Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 13.

Корректность операционной семантики. Полнота операционной семантики логических программ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

У нас есть два типа ответов на запросы к логическим программам:

- **правильные ответы**, которые логически следуют из программы;
- **вычисленные ответы**, которые конструируются по ходу SLD-резолютивных вычислений.

Правильные ответы — это то, что мы хотим получить, обращаясь с вопросами к программе.

Вычисленные ответы — это то, что нам в действительности выдает компьютер (интерпретатор программы).

Какова связь между правильными и вычисленными ответами?

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Определение правильного ответа

Пусть $\mathcal{P}$ — логическая программа, G — запрос к $\mathcal{P}$ с множеством целевых переменных $Y_1, \dots, Y_k$.

Тогда всякая подстановка $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ называется ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$.

Ответ $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ называется правильным ответом на запрос G к программе $\mathcal{P}$, если

$$\mathcal{P} \models \forall Z_1 \dots \forall Z_N G\theta, \qquad \text{где } \{Z_1, \dots, Z_N\} = \bigcup_{i=1}^{k} Var_{t_i}.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Определение вычисленного ответа

Пусть

- $G_0 = ?\ C_1, C_2, \ldots, C_m$ — целевое утверждение с целевыми переменными $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$,
- $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,
- $comp = (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$ — успешное SLD-резолютивное вычисление, порожденное запросом G к программе $\mathcal{P}$.

Тогда подстановка $\theta = (\theta_1\theta_2\ldots\theta_n)|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k}$, представляющая собой композицию всех вычисленных унификаторов $\theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_n$, ограниченную целевыми переменными $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$,

называется вычисленным ответом на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Теорема (корректности операционной семантики)

Пусть

- $G_0 = ?\ C_1, C_2, \dots, C_m$ — целевое утверждение,
- $\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,
- θ — вычисленный ответ на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$.

Тогда θ — правильный ответ на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$.

Доказательство.

Рассмотрим успешное вычисление, порожденное запросом G_0 к логической программе $\mathcal{P}$:

$$comp \ = \ (D_{j_1}, \theta_1, G_1), (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \dots, (D_{j_n}, \theta_n, \square)$$

Покажем индукцией по длине вычисления n, что $\theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)|_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k}$ — это правильный ответ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Базис индукции ($n = 1$). Тогда

$$G_0 =?\ C_1 \qquad D_{j_1} = A_0; \qquad \theta_1 \in HOY(C_1, A_0).$$

Значит, $C_1\theta_1 = A_0\theta_1$. Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, мы приходим к следующему выводу:

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X} A_0, \qquad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1, \qquad \text{почему?}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_1\theta_1, \qquad \text{почему?}$$

и, следовательно, $\theta = \theta_1|_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k}$ — это правильный ответ.

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Индуктивный переход $(n-1 \;\to\; n)$. Пусть

$$
\begin{array}{rcl}
G_0 & = & ?\; C_1, C_2, \ldots, \mathbf{C_i}, \ldots, C_m \\
D_{j_1} & = & \mathbf{A_0} \leftarrow \mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_r}; \\
\theta_1 & \in & \textit{НОУ}(\mathbf{C_i}, \mathbf{A_0}), \\
G_1 & = & ?\; (C_1, C_2, \ldots, \mathbf{A_1}, \ldots, \mathbf{A_r}, \ldots, C_m)\theta_1.
\end{array}
$$

Тогда

$$comp' \;=\; (D_{j_2}, \theta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \theta_n, \Box)$$

— это успешное вычисление длины $n-1$, порожденное запросом G_1. Значит, по предположению индукции, $\theta' = \theta_2 \ldots \theta_n|_{Var_{G_1}}$ — правильный ответ на запрос G_1.

Значит,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$ следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \dots \& A_r \to A_0).$$

Значит, верно также

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0 \theta_1 \theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i \theta_1 \theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$ следует
$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно
$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \dots \& A_r \to A_0).$$
Значит, верно также

Таким образом,
$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$
И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем
$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \ldots \& A_r \to A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\Big((A_1 \& \ldots \& A_r)\theta_1\theta' \to A_0\theta_1\theta'\Big).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \dots \& A_r \rightarrow A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\Big((A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta' \rightarrow A_0\theta_1\theta'\Big).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \dots \& A_1 \& \dots \& A_r \& \dots \& C_m)\theta_1\theta'$

следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta'.$$

Поскольку $D_{j_1} \in \mathcal{P}$, верно

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{X}(A_1 \& \dots \& A_r \to A_0).$$

Значит, верно также

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\Big((A_1 \& \dots \& A_r)\theta_1\theta' \to A_0\theta_1\theta'\Big).$$

Таким образом,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} A_0\theta_1\theta'.$$

И, наконец, вспомнив, что $A_0\theta_1 = C_i\theta_1$ (почему?), заключаем

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i\theta_1\theta'.$$

КОРРЕКТНОСТЬ ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство.

Итак, из $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& C_2 \& \ldots \& A_1 \& \ldots \& A_r \& \ldots \& C_m)\theta_1\theta'$ следует

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(C_1 \& \ldots \& C_{i-1} \& C_{i+1} \& \ldots C_m)\theta_1\theta'.$$

Мы показали, что

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z} C_i \theta_1\theta'.$$

Значит,

$$\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}(\underbrace{C_1 \& \ldots \& C_{i-1} \& C_i \& C_{i+1} \& \ldots C_m}_{G_0})\underbrace{\theta_1\theta'}_{\theta}.$$

Значит, $\theta_1\theta'|_{Var_{G_0}} = (\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n)|_{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k} = \theta$ — правильный ответ на запрос G_0. $\square$

Корректность операционной семантики

Итак, всякий вычисленный ответ — правильный.

А можно ли вычислить любой правильный ответ?

Полна ли наша операционная семантика?

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Проблема полноты

Пусть θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$, т. е. $\mathcal{P} \models \forall \overline{Z}\ G_0\theta$.

Существует ли такое успешное SLD-резолютивное вычисление, порожденное запросом G_0 к программе $\mathcal{P}$

$$(D_{j_1}, \eta_1, G_1), (D_{j_2}, \eta_2, G_2), \ldots, (D_{j_n}, \eta_n, \Box),$$

которое вычисляет ответ θ, т. е. $\theta = (\eta_1\eta_2\ldots\eta_n)|_{Var_{G_0}}$?

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Теорема полноты.

Пусть

$\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,

$G_0 = ?C_1, C_2, \dots C_m$ — запрос с множеством целевых переменных $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$,

θ — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$.

Тогда существует такой вычисленный ответ η на запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$, что

$$\theta = \eta\rho$$

для некоторой подстановки ρ.

Теорема полноты гласит, что каждый правильный ответ — это пример (частный случай) некоторого вычисленного ответа .

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Доказательство.

Пусть $\theta = \{Y_1/t_1, \dots, Y_k/t_k\}$ и пусть $\bigcup\limits_{i=1}^{k} Var_{t_i} = \{Z_1, \dots, Z_r\}$.
Выберем некоторое множество новых «свежих» констант $\{c_1, \dots, c_k\}$, **не содержащихся** ни в программе $\mathcal{P}$, ни в запросе G, ни в термах подстановки θ, и рассмотрим подстановку $\lambda = \{Z_1/c_1, Z_2/c_2, \dots, Z_r/c_r\}$.

Поскольку θ — правильный ответ, верно $\mathcal{P} \models \forall Z_1 \dots \forall Z_k\, G_0\theta$.
Запрос $G_0' = G_0\theta\lambda$ — основной пример запроса G_0, и поэтому $\mathcal{P} \models G_0\theta\lambda$.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ПРОГРАММ

Доказательство.

Общий замысел доказательства

1. Вначале покажем, что запрос $G_0' = G_0\theta\lambda$, обращенный к множеству $[\mathcal{P}]$ основных примеров программных утверждений программы $\mathcal{P}$, имеет успешное SLD-резолютивное вычисление (лемма об основных вычислениях).

2. Затем покажем, что исходный запрос G_0, обращенный к самой программе $\mathcal{P}$, имеет успешное SLD-резолютивное вычисление с таким вычисленным ответом η, для которого верно равенство $\theta\lambda = \eta\rho'$ для некоторой подстановки ρ' (лемма о подъеме для хорновских дизъюнктов).

3. Затем покажем, что отсюда следует равенство $\theta = \eta\rho$ для некоторой подстановки ρ.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Лемма об основных вычислениях.

Пусть

$\mathcal{P} = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — хорновская логическая программа,

$G_0' = ?C_1', C_2', \ldots C_n'$ — **основной** запрос,

и при этом верно $\mathcal{P} \models G_0'$.

Тогда существует успешное SLD-резолютивное вычисление запроса G_0', обращенного к множеству $[\mathcal{P}]$ основных примеров программных утверждений программы $\mathcal{P}$.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

$\{D_1, D_2, \dots, D_N\} \models C'_1 \& C'_2 \& \dots \& C'_n$

$$\Longleftrightarrow$$

множество дизъюнктов $\{D_1, D_2, \dots, D_N, \neg C'_1 \vee \neg C_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}$ противоречиво.

$\Longleftrightarrow$ (по теореме Эрбрана)

существует такое конечное множество основных примеров программных утверждений $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M\} \subseteq [\mathcal{P}]$, что множество дизъюнктов $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}$ противоречиво.

$\Longleftrightarrow$ (по теореме полноты метода резолюций)

из системы дизъюнктов $\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}$ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\Box$.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

$$\dots$$

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

$$\dots$$

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$$

$$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$$

$$\dots$$

$$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$$

негативные дизъюнкты

$$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$$

возможны резольвенты двух типов

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\Box$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \dots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1}$

$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \dots \vee \neg A_{r2}$

$\dots$

$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \dots \vee \neg A_{\ell M}$

негативные дизъюнкты

$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$

Это SLD-резольвента

возможны резольвенты двух типов

$\neg A_{11} \vee \dots \vee \neg A_{k1} \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_n$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы

$$\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}.$$

Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \cdots \vee \neg A_{k1}$

$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \cdots \vee \neg A_{r2}$

$\cdots$

$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \cdots \vee \neg A_{\ell M}$

негативные дизъюнкты

$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n$

возможны резольвенты двух типов

А это не SLD-резольвента

$\neg A_{11} \vee \ldots \vee \neg A_{k1} \vee \neg C'_2 \vee \ldots \vee \neg C'_n$

$A_{02} \vee \neg A_{22} \vee \ldots \vee \neg A_{r2} \vee \neg A_{11} \vee \ldots \vee \neg A_{k1}$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Да, пустой дизъюнкт $\square$ можно резолютивно вывести из системы
$$\{D'_1, D'_2, \ldots, D'_M, \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n\}.$$
Но это не обязательно SLD-резолютивный вывод. Рассмотрим его более подробно.

смешанные дизъюнкты

$D'_1 = A_{01} \vee \neg A_{11} \vee \cdots \vee \neg A_{k1}$

$D'_2 = A_{02} \vee \neg A_{12} \vee \cdots \vee \neg A_{r2}$

$\cdots$

$D'_M = A_{0M} \vee \neg A_{1M} \vee \cdots \vee \neg A_{\ell M}$

негативные дизъюнкты

$G'_0 = \neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_n$

возможны резольвенты двух типов

$\neg A_{11} \vee \ldots \vee \neg A_{k1} \vee \neg C'_2 \vee \ldots \vee \neg C'_n$

$A_{02} \vee \neg A_{22} \vee \ldots \vee \neg A_{r2} \vee \neg A_{11} \vee \ldots \vee \neg A_{k1}$

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?),

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?).

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?).
Тогда будем поступать так:

$$\neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \dots \vee \neg C'_m$$

$$A'_0 \vee \neg A'_1 \vee \dots \vee \neg A'_k$$

$$A''_0 \vee \neg A''_1 \vee \dots \vee \neg A''_r$$

$$A'_0 \vee \neg A'_2 \vee \dots \vee \neg A'_k \vee \neg A''_1 \vee \dots \vee \neg A''_r$$

Если правило резолюции вначале применяется
к двум программным утверждениям,

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?). Тогда будем поступать так:

$$\neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_m$$

$$A'_0 \vee \neg A'_1 \vee \cdots \vee \neg A'_k$$

$$A''_0 \vee \neg A''_1 \vee \cdots \vee \neg A''_r$$

$$A'_0 \vee \neg A'_2 \vee \cdots \vee \neg A'_k \vee \neg A''_1 \vee \cdots \vee \neg A''_r$$

$$\neg A'_2 \vee \cdots \vee \neg A'_k \vee \neg A''_1 \vee \cdots \vee \neg A''_r \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_m$$

а затем применяется к полученной резольвенте и запросу,

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?).
Тогда будем поступать так:

$$\neg C_1' \vee \neg C_2' \vee \dots \vee \neg C_m'$$

$$A_0' \vee \neg A_1' \vee \dots \vee \neg A_k'$$

$$A_0'' \vee \neg A_1'' \vee \dots \vee \neg A_r''$$

$$\neg A_1' \vee \neg A_2' \vee \dots \vee \neg A_k' \vee \neg C_2 \vee \dots \vee \neg C_m$$

то изменим порядок применения правил

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство леммы о вычислениях.

Покажем, что этот вывод можно перестроить так, чтобы в нем остались только SLD-резольвенты. В этом выводе обязательно есть хотя бы одна SLD-резольвента (почему?), потому что пустой дизъюнкт — это всегда SLD-резольвента (почему?).
Тогда будем поступать так:

$$\neg C'_1 \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee \neg C'_m$$

$$A'_0 \vee \neg A'_1 \vee \cdots \vee \neg A'_k$$

$$A''_0 \vee \neg A''_1 \vee \cdots \vee \neg A''_r$$

$$\neg A'_1 \vee \neg A'_2 \vee \cdots \vee \neg A'_k \vee \neg C_2 \vee \cdots \vee \neg C_m$$

$$\neg A'_2 \vee \cdots \vee \neg A'_k \vee \neg A''_1 \vee \cdots \vee \neg A''_r \vee \neg C'_2 \vee \cdots \vee C'_m$$

и получим тот же самый результат,

но уже только при помощи SLD-резолюции.

ЛЕММА ОБ ОСНОВНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Доказательство.

Будем применять этот прием, до тех пор пока в выводе не останутся только правила SLD-резолюции. Таким образом, в итоге получим вывод пустого дизъюнкта $\square$ из множества дизъюнктов

$$\{D_1, D_2, \dots, D_N, \neg C_1' \vee \neg C_2 \vee \dots \vee \neg C_n'\}$$

только при помощи правила SLD-резолюции.

Это и есть успешное SLD-резолютивное вычисление основного запроса $G_0' = ?C_1', C_2', \dots C_n'$, обращенного к множеству основных примеров программных утверждений $[\mathcal{P}]$.

Что и требовалось доказать. $\square$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Лемма о подъеме (для логических программ)

Пусть $G_0' = G_0\theta'$ — основной пример запроса G_0 с множеством целевых переменных $Y_1, \ldots, Y_m$, обращенный к хорновской логической программе $\mathcal{P}$.

Если запрос G_0', обращенный к множеству **основных примеров** программных утверждений $[\mathcal{P}]$, имеет успешное вычисление,

то исходный запрос G_0, обращенный к самой программе $\mathcal{P}$, также имеет успешное вычисление с ответом η, который удовлетворяет равенству

$$\theta' = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки ρ'.

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Рассмотрим SLD-резолютивное вычисление запроса $G_0' = G_0\theta'$ с использованием основных примеров программных утверждений из множества $[\mathcal{P}]$

$$(D_1', \varepsilon, G_1'), (D_2', \varepsilon, G_2'), \dots, (D_n', \varepsilon, \Box)$$

и покажем, что существует SLD-резолютивное вычисление запроса G_0 с использованием программы $\mathcal{P}$

$$(D_1, \eta_1, G_1), (D_2, \eta_2, G_2), \dots, (D_n, \eta_n, \Box),$$

удовлетворяющее условиям леммы.

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

G_0

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

$$\begin{array}{c} G_0 \\ \big\downarrow \theta' \\ G_0\theta' \end{array}$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[ddd, "\theta'"] \\
& D_1 \arrow[d, "\mu_1"] & & D_2 \arrow[d, "\mu_2"] & & & & D_n \arrow[d, "\mu_n"] \\
& D_1' \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & D_2' \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & & & D_n' \arrow[dr, "\varepsilon"'] \\
G_0\theta' \arrow[rr] & & G_1' \arrow[rr] & & G_2' & \cdots & G_{n-1}' \arrow[rr] & & \square
\end{tikzcd}
$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[rr] \arrow[ddd, "\theta'"] & & G_1 \arrow[rr] & & G_2 & \cdots & G_{n-1} \arrow[rr] & & \square \\
& D_1 \arrow[ur, "\eta_1"'] \arrow[d, "\mu_1"] & & D_2 \arrow[ur, "\eta_2"'] \arrow[d, "\mu_2"] & & & & D_n \arrow[ur, "\eta_n"'] \arrow[d, "\mu_n"] & \\
& D_1' \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & D_2' \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & & & D_n' \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \\
G_0\theta' \arrow[rr] & & G_1' \arrow[rr] & & G_2' & \cdots & G_{n-1}' \arrow[rr] & & \square
\end{tikzcd}
$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

$$\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[rr] \arrow[ddd, "\theta'"] & & G_1 \arrow[rr] & & G_2 & \cdots & G_{n-1} \arrow[rr] & & \square \\
& D_1 \arrow[ur, "\eta_1"'] \arrow[d, "\mu_1"] & & D_2 \arrow[ur, "\eta_2"'] \arrow[d, "\mu_2"] & & & & D_n \arrow[ur, "\eta_n"'] \arrow[d, "\mu_n"] & \\
& D'_1 \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & D'_2 \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & & & D'_n \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \\
G_0\theta' \arrow[rr] & & G'_1 \arrow[rr] & & G'_2 & \cdots & G'_{n-1} \arrow[rr] & & \square
\end{tikzcd}$$

$$\theta' = (\eta_{\mathbf{1}}\eta_{\mathbf{2}} \ldots \eta_{\mathbf{n}})\big|_{\mathbf{Y_1},\ldots,\mathbf{Y_m}}\rho'$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[d, swap, "\theta'_0"] & & D_1 \arrow[d, "\mu_1"] \\
G'_0 = G_0\theta' \arrow[dr] & & D'_1 = D_1\mu_1 \arrow[dl] \\
& G'_1 &
\end{tikzcd}
$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[d, "\theta_0'"'] \arrow[dr] & & D_1 \arrow[d, "\mu_1"] \arrow[dl, "\eta_1"'] \\
G_0' = G_0\theta' \arrow[dr] & G_1 & D_1' = D_1\mu_1 \arrow[dl] \\
& G_1' &
\end{tikzcd}
$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[d, "\theta'_0"'] \arrow[dr] & & D_1 \arrow[dl, "\eta_1"'] \arrow[d, "\mu_1"] \\
G'_0 = G_0\theta' \arrow[dr] & G_1 \arrow[d, "\rho_1"] & D'_1 = D_1\mu_1 \arrow[dl] \\
& G'_1 = G_1\rho_1 &
\end{tikzcd}
$$

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Воспользуемся леммой о подъеме для обычных дизъюнктов.

$$
\begin{tikzcd}
G_0 \arrow[d, "\theta_0'"'] \arrow[dr, "\eta_1"] & & D_1 \arrow[dl] \arrow[d, "\mu_1"] \\
G_0' = G_0\theta' \arrow[dr] & G_1 \arrow[d, "\rho_1"] & D_1' = D_1\mu_1 \arrow[dl] \\
& G_1' = G_1\rho_1 &
\end{tikzcd}
$$

И при этом верно равенство $\theta_0' = (\eta_1\rho_1)|_{Y_1,\dots,Y_m}$.

ЛЕММА О ПОДЪЕМЕ

Доказательство леммы о подъеме

Последовательно применяя этот прием на всех шагах вычисления запроса G_0', получаем SLD-резолютивное вычисление запроса G_0:

$$(D_1, \eta_1, G_1), (D_2, \eta_1, G_2), \ldots, (D_n, \eta_n, \Box)$$

для которого выполняется система равенств

$$\begin{array}{rcl}
\theta' & = & (\eta_1\rho_1)|_{Y_1,\ldots,Y_m} \\
\rho_1 & = & (\eta_2\rho_2)|_{Var_{G_1}} \\
\rho_2 & = & (\eta_3\rho_3)|_{Var_{G_2}} \\
 & & \ldots \\
\rho_n & = & (\eta_n\rho_n)|_{Var_{G_n}}
\end{array}$$

Из этой системы следует равенство $\theta' = (\eta_1\eta_2\ldots\eta_n)|_{Y_1,\ldots,Y_m}\rho'$ для некоторой подстановки ρ'. $\Box$

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

Итак, у нас есть

- правильный ответ θ_0 на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$;
- подстановка $\lambda = \{Z_1/c_1, Z_2/c_2, \dots, Z_r/c_r\}$ «свежих» констант на место всех переменных $Z_1, \dots, Z_r$ из термов подстановки θ_0.
- основной пример $\theta_0' = \theta_0\lambda$ правильного ответа θ.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

θ_0 — правильный ответ на запрос G_0 к хорновской логической программе $\mathcal{P}$;

$\Downarrow$

$\mathcal{P} \models G_0\theta_0\lambda$;

$\Downarrow$ (по лемме об основных вычислениях)

основной запрос $G_0\theta_0\lambda$ к множеству основных примеров программных утверждений $[\mathcal{P}]$ имеет успешное вычисление;

$\Downarrow$ (по лемме о подъеме для логических программ)

запрос G_0 к программе $\mathcal{P}$ имеет успешное вычисление с вычисленным ответом η, для которого верно равенство

$$\theta_0\lambda = \eta\rho'$$

для некоторой подстановки ρ'.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Доказательство теоремы полноты (завершение).

А теперь заменим в левой и правой частях равенства

$$\theta_0 \lambda = \eta \rho'$$

все константы $c_1, \dots, c_r$ на символы переменных $Z_1, \dots, Z_r$.

Поскольку константы $c_1, \dots, c_r$ не входят в состав запроса G_0 и программы $\mathcal{P}$, эти константы не входят в состав термов вычисленного ответа η, и, значит, могут содержаться только в подстановке ρ'.

В левой части равенства подстановка $\lambda = \{Z_1/c_1, \dots, Z_r/c_r\}$ превращается в пустую подстановку ε.

В правой части равенства подстановка ρ' превращается в некоторую новую подстановку ρ.
В итоге равенство $\theta_0 \lambda = \eta \rho'$ превращается в равенство

$$\theta_0 = \eta \rho$$

$\square$

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Поясняющий пример.

Рассмотрим запрос $?P(U, V)$ к логической программе

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}: & P(f(X), X) \leftarrow R(X); & (1) \\ & R(Y) \leftarrow; & (2) \\ & Q(c) \leftarrow; & (3) \end{array}$$

Легко видеть, что $\theta = \{U/f(c), V/c\}$ — это правильный ответ на запрос к программе.

Вместе с тем, единственный вычисленный ответ — это $\eta = \{U/f(Y), V/Y\}$.

Все дело в том, что θ — это частный случай η: $\theta = \eta\{Y/c\}$.

ПОЛНОТА ОПЕРАЦИОННОЙ СЕМАНТИКИ

Итак, любой правильный ответ на запрос к хорновской логической программе можно вычислить (возможно, с обобщением) по правилу SLD-резолюции, и любой вычисленный ответ будет правильным.

А как организовать вычисления логических программ, чтобы вычислить **ВСЕ** ответы?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 13.