

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 13.

Корректность операционной семантики.

Полнота операционной семантики логических программ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

У нас есть два типа ответов на запросы к логическим программам:

- ▶ **правильные ответы**, которые логически следуют из программы;
- ▶ **вычисленные ответы**, которые конструируются по ходу SLD-резольтивных вычислений.

Правильные ответы — это то, что мы хотим получить, обращаясь с вопросами к программе.

Вычисленные ответы — это то, что нам в действительности выдает компьютер (интерпретатор программы).

Какова связь между правильными и вычисленными ответами?

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Определение правильного ответа

Пусть \mathcal{P} — логическая программа, G — запрос к \mathcal{P} с множеством целевых переменных Y_1, \dots, Y_k .

Тогда всякая подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ называется **ответом** на запрос G к программе \mathcal{P} .

Ответ $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ называется **правильным ответом** на запрос G к программе \mathcal{P} , если

$$\mathcal{P} \models \forall Z_1 \dots \forall Z_N G\theta, \quad \text{где } \{Z_1, \dots, Z_N\} = \bigcup_{i=1}^k \text{Var}_{t_i}.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Определение вычисленного ответа

Пусть

- ▶ $G_0 = ? C_1, C_2, \dots, C_m$ — целевое утверждение с целевыми переменными Y_1, Y_2, \dots, Y_k ,
- ▶ $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,
- ▶ $comp = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$ — успешное SLD-резольтивное вычисление, порожденное запросом G к программе \mathcal{P} .

Тогда подстановка $\theta = (\theta_1\theta_2 \dots \theta_n)|_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k}$,

представляющая собой композицию всех вычисленных унификаторов $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, ограниченную целевыми переменными Y_1, Y_2, \dots, Y_k ,

называется **вычисленным ответом** на запрос G_0 к программе \mathcal{P} .

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Теорема (корректности операционной семантики)

Пусть

- ▶ $G_0 = ? C_1, C_2, \dots, C_m$ — целевое утверждение,
- ▶ $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,
- ▶ θ — вычисленный ответ на запрос G_0 к программе \mathcal{P} .

Тогда θ — правильный ответ на запрос G_0 к программе \mathcal{P} .

Доказательство.

Рассмотрим успешное вычисление, порожденное запросом G_0 к логической программе \mathcal{P} :

$$\text{comp} = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$$

Покажем индукцией по длине вычисления n , что

$\theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n) |_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k}$ — это правильный ответ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Базис индукции ($n = 1$). Тогда

$$G_0 =? C_1 \quad D_{j_1} = A_0; \quad \theta_1 \in \text{НОУ}(C_1, A_0).$$

Значит, $C_1\theta_1 = A_0\theta_1$. Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, мы приходим к следующему выводу:

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{X} A_0, \quad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} A_0\theta_1, \quad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} C_1\theta_1, \quad \text{почему?}$$

и, следовательно, $\theta = \theta_1|_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k}$ — это правильный ответ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Индуктивный переход ($n - 1 \rightarrow n$). Пусть

$$\begin{aligned}G_0 &= ? C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_m \\D_{j_1} &= A_0 \leftarrow A_1, \dots, A_r; \\ \theta_1 &\in \text{НОУ}(C_i, A_0), \\G_1 &= ? (C_1, C_2, \dots, A_1, \dots, A_r, \dots, C_m)\theta_1.\end{aligned}$$

Тогда

$$\text{comp}' = (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$$

— это успешное вычисление длины $n - 1$, порожденное запросом G_1 . Значит, по предположению индукции, $\theta' = \theta_2 \dots \theta_n |_{\text{Var}_{G_1}}$ — правильный ответ на запрос G_1 .

Значит,

$$\mathcal{P} \models \forall Z \overline{(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)} \theta_1 \theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{X}(A_1 \& \dots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{X}(A_1 \& \dots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$
следует

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{X}(A_1 \& \dots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}\left((A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta' \rightarrow A_0\theta_1\theta'\right).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$
следует

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{X}(A_1 \& \dots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}\left((A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta' \rightarrow A_0\theta_1\theta'\right).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$
следует

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{X}(A_1 \& \dots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}\left((A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta' \rightarrow A_0\theta_1\theta'\right).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Итак, из $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m) \theta_1 \theta'$
следует

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z}(C_1 \& \dots \& C_{i-1} \& C_{i+1} \& \dots \& C_m) \theta_1 \theta'.$$

Мы показали, что

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} C_i \theta_1 \theta'.$$

Значит,

$$\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} \underbrace{(C_1 \& \dots \& C_{i-1} \& C_i \& C_{i+1} \& \dots \& C_m)}_{G_0} \underbrace{\theta_1 \theta'}_{\theta}.$$

Значит, $\theta_1 \theta' |_{\text{Var}_{G_0}} = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n) |_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k} = \theta$ — правильный ответ на запрос G_0 . □

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Итак, всякий вычисленный ответ — правильный.

А можно ли вычислить любой правильный ответ?

Полна ли наша операционная семантика?

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Проблема полноты

Пусть θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе \mathcal{P} , т. е. $\mathcal{P} \models \forall \bar{Z} G_0\theta$.

Существует ли такое успешное SLD-резолютивное вычисление, порожденное запросом G_0 к программе \mathcal{P}

$$(D_{j_1}, \eta_1, G_1), (D_{j_2}, \eta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \eta_n, \square),$$

которое вычисляет ответ θ , т. е. $\theta = (\eta_1\eta_2 \dots \eta_n) \upharpoonright \text{Var}_{G_0}$?

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Теорема полноты.

Пусть

$\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,

$G_0 = ?C_1, C_2, \dots, C_m$ — запрос с множеством целевых переменных Y_1, Y_2, \dots, Y_k ,

θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе \mathcal{P} .

Тогда существует такой вычисленный ответ η на запрос G_0 к программе \mathcal{P} , что

$$\theta = \eta\rho$$

для некоторой подстановки ρ .

Теорема полноты гласит, что каждый **правильный ответ** — это **пример (частный случай) некоторого вычисленного ответа**.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Доказательство.

Пусть $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ и пусть $\bigcup_{i=1}^k \text{Var}_{t_i} = \{Z_1, \dots, Z_r\}$.

Выберем некоторое множество новых «свежих» констант $\{c_1, \dots, c_k\}$, не содержащихся ни в программе \mathcal{P} , ни в запросе G , ни в термах подстановки θ , и рассмотрим подстановку $\lambda = \{Z_1/c_1, Z_2/c_2, \dots, Z_r/c_r\}$.

Поскольку θ — правильный ответ, верно $\mathcal{P} \models \forall Z_1 \dots \forall Z_k G_0 \theta$.
Запрос $G'_0 = G_0 \theta \lambda$ — основной пример запроса G_0 , и поэтому $\mathcal{P} \models G_0 \theta \lambda$.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Доказательство.

Общий замысел доказательства

1. Вначале покажем, что запрос $G'_0 = G_0\theta\lambda$, обращенный к множеству $[P]$ основных примеров программных утверждений программы P , имеет успешное SLD-резольтивное вычисление (лемма об основных вычислениях).
2. Затем покажем, что исходный запрос G_0 , обращенный к самой программе P , имеет успешное SLD-резольтивное вычисление с таким вычисленным ответом η , для которого верно равенство $\theta\lambda = \eta\rho'$ для некоторой подстановки ρ' (лемма о подъеме для хорновских дизъюнктов).
3. Затем покажем, что отсюда следует равенство $\theta = \eta\rho$ для некоторой подстановки ρ .

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Лемма об основных вычислениях.

Пусть

$\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,

$G'_0 = ?C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ — **основной** запрос,

и при этом верно $\mathcal{P} \models G'_0$.

Тогда существует успешное SLD-резольтивное вычисление запроса G'_0 , обращенного к множеству $[\mathcal{P}]$ основных примеров программных утверждений программы \mathcal{P} .

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

$$\{D_1, D_2, \dots, D_N\} \models C'_1 \& C'_2 \& \dots \& C'_n$$

\iff

множество дизъюнктов $\{D_1, D_2, \dots, D_N, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}$
противоречиво.

\iff (по теореме Эрбрана)

существует такое конечное множество основных примеров
программных утверждений $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M\} \subseteq [\mathcal{P}]$, что
множество дизъюнктов $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}$
противоречиво.

\iff (по теореме полноты метода резолюций)

из системы дизъюнктов $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}$
резолютивно выводим пустой дизъюнкт \square .

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт \square можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

...

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт \square можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

...

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт \square можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

...

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

возможны резольвенты двух типов

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт \square можно резольютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резольтивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

...

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

возможны резольвенты двух типов

Это SLD-резольвента

$$\neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1} \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт \square можно резольютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резольютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

негативные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

...

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

возможны резольвенты двух типов

А это не SLD-резольвента

$$\neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1} \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

$$A_{02} \vee \neg A_{22} \vee \dots \vee \neg A_{r2} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт \square можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

...

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

возможны резольвенты двух типов

$$\neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1} \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

$$A_{02} \vee \neg A_{22} \vee \dots \vee \neg A_{r2} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (**почему?**),

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

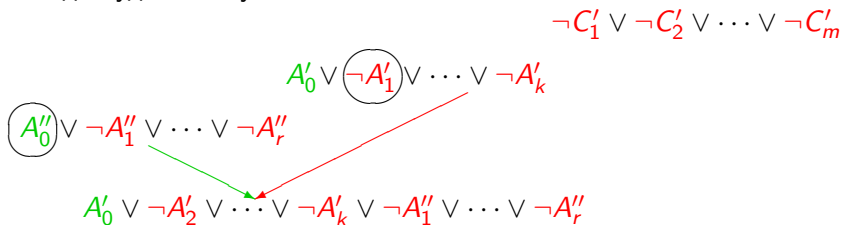
Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (**почему?**), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (**почему?**).

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (**почему?**), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (**почему?**).

Тогда будем поступать так:



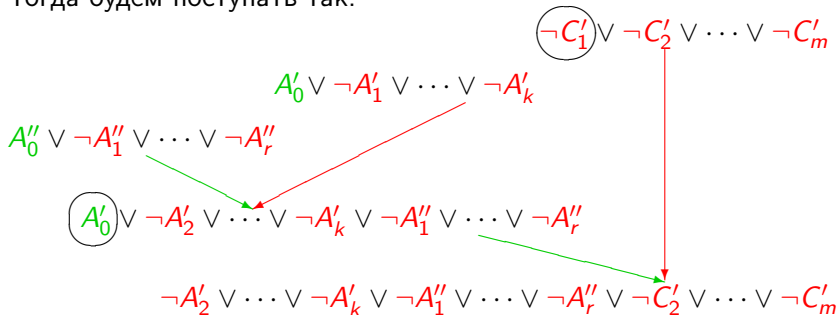
Если правило резолюции вначале применяется к двум программным утверждениям,

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?).

Тогда будем поступать так:



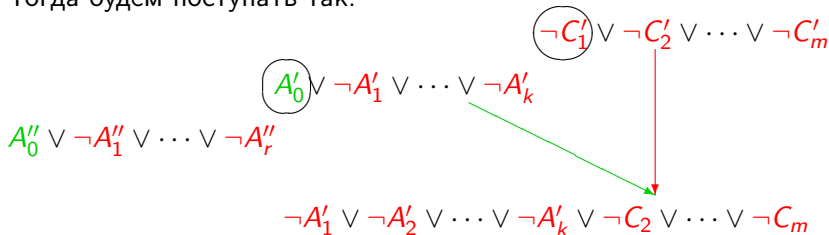
а затем применяется к полученной резольвенте и запросу,

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (**почему?**), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (**почему?**).

Тогда будем поступать так:



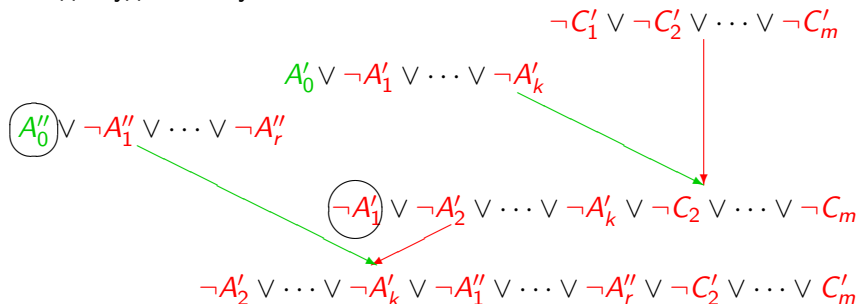
то изменим порядок применения правил

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (**почему?**), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (**почему?**).

Тогда будем поступать так:



и получим тот же самый результат,
но уже только при помощи SLD-резолюции.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство.

Будем применять этот прием, до тех пор пока в выводе не останутся только правила SLD-резолюции. Таким образом, в итоге получим вывод пустого дизъюнкта \square из множества дизъюнктов

$$\{D_1, D_2, \dots, D_N, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}$$

только при помощи правила SLD-резолюции.

Это и есть успешное SLD-резолутивное вычисление основного запроса $G'_0 = ?C'_1, C'_2, \dots, C'_n$, обращенного к множеству основных примеров программных утверждений $[P]$.

Что и требовалось доказать. □

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Лемма о подъеме (для логических программ)

Пусть $G'_0 = G_0\theta'$ — основной пример запроса G_0 с множеством целевых переменных Y_1, \dots, Y_m , обращенный к хорновской логической программе \mathcal{P} .

Если запрос G'_0 , обращенный к множеству **основных примеров** программных утверждений $[\mathcal{P}]$, имеет успешное вычисление, то исходный запрос G_0 , обращенный к самой программе \mathcal{P} , также имеет успешное вычисление с ответом η , который удовлетворяет равенству

$$\theta' = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки ρ' .

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Рассмотрим SLD-резольтивное вычисление запроса $G'_0 = G_0\theta'$ с использованием основных примеров программных утверждений из множества $[P]$

$$(D'_1, \varepsilon, G'_1), (D'_2, \varepsilon, G'_2), \dots, (D'_n, \varepsilon, \square)$$

и покажем, что существует SLD-резольтивное вычисление запроса G_0 с использованием программы P

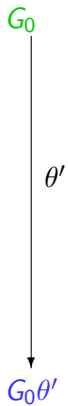
$$(D_1, \eta_1, G_1), (D_2, \eta_2, G_2), \dots, (D_n, \eta_n, \square),$$

удовлетворяющее условиям леммы.

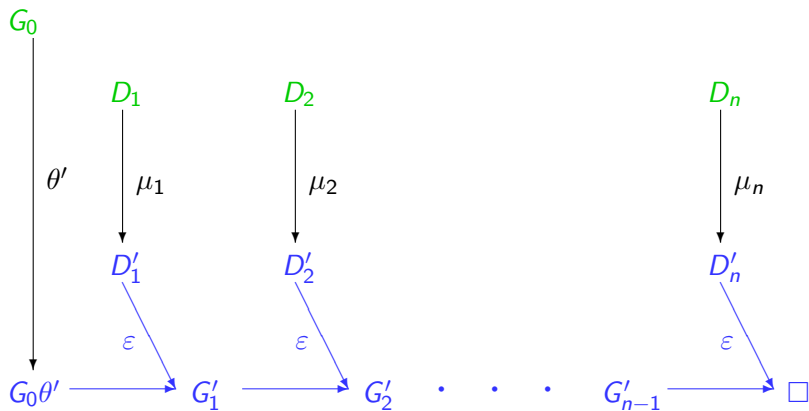
ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

G_0

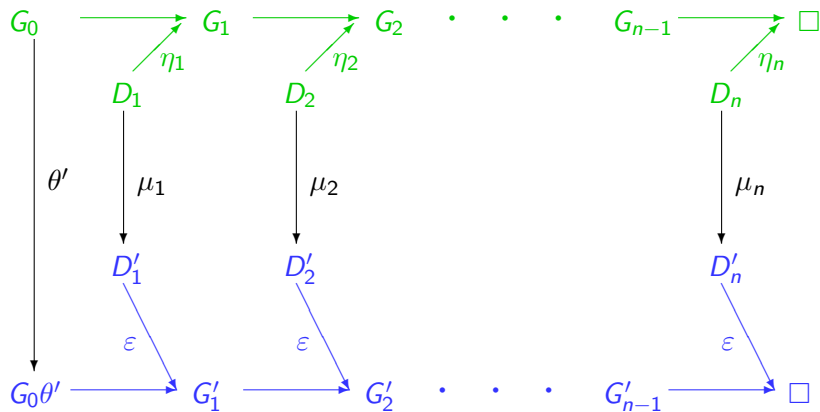
ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ



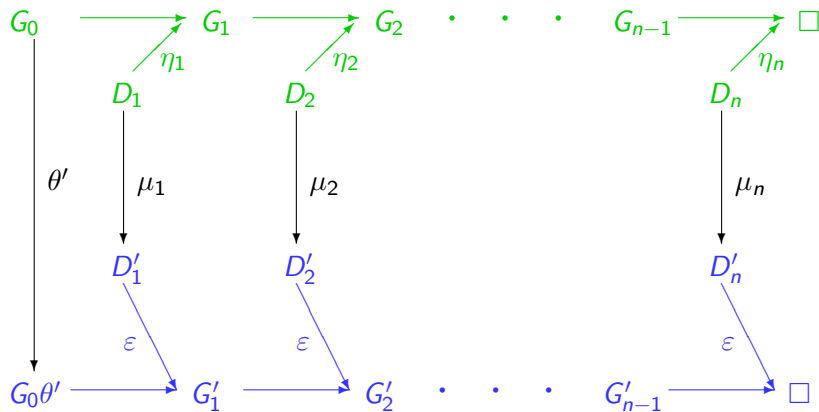
ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

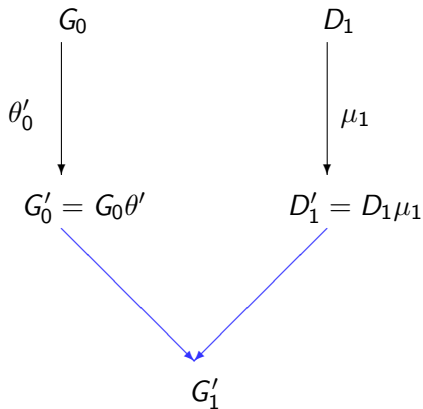


$$\theta' = (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_n) |_{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m} \rho'$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

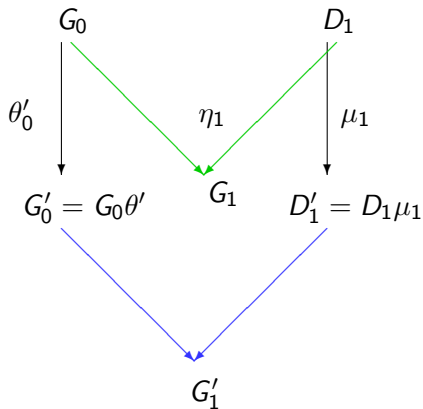
Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

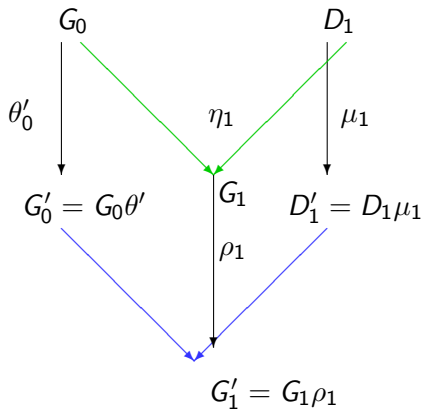
Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

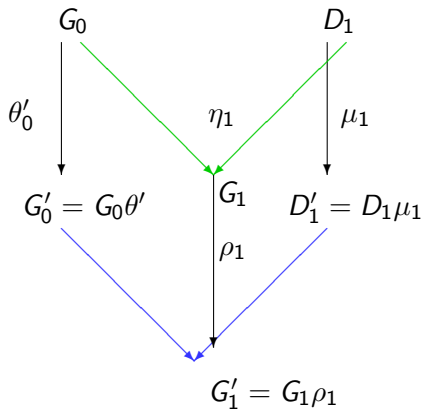
Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.



ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.



И при этом верно равенство $\theta'_0 = (\eta_1\rho_1)|_{Y_1, \dots, Y_m}$.

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Последовательно применяя этот прием на всех шагах вычисления запроса G'_0 , получаем SLD-резолютивное вычисление запроса G_0 :

$$(D_1, \eta_1, G_1), (D_2, \eta_1, G_2), \dots, (D_n, \eta_n, \square)$$

для которого выполняется система равенств

$$\begin{aligned}\theta' &= (\eta_1 \rho_1) |_{Y_1, \dots, Y_m} \\ \rho_1 &= (\eta_2 \rho_2) |_{\text{Var}_{G_1}} \\ \rho_2 &= (\eta_3 \rho_3) |_{\text{Var}_{G_2}} \\ &\dots \\ \rho_n &= (\eta_n \rho_n) |_{\text{Var}_{G_n}}\end{aligned}$$

Из этой системы следует равенство $\theta' = (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n) |_{Y_1, \dots, Y_m} \rho'$ для некоторой подстановки ρ' . □

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

Итак, у нас есть

- ▶ правильный ответ θ_0 на запрос G_0 к хорновской логической программе \mathcal{P} ;
- ▶ подстановка $\lambda = \{Z_1/c_1, Z_2/c_2, \dots, Z_r/c_r\}$ «свежих» констант на место всех переменных Z_1, \dots, Z_r из термов подстановки θ_0 .
- ▶ основной пример $\theta'_0 = \theta_0\lambda$ правильного ответа θ .

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

θ_0 — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе \mathcal{P} ;

↓

$\mathcal{P} \models G_0\theta_0\lambda$;

↓ (по лемме об основных вычислениях)

основной запрос $G_0\theta_0\lambda$ к множеству основных примеров программных утверждений $[\mathcal{P}]$ имеет успешное вычисление;

↓ (по лемме о подъеме для логических программ)

запрос G_0 к программе \mathcal{P} имеет успешное вычисление с вычисленным ответом η , для которого верно равенство

$$\theta_0\lambda = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки ρ' .

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

А теперь заменим в левой и правой частях равенства

$$\theta_0 \lambda = \eta \rho'$$

все константы c_1, \dots, c_r на символы переменных Z_1, \dots, Z_r .

Поскольку константы c_1, \dots, c_r не входят в состав запроса G_0 и программы \mathcal{P} , эти константы не входят в состав термов вычисленного ответа η , и, значит, могут содержаться только в подстановке ρ' .

В левой части равенства подстановка $\lambda = \{Z_1/c_1, \dots, Z_r/c_r\}$ превращается в пустую подстановку ε .

В правой части равенства подстановка ρ' превращается в некоторую новую подстановку ρ .

В итоге равенство $\theta_0 \lambda = \eta \rho'$ превращается в равенство

$$\theta_0 = \eta \rho$$



ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Поясняющий пример.

Рассмотрим запрос $?P(U, V)$ к логической программе

$$\mathcal{P} : P(f(X), X) \leftarrow R(X); \quad (1)$$

$$R(Y) \leftarrow; \quad (2)$$

$$Q(c) \leftarrow; \quad (3)$$

Легко видеть, что $\theta = \{U/f(c), V/c\}$ — это правильный ответ на запрос к программе.

Вместе с тем, единственный вычисленный ответ — это $\eta = \{U/f(Y), V/Y\}$.

Все дело в том, что θ — это частный случай η : $\theta = \eta\{Y/c\}$.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Итак, любой правильный ответ на запрос к хорновской логической программе можно вычислить (возможно, с обобщением) по правилу SLD-резолюции, и любой вычисленный ответ будет правильным.

А как организовать вычисления логических программ, чтобы вычислить **ВСЕ** ответы?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 13.