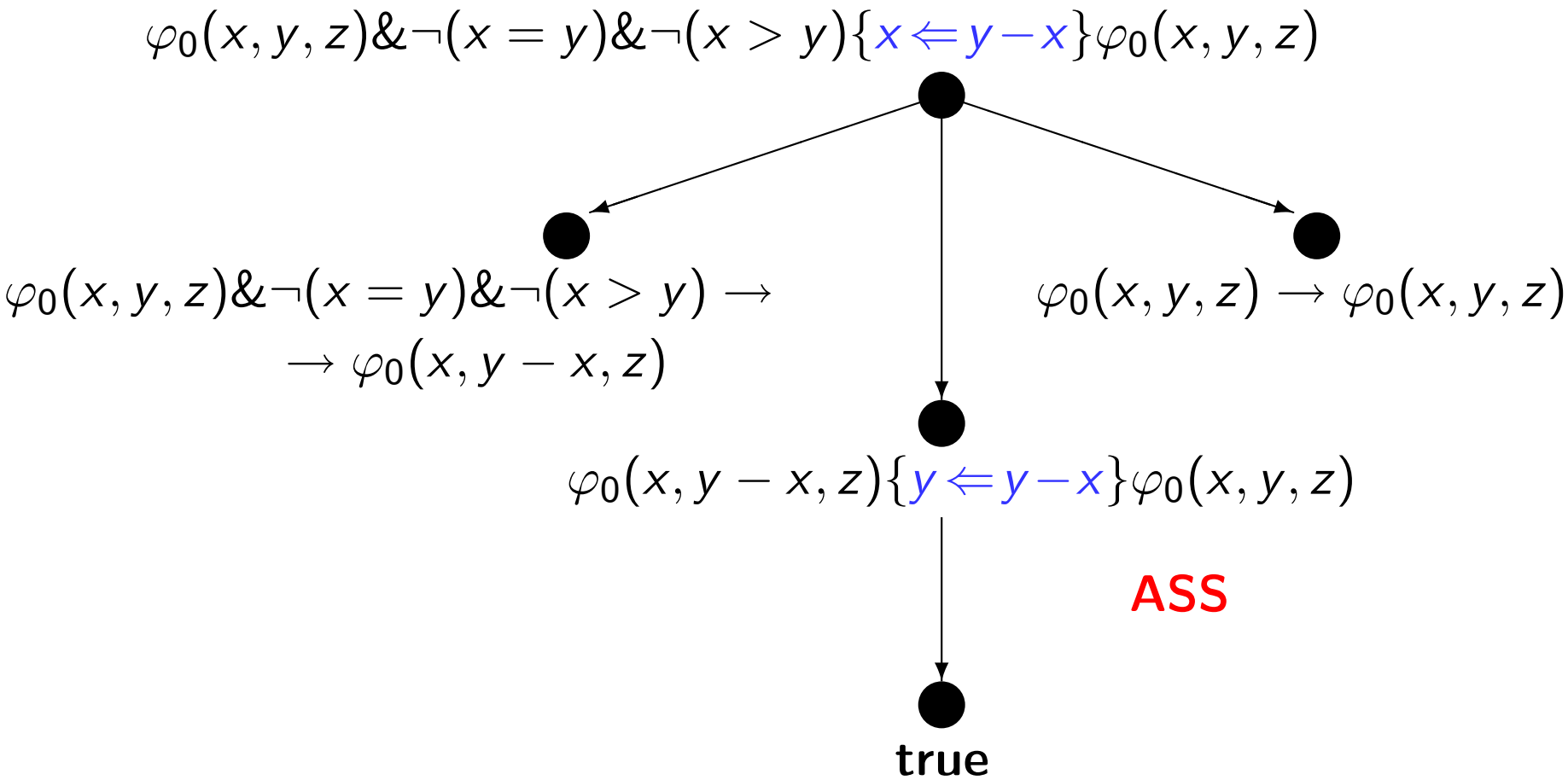
π_0: **while** $\neg(x = y)$
do if $x > y$ **then** $x \Leftarrow x - y$ **else** $y \Leftarrow y - x$ **fi od**



Левая ветвь


$\varphi_0(x,y,z)\&\neg(x=y)\&(x>y)\{x \Leftarrow x-y\}\varphi_0(x,y,z)$
$\varphi_0(x,y,z)\&\neg(x=y)\&(x>y) \rightarrow$
$\rightarrow \varphi_0(x-y,y,z)$
$\varphi_0(x,y,z) \rightarrow \varphi_0(x,y,z)$
$\varphi_0(x-y,y,z)\{x \Leftarrow x-y\}\varphi_0(x,y,z)$
ASS
true

Правая ветвь



ЛОГИКА ХОАРА

Пример

Покажем, что построенный вывод в логике Хоара является успешным для стандартной арифметической интерпретации $I_0 = \langle D_{I_0} = \{0, 1, 2, \dots\}, \{+, -, \times\}, <, >, =, \geq, \leq\rangle$.

Для этого достаточно установить истинность в интерпретации I_0 всех формул, стоящих в листьях построенного вывода.

1. $I_0 \models \varphi(x, y, z) \to \varphi(x, y, z)$ Очевидно.
2. $I_0 \models \varphi_0(x, y, z)\&\neg\neg(x = y) \to (z = x)$, т. е.
   $I_0 \models (x > 0)\&(y > 0)\&(x = y)\&GCD(x, y, z) \to (z = x)$.
   Верно.

ЛОГИКА ХОАРА

Пример

3. $I_0 \models \varphi_0(x, y, z) \& \neg(x = y) \& (x > y) \rightarrow$
   $\rightarrow \varphi_0(x - y, y, z)$, т. е.
   $I_0 \models (x > 0) \& (y > 0) \& (x > y) \& GCD(x, y, z) \rightarrow$
   $\rightarrow (x - y > 0) \& (y > 0) \& GCD(x - y, y, z)$.
   Верно.
4. $I_0 \models \varphi_0(x, y, z) \& \neg(x = y) \& \neg(x > y) \rightarrow$
   $\rightarrow \varphi_0(x, y - x, z)$, т. е.
   $I_0 \models (x > 0) \& (y > 0) \& (y > x) \& GCD(x, y, z) \rightarrow$
   $\rightarrow (x > 0) \& (y - x > 0) \& GCD(x, y - x, z)$.
   Верно.
5. $I_0 \models$ **true**. Очевидно.

Таким образом, все листовые формулы вывода истинны в интерпретации I_0. Значит, вывод триплета $\varphi_0 \ \{\pi_0\} \ \psi_0$ является успешным выводом в интерпретации I_0.

ЛОГИКА ХОАРА

Теорема корректности

Для любой интерпретации I и для любого правила вывода логики Хоара

$$\frac{\Phi}{\Psi}, \quad \frac{\Phi}{\varphi}, \quad \frac{\Phi}{\Psi_1, \Psi_2}, \quad \frac{\Phi}{\varphi, \Psi, \psi},$$

если $I \models \Psi$, $\quad I \models \varphi$, $\quad \begin{cases} I \models \Psi_1, \\ I \models \Psi_2, \end{cases} \quad \begin{cases} I \models \varphi, \\ I \models \Psi, \\ I \models \psi, \end{cases}$

то $I \models \Phi$.

Доказательство.

Рассмотрим поочередно все правила вывода логики Хоара.

ЛОГИКА ХОАРА

Доказательство.

Правило

ASS: $\dfrac{\varphi\{x/t\}\ \{x \Leftarrow t\}\ \varphi}{\textbf{true}}$.

Покажем, что в любой интерпретации I верно

$$I \models \varphi\{x/t\}\ \{x \Leftarrow t\}\ \varphi. \qquad (*)$$

Пусть θ — произвольная оценка переменных, и пусть $I \models \varphi\{x/t\}\theta$.
Тогда согласно операционной семантике императивных программ имеется единственное вычисление

$$\langle x \Leftarrow t,\ \theta\rangle \ \longrightarrow_I\ \langle \varnothing,\ \eta\rangle,$$

и при этом $\eta = \{x/t\}\theta$.
Очевидно, $I \models \varphi\eta$, и это доказывает $(*)$.

ЛОГИКА ХОАРА

Доказательство.

Для остальных правил доказательство корректности проводится по той же схеме, но более изощренно.
Попробуйте завершить доказательство самостоятельно.

□

Следствие.

Если триплет $\varphi\{\pi\}\psi$ имеет успешный в интерпретации I вывод, то программа π частично корректна в интерпретации I относительно предусловия φ и постусловия ψ.

В частности, это означает, что исследованная нами программа вычисления наибольшего общего частично корректна в арифметической интерпретации I_0.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

Как автоматизировать верификацию программ?

Для этого нужно выяснить

1. Полна ли система правил вывода логики Хоара?
2. Существует ли алгоритм построения успешного вывода?

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

Вопрос о полноте правил вывода Хоара.

На самом деле, здесь не один а три вопроса.

1. Верно ли, что для каждой интерпретации *I* существует система правил вывода, позволяющая для каждого триплета $\Phi = \varphi\{\pi\}\psi$ построить успешный вывод Φ в интерпретации *I* и **доказать его успешность** в случае $I \models \Phi$?

Ответ отрицательный . Следует из теоремы Геделя о неполноте.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

Вопрос о полноте правил вывода Хоара.

2. Верно ли, что для каждой интерпретации *I* существует система правил вывода, позволяющая для каждого триплета $\Phi = \varphi\{\pi\}\psi$ построить успешный вывод Φ в интерпретации *I* (**но не гарантирующая доказательства его успешности**) в случае $I \models \Phi$?

Ответ отрицательный . Базовые предикаты сигнатуры σ могут быть недостаточно выразительными для представления всех тех отношений между переменными программы, которые нужны для построения успешного вывода.
В результате не найдется нужных формул φ', ψ' для применения правила

CONS: $$\frac{\varphi\{\pi\}\psi}{\varphi \to \varphi',\ \varphi'\{\pi\}\psi',\ \psi' \to \psi}\ .$$

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

Вопрос о полноте правил вывода Хоара.

3. Верно ли, что для некоторых интерпретаций I существует система правил вывода Хоара, которая позволяет для каждого триплета $\Phi = \varphi\{\pi\}\psi$ построить успешный вывод Φ в интерпретации I в случае $I \models \Phi$?

Ответ положительный . Достаточно, чтобы для любого цикла $\pi =$ **while** C **do** π' **od** существовал такой терм t_π, что для любой оценки переменных θ значение терма $t_\pi\theta$ равно $n+1$ тогда и только тогда, когда цикл π в вычислении $\langle \pi,\ \theta \rangle$ совершает n итераций.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

Что нужно для построения успешного вывода?

- Необходимо иметь эффективный прувер для проверки истинности формул в разных интерпретациях:

$$I \models \varphi \ .$$

.

CONS: $$\frac{\varphi\{\pi\}\psi}{\varphi \to \varphi',\ \varphi'\{\pi\}\psi',\ \psi' \to \psi} \ ,$$

поскольку неясно, какие формулы φ', ψ' нужно выбирать в каждом случае.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

Стратегия вывода в логике Хоара.

Определение

Пусть заданы интерпретация I, императивная программа π и постусловие ψ. Тогда формула φ_0 называется слабейшим предусловием (weakest postcondition) для программы π и постусловия ψ, если

1. $I \models \varphi_0\{\pi\}\psi$,
2. для любой формулы φ, если $I \models \varphi\{\pi\}\psi$, то $I \models \varphi \to \varphi_0$.

Слабейшее предусловие для программы π и постусловия ψ условимся обозначать $wpr(\pi, \psi)$.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

Какая польза от слабейшего предусловия?

Теорема

$$I \models \varphi\{\pi\}\psi \iff \begin{cases} I \models \mathit{wpr}(\pi, \psi)\{\pi\}\psi, \\ I \models \varphi \to \mathit{wpr}(\pi, \psi). \end{cases}$$

Таким образом, задача построения успешного вывода сводится к задаче вычисления $\mathit{wpr}(\pi, \psi)$.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

А как вычислять слабейшее предусловие?

Теорема

$wpr(x \Leftarrow t,\ \psi) = \psi\{x/t\},$

$wpr(\pi_1;\ \pi_2,\ \psi) = wpr(\pi_1,\ wpr(\pi_2,\ \psi)),$

$wpr(\textbf{if}\ C\ \textbf{then}\ \pi_1\ \textbf{else}\ \pi_2\ \textbf{fi}, \psi) =$

$$C \& wpr(\pi_1,\ \psi) \vee \neg C \& wpr(\pi_2,\ \psi),$$

Доказательство

Самостоятельно.

Таким образом, для многих операторов (программ) слабейшее предусловие вычисляется автоматически.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ПРОГРАММ

Неужели все так просто?

Увы, нет. Главную трудность представляет оператор цикла **while** C **do** π **od**. Единственный способ верифицировать этот оператор — это воспользоваться производным правилом:

$$\textbf{WHILE-GEN:}\quad \frac{\varphi\ \{\textbf{while } C \textbf{ do } \pi \textbf{ od}\}\ (\psi)}{\varphi \to \chi,\ (\chi \& C)\ \{\pi\}\ \chi,\ (\chi \& \neg C) \to \psi}\ .$$

Это правило требует введения вспомогательной формулы χ, которая называется инвариантом цикла . Инвариант цикла зависит от программы π и условия C.
Автоматическая генерация инвариантов цикла — это ключевая задача в решении проблемы автоматической верификации программ.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 20.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

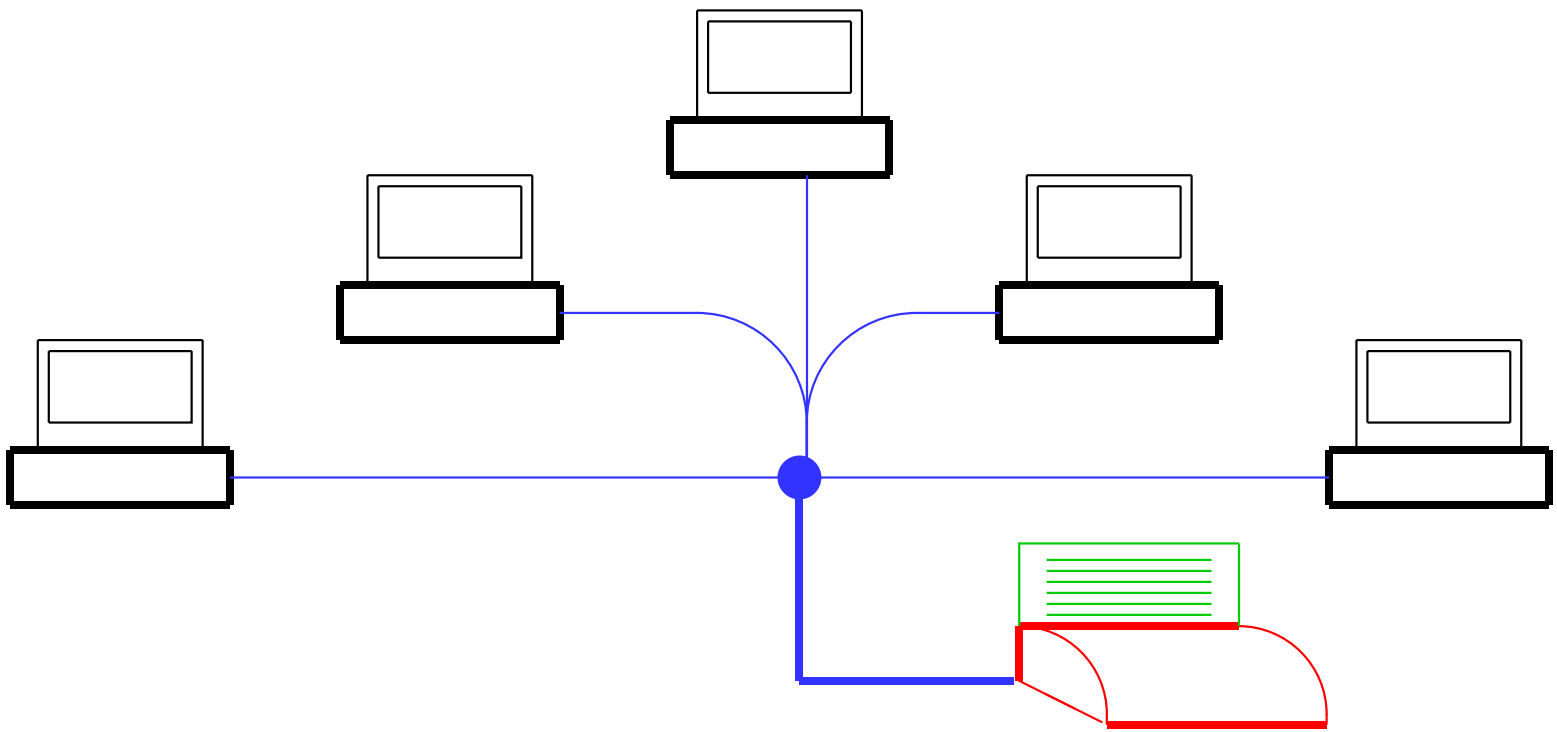
Лекция 21.

Верификация распределенных программ. Логика линейного времени PLTL. Размеченные системы переходов. Задача верификации моделей программ.

ВЕРИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОГРАММ

Задача

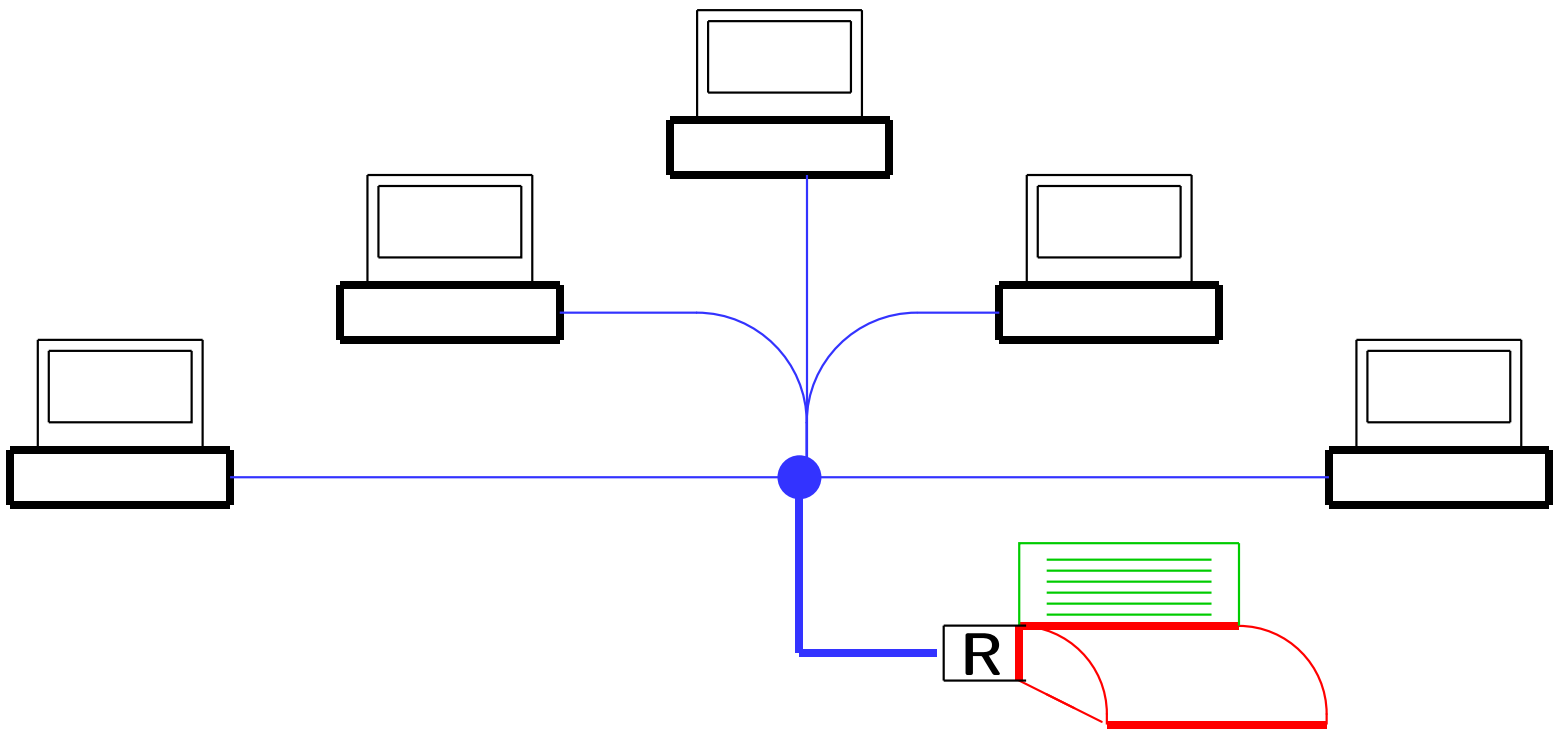
Имеется несколько компьютеров и только один принтер. Ни один компьютер не осведомлен о существовании других компьютеров. Как правильно организовать их взаимодействие, чтобы все они могли пользоваться этим принтером?



ВЕРИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОГРАММ

Задача

Предполагается также, что у принтера есть единственный однобитовый регистр **R**, общедоступный для считывания и записи. Этот регистр может находится в одном из двух состояний — *busy* (принтер занят) и *free* (принтер свободен).



ВЕРИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОГРАММ

Прежде чем писать программу (драйвер), обеспечивающую взаимодействие каждого компьютера с принтером, нужно сформулировать требования, предъявляемые к этой программе.

1. Всякий раз, когда принтер свободен и хотя бы один компьютер собирается отправить данные на печать, принтер будет рано или поздно занят;
2. Всякий раз, после того как принтер оказался занят, он должен когда-нибудь приступить к печати;
3. Компьютер, завершивший печать, должен когда-нибудь освободить принтер;
4. Данные на печать всегда передает не более чем один компьютер.

А какие еще требования разумно предъявить к нашему драйверу?

ВЕРИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОГРАММ

Для связи с принтером программист предложил снабдить каждый компьютер одной и той же программой

L_1: **while** $R \neq$ *free* **do wait od** ;

L_2: R = *busy*;

L_3: **output**(X,*printer*);

L_4: R = *free*;

Это простая и разумная программа.
Но будет ли система компьютеров, снабженных этой программой, вести себя в соответствии с указанными требованиями?

ВЕРИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОГРАММ

Если мы имеем дело с **последовательной программой**, то наиболее простой способ проверки ее правильности — это тестирование. Тестирование, вообще говоря, не гарантирует того, что все вычисления являются правильными, но оно позволяет, по крайней мере, убедиться в том, что программа ведет себя правильно на тестовых примерах.

Но если мы занимаемся верификацией **распределенных программ**, состоящих из нескольких процессов, работающих на независимых вычислительных устройствах, то тестирование не позволяет проверить правильность поведения распределенной системы даже на тестовых примерах.

Почему?

ВЕРИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОГРАММ

Предположим, что на заданных входных данных (тестовом примере) каждый из 20 процессов распределенной системы выполняет всего лишь одно действие. Тогда вычисление системы может быть физически реализовано $20! > 2^{18}$ способами в зависимости от той последовательности, в которой будут завершаться выполнения этих действий. Ясно, что рассмотреть все эти выполнения практически невозможно.

А вместе с тем одни те же действия, выполненные в разной последовательности, могут приводить к разным результатам:

«Наполнить бассейн водой» $\|$ «Прыгнуть в бассейн с вышки»

Как же проверять правильность распределенных систем?

ВЕРИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОГРАММ

Верификацию распределенных систем нужно автоматизировать. Это можно сделать, например, так.

1. Выбрать логический язык $\mathcal{L}$, на котором можно описывать требования, предъявляемые к программе. Представить эти требования в виде формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.
2. Выбрать математическую модель M, адекватно представляющую все вычисления программы. Модель должна быть устроен так, чтобы каждое вычисление I в модели M являлось интерпретацией языка $\mathcal{L}$.
3. Проверить выполнимость формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ на всех вычислениях модели M. Для проверки выполнимости формул языка $\mathcal{L}$ на модели программы M должен быть разработан эффективный алгоритм.

Такой подход к проверке правильности программ назвается верификацией моделей программ (англ. model-checking).

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

При верификации распределенных систем, как правило, требуется проверить, что в каждом вычислении системы некоторые события (выполнение того или иного действия, прием/передача сообщений и пр.) происходят в определенной последовательности.

Каждое событие *event* можно охарактеризовать булевой переменной (0-местным предикатом) p_{event}, которая принимает значение **true** в том и только том случае, когда осуществляется событие *event*. Таким образом, в логическом языке $\mathcal{L}$ не нужны предметные переменные, термы, кванторы.

Однако осуществимость событий (значения булевых пременных p_{event}) изменяется со временем. Значит, в логическом языке $\mathcal{L}$ должен быть явно учтен феномен времени.

Таким образом, для описания требований, которые предъявляются к распределенной системе, достаточно воспользоваться языком пропозициональной темпоральной логики линейного времени (PLTL).

Исторические сведения

1941

АМИР ПНУЭЛИ

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Синтаксис PLTL

В PLTL наряду с булевыми логическими связками для описания причинно-следственной зависимости событий во времени применяются темпоральные операторы

- **X** (ne**X**ttime) «в следующий момент времени»;
- **F** (sometime in **F**uture) «когда-то в будущем»;
- **G** (**G**lobally) «всегда в будущем»;
- **U** (**U**ntil) «до тех пор пока»;
- **R** (**R**elease) «высвободить, открепить».

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Пусть задано множество булевых переменных $\mathcal{AP} = \{p_1, p, \ldots, p_n, \ldots\}$ (будем называть их атомарными высказываниями).

Синтаксис PLTL

Формула PLTL — это

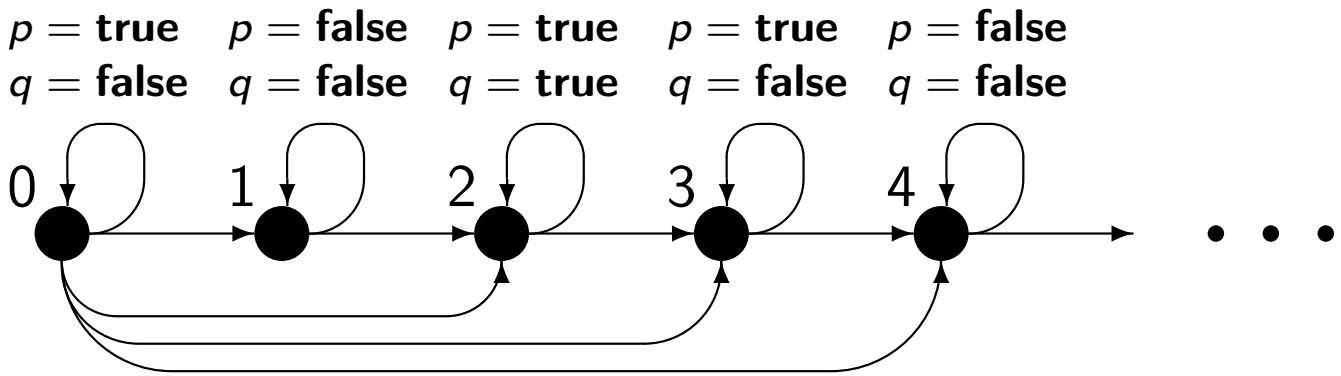
p_i,	если $p_i \in \mathcal{AP}$;
$(\varphi \& \psi)$,	если φ и ψ — формулы;
$(\varphi \vee \psi)$,	
$(\varphi \to \psi)$,	
$(\neg\varphi)$,	
$(\mathbf{X}\varphi)$,	«в следующий момент будет верно φ»;
$(\mathbf{F}\varphi)$,	«когда-то в будущем будет верно φ»;
$(\mathbf{G}\varphi)$,	«всегда верно φ»;
$(\varphi \mathbf{U} \psi)$,	«φ остается верной, пока не станет верной ψ»;
$(\varphi \mathbf{R} \psi)$,	«ψ может перестать быть верной только после того, как станет верной φ».

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Семантика PLTL

Интерпретация PLTL — это темпоральная модель Крипке $I = \langle \mathbb{N}, \leq, \xi \rangle$, где

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ — множество моментов времени;
- $\leq$ — отношение нестрогого линейного порядка на $\mathbb{N}$;
- $\xi : \mathbb{N} \times \mathcal{AP} \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ — оценка атомарных высказываний на шкале времени.



ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Семантика PLTL

Интерпретация $I = \langle \mathbb{N}, \leq, \xi \rangle$ — это вычислительная трасса программы, и в этой трассе

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ — это последовательность состояний вычисления, линейно упорядоченная отношением переходов $\leq$;
- оценка $\xi : \mathbb{N} \times \mathcal{AP} \to \{\textbf{true}, \textbf{false}\}$ указывает, какие события происходят в те или иные моменты времени.

Формулы PLTL — это утверждения о том, в какой последовательности должны происходить события по ходу вычислений программ.

Чтобы оценивать, в какой мере вычислительная трасса (интерпретация) удовлетворяет заданному требованию (формуле PLTL), определим отношение выполнимости формул PLTL в темпоральных интерпретациях.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

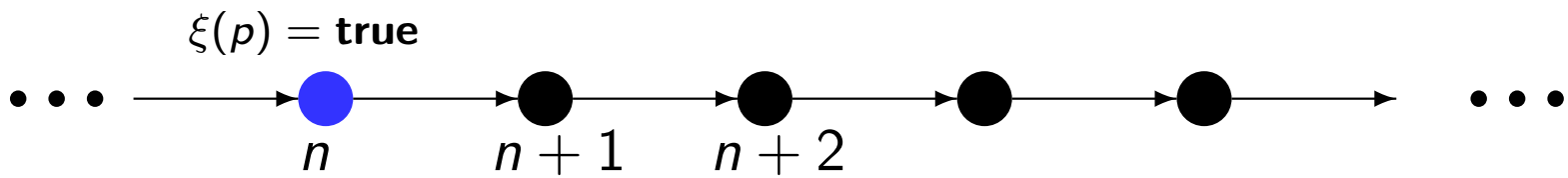
Семантика PLTL

Пусть $I = \langle \mathbb{N}, \leq, \xi \rangle$ — темпоральная интерпретация (вычислительная трасса), $n \in \mathbb{N}$ — момент времени (состояние вычисления), φ — формула PLTL.

Тогда отношение выполнимости $I, n \models \varphi$ формулы φ в момент времени n в интерпретации I определяется так.

1. Если $\varphi = p$, $p \in \mathcal{AP}$ (т. е. φ — атомарное высказывание), то

$$I, n \models \varphi \iff \xi(p) = \textbf{true}.$$

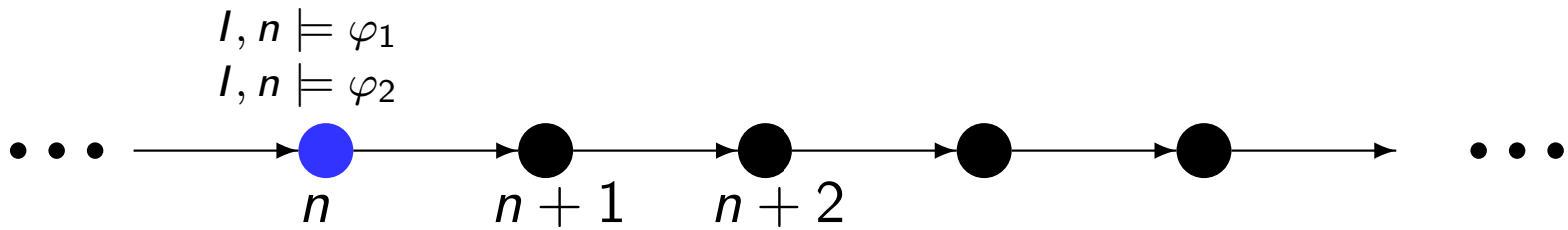


ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Семантика PLTL

2. Если $\varphi = \varphi_1 \& \varphi_2$, то

$$I, n \models \varphi \iff I, n \models \varphi_1 \text{ и } I, n \models \varphi_2.$$



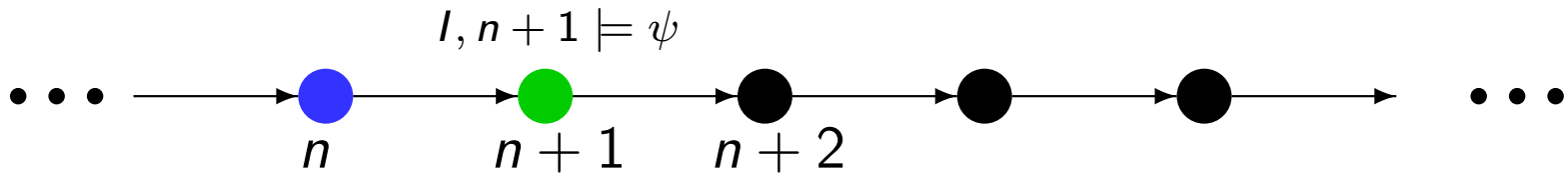
Для формул вида $\varphi_1 \vee \varphi_2$, $\varphi_1 \to \varphi_2$, $\neg\varphi_1$ отношение выполнимости в темпоральной модели определяется точно так же, как в классической логике предикатов.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Семантика PLTL

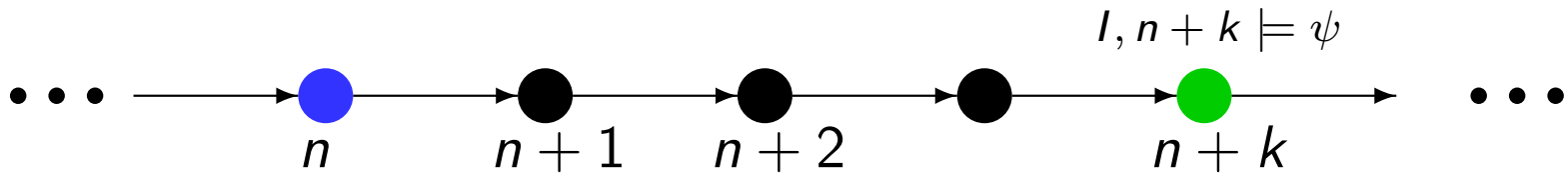
3. Если $\varphi = \mathbf{X}\psi$, то

$$l, n \models \varphi \iff l, n+1 \models \psi.$$



4. Если $\varphi = \mathbf{F}\psi$, то

$$l, n \models \varphi \iff \text{существует такое } k, k \geq 0, \text{ что } l, n+k \models \psi.$$

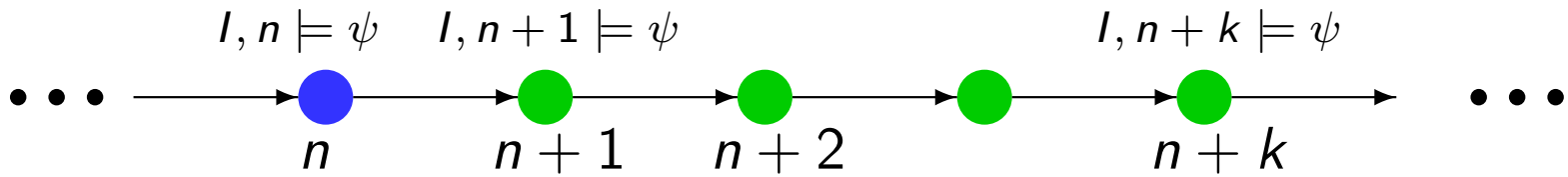


ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Семантика PLTL

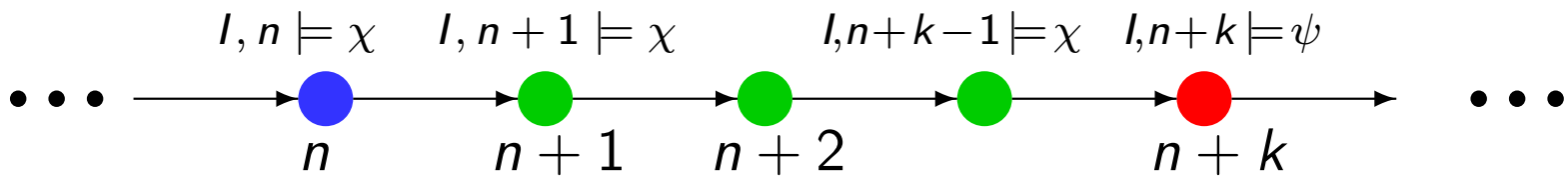
5. Если $\varphi = \mathbf{G}\psi$, то

$$I, n \models \varphi \iff \text{для любого } k, k \geq 0, \text{ верно } I, n+k \models \psi.$$



6. Если $\varphi = \chi\mathbf{U}\psi$, то

$$I, n \models \varphi \iff \text{существует такое } k, k \geq 0, \text{ что } I, n+k \models \psi,$$
$$\text{и для любого } i, 0 \leq i < k, \text{ верно } I, n+i \models \chi.$$



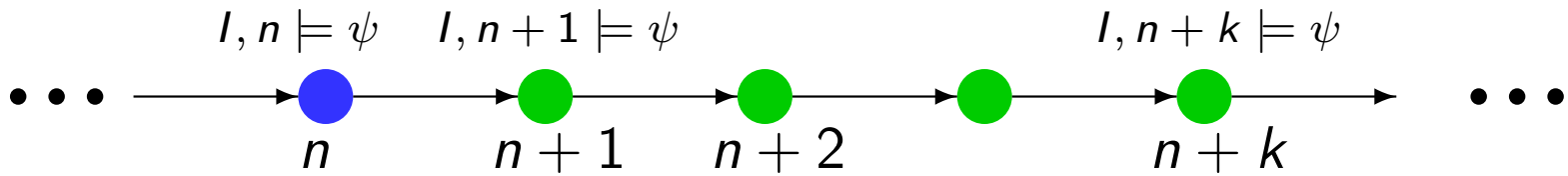
ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Семантика PLTL

7. Если $\varphi = \chi \mathbf{R} \psi$, то

$$I, n \models \varphi \iff \text{либо для любого } k, k \geq 0, \text{ верно } I, n+k \models \psi,$$

,



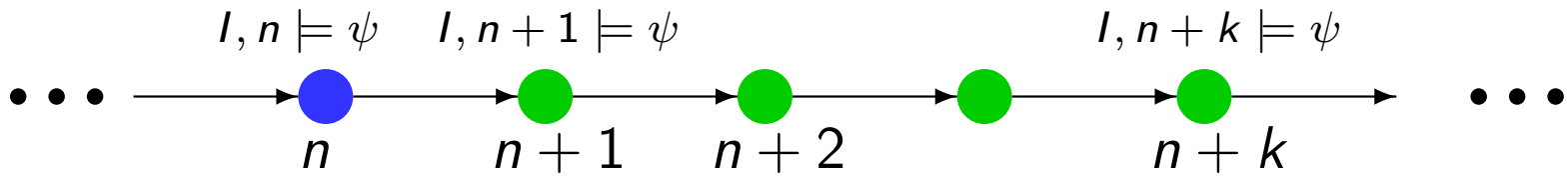
ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

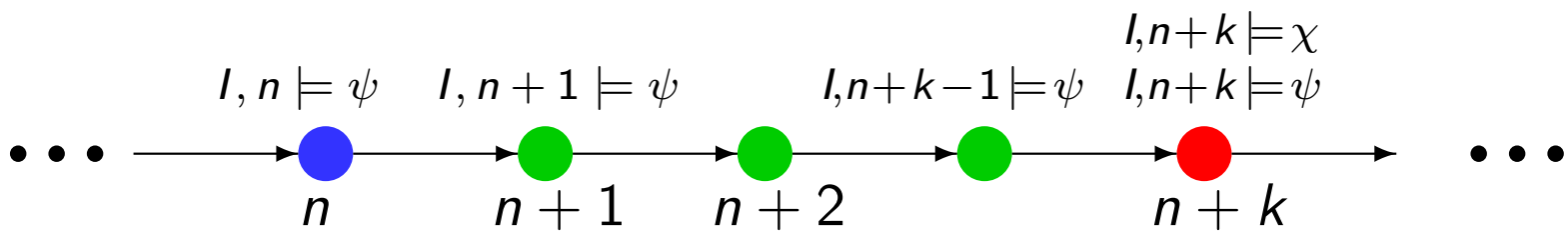
Семантика PLTL

7. Если $\varphi = \chi \mathbf{R} \psi$, то

$$I, n \models \varphi \iff \text{либо для любого } k, k \geq 0, \text{ верно } I, n+k \models \psi,$$

либо существует такое $k, k \geq 0$, что $I, n+k \models \chi$,
и для любого $i, 0 \leq i \leq k$, верно $I, n+i \models \psi$.





ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Будем называть формулу PLTL φ

- выполнимой в интерпретации I, если верно $I, 0 \models \varphi$ (обозначается $I \models \varphi$);
- PLTL-общезначимой , если для любой интерпретации I верно $I \models \varphi$ (обозначается $\models \varphi$).

Чтобы облегчить запись формул и избавиться от лишних скобок, условимся, что
одноместные темпоральные операторы **X**, **F**, **G** обладают таким же приоритетом, как отрицание $\neg$,
а двухместные темпоральные операторы **U**, **R** имеют наивысший приоритет среди двухместных связок.

Таким образом, запись

$$\mathbf{X}p_1\mathbf{U}p_2\&\mathbf{F}p_3 \rightarrow \neg p_1\mathbf{R}p_2$$

обозначает формулу

$$\big(((\mathbf{X}p_1)\mathbf{U}p_2)\&(\mathbf{F}p_3)\big) \rightarrow \big((\neg p_1)\mathbf{R}p_2\big).$$

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Равносильные формулы

Темпоральные операторы PLTL связаны друг с другом определенными соотношениями (равносильностями). Вот наиболее важные из соотношений равносильности.

Законы двойственности.

1. $\models \neg \mathbf{X}\varphi \equiv \mathbf{X}\neg\varphi$;
2. $\models \neg \mathbf{F}\varphi \equiv \mathbf{G}\neg\varphi$;
3. $\models \neg \mathbf{G}\varphi \equiv \mathbf{F}\neg\varphi$;
4. $\models \neg(\varphi \mathbf{U} \psi) \equiv \neg\varphi \mathbf{R} \neg\psi$;
5. $\models \neg(\varphi \mathbf{R} \psi) \equiv \neg\varphi \mathbf{U} \neg\psi$.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Равносильные формулы

Темпоральные операторы PLTL связаны друг с другом определенными соотношениями (равносильностями).
Вот наиболее важные из соотношений равносильности.

Законы двойственности.

1. $\models \neg \mathbf{X}\varphi \equiv \mathbf{X}\neg\varphi$;
2. $\models \neg \mathbf{F}\varphi \equiv \mathbf{G}\neg\varphi$;
3. $\models \neg \mathbf{G}\varphi \equiv \mathbf{F}\neg\varphi$;
4. $\models \neg(\varphi \mathbf{U} \psi) \equiv \neg\varphi \mathbf{R} \neg\psi$;
5. $\models \neg(\varphi \mathbf{R} \psi) \equiv \neg\varphi \mathbf{U} \neg\psi$.

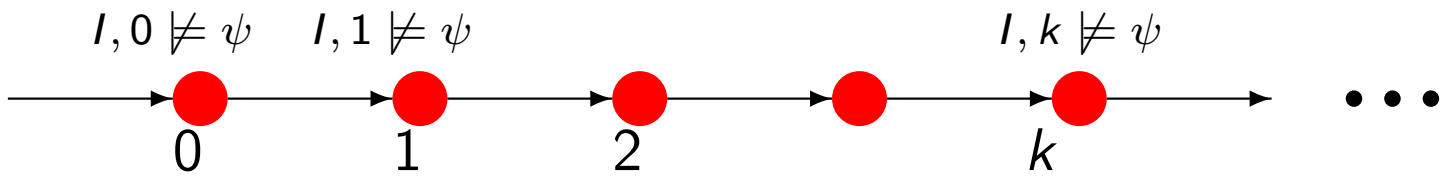
Доказательство. Следует непосредственно из определения отношения выполнимости.
Покажем справедливость соотношения 4).

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

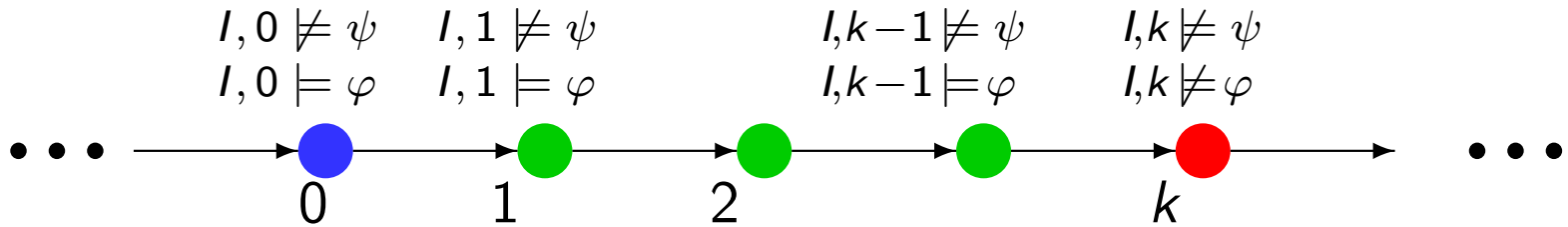
Доказательство.

Пусть $I, 0 \models \neg(\varphi \mathbf{U} \psi)$, т. е. $I, 0 \not\models \varphi \mathbf{U} \psi$. Тогда согласно определению отношения выполнимости для оператора **U** верно хотя бы одно из двух:

1. либо для любого k, $k \geq 0$, верно $I, k \not\models \psi$



2. либо существует такое k, $k \geq 0$, что $I, k \not\models \psi$, $I, k \not\models \varphi$ и при этом для любого i если $0 \leq i < k$, то $I, k \not\models \psi$, $I, k \models \varphi$

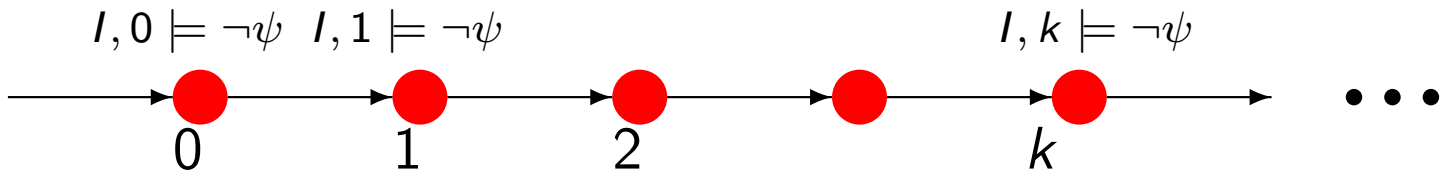


ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

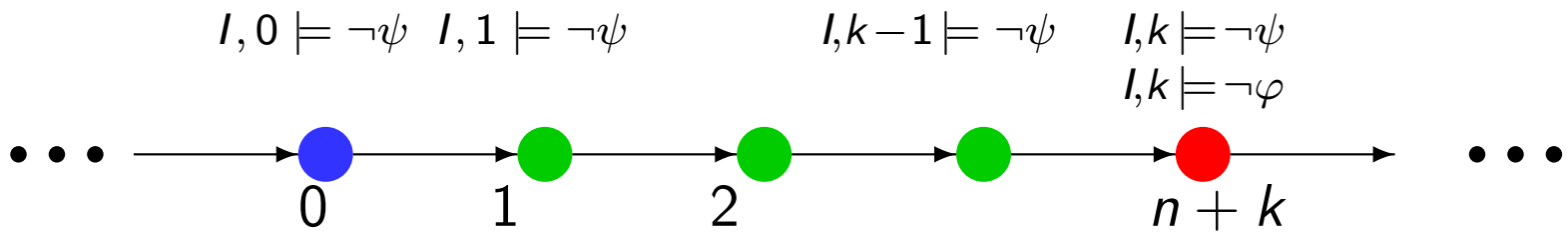
Доказательство.

Но это означает, что верно хотя бы одно из двух:

1. либо для любого k, $k \geq 0$, верно $I, k \models \neg\psi$



2. либо существует такое k, $k \geq 0$, что $I, k \models \neg\psi$, $I, k \models \neg\varphi$ и при этом для любого i если $0 \leq i < k$, то $I, k \models \neg\psi$



А это как раз и означает, что $I, 0 \models (\neg\varphi)\mathbf{R}(\neg\psi)$.

Значит, $I \models \neg(\varphi\mathbf{U}\psi) \rightarrow \neg\varphi\mathbf{R}\neg\psi$ для любой интерпретации I.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Доказательство.

Проводя аналогичные рассуждения покажите самостоятельно , что верно соотношение

$$I \models \neg\varphi \mathbf{R} \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \mathbf{U} \psi),$$

а также остальные законы двойственности темпоральных операторов.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Равносильные формулы

Законы взаимной зависимости.

1. $\models \mathbf{F}\varphi \equiv \neg\mathbf{G}\neg\varphi$;
2. $\models \mathbf{G}\varphi \equiv \neg\mathbf{F}\neg\varphi$;
3. $\models \varphi\mathbf{U}\psi \equiv \neg(\neg\varphi\mathbf{R}\neg\psi)$;
4. $\models \varphi\mathbf{R}\psi \equiv \neg(\neg\varphi\mathbf{U}\neg\psi)$;
5. $\models \mathbf{F}\varphi \equiv \mathbf{true}\ \mathbf{U}\varphi$;
6. $\models \mathbf{G}\varphi \equiv \mathbf{false}\ \mathbf{R}\varphi$.

Доказательство. Самостоятельно.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Равносильные формулы

Законы неподвижной точки.

1. $\models \mathbf{F}\varphi \equiv \varphi \vee \mathbf{XF}\varphi$;
2. $\models \mathbf{G}\varphi \equiv \varphi \,\&\, \mathbf{XG}\varphi$;
3. $\models \varphi\mathbf{U}\psi \equiv \psi \vee (\varphi \,\&\, \mathbf{X}(\varphi\mathbf{U}\psi)$;
4. $\models \varphi\mathbf{R}\psi \equiv \psi \,\&\, (\varphi \vee \mathbf{X}(\varphi\mathbf{R}\psi)$.

Доказательство. Самостоятельно.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Равносильные формулы

А какие законы дистрибутивности верны?

1. $\models \mathbf{F}(\varphi \vee \psi) \equiv$???;
2. $\models \mathbf{G}(\varphi \vee \psi) \equiv$???;
3. $\models \mathbf{F}(\varphi \& \psi) \equiv$???;
4. $\models \mathbf{G}(\varphi \& \psi) \equiv$???;
5. $\models \varphi \mathbf{U}(\psi \vee \chi) \equiv$???;
6. $\models \varphi \mathbf{U}(\psi \& \chi) \equiv$???
7. $\models (\varphi \vee \chi)\mathbf{U}\chi \equiv$???;
8. $\models (\varphi \& \chi)\mathbf{U}\chi \equiv$???.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Выразительные возможности PLTL

А теперь посмотрим, насколько адекватно и просто можно выражать при помощи PLTL те требования, которые предъявляются к поведению распределенных систем программ.

1. Всякий раз, когда принтер свободен и хотя бы один компьютер собирается отправить данные на печать, принтер будет рано или поздно занят;
2. Всякий раз, после того как принтер оказался занят, он должен когда-нибудь приступить к печати;
3. Компьютер, завершивший печать, должен когда-нибудь освободить принтер;
4. Данные на печать всегда передает не более чем один компьютер.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Выразительные возможности PLTL

Введем следующие атомарные высказывания, соответствующие основным событиям вычислений программы:

1. try_i — i-ый компьютер собирается отправить данные на печать;
2. pr_i — i-ый компьютер передает данные на печать;
3. *free* — принтер свободен;
4. *busy* — принтер занят.

Пусть имеется система, состоящая из 2 компьютеров.
Тогда все перечисленные требования выражаются формулами PLTL так.

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Выразительные возможности PLTL

1. Всякий раз, когда принтер свободен и хотя бы один компьютер собирается отправить данные на печать, принтер будет рано или поздно занят:

$$\varphi_1 = \mathbf{G}((\mathit{free} \;\&\; (\mathit{try}_1 \;\vee\; \mathit{try}_2)) \;\rightarrow\; \mathbf{F}\mathit{busy}) \;;$$

2. Всякий раз, после того как принтер оказался занят, он должен когда-нибудь приступить к печати:

$$\varphi_2 = \mathbf{G}(\mathit{free} \;\&\; \mathbf{X}\mathit{busy} \;\rightarrow\; \mathbf{XF}(\mathit{pr}_1 \;\vee\; \mathit{pr}_2)) \;;$$

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Выразительные возможности PLTL

3. Компьютер, завершивший печать, должен когда-нибудь освободить принтер:

$$\varphi_{3i} = \mathbf{G}(pr_i \ \& \ \mathbf{X}\neg pr_i \ \rightarrow \ \mathbf{XF}\mathit{free}) \ ;$$

4. Данные на печать всегда передает не более чем один компьютер:

$$\varphi_4 = \mathbf{G}(\neg(pr_1 \ \& \ pr_2)) \ .$$

ЛОГИКА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕНИ PLTL

Выразительные возможности PLTL

5. До тех пор пока хотя бы один компьютер отправляет данные на печать, принтер остается занятым:

$$\varphi_5 = \mathbf{G}((\neg(pr_1 \ \vee \ pr_2) \ \mathbf{R} \ busy) \ ;$$

или может быть это лучше выразить так:

$$\varphi'_5 = \mathbf{G}(busy \ \mathbf{R} \ (\neg(pr_1 \ \vee \ pr_2))) \ ?$$

или может быть так:

$$\varphi''_5 = \mathbf{G}((pr_1 \ \vee \ pr_2) \ \rightarrow \ busy) \ ?$$

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

Теперь мы можем использовать PLTL в качестве формального языка спецификации программ.
Чтобы иметь возможность проверить, удовлетворяют ли все вычисления распределенной системы программ заданным спецификациям, которые представлены формулами PLTL, нужно определить математическую модель программ.

При разработке математической модели программ нужно стремиться к тому, чтобы

- каждое вычисление распределенной системы программ представляло собой темпоральную интерпретацию;
- вычисления программ в предложенной математической модели соответствовали реальному поведению вычислительных устройств, выполняющих эти программы;
- модель программ имела простое устройство.

В качестве такой модели программ мы будем использовать размеченные системы переходов .

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

Определение LTS

Размеченная система переходов (LTS, Labelled Transition System) — это пятерка $\langle \mathcal{AP}, S, S_0, \longrightarrow, \rho \rangle$, в которой

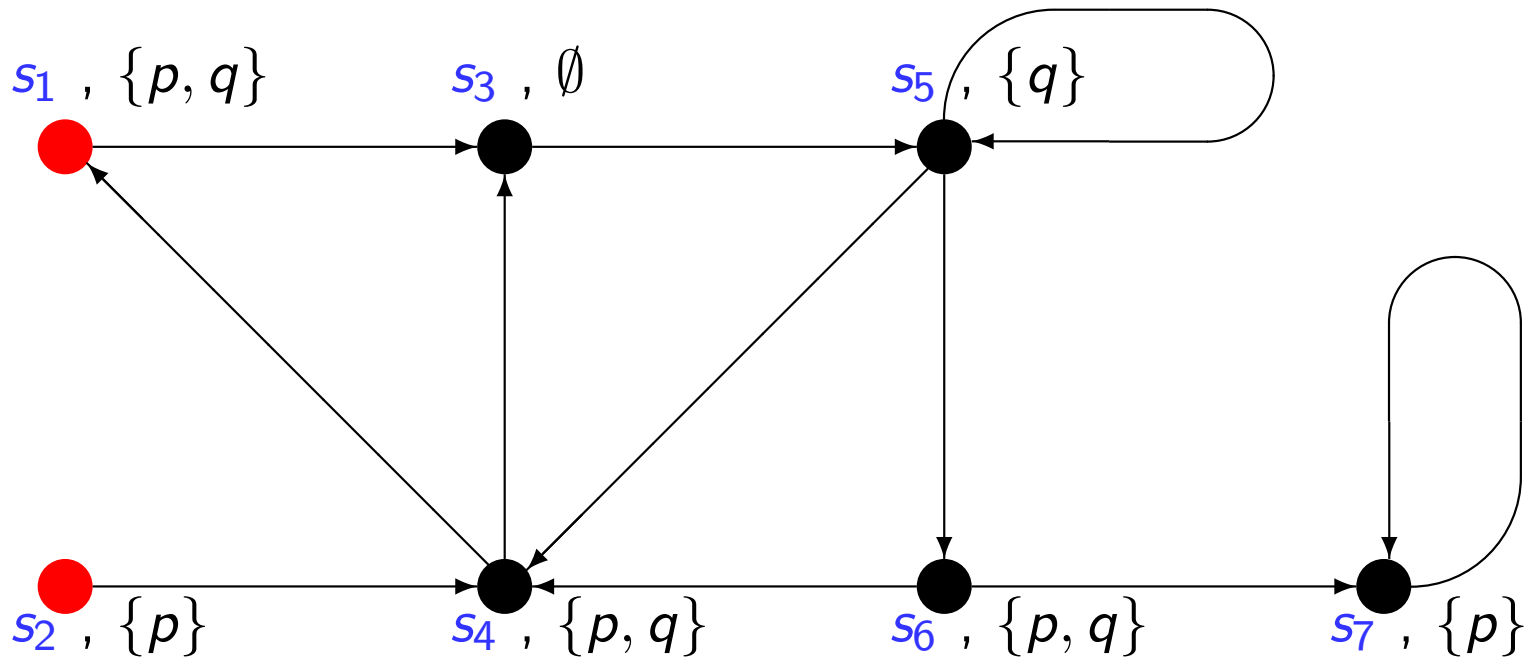
1. $\mathcal{AP}$ — множество атомарных высказываний;
2. S — непустое множество состояний вычислений;
3. S_0, $S_0 \subseteq S$, — непустое подмножество начальных состояний;
4. $\longrightarrow \subseteq S \times S$, — **тотальное** отношение переходов, тотальность отношения $\longrightarrow$ означает, что для любого состояния $s, s \in S$, существует такое состояние s', что $s \longrightarrow s'$ (т. е. из любого состояния можно сделать хотя бы один переход);
5. $\rho : S \rightarrow 2^{\mathcal{AP}}$ — функция разметки, приписывающая каждому состоянию вычислений $s, s \in S$, множество $\rho(s)$, $\rho(s) \subseteq \mathcal{AP}$, всех тех атомарных высказываний, которые являются истинными в состоянии s.

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

Пример LTS

$$M = \langle \mathcal{AP}, S, S_0, T, \rho \rangle$$

$$\mathcal{AP} = \{p, q\}, \quad S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}, \quad S_0 = \{s_1, s_2\}$$



РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS и PLTL-интерпретации

Трассой в LTS $M = \langle \mathcal{AP}, S, S_0, \longrightarrow, \rho \rangle$ называется всякая бесконечная последовательность состояний

$$tr = s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}, s_{i_{n+1}}, \ldots, \qquad (*)$$

в которой для любого $n, n > 0$, верно $(s_{i_n} \longrightarrow s_{i_{n+1}})$.

Если s_{i_0} — начальное состояние, $s_{i_0} \in S_0$, то трасса tr называется начальной трассой.

Запись $Tr(M)$ обозначает множество всех трасс LTS M, а запись $Tr_0(M)$ — множество всех начальных трасс LTS M.

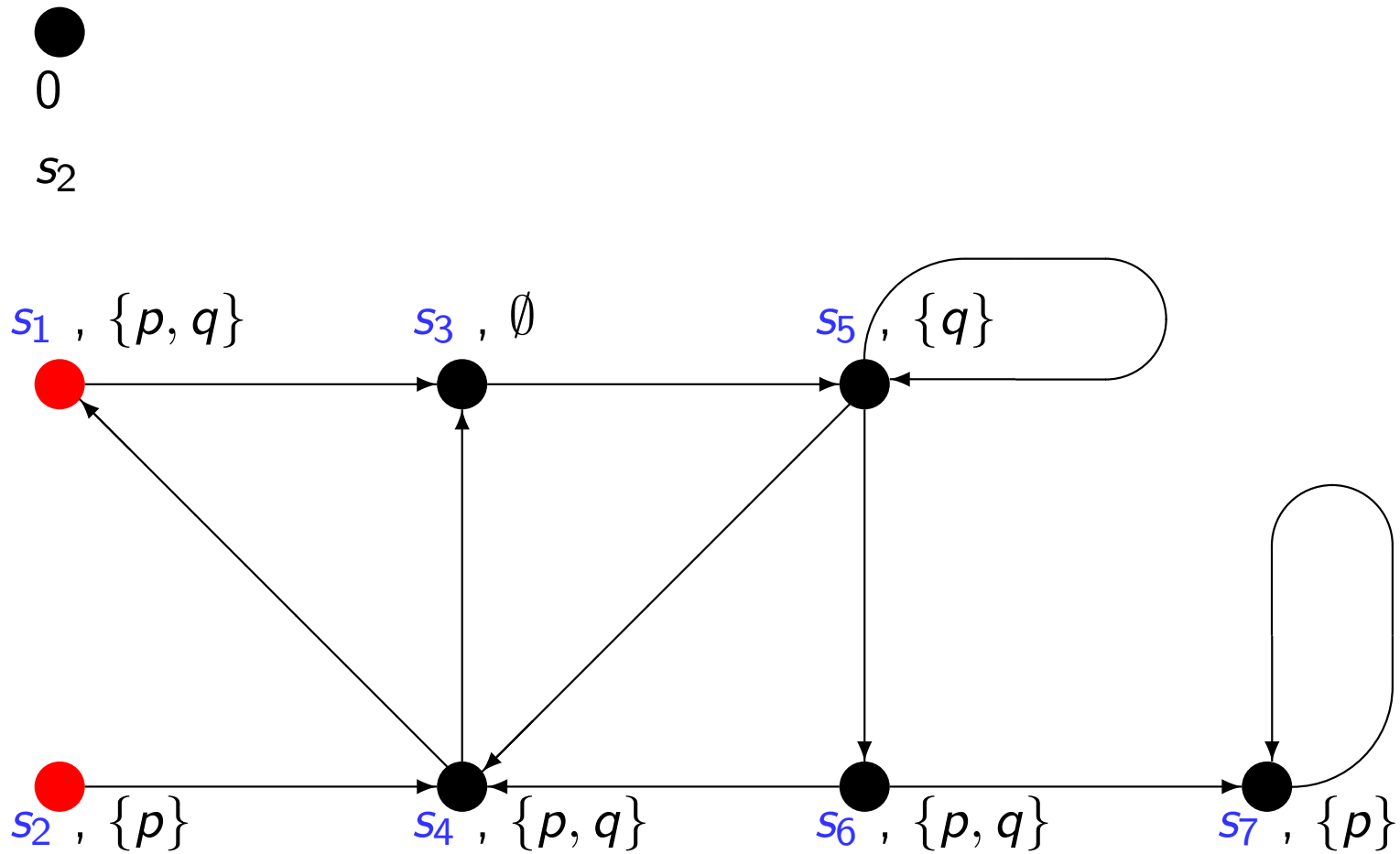
Каждой трассе $tr \in Tr(M)$ вида $(*)$ сопоставим PLTL-интерпретацию $I(tr) = \langle \mathbb{N}, \leq, \xi \rangle$, в которой для любого $n, n \geq 0$, и p, $p \in \mathcal{AP}$, верно соотношение

$$\xi(n, p) = \textbf{true} \iff p \in \rho(s_{i_n}) \ .$$

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

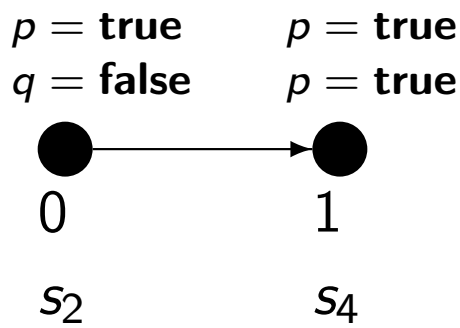
Пример LTS

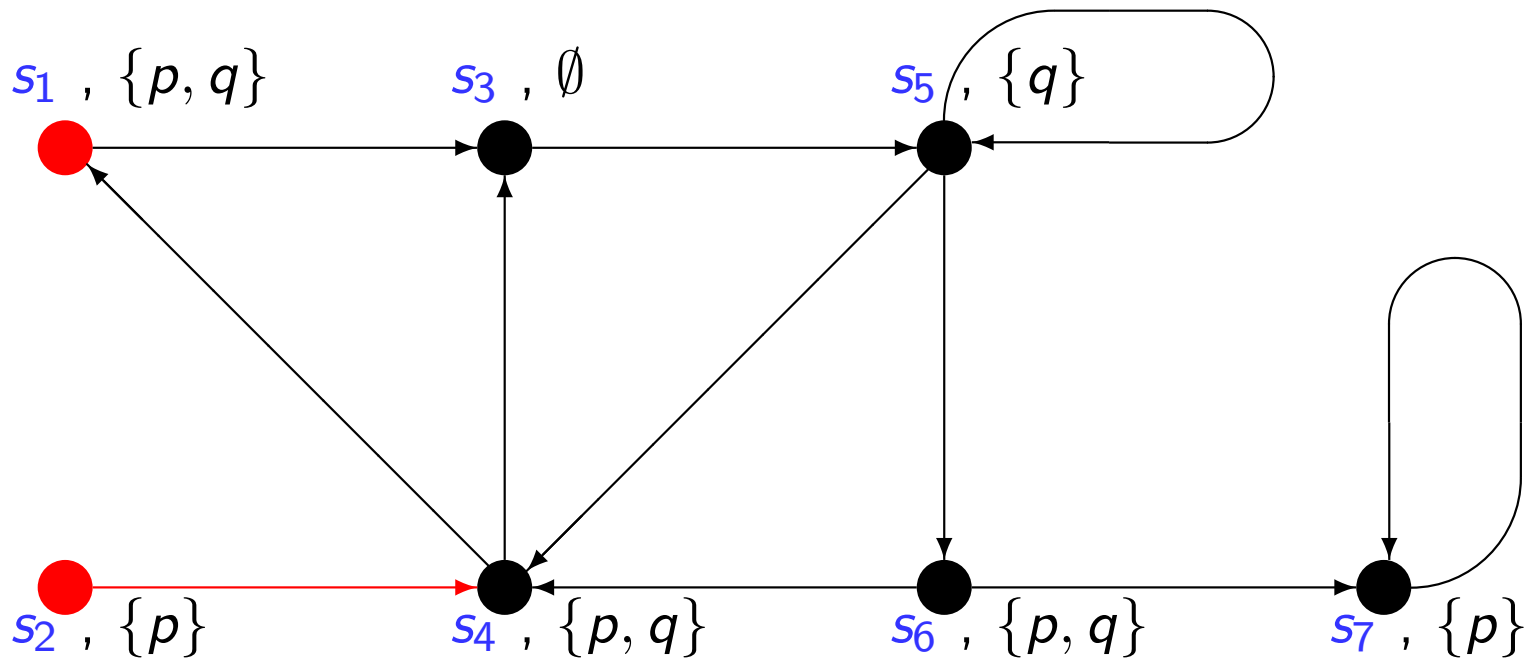
$p = \textbf{true}$
$q = \textbf{false}$



РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

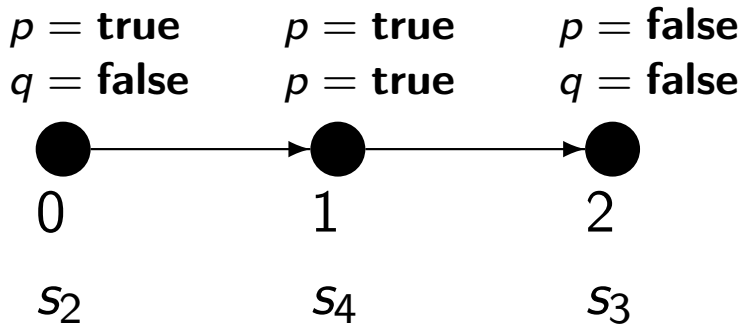
Пример LTS

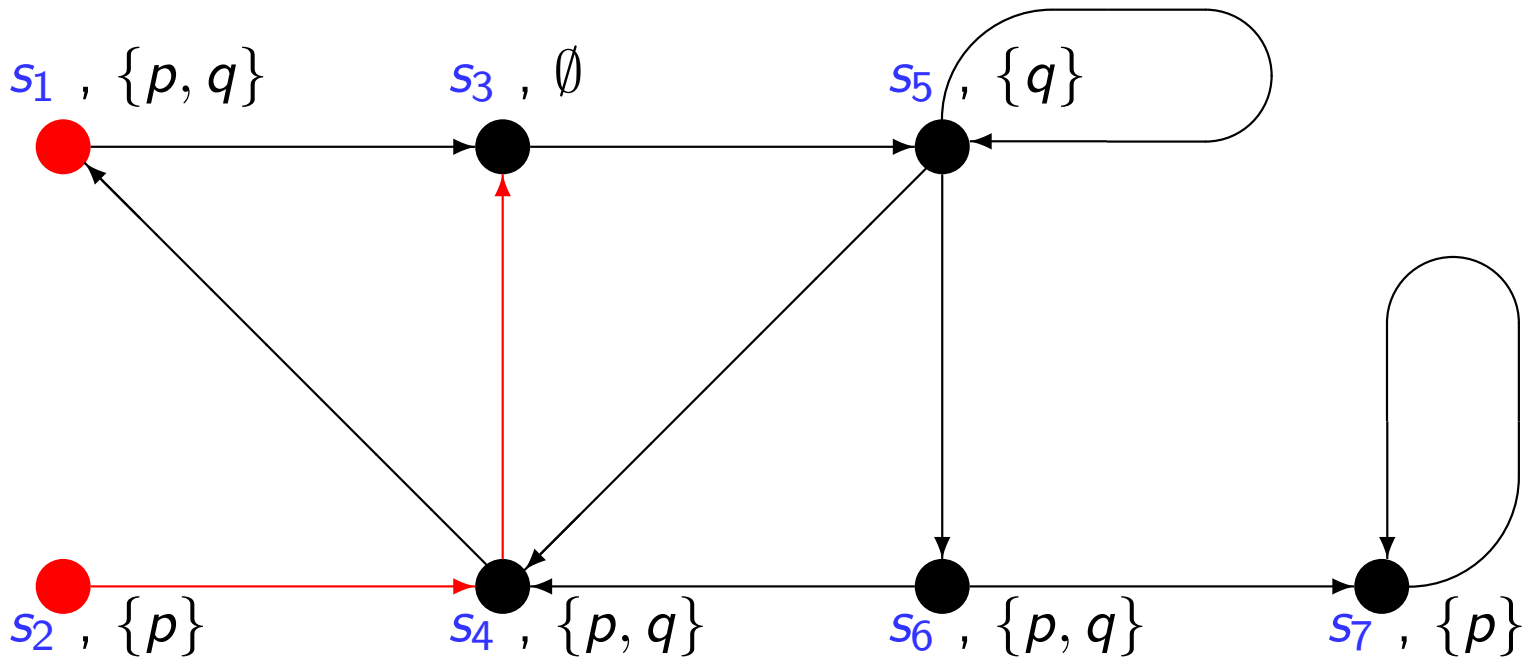




РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

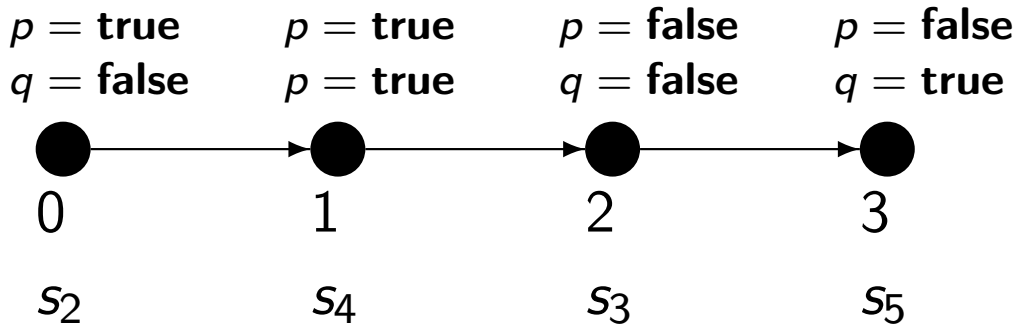
Пример LTS

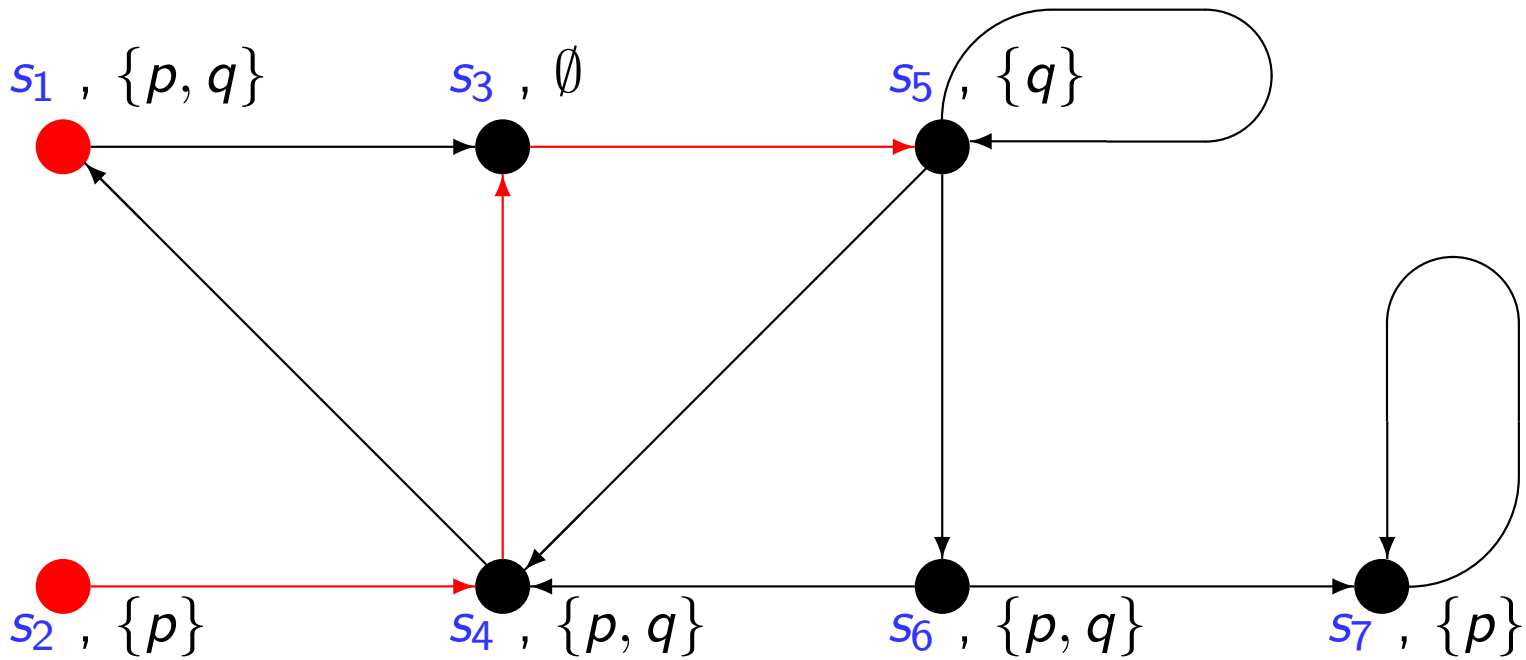




РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

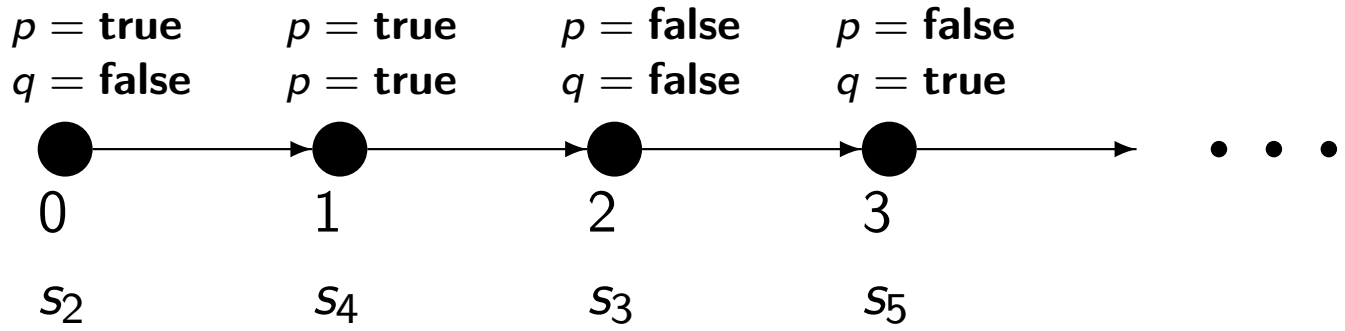
Пример LTS

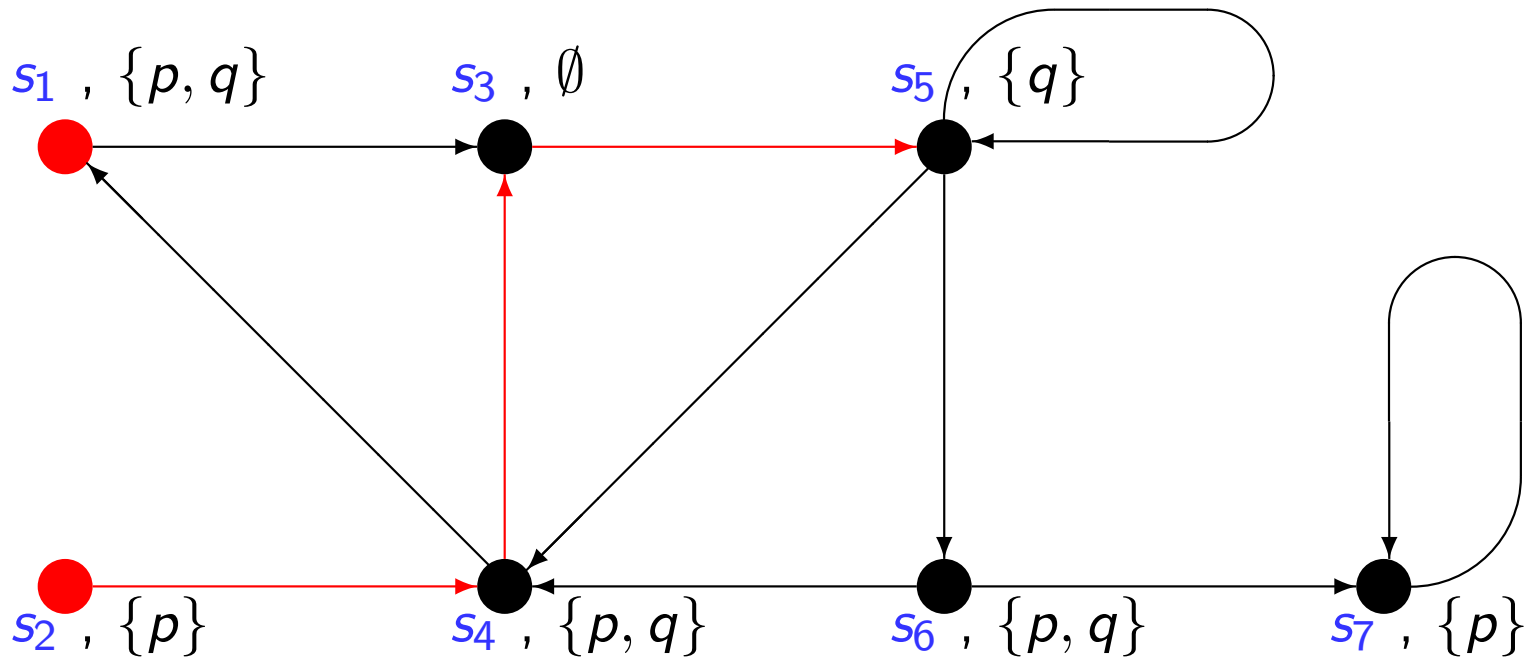




РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

Пример LTS





РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS и распределенные программы

LTS, соответствующую программе π, можно построить так:

- Состояниями LTS полагаются состояния вычисления программы. Состояние вычисления программы π — это пара (состояние управления, состояние данных). Состояние управления — это значение счетчика команд программы. Состояние данных — это подстановка, указывающая соответствие между переменными и их значениями.
- Если в точке $count_1$ программы π выполняется оператор op, преобразующий данные из состояния ξ_1 в состояние ξ_2 и передающий управление в точку $count_2$, то в LTS имеется переход $(count_1, \xi_1) \longrightarrow (count_2, \xi_2)$.
- Атомарным высказыванием p может быть любая формула логики предикатов, зависящая от переменных программы и счетчика команд. Разметка ρ определяется так: $p \in \rho((count, \xi)) \iff I_\pi \models p[(count, \xi)]$.

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

Программа драйвера π_1

while true do

L_1: **while** $R \neq$ *free* **do wait od** ;

L_2: R = *busy*;

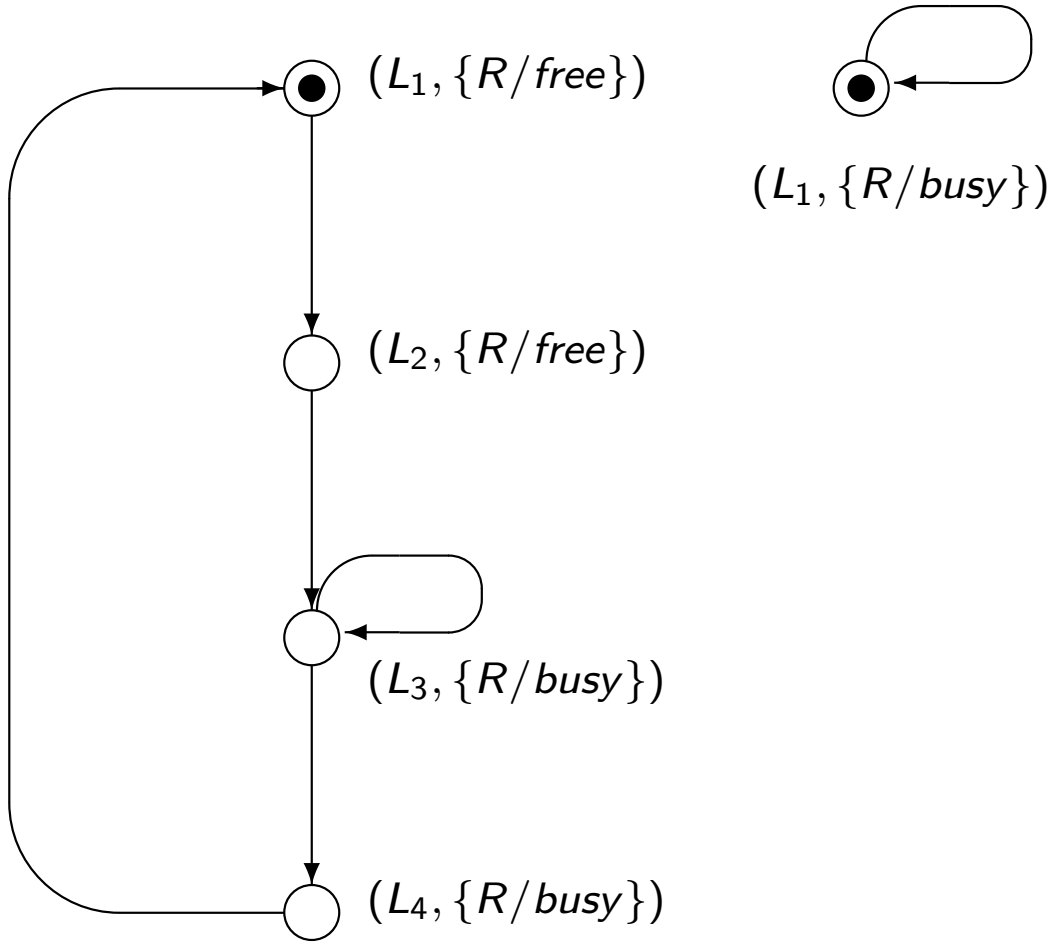
L_3: **output**(X,*printer*);

L_4: R = *free*;

od

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS для программы π_1



РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS и распределенные программы

Некоторые переменные программы могут быть доступны для других программ (т. н. разделяемые переменные) или для окружающей среды (датчики, сенсоры, средства управления).

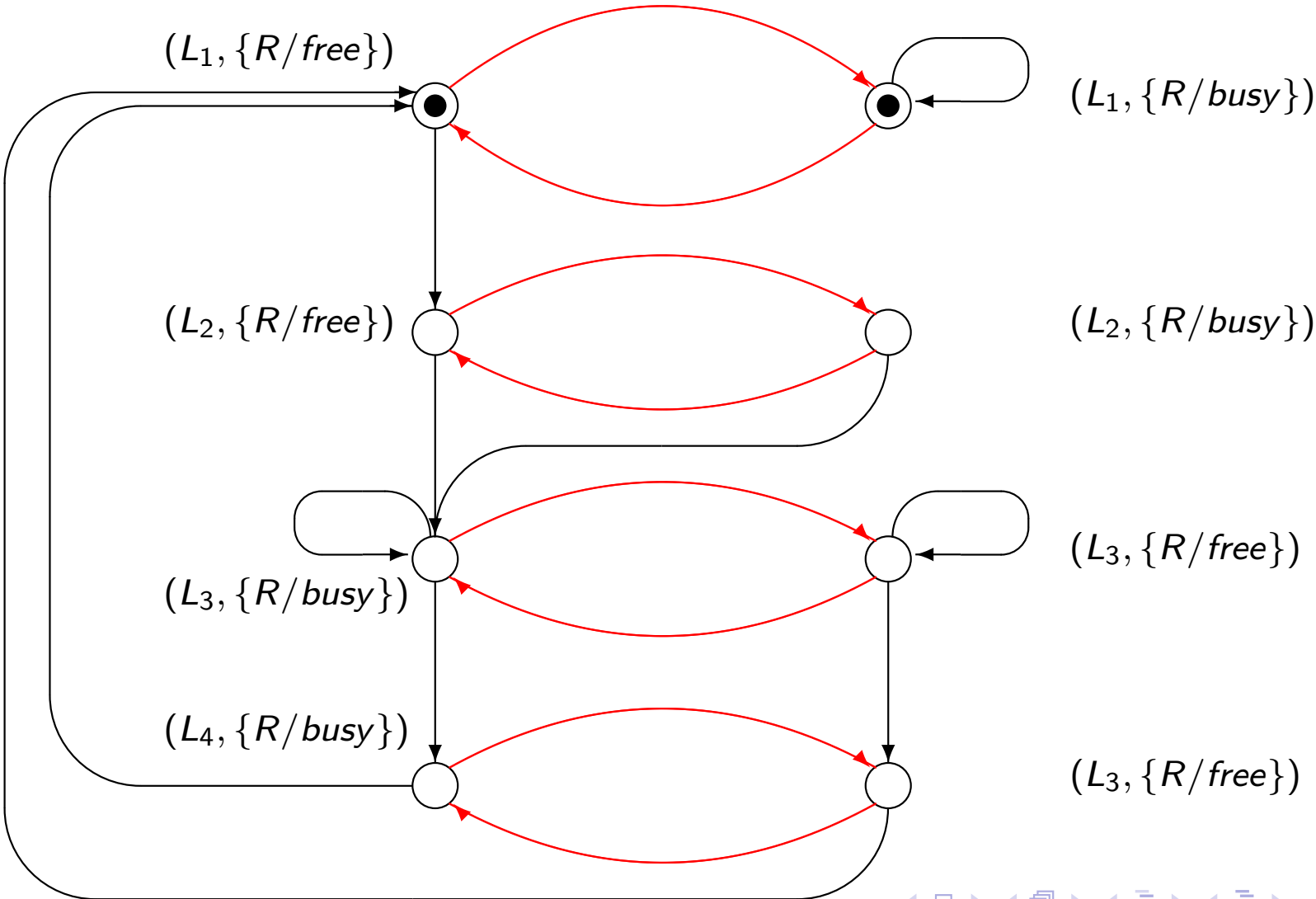
В том случае, когда программа π взаимодействует с окружающей средой, в LTS M_π вносятся следующие изменения:

для каждого состояния (l, ξ) вводятся переходы $(l, \xi) \longrightarrow (l, \xi')$ во всевозможные состояния (l, ξ'), в которых подстановки ξ', отличающиеся от ξ только значениями переменных, доступных для окружающей среды.

Например, полагая, что регистр принтера R — это тумблер, который может переключаться сколь угодно часто в разные моменты времени, получим следующую LTS, описывающую взаимодействие драйвера принтера с окружающей средой (пользователем принтера).

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS для системы $\pi_1 \parallel \mathit{environment}$



РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS и распределенные программы

LTS для распределенной системы, состоящей из двух процессов π_1 и π_2, взаимодействующих посредством разделяемых переменных, строится на основе семантики чередующихся вычислений.

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS и распределенные программы

LTS для распределенной системы, состоящей из двух процессов π_1 и π_2, взаимодействующих посредством разделяемых переменных, строится на основе семантики чередующихся вычислений.

Состояниями LTS для системы $\pi_1 \parallel \pi_2$ объявляются наборы $(count_1, count_2, \xi_1, \xi_2, \chi)$, где

- $count_1, count_2$ — значения счетчиков команд процессов π_1 и π_2,
- ξ_1, ξ_2 — подстановки, определяющие значения локальных переменных процессов π_1 и π_2,
- χ — подстановка, определяющая значения разделяемых переменных.

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS и распределенные программы

LTS для распределенной системы, состоящей из двух процессов π_1 и π_2, взаимодействующих посредством разделяемых переменных, строится на основе семантики чередующихся вычислений.

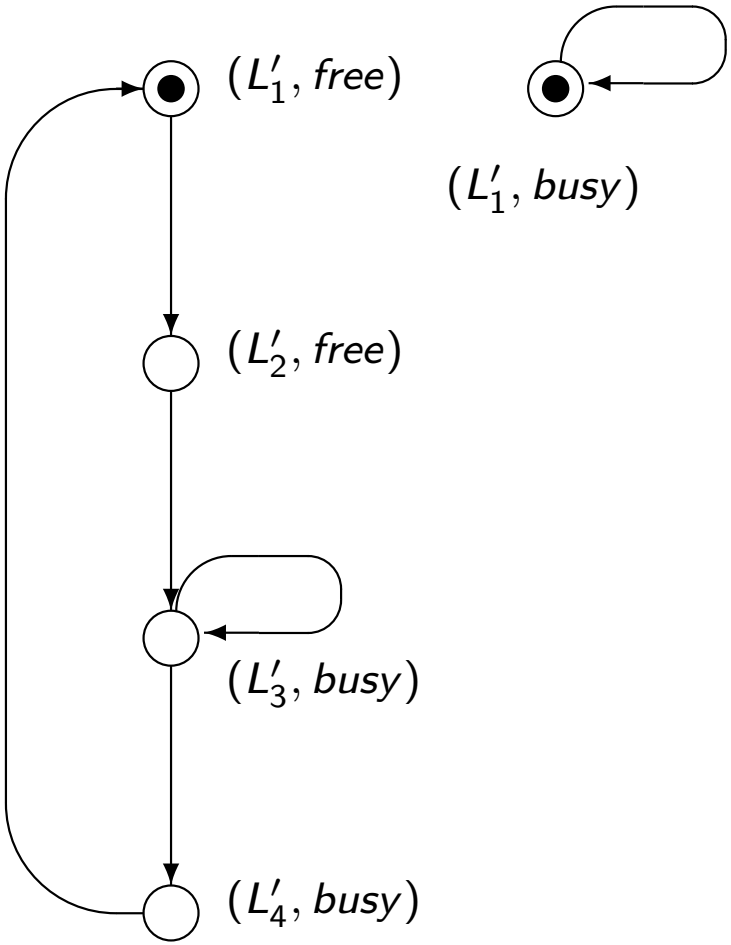
Переход $(count_1, count_2, \xi_1, \xi_2, \chi) \longrightarrow (count_1', count_2', \xi_1', \xi_2', \chi')$ возможен в том и только том случае, когда выполнено одно из двух условий:

- в LTS $M(\pi_1)$ есть переход $(count_1, \xi_1, \chi) \longrightarrow (count_1', \xi_1', \chi')$ и при этом $count_2' = count_2$, $\xi_2' = \xi_2$;
- в LTS $M(\pi_2)$ есть переход $(count_2, \xi_2, \chi) \longrightarrow (count_2', \xi_2', \chi')$ и при этом $count_1' = count_1$, $\xi_1' = \xi_1$.

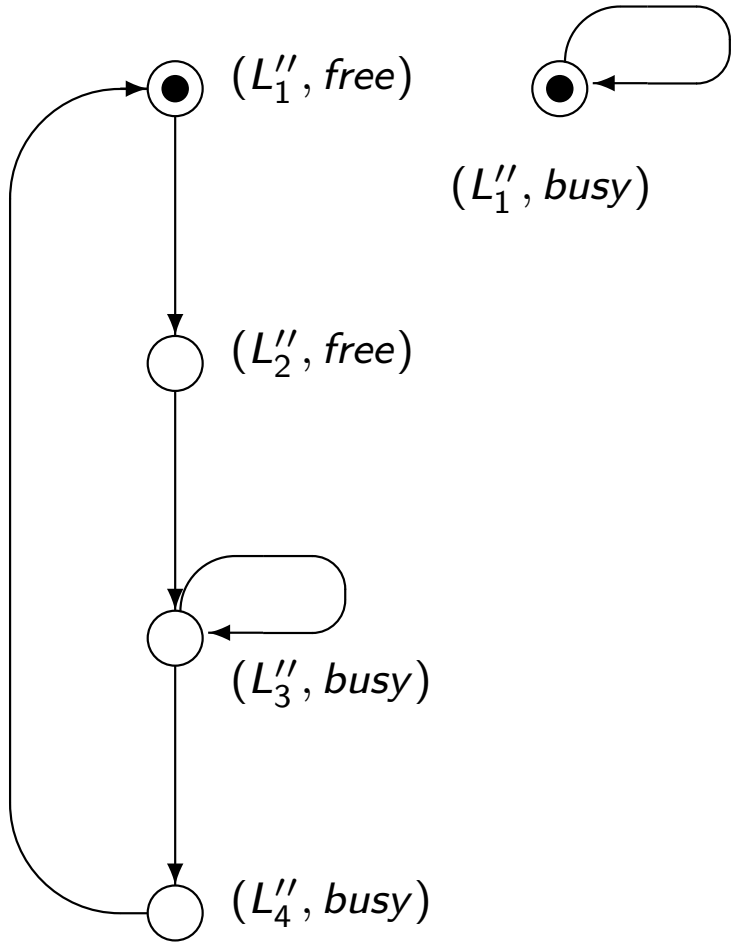
Таким образом, в семантике чередующихся вычислений параллельное выполнение процессов распределенной системы моделируется недетерминированным выбором того или иного порядка, в котором выполняются действия разных процессов.

РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS для программы π'

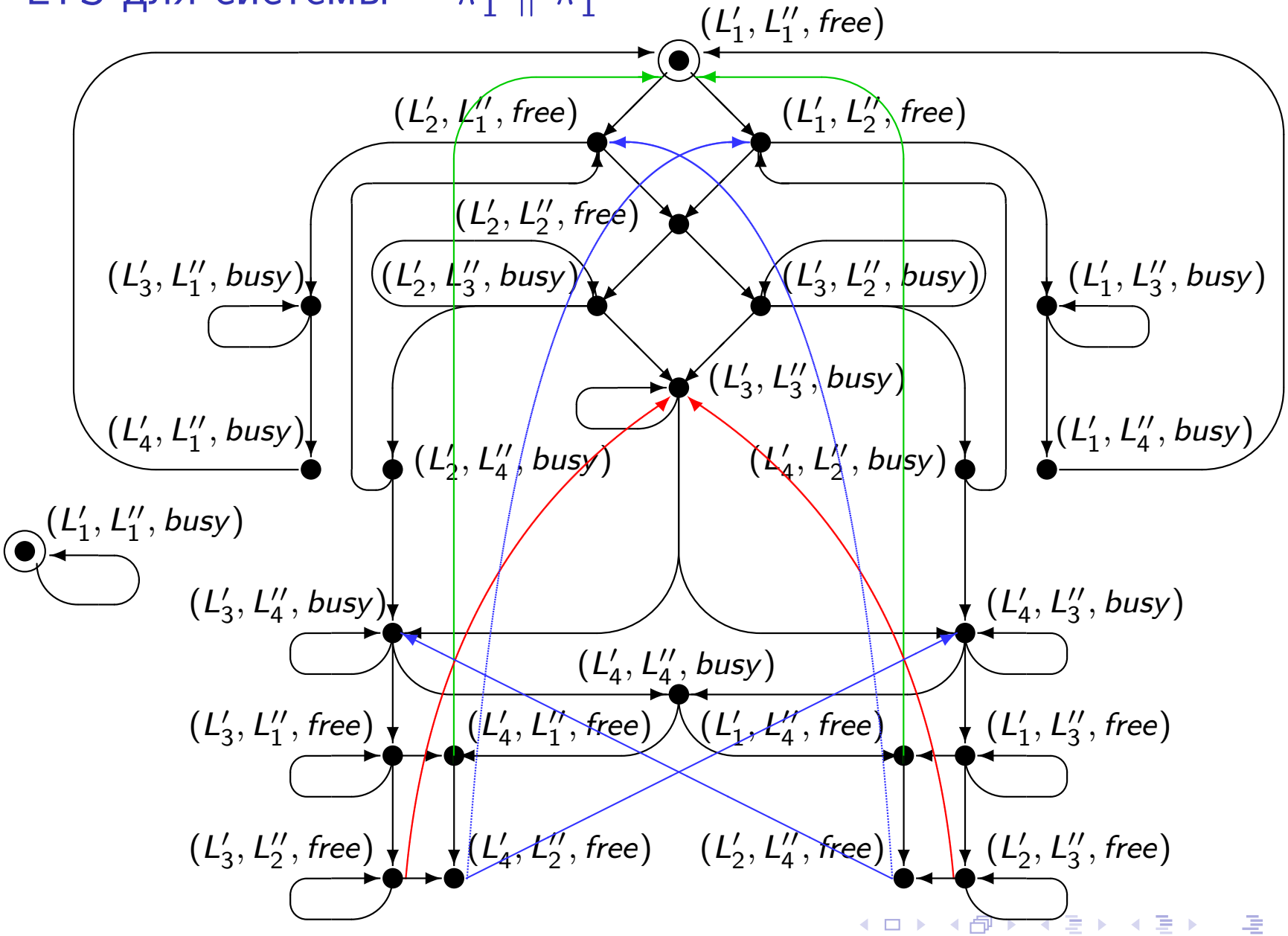


и программы π''



РАЗМЕЧЕННЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕХОДОВ

LTS для системы $\pi'_1 \parallel \pi''_1$



ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Итак, для верификации распределенных программ нужны

- требования правильности (спецификации) вычислений программы, представленные формулой PLTL φ,
- математическая модель распределенной программы π, представленная конечной LTS $M(\pi)$.

Тогда для проверки правильности программы π достаточно проверить, что для любой трассы tr, $tr \in Tr_0(M(\pi))$, формула φ выполняется в темпоральной интерпретации $I(tr)$, т. е. имеет место $I(tr), 0 \models \varphi$.

Воспользуемся записью $M \models \varphi$ для обозначения утверждения «для любой трассы tr, $tr \in Tr_0(M)$, имеет место $I(tr), 0 \models \varphi$».

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Задача верификации моделей программ (model checking) для PLTL формулируется так:

для заданной формулы PLTL φ и LTS M проверить $M \models \varphi$.

Существует ли алгоритм решения задачи верификации моделей программ?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 21.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 22.

Задача верификации моделей программ. Подформулы Фишера-Ладнера. Табличный метод верификации моделей программ. Алгоритм верификации моделей программ.

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Задача model checking для PLTL

Для заданной формулы PLTL φ и конечной LTS M проверить $M \models \varphi$.

Почему задача model checking непроста? Потому что

- выполнимость формул PLTL проверяется на бесконечных интерпретациях,
- В LTS M имеется бесконечно много интерпретаций (трасс).

Почему задача model checking имеет эффективное решение? Потому что

- все это бесконечное множество бесконечных интерпретаций «упаковано» в **конечную** структуру — LTS M.

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Замысел табличного метода

1. Вместо проверки выполнимости φ во всех интерпретациях лучше заняться поиском контрмодели — интерпретации I, в которой не выполняется φ.
2. Выполнимость всякой формулы ψ полностью определяется выполнимостью ее подформул. Поэтому (не)выполнимость формул можно проверять индуктивно.
3. (Не)выполнимость формулы на одной из трасс LTS M, начинающейся в состоянии s, — это свойство состояния s. Значит, проверяя (не)выполнимость всех подформул формулы φ для всех состояний LTS M, можно вычислить множество $\overline{S}_\varphi$ всех тех состояний, в которых не выполняется формула φ. Если $S_0 \cap \overline{S}_\varphi \neq \varnothing$, то $M \not\models \varphi$.

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Вспомогательные определения и обозначения

Для заданной LTS $M = \langle \mathcal{AP}, S, S_0, \longrightarrow, \rho \rangle$, трассы $tr = s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}, s_{i_{n+1}}, \ldots$ в LTS M и формулы PLTL φ будем использовать запись

- $tr \models \varphi$ для обозначения отношения выполнимости $l(tr), 0 \models \varphi$;
- $tr[j]$ для обозначения j-го состояния s_{i_j} в трассе tr;
- $tr|_j$ для обозначения трассы $tr' = s_{i_j}, s_{i_{j+1}}, \ldots$, являющейся суффиксом трассы tr, начинающейся состоянием s_{i_j}.

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Утверждение 1.

Для любой LTS M и формула PLTL φ верно

$$M \not\models \varphi \iff \text{существует такая начальная трасса } tr,\ tr \in Tr_0(M), \text{ для которой } tr \not\models \varphi.$$

Доказательство.

Самостоятельно.

Таким образом, вместо задачи $M \models \varphi$ мы будем рассматривать другую задачу:

найти в LTS M начальную трассу tr, для которой $tr \not\models \varphi$.

Если такой трассы найти не удастся, то верно $M \models \varphi$.

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Приведение формулы к позитивной форме

Применяя равносильные преобразования, упростим формулу φ.

Этап 1. Удаление импликации $\rightarrow$ и темпоральных операторов $\mathbf{G}, \mathbf{F}$ на основании законов взаимной зависимости

$\models \psi \rightarrow \psi \equiv \neg\psi \vee \chi;$

$\models \mathbf{F}\psi \equiv \mathbf{true}\ \mathbf{U}\psi; \qquad \models \mathbf{G}\psi \equiv \mathbf{false}\ \mathbf{R}\psi.$

Этап 2. Продвижение $\neg$ вглубь формулы на основании законов двойственности

$\models \neg(\psi\&\chi) \equiv \neg\psi \vee \neg\chi; \qquad \models \neg(\psi \vee \chi) \equiv \neg\psi\&\neg\chi;$

$\models \neg\neg\psi \equiv \psi; \qquad \models \neg\mathbf{X}\psi \equiv \mathbf{X}\neg\psi;$

$\models \neg(\psi\mathbf{U}\chi) \equiv \neg\psi\mathbf{R}\neg\chi; \qquad \models \neg(\psi\mathbf{R}\chi) \equiv \neg\psi\mathbf{U}\neg\chi.$

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Утверждение 2.

В результате применения равносильных преобразований этапов 1 и 2 любая формула PLTL φ приводится к равносильной формуле φ', представленной в позитивной форме, в которой

- используются только логические связки $\vee, \&, \neg$ и темпоральные операторы $\mathbf{X}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$,
- связка $\neg$ применяется только к атомарным высказываниям $p,\ p \in \mathcal{AP}$.

Доказательство.

Самостоятельно.

ЗАДАЧА ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Приведение формулы к позитивной форме

Пример.

$\varphi = \mathbf{G}(\mathit{free}\ \&\ \mathbf{X}\mathit{busy}\ \rightarrow\ \mathbf{XF}(\mathit{pr}_1\ \vee\ \mathit{pr}_2))$.

Этап 1.

$\varphi' = \mathbf{false}\ \mathbf{R}\ (\neg(\mathit{free}\ \&\ \mathbf{X}\mathit{busy})\ \vee\ \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1\ \vee\ \mathit{pr}_2)))$.

Этап 2.

$\varphi_1 = \mathbf{false}\ \mathbf{R}\ (\neg\mathit{free}\ \vee\ \mathbf{X}\neg\mathit{busy}\ \vee\ \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1\ \vee\ \mathit{pr}_2)))$.

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

Пусть φ_1 — формула PLTL в позитивной форме. Тогда множеством подформул Фишера–Ладнера называется наименьшее множество формул PLTL $FLSub_{\varphi_1}$, содержащее формулу φ_1 и удовлетворяющее следующим условиям:

- если $p \in FLSub_{\varphi_1}$ и $p \in \mathcal{AP}$, то $\neg p \in FLSub_{\varphi_1}$,
- если $\psi \& \chi \in FLSub_{\varphi_1}$, то $\{\psi, \chi\} \subseteq FLSub_{\varphi_1}$,
- если $\psi \vee \chi \in FLSub_{\varphi_1}$, то $\{\psi, \chi\} \subseteq FLSub_{\varphi_1}$,
- если $\neg\psi \in FLSub_{\varphi_1}$, то $\psi \in FLSub_{\varphi_1}$,
- если $\mathbf{X}\psi \in FLSub_{\varphi_1}$, то $\psi \in FLSub_{\varphi_1}$,
- если $\psi \mathbf{U} \chi \in FLSub_{\varphi_1}$, то $\{\psi, \chi, \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi)\} \subseteq FLSub_{\varphi_1}$,
- если $\psi \mathbf{R} \chi \in FLSub_{\varphi_1}$, то $\{\psi, \chi, \mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi)\} \subseteq FLSub_{\varphi_1}$.

Утверждение 3.

Если φ_1 содержит n логических связок и темпоральных операторов, то $|FLSub_{\varphi_1}| \leq 3n$.

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

Пример.

Пусть

$\varphi_1 = \mathbf{false}\ \mathbf{R}\ (\neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)))$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathit{FLSub}_{\varphi_1} = \{&\varphi_1,\\
&\mathbf{false}, \mathbf{X}\varphi_1,\ \neg \mathit{free} \vee \mathbf{X}\neg \mathit{busy} \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)),\\
&\neg \mathit{free},\ \mathbf{X}\neg \mathit{busy},\ \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2)),\\
&\mathit{free}, \neg \mathit{busy},\ \mathbf{true}\ \mathbf{U}(\mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2),\\
&\mathit{busy}, \mathbf{true}, \mathit{pr}_1 \vee \mathit{pr}_2,\\
&\mathit{pr}_1,\ \mathit{pr}_2,\ \neg \mathit{pr}_1,\ \neg \mathit{pr}_2\}.
\end{aligned}
$$

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

Next-подформулы

Пусть φ_1 — формула PLTL в позитивной форме и $FLSub_{\varphi_1}$ — множеством подформул Фишера–Ладнера формулы φ_1.

Тогда запись $XSub_{\varphi_1}$ будет обозначать множество всех тех подформул Фишера–Ладнера, которые начинаются оператором **X** (neXttime), т. е.

$$XSub_{\varphi_1} = \{\psi \ : \ \psi = \mathbf{X}\chi, \ \psi \in FLSub_{\varphi_1}\}.$$

Пример.

Пусть

$\varphi_1 = \mathbf{false}\ \mathbf{R}\ (\neg free \ \vee \ \mathbf{X}\neg busy \ \vee \ \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \ \vee \ pr_2)))$.

Тогда

$$\begin{aligned} XSub_{\varphi_1} \ = \ & \{\mathbf{X}\varphi_1, \ \mathbf{X}\neg busy, \\ & \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \ \vee \ pr_2))\}. \end{aligned}$$

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

(Until-Release)-подформулы

Пусть φ_1 — формула PLTL в позитивной форме и $FLSub_{\varphi_1}$ — множеством подформул Фишера–Ладнера формулы φ_1.

Тогда запись $URSub_{\varphi_1}$ будет обозначать множество всех тех подформул Фишера–Ладнера, которые начинаются оператором **U** (Until) или **R** (Release), т. е.

$$\begin{aligned} USub_{\varphi_1} \quad = \quad & \{\psi \ : \ \psi = \chi_1 \mathbf{U} \chi_2, \ \psi \in FLSub_{\varphi_1}\} \cup \\ & \{\psi \ : \ \psi = \chi_1 \mathbf{R} \chi_2, \ \psi \in FLSub_{\varphi_1}\}. \end{aligned}$$

Пример.

Пусть

$\varphi_1 = \mathbf{false}\ \mathbf{R}\ (\neg free \ \vee \ \mathbf{X} \neg busy \ \vee \ \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \ \vee \ pr_2)))$.

Тогда

$$USub_{\varphi_1} \quad = \quad \{\varphi_1, \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \ \vee \ pr_2)\}.$$

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

Согласованные множества подформул

Пусть φ_1 — формула PLTL в позитивной форме, и $FLSub_{\varphi_1}$ — множество подформул Фишера–Ладнера для φ_1.
Тогда согласованным множеством подформул формулы φ_1 называется всякое подмножество B, $B \subseteq FLSub_{\varphi_1}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\mathbf{true} \in B$, $\mathbf{false} \notin B$,
2. для любого атомарного высказывания p, $p \in \mathcal{AP} \cap FLSub_{\varphi_1}$, выполняется **в точности одно из двух** включений: либо $p \in B$, либо $\neg p \in B$;
3. $\psi \vee \chi \in B \iff \psi \in B$ или $\chi \in B$,
4. $\psi \& \chi \in B \iff \psi \in B$ и $\chi \in B$,
5. $\psi \mathbf{U} \chi \in B \iff \chi \in B$ или $\{\psi, \mathbf{X}(\psi \mathbf{U} \chi)\} \subseteq B$,
6. $\psi \mathbf{R} \chi \in B \iff \chi \in B$ и при этом $\chi \in B$ или $\mathbf{X}(\psi \mathbf{R} \chi) \in B$.

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

Согласованные множества подформул

Согласованные множества подформул — это максимальные множества формул, которые не содержат «явных» противоречий, т. е. таких противоречий, которые можно обнаружить в текущий момент времени.

Например, множество, состоящее из двух формул

$\mathbf{X}p$ — завтра я пойду на лекцию,

$\mathbf{X}\neg p$ — завтра я не пойду на лекцию,

может быть согласованным (хотя и противоречивым), поскольку сегодня возможное противоречие, содержащееся в этих высказываниях, не проявляется.

Согласованное множество подформул является аналогом семантической таблицы — оно выражает наше пожелание сделать все утверждения, содержащиеся в этом множестве, истинными, а все утверждения, не содержащиеся в нем, — ложными.

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

Согласованные множества подформул

Пример.

Пусть

$$
\begin{aligned}
FLSub_{\varphi_1} \;=\; & \{free,\ busy,\ pr_1,\ pr_2,\ \neg free,\ \neg busy,\ \neg pr_1,\ \neg pr_2,\\
& pr_1 \vee pr_2,\\
& \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2),\\
& \mathbf{X}\neg busy, \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)),\\
& \neg free \vee \mathbf{X}\neg busy \vee \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)),\\
& \varphi_1, \mathbf{X}\varphi_1\}.
\end{aligned}
$$

Тогда одним из согласованных множеств подформул формулы φ_1 является множество

$$
\begin{aligned}
B \;=\; & \{\mathbf{true}, pr_1,\ \neg pr_2, \neg free,\ busy, \mathbf{X}\neg busy,\\
& \mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2),\ \mathbf{X}(\mathbf{true}\ \mathbf{U}(pr_1 \vee pr_2)), \varphi_1\}.
\end{aligned}
$$

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

Утверждение 4.

Пусть I — произвольная темпоральная интерпретация, и φ_1 — произвольная формула в позитивной форме.
Тогда для любого момента времени n множество формул

$$B_n = \{\psi \ : \ \psi \in FLSub_{\varphi_1} \text{ и } I, n \models \psi\}$$

является согласованным.

Доказательство.

Самостоятельно. Непосредственно из определения согласованного множества.

А верно ли обратное утверждение: каждое согласованное множество формул выполнимо в некоторой интерпретации в начальный момент времени?

ПОДФОРМУЛЫ ФИШЕРА–ЛАДНЕРА

Утверждение 5.

Пусть φ_1 — формула PLTL в позитивной форме. Тогда

1. для любой пары $B' \subseteq \mathcal{AP} \cap FLSub_{\varphi_1}$, $B'' \subseteq XSub_{\varphi_1}$, существует такое согласованное множество подформул B, для которого верно $B \cap \mathcal{AP} = B'$, $B \cap XSub_{\varphi_1} = B''$;
2. для любой пары B_1 и B_2 согласованных множеств подформул Фишера-Ладнера φ_1 верны соотношения $B_1 = B_2 \iff B_1 \cap \mathcal{AP} = B_2 \cap \mathcal{AP}$ и $B_1 \cap XSub_{\varphi_1} = B_1 \cap XSub_{\varphi_1}$.

Доказательство.

Самостоятельно.

Утверждение 6.

Если φ_1 содержит n логических связок и темпоральных операторов, то число различных согласованных множеств подформул Фишера-Ладнера не превосходит величины 2^{3n}.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Пусть задана формулы PLTL φ и конечная LTS $M = \langle \mathcal{AP}, S, S_0, \longrightarrow, \rho \rangle$.
Нужно проверить выполнимость $M \models \varphi$.

Для этого

1. формула φ приводится к позитивной форме φ_1,
2. для формулы φ_1 строятся
   - множество подформул Фишера–Ладнера $FLSub_{\varphi_1}$,
   - множество Next-подформул $XSub_{\varphi_1}$,
   - множество U-подформул $FLSub_{\varphi_1}$,
   - совокупность Con_{φ_1} всех возможных согласованных множеств подформул Фишера–Ладнера.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Системой Хинтикки для формулы PLTL φ_1 и LTS M называется раскрашенный ориентированный граф $G_{\varphi_1,M} = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством дуг E, которые устроены так:

$$V = \{(s, B) \ : \ s \in S,\ B \in Con_{\varphi_1},\ \rho(s) = B \cap \mathcal{AP}\},$$

т. е. вершинами графа являются всевозможные пары (состояние s, согласованное множество B), для которых разметка $\rho(s)$ состояния s подтверждает истинность всех атомарных высказываний множества B;

$$\begin{aligned} E \ = \ \{\langle (s', B'), (s'', B'') \rangle \ : \ & s' \longrightarrow s'' \\ & \text{и для любой Next-подформулы } \mathbf{X}\psi, \mathbf{X}\psi \in XSub_{\varphi_1}, \\ & \text{верно } \mathbf{X}\psi \in B' \iff \psi \in B''\}, \end{aligned}$$

т. е. дугами графа являются все такие переходы LTS M, которые позволяют подтвердить все обещания $\mathbf{X}\psi$ выполнить ψ в следующий момент времени.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Теперь проведем раскраску вершин графа $\Gamma_{\varphi_1,M} = (V, E)$.
Рассмотрим множество (Until-Release)-подформул
$URSub_{\varphi_1} = \{\chi'_1 \mathbf{U} \chi''_1, \ldots, \chi'_k \mathbf{U} \chi''_k, \chi'_{k+1} \mathbf{R} \chi''_{k+1}, \ldots, \chi'_{k+m} \mathbf{R} \chi''_{k+m}\}$.
Каждой формуле ψ_i из множества $URSub_{\varphi_1}$ сопоставим индивидуальный цвет i.
Раскрасим в цвет i все вершины (s, B), для которых выполнено **хотя бы одно** из двух условий

в случае, когда $\psi_i = \chi'_i \mathbf{U} \chi''_i$:	в случае, когда $\psi_i = \chi'_i \mathbf{R} \chi''_i$:
1) $\chi''_i \in B$, 2) $\mathbf{X}(\chi'_i \mathbf{U} \chi''_i) \notin B$.	1) $\chi''_i \notin B$, 2) $\mathbf{X}(\chi'_i \mathbf{R} \chi''_i) \in B$.

Бесконечный маршрут

$$(s_{i_1}, B_{i_1}), (s_{i_2}, B_{i_2}), \ldots, (s_{i_n}, B_{i_n}), \ldots$$

в графе $\Gamma_{\varphi_1,M}$ назовем радужным, если в нем бесконечно часто встречаются вершины каждого цвета $1, 2, \ldots, k$.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Основная теорема

Для любой формулы PLTL φ_1 в позитивной форме и LTS $M = \langle \mathcal{AP}, S, S_0, \longrightarrow, \rho \rangle$

$$M \not\models \varphi_1$$

$$\Updownarrow$$

в графе $\Gamma_{\varphi_1, M}$ существует хотя бы один радужный маршрут, исходящий из вершины $v_0 = (s_0, B_0)$, в которой $s_0 \in S_0$ и $\varphi_1 \notin B_0$.

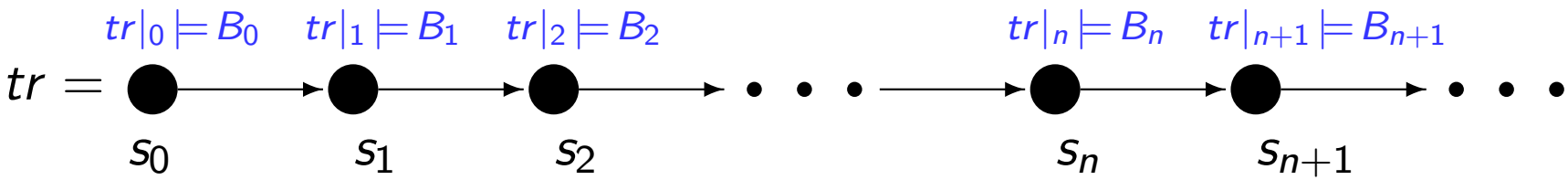
ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Доказательство.

($\Uparrow$) Предположим, что в графе $\Gamma_{\varphi_1,M}$ есть радужный маршрут

$$(s_0, B_0), (s_1, B_1), \ldots, (s_n, B_n), (s_{n+1}, B_{n+1}), \ldots$$

указанного вида, в котором $\varphi_1 \notin B_0$.
Тогда согласно определению системы Хинтикки $\Gamma_{\varphi_1,M}$ в LTS M есть начальная трасса



Покажем, что для любой формулы ψ, $\psi \in FLSub_{\varphi_1}$, и для любого $n, n \geq 0$, верно

$$tr|_n \models \psi \iff \psi \in B_n \ .$$

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Доказательство.

Если удастся показать, что

$$tr|_n \models \psi \iff \psi \in B_n \qquad (*)$$

то, учитывая $\varphi_1 \notin B_0$, придем к заключению $tr \not\models \varphi_1$.
Для доказательства соотношения $(*)$ воспользуемся индукцией по числу связок в формуле ψ.

Базис индукции. $p \in \mathcal{AP}$.

$p \in B_n \iff p \in \xi(s_n) \iff tr|_n \models p$.

$\neg p \in B_n \iff p \notin B_n \iff p \notin \xi(s_n) \iff tr|_n \not\models p \iff tr|_n \models \neg p.$

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Доказательство.

Индуктивный переход.

1. Логические связки & и $\vee$.

$\psi_1 \& \psi_2 \in B_n \iff \psi_1 \in B_n$ и $\psi_2 \in B_n \iff tr|_n \models \psi_1$ и $tr|_n \models \psi_1$
$\iff tr|_n \models \psi_1 \& \psi_1$.

2. Темпоральный оператор $\mathbf{X}$.

$\mathbf{X}\psi \in B_n \iff \psi \in B_{n+1} \iff tr|_{n+1} \models \psi \in B_{n+1} \iff tr|_n \models \mathbf{X}\psi.$

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Индуктивный переход.

3. Темпоральный оператор **R**.

3.1. Покажем $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \in B_n \Longrightarrow tr|_n \models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.

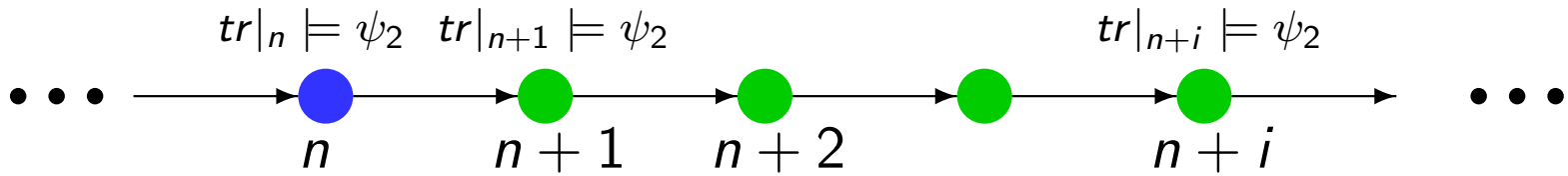
Заметим, что согласно определению согласованного множества $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \in B \iff \psi_2 \in B$ и при этом $\psi_1 \in B$ или $\mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \in B$.

Пусть $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \in B_n$. Тогда возможны 2 случая.

Вариант 1. $\mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \in B_{n+i}$ для любого i, $i \geq 0$.

Тогда по определению $\Gamma_{\varphi_1, M}$ в каждом множестве B_{n+i}, $i \geq 0$, содержится формула $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2$ и, следовательно, $\psi_2 \in B_{n+i}$.

Тогда по индуктивному предположению $tr|_{n+i} \models \psi_2$ для любого i, $i \geq 0$. Следовательно, $tr|_n \models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.



ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Индуктивный переход.

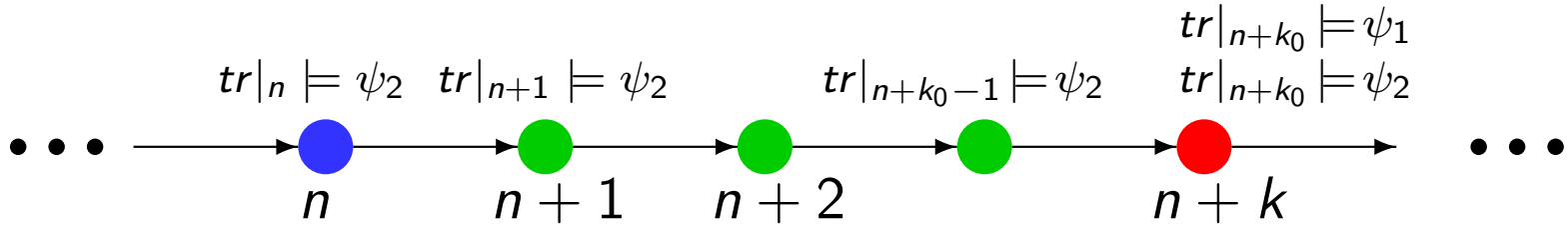
Вариант 2. $\mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \notin B_{n+k}$ для некоторого k, $k \geq 0$.

Тогда существует такое k_0, что $\mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \notin B_{n+k_0}$ но $\mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \in B_{n+i}$ для любого i, $0 \leq i < k_0$.

Тогда по определению графа $\Gamma_{\varphi_1, M}$ в каждом множестве B_{n+i}, $0 \leq i \leq k_0$, содержится формула $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.

Тогда по определению согласованных множеств $\psi_2 \in B_{n+i}$ для любого i, $0 \leq i \leq k_0$, и, кроме того, $\psi_1 \in B_{n+k_0}$.

Тогда по индуктивному предположению $tr|_{n+i} \models \psi_2$ для любого $0 \leq i \leq k_0$ и $tr|_{n+k_0} \models \psi_1$. Значит, $tr|_n \models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.



Итак, в обоих случаях $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \in B_n \Longrightarrow tr|_n \models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Индуктивный переход.

3.2. Покажем $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \notin B_n \Longrightarrow tr|_n \not\models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.

Пусть $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \notin B_n$. Т. к. $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \in URSub_{\varphi_1}$ этой формуле соответствует некоторый цвет j.
Поскольку рассматриваемый маршрут

$$(s_0, B_0), (s_1, B_1), \ldots, (s_n, B_n), (s_{n+1}, B_{n+1}), \ldots$$

является радужным, то вершины, окрашенные в цвет j, встречаются в этом маршруте бесконечно часто.
Значит, существует такое k, $k \geq 0$, что вершина (s_{n+k}, B_{n+k}) — первая, окрашенная в цвет j вершина, следующая в этом радужном маршруте вслед за вершиной (s_n, B_n).

Имеются две причины, по которым вершина (s_{n+k}, B_{n+k}) оказалась окрашенной в цвет j:

- $\psi_2 \notin B_{n+k}$,
- $\mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \in B_{n+k}$,

Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Индуктивный переход.

Вариант 1. $\psi_2 \notin B_{n+k}$.

Т. к. все вершины (s_{n+i}, B_{n+i}), $0 \leq i < k$ не окрашены в цвет j, для каждого из множеств B_{n+i}, $0 \leq i < k$, верны соотношения

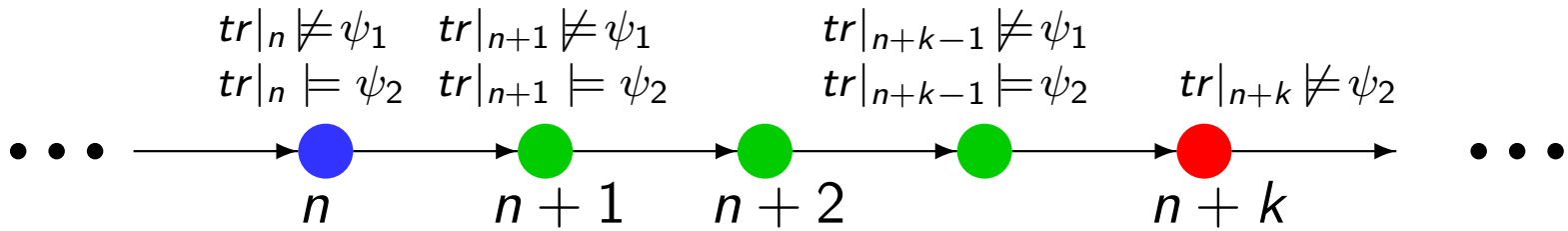
$$\psi_2 \in B_{n+i} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \notin B_{n+i}.$$

Тогда по определению графа $\Gamma_{\varphi_1, M}$ для каждого множества B_{n+i}, $0 \leq i < k$, верно соотношение $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \notin B_{n+i}$. А отсюда следует, что $\psi_1 \notin B_{n+i}$ для любого i, $0 \leq i < k$.

Тогда по индуктивному предположению

$tr|_{n+i} \models \psi_2$ и $tr|_{n+i} \not\models \psi_1$ для любого i, $0 \leq i < k$,

$tr|_{n+k} \not\models \psi_2$.



А это означает, что $tr|_n \not\models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Индуктивный переход.

Вариант 2. $\mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \in B_{n+k}$.

Т. к. все вершины (s_{n+i}, B_{n+i}), $0 \leq i < k$ не окрашены в цвет j, для каждого из множеств B_{n+i}, $0 \leq i < k$, верны соотношения

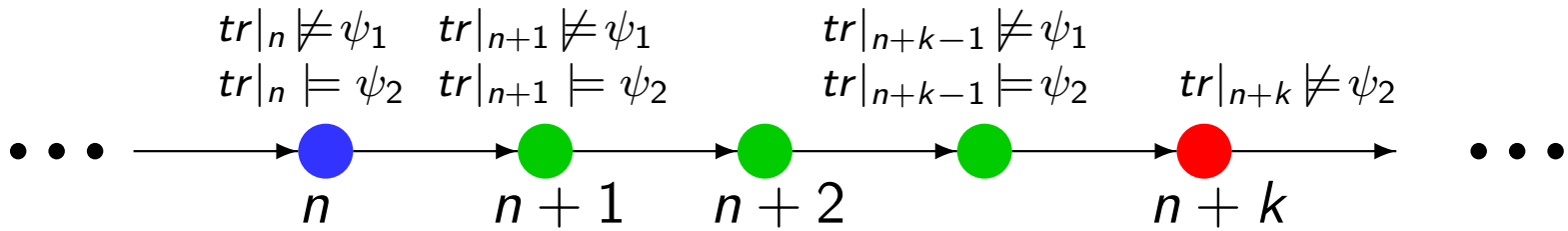
$$\psi_2 \in B_{n+i} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{X}(\psi_1 \mathbf{R} \psi_2) \notin B_{n+i}.$$

Тогда по определению графа $\Gamma_{\varphi_1, M}$ для каждого множества B_{n+i}, $0 \leq i \leq k$, верно соотношение $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \notin B_{n+i}$. А отсюда следует, что $\psi_1 \notin B_{n+i}$ для любого i, $0 \leq i < k$ и $\psi_2 \notin B_{n+k}$.

Тогда по индуктивному предположению

$tr|_{n+i} \models \psi_2$ и $tr|_{n+i} \not\models \psi_1$ для любого i, $0 \leq i < k$,

$tr|_{n+k} \not\models \psi_2$.



И во втором случае $tr|_n \not\models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Индуктивный переход.

Таким образом, если $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \notin B_n$, то $tr|_n \not\models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$.

В итоге, для любой формулы вида $\psi_1 \mathbf{R} \psi_2$ и для любой вершины (s_n, B_n) нашего **радужного** маршрута верно соотношение

$$\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \in B_n \iff tr|_n \models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \ .$$

4. Темпоральный оператор $\mathbf{U}$.

Для доказательства соотношения

$$\psi_1 \mathbf{R} \psi_2 \in B_n \iff tr|_n \models \psi_1 \mathbf{R} \psi_2$$

применяются рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы для исследования оператора $\mathbf{R}$.

Самостоятельно.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Завершив обоснование индуктивного перехода, мы тем самым завершили доказательство первой части теоремы:

$$M \not\models \varphi_1$$

$$\Uparrow$$

в графе $\Gamma_{\varphi_1,M}$ существует хотя бы один радужный маршрут, исходящий из вершины $v_0 = (s_0, B_0)$, в которой $s_0 \in S_0$ и $\varphi_1 \notin B_0$.

Покажем, что в том случае, когда имеет место $M \not\models \varphi_1$, в графе $\Gamma_{\varphi_1,M}$ из некоторой вершины $v_0 = (s_0, B_0)$, в которой $s_0 \in S_0$ и $\varphi_1 \notin B_0$, исходит хотя бы один радужный маршрут.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Пусть $M \not\models \varphi_1$. Тогда в LTS M существует такая начальная трасса tr, для которой $tr \not\models \varphi_1$. Рассмотрим эту трассу tr.

Для каждого i, $i \geq 0$, положим

$$B_i = \{\psi \ : \ \psi \in FLSub_{\varphi_1}, tr|_i \models \psi \ .\}$$

Согласно утверждению 4, все построенные множества B_i являются согласованными.

Покажем, что последовательность пар

$$(tr[0], B_0), (tr[1], B_1), (tr[2], B_2), \ldots, (tr[n], B_n), (tr[n{+}1], B_{n+1}), \ldots$$

образует искомый радужный маршрут в графе Γ_{φ_1}.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Действительно,

1. Для любого n, $n \geq 0$, верно $tr[n] \longrightarrow tr[n+1]$, поскольку tr — маршрут в LTS M.

2. Для любого n, $n \geq 0$ и для любой формулы $\mathbf{X}\psi \in XSub_{\varphi_1}$, верно

$$\mathbf{X}\psi \in B_n \iff \psi \in B_{n+1}$$

поскольку

$$\mathbf{X}\psi \in B_n \iff tr|_n \models \mathbf{X}\psi \iff tr|_{n+1} \models \psi \iff \psi \in B_{n+1} \ .$$

3. $tr[0] \in S_0$ (т. к. tr — начальная трасса в M) и $\varphi_1 \notin B_0$ (т. к. $tr|_0 \not\models \varphi_1$).

Значит, последовательность

$$(tr[0], B_0), (tr[1], B_1), (tr[2], B_2), \ldots, (tr[n], B_n), (tr[n+1], B_{n+1}), \ldots$$

является маршрутом в графе $\Gamma_{\varphi_1, M}$, исходящим из нужной вершины.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

4. Осталось показать, что маршрут

$$(tr[0], B_0), (tr[1], B_1), (tr[2], B_2), \ldots, (tr[n], B_n), (tr[n+1], B_{n+1}), \ldots$$

является радужным.

Рассмотрим произвольное число n, $n \geq 0$ и произвольную формулу $\psi_i \in URSub_{\varphi_1}$. Покажем, что существует такое $k, k \geq 0$, что вершина $(tr[n+k], B_{n+k})$ окрашена в цвет i.

ТАБЛИЧНЫЙ МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ

Ограничимся рассмотрением Until-формулы $\psi_i = \chi' \mathbf{U} \chi_2$. (Для формул вида $\psi_i = \chi' \mathbf{R} \chi_2$ доказательство проведите самостоятельно.)

1. Если $tr|_n \not\models \mathbf{X}(\chi_1 \mathbf{U} \chi_2)$, то $\mathbf{X}(\chi_1 \mathbf{U} \chi_2) \notin B_n$, и, следовательно, вершина $(tr[n], B_n)$ окрашена в цвет j.
2. А если $tr|_n \models \mathbf{X}(\chi_1 \mathbf{U} \chi_2)$, то $tr|_{n+1} \models \chi_1 \mathbf{U} \chi_2$. Тогда существует такое k, $k \geq 1$, что $tr|_{n+k} \models \chi_2$. Поэтому $\chi_2 \in B_{n+k}$, и вершина $(tr[n+k], B_{n+k})$ окрашена в цвет j.

Таким образом, вершины цвета j встречаются в нашем маршруте бесконечно часто. Поскольку ψ_i была произвольной (Until-Release)-формулой, это означает, что наш маршрут в графе $\Gamma_{\varphi_1, M}$ является радужным. □

АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Но как проверить, что из заданной вершины в графе $\Gamma_{\varphi_1,M}$ не исходит ни одного радужного маршрута?

Ориентированный граф Г называется сильно связным , если для любой пары вершин v и u в графе Г существует маршрут из v в u и маршрут из u в v.

Всякий максимальный сильно связный подграф графа Г называется компонентой сильной связности .

Компоненту сильной связности графа (системы Хинтикки) $\Gamma_{\varphi_1,M}$ будем называть радужной, если в ней содержатся вершины **всех** цветов.

АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Теорема.

Из вершины v в графе $\Gamma_{\varphi_1,M}$ исходит радужный маршрут тогда и только тогда, когда существует маршрут , ведущий из вершины v хотя бы в одну из вершин хотя бы одной радужной компоненты сильной связности.

Доказательство.

Самостоятельно. Здесь все очевидно.

АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Исходные данные: формула PLTL φ и LTS $M = \langle \mathcal{AP}, S, S_0, \longrightarrow, \rho \rangle$.

1. Построить равносильную позитивную форму φ_1.
2. Построить систему Хинтикки $\Gamma_{\varphi_1, M}$.
3. Выделить множество подформул $URSub_{\varphi_1}$ и раскрасить вершины графа $\Gamma_{\varphi_1, M}$.
4. Выделить радужные компоненты сильной связности в графе $\Gamma_{\varphi_1, M}$.
5. Выделить множество V' всех вершин графа $\Gamma_{\varphi_1, M}$, из которых достижимы радужные компоненты сильной связности.
6. Выделить множество V'' всех вершин (s_0, B_0), для которой выполняется $s_0 \in S_0$, $\varphi_1 \notin B_0$.
7. Вычислить $V = V' \cap V''$.

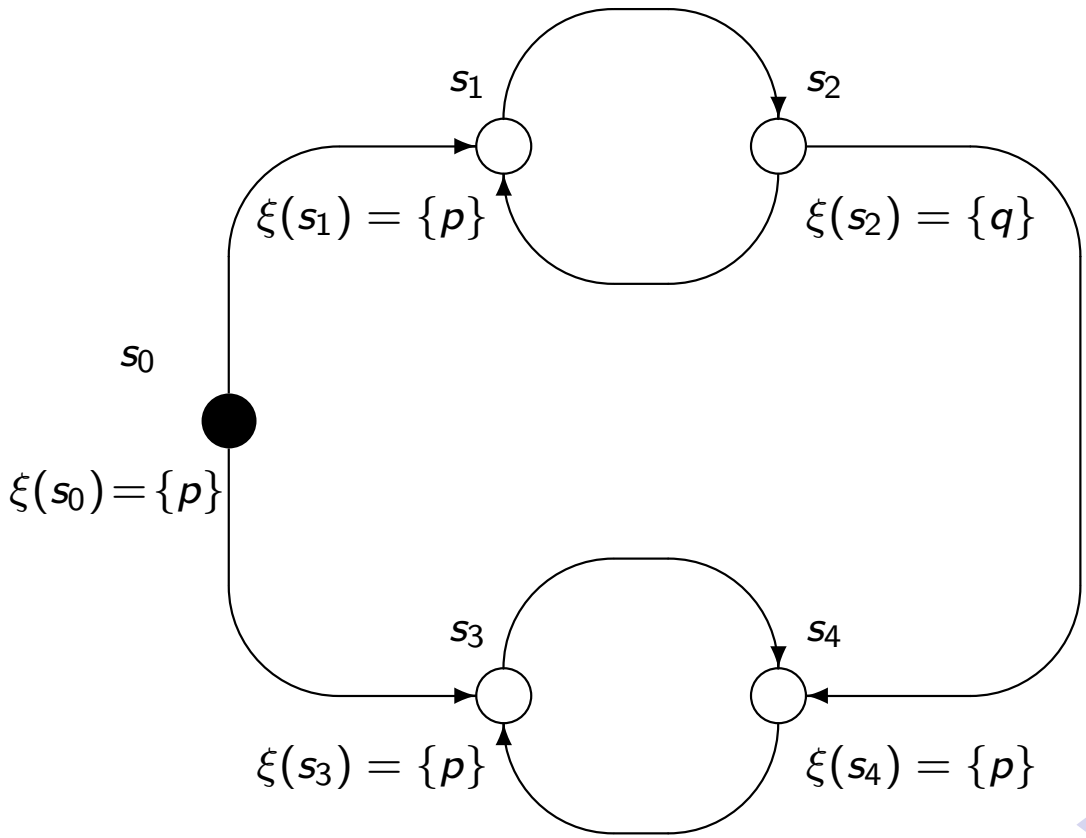
Результат: $M \models \varphi \iff V = \varnothing$.

АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Пример.

$$\varphi = p \mathbf{U} q$$

LTS M:



АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Пример.

$\varphi = \mathbf{F}(p\mathbf{U}q)$

1. Позитивная форма $\varphi_1 = p\mathbf{U}q$

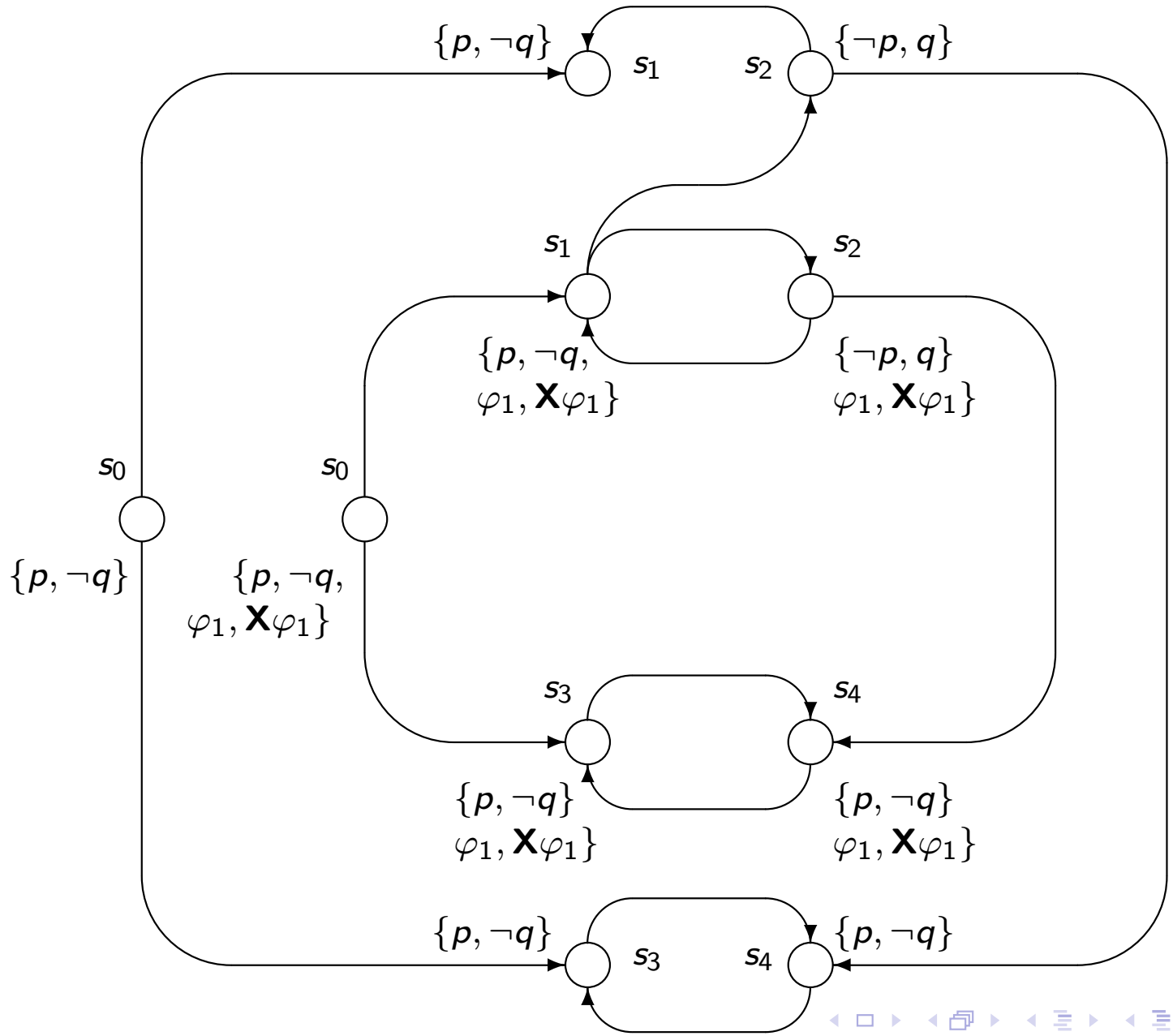
$FLSub_{\varphi_1} = \{p, \neg p, q, \neg q, p\mathbf{U}q, \mathbf{X}(p\mathbf{U}q)\}$;

$XSub_{\varphi_1} = \{\mathbf{X}(p\mathbf{U}q)\}$;

$URSub_{\varphi_1} = \{p\mathbf{U}q\}$.

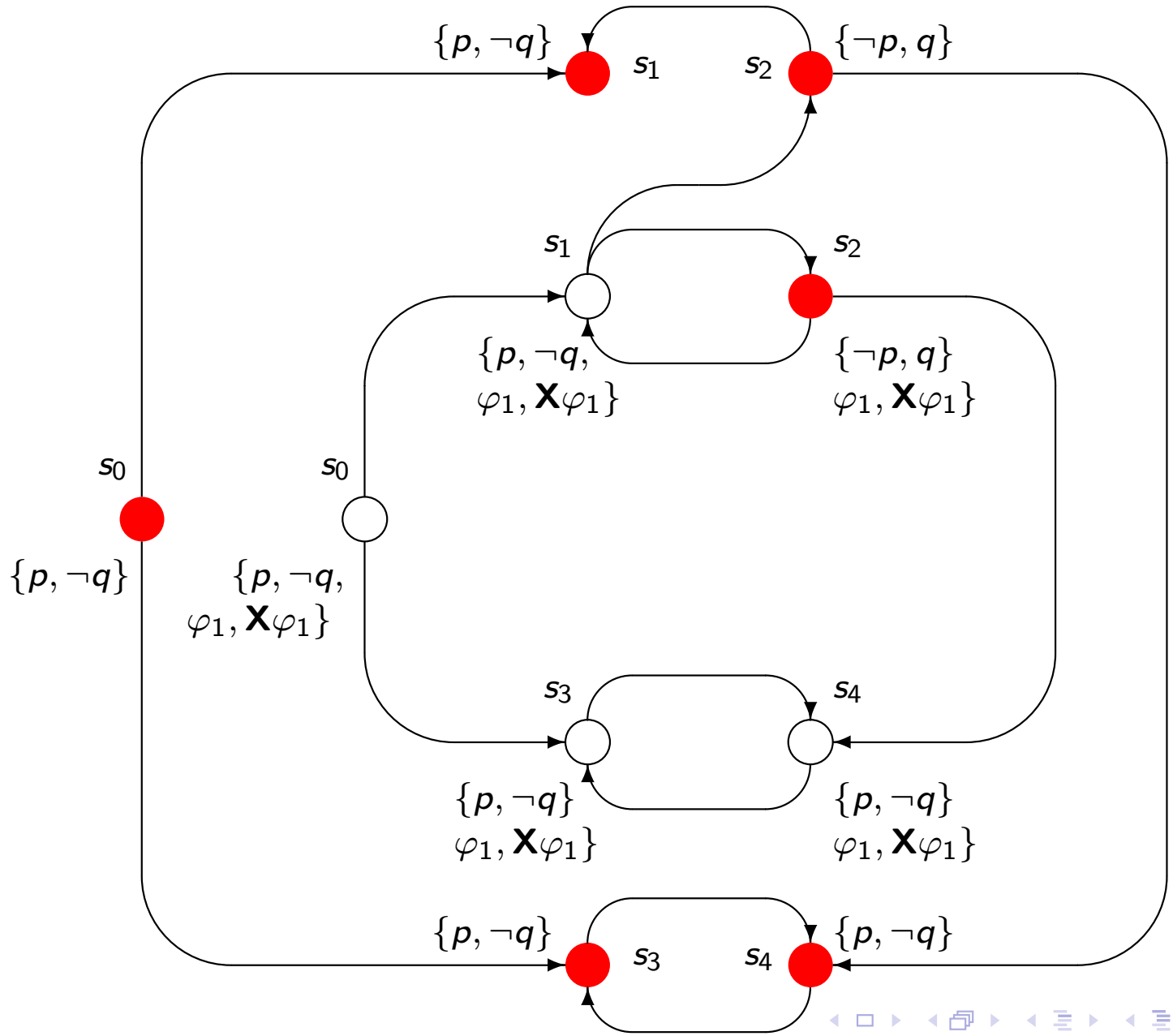
АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ

2. Строим систему Хинтикки $\Gamma_{\varphi_1, M}$



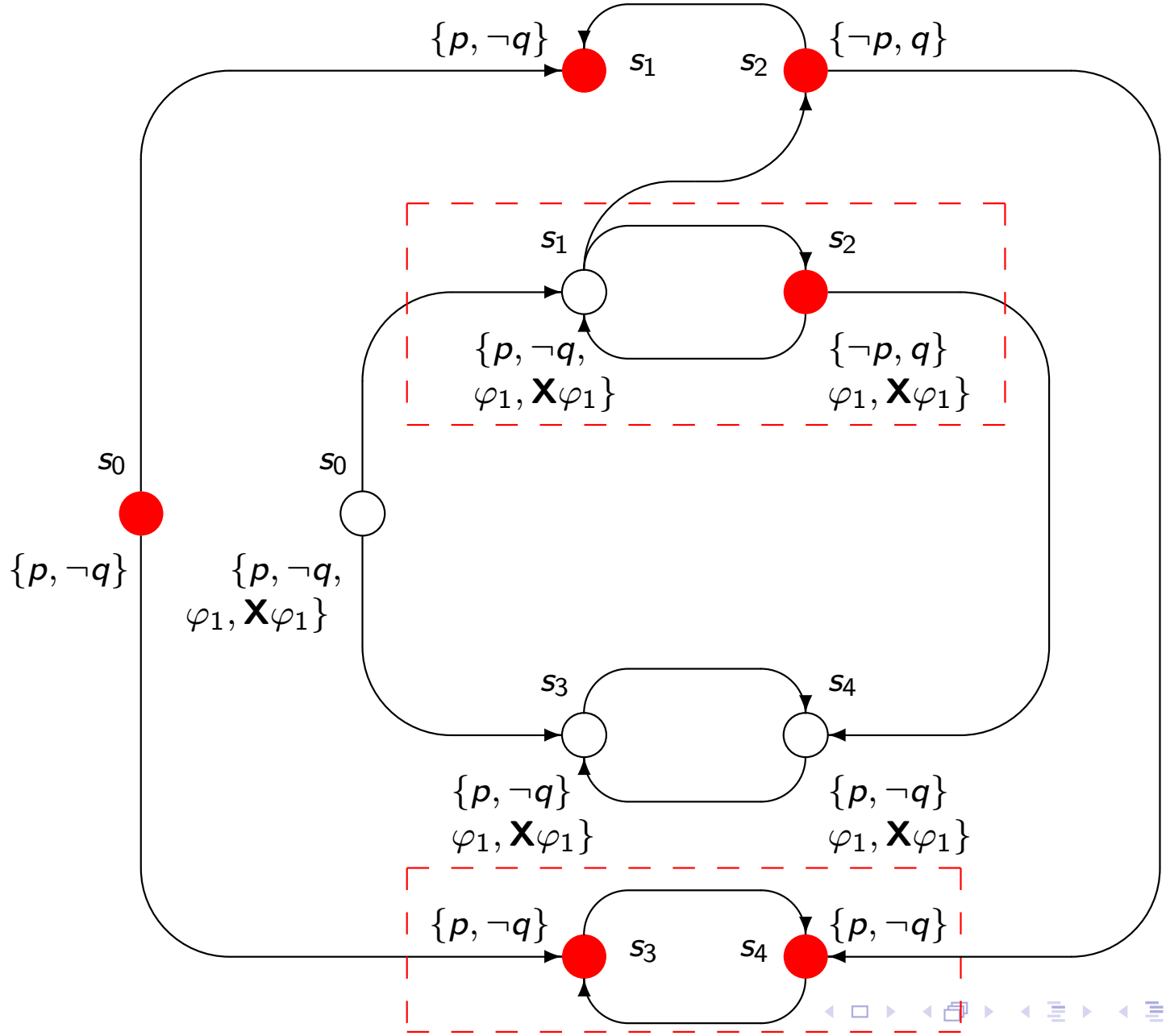
АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ

3. Раскрашиваем вершины системы $\Gamma_{\varphi_1, M}$



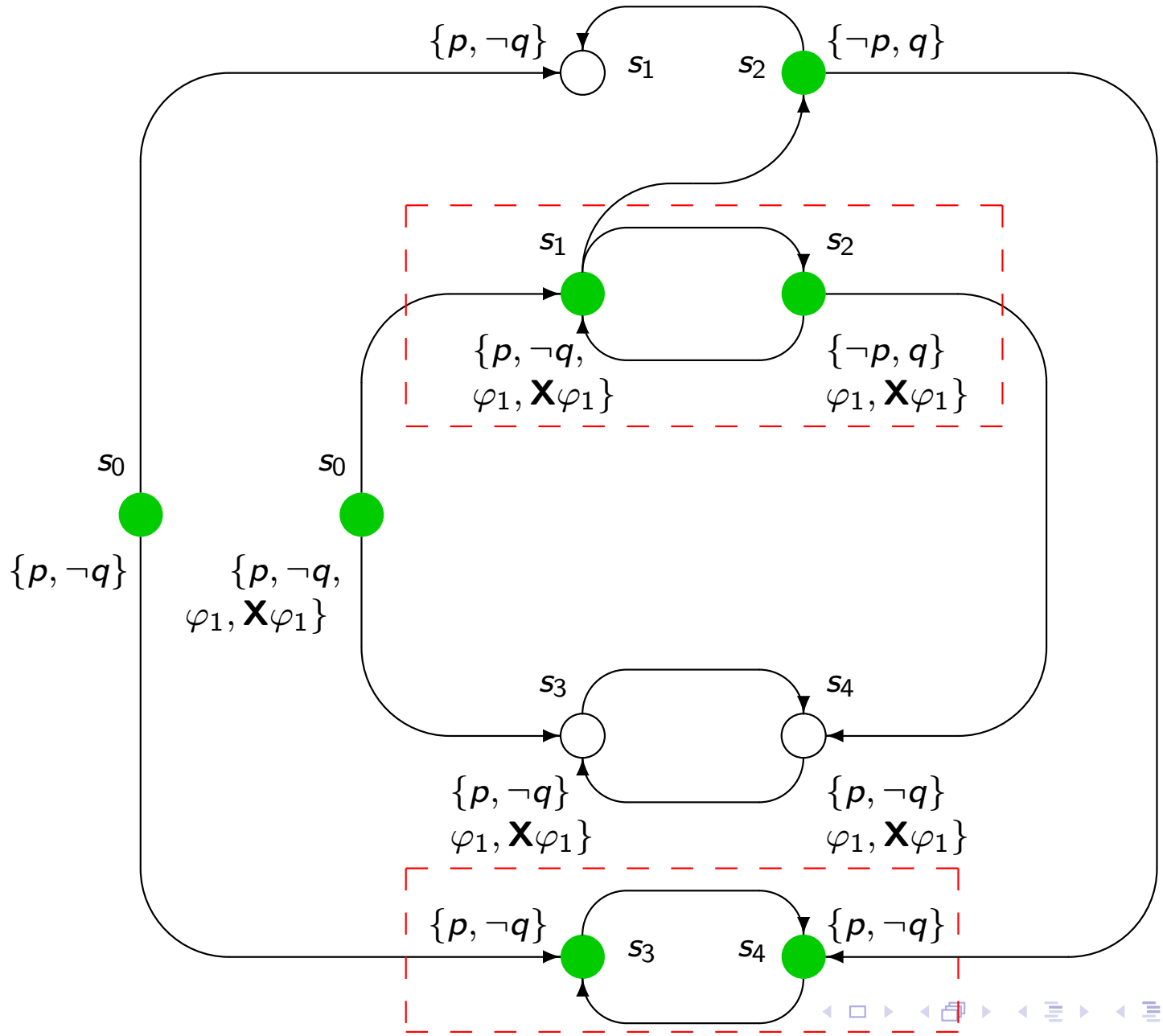
АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ

4. Выделяем радужные компоненты сильной связности



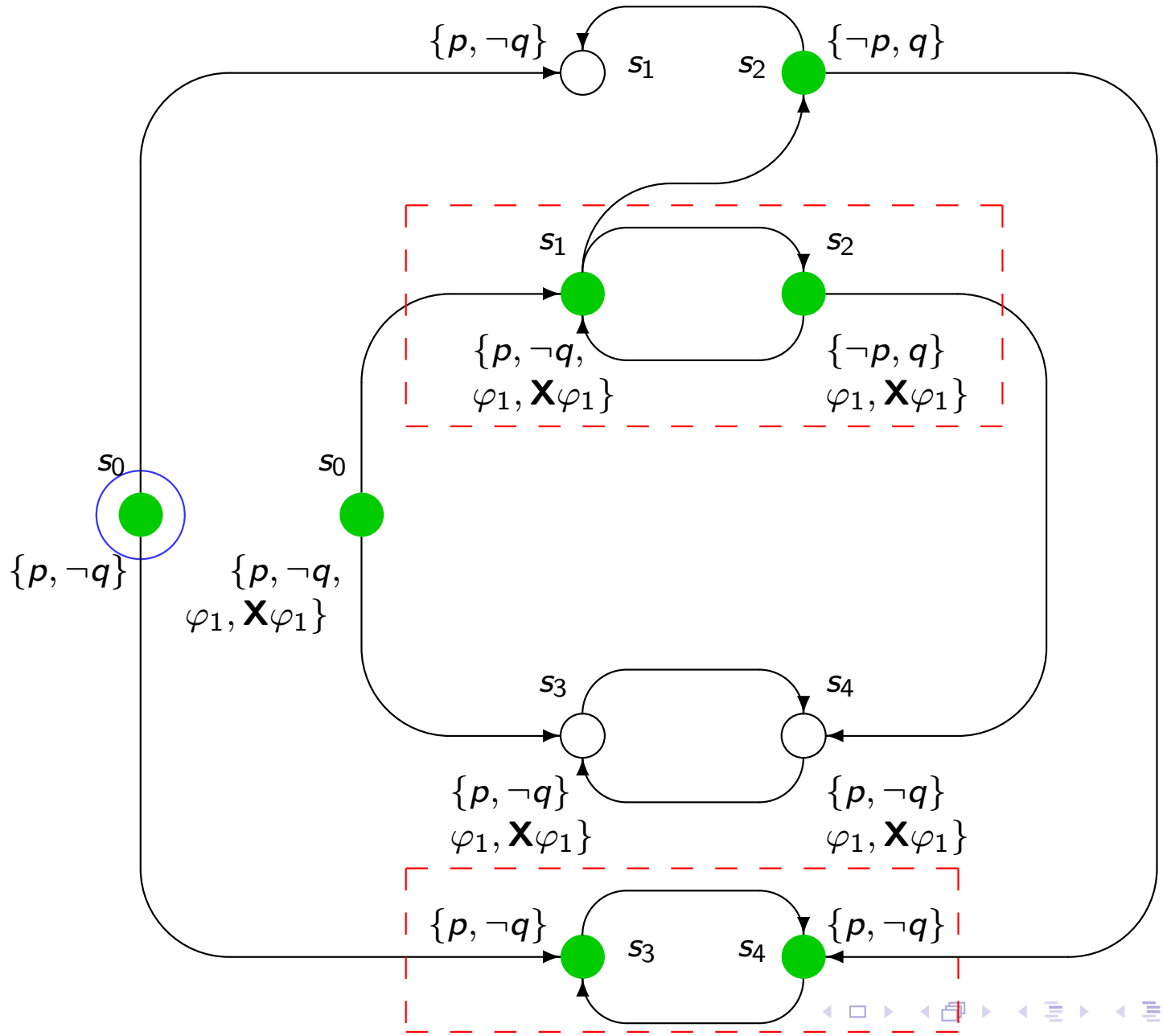
АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ

5. Выделяем вершины из которых достижимы радужные компоненты



АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ

6. Ищем вершину (s_0, B) на которой опровергается φ_1



АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Описанный здесь подход к верификации распределенных программ реализован в программно-инструментальной системе верификации **SPIN** .

Модели параллельных взаимодействующих процессов описываются на языке **PROMELA** (Process Meta Language), снабжаются темпоральными спецификациями (PLTL формулами), а затем выполнимость этих формул проверяется системой верификации **SPIN** .

В системе **SPIN** применяется табличный алгоритм верификации моделей распределенных программ. Для повышения его эффективности используется ряд приемов:

- проверка модели «на лету»;
- редукции частичных порядков;
- символьное представление данных и др.

АЛГОРИТМ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ПРОГРАММ

Более подробно о системе верификации **SPIN** вам расскажут

Константин Олегович Савенков
и
Игорь Владимирович Коннов

в курсе

«Верификация программ на моделях»

в весеннем семестре.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 22

ЭКЗАМЕН СОСТОИТСЯ 11 ЯНВАРЯ в 10 часов.

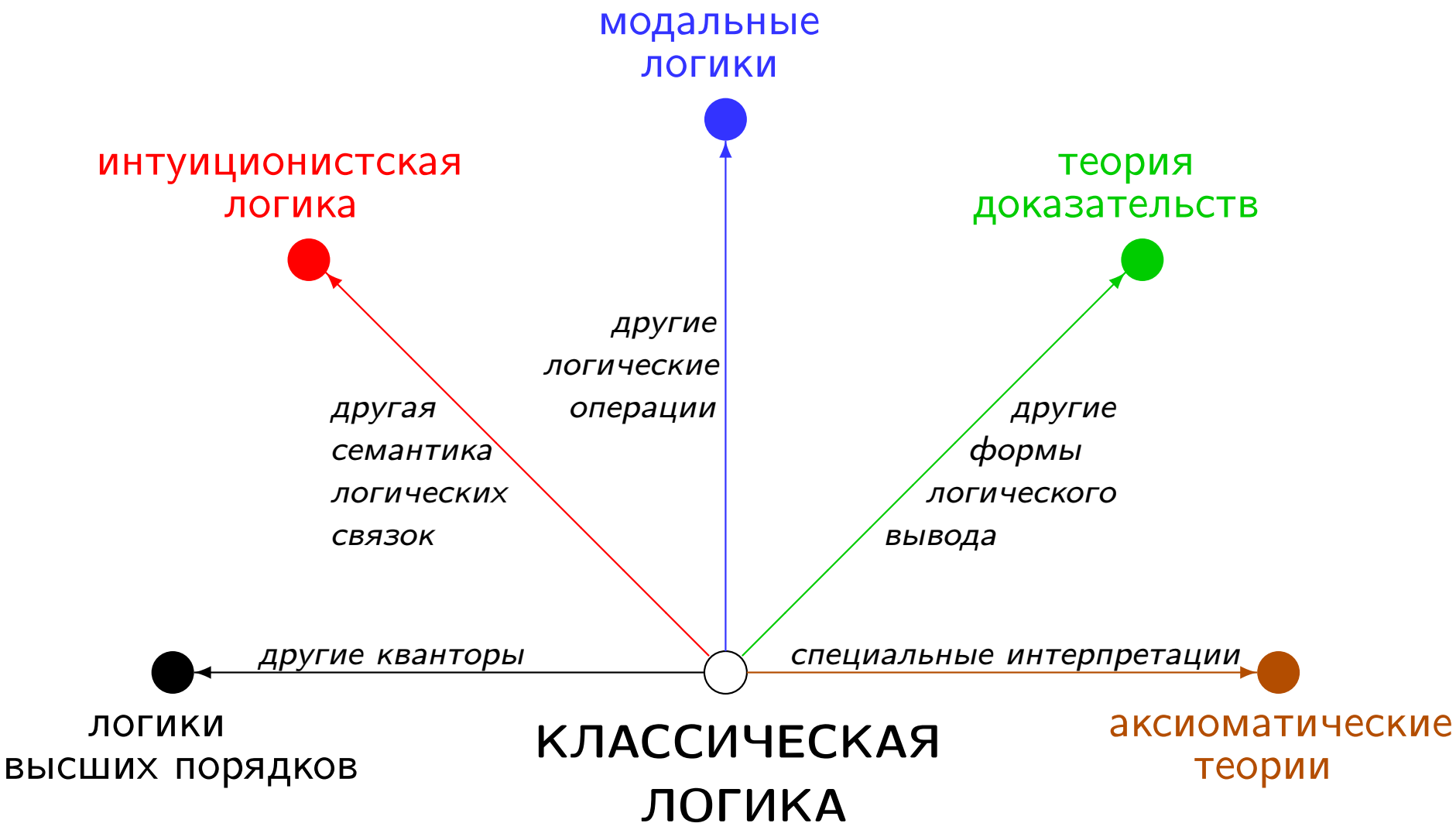
КОНСУЛЬТАЦИЯ — 10 ЯНВАРЯ в 15 часов.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 18.

Как устроена математика.
Исчисление предикатов первого порядка.
Аксиоматические теории.
Элементарная геометрия.
Теория множеств Цермело–Френкеля.
Арифметика Пеано.
Теорема Геделя о неполноте.


модальные
логики
интуиционистская
логика
теория
доказательств
другие
логические
операции
другая
семантика
логических
связок
другие
формы
логического
вывода
другие кванторы
специальные интерпретации
логики
высших порядков
КЛАССИЧЕСКАЯ
ЛОГИКА
аксиоматические
теории

Как устроена математика

Математика — это специфическая наука.

Она не относится к числу естественных наук (физика, ботаника, геология, и пр.), т. к. она не имеет дела ни с природными явлениями, ни с эмпирическими знаниями.

Она не относится к числу гуманитарных наук (философия, история, политология и пр. болтология), т. к она не занимается ни людской деятельностью, ни людскими воззрениями.

Она занимается созданием, развитием и изучением математических теорий — умозрительных конструкций, которые строятся по строгим объективным законам формальной логики .

Как устроена математика

Станислав Лем сравнивал математику с безумным портным, который шьет одежду для неведомых существ.
Портного не беспокоит, кому придется впору его одежда.
Он лишь хочет, чтобы платье было сшито прочно.

Как устроена математика

С чего начинается рассказ о каждом разделе математики?

- Вначале уславливаются о системе обозначений, определяют язык, на котором будут записывать математические утверждения (определяется синтаксис математического языка).
- Затем приходят к соглашению об основополагающих свойствах, законах, которым должны удовлетворять интересующие нас операции и отношения над воображаемыми объектами (формулируются аксиомы математической теории).
- Далее договариваются о том, какие средства обоснования истинности математических утверждений считаются допустимыми (определяется аппарат логического вывода).
- И после этого приступают к получению логически обоснованных утверждений сформулированной математической теории (вывод теорем).

Вот так строятся формальные аксиоматические теории .

Классическое исчисление предикатов

Как можно аксиоматизировать теорию общезначимых утверждений (формул)? Например, так:

АКСИОМЫ.

1. Ax1. $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1)$,
2. Ax2. $(\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \to (\varphi_1 \to \varphi_3))$,
3. Ax3. $(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \to \varphi_1$,
4. Ax4. $(\varphi_1 \,\&\, \varphi_2) \to \varphi_2$,
5. Ax5. $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_1 \,\&\, \varphi_2))$,
6. Ax6. $\varphi_1 \to (\varphi_1 \vee \varphi_2)$,
7. Ax7. $\varphi_2 \to (\varphi_1 \vee \varphi_2)$,
8. Ax8. $(\varphi_1 \to \varphi_0) \to ((\varphi_2 \to \varphi_0) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \varphi_0))$,
9. Ax9. $\varphi_1 \to (\neg\varphi_1 \to \varphi_0)$,
10. Ax10. $\varphi_1 \vee \neg\varphi_1$,

Классическое исчисление предикатов

АКСИОМЫ.

1. Ax11. $\forall X\ \varphi(X) \to \varphi(t)$,
2. Ax12. $\varphi(t) \to \exists X\ \varphi(X)$,
3. Ax13. $\forall X\ (\varphi_1 \to \varphi_2(X)) \to (\varphi_1 \to \forall X\ \varphi_2(X))$,
4. Ax14. $\forall X\ (\varphi_1(X) \to \varphi_2) \to (\exists X\ \varphi_1(X) \to \varphi_2)$.

ПРАВИЛА ВЫВОДА.

1. Правило отделения (modus ponens) $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$,
2. Правило обобщения $\dfrac{\varphi}{\forall X\ \varphi}$

Классическое исчисление предикатов

ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД.

Пусть задано некоторое множество формул (гипотез) Γ.
Тогда логическим выводом из множества гипотез Γ называется конечная последовательность формул

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n,$$

в которой каждая формула φ_i удовлетворяет одному из следующих условий:

1. либо φ_i является аксиомой,
2. либо φ_i является гипотезой, т. е. $\varphi_i \in \Gamma$,
3. либо φ_i получается из предшествующих формул этой последовательности по правилу отделения или по правилу обобщения.

В этом случае формула φ_n называется выводимой из множества Γ, и этот факт обозначается $\Gamma \vdash \varphi_n$

Формула φ называется теоремой, если $\varnothing \vdash \varphi$, и этот факт обозначается $\vdash \varphi$.

Классическое исчисление предикатов

Исчисление предикатов с равенством.

Введем специальный двухместный предикатный символ $=$ и добавим к аксиомам КИП следующие аксиомы равенства:

1. Ax15. $\forall X\ (X = X)$,
2. Ax16 $\forall X, Y\ (X = Y\ \rightarrow\ (\varphi(X, X)\ \rightarrow\ \varphi(X, Y)))$.

Полученную систему аксиом называют классическим исчислением предикатов с равенством $КИП_{=}$.

Алгебраическая система I называется нормальной интерпретацией , если для любой пары различных предметов d_1, d_2 из области интерпретации D_I верно соотношение

$$I\ \not\models\ d_1 = d_2\ .$$

Аксиоматические теории первого порядка

Элементарная аксиоматическая теория образуется из исчисления предикатов с равенством за счет

- ограничения сигнатуры языка логики предикатов фиксированным конечным набором констант, функциональных и предикатных символов, обозначающих базовые объекты, операции и отношения теории,
- добавления к множеству аксиом исчисления предикатов специальных (нелогических) аксиом, описывающих базовые принципы теории.

Таким образом образуются элементарная теория равенства, элементарная теория групп, элементарная теория полей, элементарная геометрия, элементарная арифметика, элементарная теория множеств, и др.

Формулы φ, логически выводимые из аксиом элементарной аксиоматической теории T, называются теоремами этой теории и обозначаются записью $T \vdash \varphi$.

Аксиоматические теории первого порядка

Элементарная аксиоматическая теория T называется

- непротиворечивой, если не все формулы являются теоремами теории T, т. е. существует такая формула φ, для которой $T \nvdash \varphi$;
- полной, если всякая формула или ее отрицание являются теоремами теории T, т. е. для любой формулы φ либо $T \vdash \varphi$, либо $T \vdash \neg\varphi$;
- категоричной, если любые **нормальные** две модели теории T изоморфны, т. е. для любой пары нормальных интерпретаций I_1, I_2 верно
$$I_1 \models T \text{ и } I_2 \models T \implies I_1 \cong I_2;$$
- разрешимой, если существует алгоритм, проверяющий, является ли произвольная формула теоремой теории T.

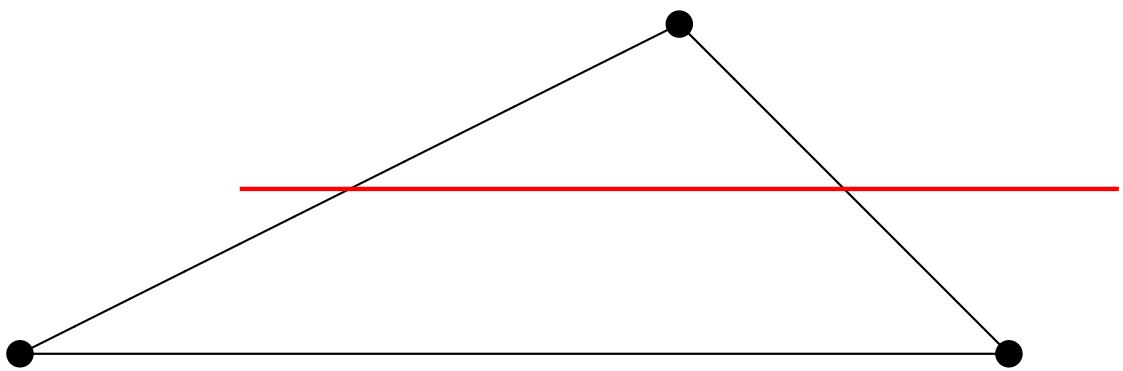
Аксиоматическое устройство геометрии

Впервые попытку аксиоматизировать геометрию предпринял Евклид (3 в. до н. э.). Геометрическая теория Евклида опиралась на 5 аксиом.

К сожалению, система геометрических аксиом из «Начал» Евклида неполна.

Вот пример истинного утверждения, которое нельзя вывести из аксиом и постулатов Евклида.

Если прямая пересекает одну из сторон треугольника в точке, отличной от вершины треугольника, то эта прямая также пересекает еще одну сторону треугольника.



Аксиоматическое устройство геометрии

Систематическое и основательное построение геометрической системы аксиом было осуществлено Д. Гильбертом (40 аксиом) в 1899 г. Более более краткую аксиоматику удалось построить А. Тарскому и его ученика (12 аксиом).

Аксиомы Тарского

Будем рассматривать геометрический мир, все объекты которого — точки .

На множестве точек есть всего лишь два базовых предиката:

$\mathbf{B(x, y, z)}$	точка y лежит между точками x и z на одной прямой
$\mathbf{D(x, y, z, u)}$	точка x отстоит от точки y на такое же расстояние, что и точка z от точки u

Аксиоматическое устройство геометрии

Аксиомы T1–T5

1). $\forall x, y, z\ (B(x, y, z) \rightarrow B(z, y, x))$
(аксиома симметричности предиката B)

2). $\forall x, y, z, u\ (B(x, y, u) \& B(y, z, u) \rightarrow B(x, y, z))$
(аксиома транзитивности предиката B)

3). $\forall x, y\ D(x, y, y, x)$
(аксиома симметричности равенства длин отрезков)

4). $\forall x, y, z\ (D(x, y, z, z) \rightarrow x = y)$
(аксиома нулевого отрезка)

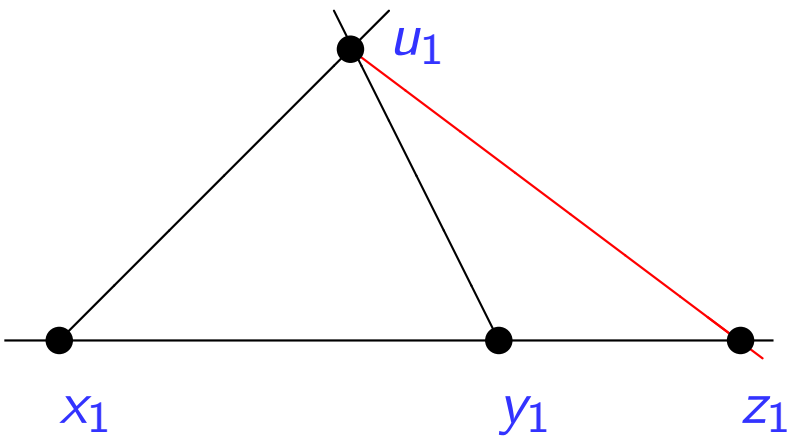
5). $\forall x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$
$(D(x_1, y_1, x_2, y_2) \& D(x_2, y_2, x_3, y_3) \rightarrow D(x_1, y_1, x_3, y_3))$
(аксиома транзитивности равенства длин отрезков)

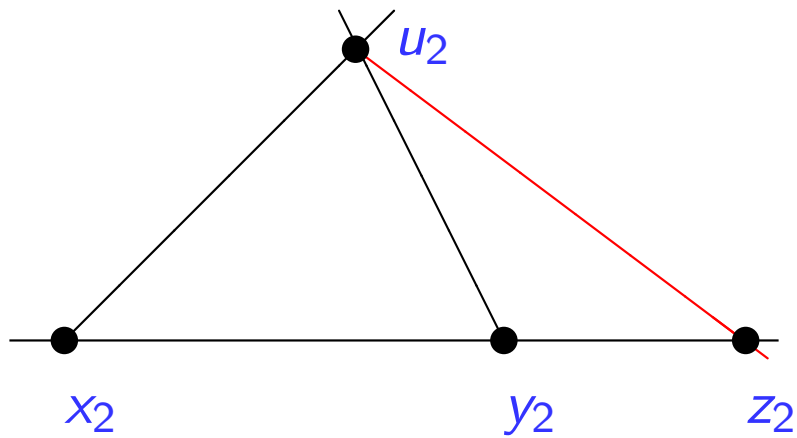
Аксиоматическое устройство геометрии

Аксиома T6

6). $\forall x_1, y_1, z_1, u_1, x_2, y_2, z_2, u_2$
$(x_1 \neq y_1 \& y_1 \neq z_1 \&$
$B(x_1, y_1, z_1) \& B(x_2, y_2, z_2) \&$
$D(x_1, y_1, x_2, y_2) \& D(y_1, z_1, y_2, z_2) \&$
$D(y_1, u_1, y_2, u_2) \& D(x_1, u_1, x_2, u_2) \rightarrow$
$\rightarrow D(z_1, u_1, z_2, u_2))$

(аксиома пяти отрезков)





Аксиоматическое устройство геометрии

Аксиомы Аксиомы T7–T10

7). $\forall x, y, z, u\ \exists v\ (B(x, y, z)\ \&\ D(y, z, u, v))$
(аксиома откладывания отрезка)

8). $\forall x, y,\ \exists z\ (B(x, z, y) \& D(x, z, z, y))$
(аксиома деления отрезка пополам)

9). $\exists x, y, z\ (\neg B(x, y, z)\ \&\ \neg B(x, z, y)\ \&\ \neg B(z, x, y))$
(аксиома существования неколлинеарных точек)

10). $\forall x, y, z\ (\neg B(x, y, z)\ \&\ \neg B(x, z, y)\ \&\ \neg B(z, x, y)\ \rightarrow$
$\rightarrow\ \exists v\ (D(v, x, v, y) \& D(v, x, v, z)))$
(аксиома центра описанной окружности)

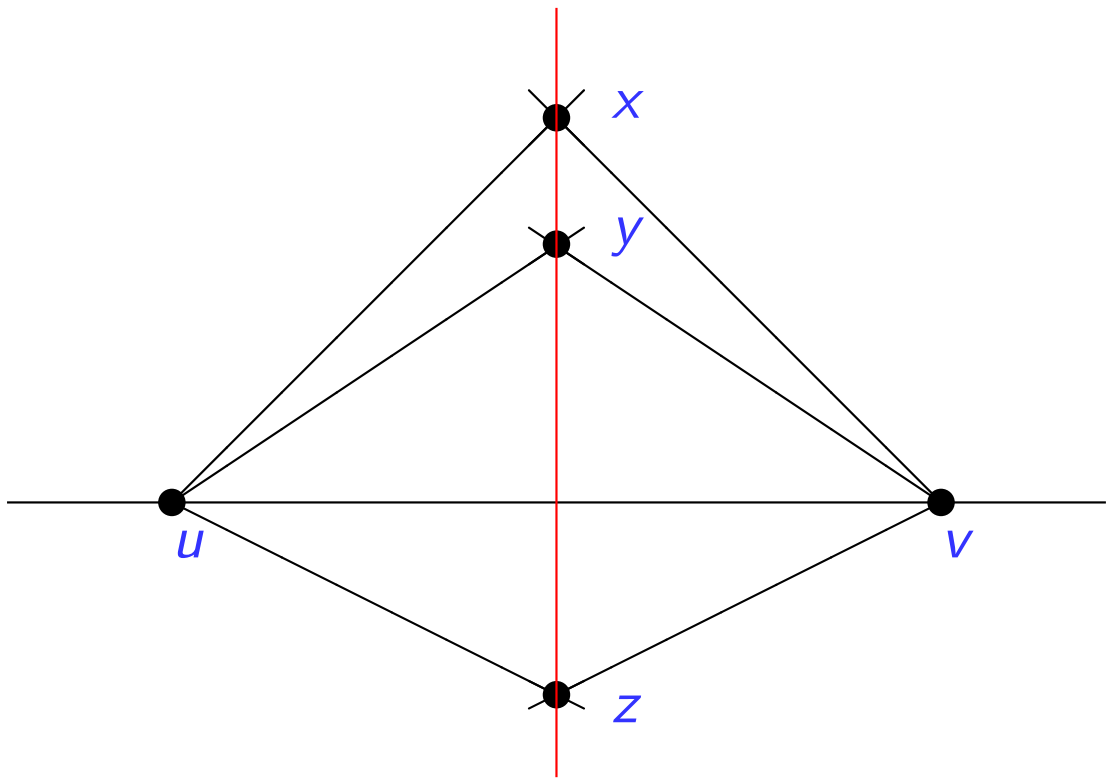
Аксиоматическое устройство геометрии

Аксиома T11

11). $\forall x, y, z, u, v$

$$(D(x,u,x,v)\&D(y,u,y,v)\&D(z,u,z,v) \rightarrow$$
$$\rightarrow (B(x,y,z) \vee B(y,z,x) \vee B(z,y,x)))$$

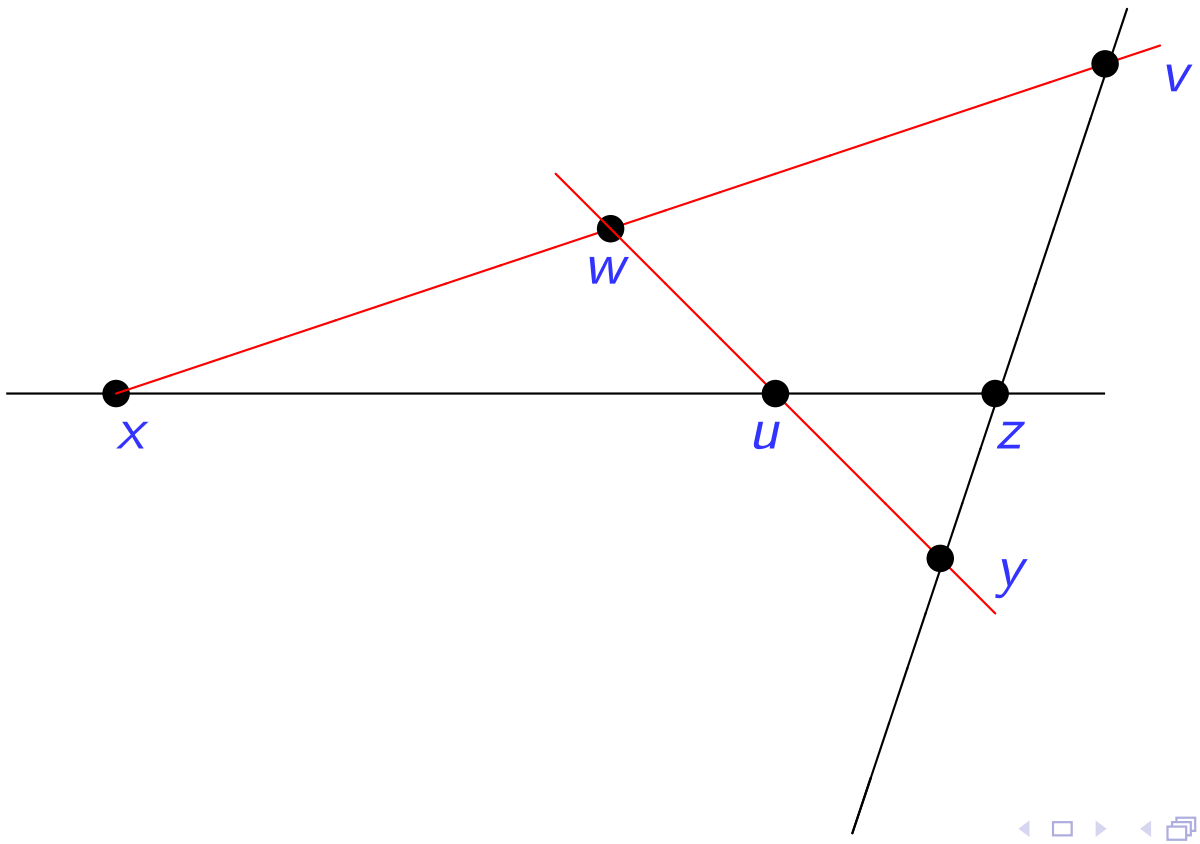
(аксиома перпендикуляра к середине отрезка)



Аксиоматическое устройство геометрии

Аксиома T12

12). $\forall x, y, z, u, v$
$(B(x, u, z) \& B(y, z, v) \rightarrow$
$\rightarrow \exists w\ (B(y, u, w) \& B(x, w, v)))$
(аксиома Паша)



Аксиоматическое устройство геометрии

Аксиома T13

13). $\forall x\ \exists y, z\ (\varphi(y)\&\psi(z)\ \rightarrow\ B(x, y, z))\ \rightarrow$
$\rightarrow\ \forall x'\ \exists y', z'\ (\varphi(y')\&\psi(z')\ \rightarrow\ B(y', x', z'))$
(схема аксиом непрерывности)

Аксиоматическое устройство геометрии

Основные свойства формальной геометрии Тарского

Теорема

Аксиоматическая теория T1–T13 (формальная геометрия Тарского)

- непротиворечива,
- полна,
- категорична,
- алгоритмически разрешима.

К сожалению для школьников, разрешающая процедура, способная доказывать любую геометрическую теорему, имеет невероятно большую вычислительную сложность.

Теория множеств

МНОЖЕСТВО — это основополагающее понятие современной математики. Понятие множества предложил во второй половине 19 в. немецкий математик Георг Кантор.

А что же такое множество?

Поскольку это основополагающее понятие, строгого определения дать нельзя. Это коллекция (семейство, совокупность, собрание) различных предметов (объектов, элементов).

Может ли математика спокойно развиваться, опираясь на столь зыбкое основание?

Теория множеств

Парадокс Рассела

Элементами множеств могут быть множества. Рассмотрим коллекцию всех множеств, каждое из которых не является своим собственным элементом: $A = \{x : x \notin x\}$.
У нас нет достаточных оснований не признавать эту совокупность множеств A множеством.

Но тогда мы должны уметь давать ответ на вопрос: содержит ли множество A в качестве элемента само множество A (т. е. верно ли что $A \in A$?)
Ответ обескураживающий:

- если $A \in A$, то по определению A верно $A \notin A$,
- а если $A \notin A$, то определению A верно $A \in A$.

Теория множеств

Значит, в наивной теории множеств существуют математические утверждения, которые нельзя признать ни истинными, ни ложными. На основе такой расплывчатой теории хорошей математики не построить.

Может быть стоило бы исключить эту странную коллекцию A из числа множеств?

Можно. Но тогда придется создать «кодекс теории множеств», в котором должно быть указано, какие именно конструкции признаются множествами, и какими свойствами они должны обладать.

Попытку создания такого «кодекса теории множеств» — аксиоматической теории множеств — предприняли в Эрнест Цермело в 1908 г.. Аксиоматику Цермело пополнили Абрахам Френкель, Торальф Сколем, Джон фон Нейман.

Теория множеств Цермело–Френкеля

Понятие множества и свойства множеств можно описать с использованием единственного предикатного символа $\in$, обозначающего отношение принадлежности одного множества в качестве элемента другого множества.

Представим себе математический мир, состоящий только из множеств. Этот мир может быть описан следующими аксиомами.

Теория множеств Цермело–Френкеля

1) $\forall x, y, u, v\ (x = y\ \&\ u = v)\ \rightarrow\ (x \in u\ \equiv\ y \in v)$
   (Аксиома равенства множеств)
2) $\forall x, y\ (\forall z\ (z \in x\ \equiv\ z \in y)\ \equiv\ x = y)$
   (Аксиома объемности)
3) $\forall x \forall u_1, \ldots, u_n\ \exists y\ \forall z\ (z \in y\ \equiv\ (z \in x\ \&\ \varphi(z, u_1, \ldots, u_n)))$
   (Схема аксиом выделения)

   здесь $\varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$ — произвольная формула логики предикатов сигнатуры $\sigma = \langle \in \rangle$.

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы выделения

1. Существует единственное пересечение двух множество

Существование пересечения двух множеств следует из аксиомы выделения

$$\forall x_1, x_2 \; \exists y \; \forall z \; (z \in y \; \equiv \; (z \in x_1 \; \& \; z \in x_2)),$$

а единственность пересечения следует из аксиомы объемности

$$\forall x, y \; (\forall z \; (z \in x \; \equiv \; z \in y) \; \equiv \; x = y).$$

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы выделения

2. Существует единственное пустое множество

Существование пустого множества следует из аксимы выделения

$$\forall x\ \exists y \forall z (z \in y\ \equiv\ (z \in x\ \&\ z \neq z)),$$

а единственность пустого множества следует из аксиомы объемности

$$\forall x, y\ (\forall z\ (z \in x\ \equiv\ z \in y)\ \equiv\ x = y).$$

Но здесь есть один нюанс. А откуда берется множество X на основании которого определяется пустое множество?

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы выделения

2. Существует единственное пустое множество

Существование пустого множества следует из аксимы выделения

$$\forall X\ \exists y \forall z (z \in y\ \equiv\ (z \in X\ \&\ z \neq z)),$$

а единственность пустого множества следует из аксиомы объемности

$$\forall x, y\ (\forall z\ (z \in x\ \equiv\ z \in y)\ \equiv\ x = y).$$

Но здесь есть один нюанс. А откуда берется множество X на основании которого определяется пустое множество?

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы выделения

Поэтому приходится вводить специальную аксиому.

4). $\exists y\ \forall z\ \neg(z \in y)$
(Аксиома пустого множества)

Введем специальный символ $\varnothing$ для обозначения пустого множества, а запись $y = \varnothing$ будем рассматривать как сокращенное обозначение формулы

$$\forall z\ \neg(z \in y)\ .$$

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы выделения

3. Существует единственное объединение двух множеств

Казалось бы, объединение множеств легко ввести так же, как это было сделано для пересечения:

$$\forall x_1, x_2\ \exists y\ \forall z\ (z \in y\ \equiv\ (z \in x_1\ \vee\ z \in x_2))\ .$$

Но эта формула не подпадает под схему аксиом выделения

$$\forall x \forall u_1, \ldots, u_n\ \exists y\ \forall z\ (z \in y\ \equiv\ (z \in x\ \&\ \varphi(z, u_1, \ldots, u_n)))\ .$$

Можно было бы записать определение объединения так:

$$\forall X, x_1, x_2\ \exists y\ \forall z\ (z \in y\ \equiv\ (z \in X\ \&\ (z \neq x_1\ \vee\ z \in x_2)))\ .$$

Но совершенно непонятно, откуда взять подходящее множество X. Может быть, в качестве X взять $x_1 \cup x_2$? Но мы ведь еще не

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы выделения

3. Существует единственное объединение двух множеств. Поэтому приходится вводить две специальные аксиомы.

5). $\forall y, z\ \exists x\ \forall u\ (u \in x\ \equiv\ (u = y\ \vee\ u = z))$
(Аксиома пары)

Множество x, существование которого утверждает аксиома пары, традиционно обозначается $\{y, z\}$.

6). $\forall y\ \exists x\ \forall u\ (u \in x\ \equiv\ \exists z\ (z \in y\ \&\ u \in z))$
(Аксиома объединения)

Множество x, существование которого утверждает аксиома объединения, традиционно обозначается $\bigcup\limits_{z \in y} z$ или более коротко $\cup y$. Таким образом $x_1 \cup x_2$ — это $\cup\{x_1, x_2\}$.

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы выделения

4. А что делать, если нам нужно множество, состоящее из одного-единственного элемента?

Для этого достаточно выделения и аксиомы пары:
множество, состоящее из одного элемента u — это множество {u,u}.

5. А что делать, если нам нужны упорядоченные наборы элементов?

Для этого достаточно аксиомы выделения и аксиомы пары:
упорядоченная пара $\langle y, z \rangle$ — это множество $\{y, \{y, z\}\}$.

Далее аналогично можно определять упорядоченные наборы (кортежи), функции, инъективные отображения, биективные отображения, отношения включения, равномощности и т. д.

Теория множеств Цермело–Френкеля

Но таким образом из пустого множества $\varnothing$, — единственного множества, существование которого гарантируют аксиомы, — можно получить только конечные множества. А откуда возьмутся бесконечные множества?

7). $\exists x\ (\varnothing \in x\ \&\ \forall y\ (y \in x\ \rightarrow\ y \cup \{y\} \in x))$
(Аксиома бесконечности)

Фактически, аксиома бесконечности определяет множество натуральных чисел:

$$\Big\{ \underbrace{\varnothing}_{0},\ \underbrace{\{\varnothing\}}_{1},\ \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}_{2},\ \underbrace{\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}}_{3},\ \dots \Big\}$$

Теория множеств Цермело–Френкеля

А откуда возьмутся несчетные множества?

8). $\forall y\ \exists x\ \forall z\ (z \in x \ \equiv\ \forall u\ (u \in z\ \rightarrow\ u \in y))$
(Аксиома степени)

Аксиома степени определяет множество всех подмножеств заданного множества (множество-степень, powerset). Значит, множества могут нарастать неограниченно «высоко».

Теория множеств Цермело–Френкеля

А являются ли множествами образы множеств относительно заданных функций, определяемых при помощи формул логики предикатов?

9). $\forall x\ \big(\forall y, z, u\ (y \in x\ \&\ \varphi(y, z)\ \&\ \varphi(y, u)\ \to z = u)\ \to$
$\to\ \exists v\ \forall w\ (w \in v\ \equiv\ \exists t\ (t \in x\ \&\ \varphi(t, w)))\big)$
(Схема аксиом замены)

Теория множеств Цермело–Френкеля

А насколько «глубоко» могут опускаться множества? Не могут ли у нас образовываться такие множества, которые входят в состав самих себя в качестве элементов?

10). $\forall x\ (x \neq \varnothing\ \rightarrow\ \exists y\ (y \in x\ \&\ x \cap y = \varnothing))$
(Аксиома фундирования (регулярности))

Эта аксиома играет роль предохранителя, оберегающего теорию множеств от парадоксов. Аксиома фундирования объявляет, что семейства множеств вида

$$\left\{X_1, X_2, X_3, \dots\right\},$$

у которых $X_2 \in X_1$, $X_3 \in X_2$, $\dots$, $X_{n+1} \in X_n$, $\cdots$ и т. д. множествами не являются .

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы фундирования

$ZF \vdash \forall u(u \notin u)$
Из аксиомы фундирования

$$\forall x\ (x \neq \varnothing\ \rightarrow\ \exists y\ (y \in x\ \&\ x \cap y = \varnothing))$$

следует (если в качестве x выбрать $\{u\}$)

$$ZF \vdash \exists y\ (y \in \{u\}\ \&\ u \cap y = \varnothing)\ .$$

Поскольку единственным элементом y в множестве $\{u\}$ является u, получаем

$$ZF \vdash \{u\} \cap u = \varnothing\ .$$

Следовательно, $ZF \vdash u \notin u$.

Теория множеств Цермело–Френкеля

Примеры применения аксиомы фундирования

Попробуйте самостоятельно убедиться, что из аксиом теории множеств Цермело–Френкеля следует невозможность существования «парадоксальных множеств»:

$$ZF \vdash \forall u, v\ (u \notin v\ \vee v \notin u)$$

$$ZF \vdash \neg\exists x\ \forall y\ (y \in x\ \equiv y \notin y)$$

Нужны ли еще какие-нибудь другие аксиомы?

Теория множеств Цермело–Френкеля

К сожалению, для решения некоторых задач приходится вводить дополнительные аксиомы.
Например, интуиция подсказывает, что любые два множества должны быть сравнимы по мощности. Два множества A и B называются равномощными ($A \sim B$), если существует биективная функция, отображающая одно множество на другое. Справедливо ли следующее утверждение?

Теорема трихотомии. Для любых двух множеств A и B верно одно из трех:

- либо $A \sim B$,
- либо $A \not\sim B$, но существует такое A', $A' \subset A$, что $A' \sim B$,
- либо $A \not\sim B$, но существует такое B', $B' \subset B$, что $A \sim B'$.

Эту теорему можно доказать, но лишь при том условии, если у нас есть хоть какой-нибудь способ, позволяющий выбрать из произвольного непустого множества хоть какой-нибудь элемент. Чтобы этот способ выбора стал легальным средством доказательства, нужно ввести специальную аксиому выбора.

Теория множеств Цермело–Френкеля

Аксиома выбора (CA)

Каково бы ни было множество попарно непересекающихся множеств $U = \{X_1, X_2, \dots\}$, существует множество Y, содержащее в точности по одному представителю из каждого множества $X_1, X_2, \dots$ семейства U.

Аксиома выбора используется при доказательстве очень большого числа теорем математики. С ее помощью можно доказать весьма неожиданные утверждения. К их числу относится

Теорема Цермело

Любое множество можно вполне упорядочить, т. е. определить на этом множестве такое отношение линейного порядка, при котором не существует бесконечно убывающих последовательностей элементов.

Теория множеств Цермело–Френкеля

А не привнесет ли аксиома выбора какое-нибудь противоречие в теорию ZF? Этот вопрос остается открытым и по сей день.

Есть в теории множеств и другие задачи, для решения которых недостаточно аксиом теории множеств ZF.

Континуум-гипотеза (CH)

Любое подмножество множества вещественных чисел либо является счетным, либо равномощно множеству вещественных чисел (является континуальным).

В 1939 г. К. Гедель доказал теорему:

Если теория множеств ZF+CA непротиворечива, то теория ZF+AC+CH также непротиворечива .

В 1963 г. П. Коэн доказал теорему:

Если теория множеств ZF+CA непротиворечива, то теория ZF+AC+$\neg$CH также непротиворечива .

Формальная арифметика

А можно ли полностью аксиоматизировать арифметику натуральных чисел?

В 1889 г. итальянский математик Д. Пеано предложил список аксиом, при помощи которых можно доказывать утверждения о свойствах натуральных чисел.

Арифметика Пеано (PA) образуется за счет добавления к ИПР сигнатуры $\langle 0, s, +, \times \rangle$ следующих аксиом.
Здесь $s(x)$ нужно рассматривать как одноместную операцию, реализующую функцию вычисления следующего натурального числа $x + 1$.

Формальная арифметика

1. $\forall x, y\ (s(x) = s(y)\ \rightarrow x = y)$;
2. $\forall x\ (s(x) \neq 0)$;
3. $\forall x\ \exists y(x \neq 0\ \rightarrow\ x = s(y))$;
4. $\forall x\ (x + 0 = x)$;
5. $\forall x, y\ (x + s(y) = s(x + y))$;
6. $\forall x\ (x \times 0 = 0)$;
7. $\forall x, y\ (x \times s(y) = x \times y + x)$;
8. $\varphi(0)\ \&\ \forall x\ (\varphi(x)\ \rightarrow\ \varphi(s(x)))\ \rightarrow\ \forall x\ \varphi(x)$.

Вопрос о непротиворечивости и полноте этой аксиоматической теории долгое время оставался центральной проблемой математики. В 1931 г. К. Гедель доказал теорему, которая дала совершенно неожиданный ответ на этот вопрос.

Формальная арифметика

Нумералы и арифметизуемые отношения

Нумералом $\bar{\mathbf{n}}$ натурального числа n называется терм

$$\underbrace{s(s(\ldots s(}_{n \text{ раз}} 0)\ldots))$$

Например, $\bar{\mathbf{4}}$ — это терм $s(s(s(s(0))))$.

Отношение $P^{(k)}$ на множестве натуральных чисел называется **арифметизуемым**, если существует такая формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, что для всякого набора натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ верны соотношения

- $P^{(k)}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \mathit{true} \iff PA \vdash \varphi(\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{n}}_k)$,
- $P^{(k)}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \mathit{false} \iff PA \vdash \neg\varphi(\bar{\mathbf{n}}_1, \bar{\mathbf{n}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{n}}_k)$.

Формальная арифметика

Нумералы и арифметизуемые отношения

Теорема Геделя–Тьюринга.
Отношение $P^{(k)}$ на множестве натуральных чисел арифметизуемо в том и только том случае, если существует такая машина Тьюринга M, которая для любого набора натуральных чисел $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ имеет завершающееся вычисление, преобразующее начальную конфигурацию

$$q_1 \underbrace{11\ldots1}_{n_1+1 \text{ раз}} 0 \underbrace{11\ldots1}_{n_2+1 \text{ раз}} 0\ldots0 \underbrace{11\ldots1}_{n_k+1 \text{ раз}}$$

- в заключительную конфигурацию $q_0 1$, если $P^{(k)}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \mathit{true}$,
- в заключительную конфигурацию $q_0 0$, если $P^{(k)}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \mathit{false}$.

Формальная арифметика

Нумерация Геделя

Закодируем натуральными числами (занумеруем) символы алфавита формальной арифметики, формулы и конечные последовательности формул.

$gn(0) = 3,\ gn(s) = 5,\ gn(+) = 7,\ gn(\times) = 9,\ gn(=) = 11,$

$gn(\neg) = 13,\ gn(\&) = 15,\ gn(\vee) = 17,\ gn(\rightarrow) = 19,$
$gn(\forall) = 21,\ gn(\exists) = 23,$

$gn(\ (\ ) = 25,\ gn(\ )\ ) = 27,$

$gn(x_1) = 29,\ gn(x_2) = 31,\ \ldots,\ gn(x_i) = 27 + 2i, \ldots.$

Геделев номер слова:
$gn(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n) = 2^{gn(a_1)} 3^{gn(a_2)} 5^{gn(a_3)} \ldots p_n^{gn(a_n)}.$

Геделев номер последовательности слов:
$gn(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m) = 2^{gn(\alpha_1)} 3^{gn(\alpha_2)} 5^{gn(\alpha_3} \ldots p_m^{gn(\alpha_m)}.$

Формальная арифметика

Примеры арифметизуемых отношений

Рассмотрим два отношения

1. $\mathrm{Form}^{(1)}$: $\mathrm{Form}(n) = \mathit{true} \iff n$ — геделев номер формулы арифметики Пеано.
2. $\mathrm{Proof}^{(2)}$: $\mathrm{Proof}(n, m) = \mathit{true} \iff n$ — геделев номер некоторой формулы φ арифметики Пеано, а m — геделев номер конечной последовательности формул, составляющей доказательство формулы φ.

Лемма

Отношения Form и Proof арифметизируемы.

Обозначим *Proof* арифметическую формулу, реализующую предикат Proof.

Формальная арифметика

Странные предикаты

Ну, если вы поверили, что предикат $\mathrm{Proof}^{(2)}$ арифметизуем, то совершенно очевидно, что арифметизуемым является и такой странный предикат $\mathrm{MetaProof}^{(2)}$:

$$\mathrm{MetaProof}(n, m) = \mathit{true}$$

$$\Updownarrow$$

n — геделев номер некоторой формулы арифметики Пеано, $\varphi(x)$, зависящей от одной переменной,
а m — геделев номер конечной последовательности формул, составляющей доказательство формулы $\varphi(\bar{\mathbf{n}})$.

Но если предикат $\mathrm{MetaProof}^{(2)}$ арифметизуем, то существует арифметическая формула $\mathcal{W}(x, y)$, выражающая отношение $\mathrm{MetaProof}$.

Формальная арифметика

Странные предикаты

Рассмотрим формулу $\varphi(x) = \neg\exists y\ \mathcal{W}(x, y)$ и ее геделев номер $n_0 = gn(\varphi(x))$.

Интересно, а что за высказывание выражает замкнутая формула $\varphi(\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{0}})$?

Это высказывание таково: Нельзя доказать формулу $\varphi(\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{0}})$, т. е. формула $\varphi(\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{0}})$ утверждает, что она недоказуема.

Таким образом, мы имеем дело со строго сформулированным аналогом «парадокса лжеца».

И если эта формула действительно не имеет доказательства в арифметике Пеано, то она выражает истинное суждение.

Теорема Геделя о неполноте PA

(облегченный вариант)

Если множество натуральных чисел с операциями сложения и умножения $(\mathcal{N}_0, +, \times)$ является моделью для аксиом PA, то PA неполна.

Доказательство.

1. Покажем, что $PA \nvdash \varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$.
Допустим противное $PA \vdash \varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$. Тогда формула $\varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$ имеет доказательство в PA: $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N = \varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$.

Пусть $m = gn(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N)$. Тогда $MetaProof(n_0, m) = true$.
Поэтому, учитывая арифметизуемость предиката $MetaProof$, получаем $PA \vdash \mathcal{W}(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0}, \bar{\mathbf{m}})$. Но это означает, что $PA \vdash \exists y\ \mathcal{W}(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0}, y)$ и, следовательно, $PA \vdash \neg\varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$.
Но это означает, что PA — противоречивая теория, вопреки условию теоремы (PA имеет модель).

Теорема Геделя о неполноте PA

(облегченный вариант)

Если множество натуральных чисел с операциями сложения и умножения $(\mathcal{N}_0, +, \times)$ является моделью для аксиом PA, то PA неполна.

Доказательство.

2. Покажем, что $PA \nvdash \neg\varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$.
Допустим противное $PA \vdash \neg\varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$, т. е. $PA \vdash \exists y\ \mathcal{W}(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0}, y)$.
Тогда (почему?) существует такое натуральное число m, для которого верно $PA \vdash \mathcal{W}(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0}, \bar{\mathbf{m}})$. Учитывая, что формула $\mathcal{W}$ выражает отношение *MetaProof* , приходим к выводу: m — это геделев номер доказательства формулы $\varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$ в PA. Значит, $PA \vdash \varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$.
Но это означает, что PA — противоречивая теория, вопреки условию теоремы (PA имеет модель).

Теорема Геделя о неполноте PA

(облегченный вариант)

Если множество натуральных чисел с операциями сложения и умножения $(\mathcal{N}_0, +, \times)$ является моделью для аксиом PA, то PA неполна.

Доказательство.

3. Итак,

$PA \nvdash \varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$

$PA \nvdash \neg\varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0})$.

Значит, $\varphi(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0}) = \neg\exists y\ \mathcal{W}(\bar{\mathbf{n}}_\mathbf{0}, y)$ — это истинное арифметическое утверждение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть в арифметике Пеано.
Значит, арифметика Пеано неполна. $\square$

Теорема Геделя о неполноте PA

(Основной вариант)

Пусть запись *Consist* обозначает арифметическую формулу

$$\neg\exists X \; Proof(\overline{gn(0 = s(0))}, X)$$

Если формальная арифметика PA непротиворечива, то

$$\begin{aligned} PA &\nvdash Consist \\ PA &\nvdash \neg Consist. \end{aligned}$$

Это означает, что аксиоматические теории (сколь бы выразительны они ни были) не позволяют построить доказательство их собственной непротиворечивости.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 18