Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР:
Владимир Анатольевич Захаров

zakh@cs.msu.su

http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html

Лекция 2.

Классическая логика предикатов первого порядка
Синтаксис. Термы и формулы. Семантика. Интерпретация. Выполнимость формул.

ПРЕДИКАТ

латинский термин («предвидеть, предсказывать»), обозначающий член предложения — сказуемое.

Студент	**слушает**	**лектора**
Субъект	*Предикат*	*Объект*

В более общем смысле предикат — это свойство, атрибут предмета, отношение между предметами, событиями, явлениями.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные переменные	$Var = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\};$
Предметные константы	$Const = \{c_1, c_2, \ldots, c_l, \ldots\};$
Функциональные символы	$Func = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots, f_r^{(n_r)}, \ldots\};$
Предикатные символы	$Pred = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \ldots, P_s^{(m_s)}, \ldots\}.$

Тройка $\langle Const, Pred, Func \rangle$ называется сигнатурой алфавита.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные константы	— это имена предметов;
Функциональные символы	обозначают операции над предметами;
Предикатные символы	обозначают отношения между предметами.

Пример.

Константы	$0,\ 1,\ \pi, \ldots;$
Функциональные символы	$+,\ \times,\ \mod, \ldots;$
Предикатные символы	$=,\ <, \ldots.$

АЛФАВИТ

Логические связки и кванторы.

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ)	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	$\rightarrow$.

Квантор всеобщности	(«для каждого»)	$\forall$
Квантор существования	(«хотя бы один»)	$\exists$

Знаки препинания.

Разделитель	**,**
Скобки	( )

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Определение терма.

Терм — это

x	, если $x \in Var$	x — переменная;
c	, если $c \in Const$	c — константа;
$f^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$	, если $f^{(n)} \in Func$ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы	составной терм.

$Term$ — множество термов заданного алфавита.

Var_t — множество переменных, входящих в состав терма t.

$t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — запись обозначающая терм t, у которого $Var_t \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Если $Var_t = \emptyset$, то терм t называется **основным термом**.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры термов.

x_2	т. к. $x_2 \in Var$;
c_1	т. к. $c_1 \in Const$;
$f^{(2)}(x_2, c)$	т. к. $f^{(2)} \in Func$, $x_2, c \in Term$;
$\times(x, +(1, \exp(2, y)))$	т. к. $\times, +, \exp \in Func$, $1, 2 \in Const$, $x, y \in Var$;
$x \times (1 + 2^y)$	инфиксная форма записи термов;
$f(c_1, g(h(c_1), c_2))$	основной терм.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Определение формулы.

Формула — это

атомарная формула
$P^{(m)}(t_1, t_2, \dots, t_m)$, если $P^{(m)} \in \mathit{Pred}$, $\{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subseteq \mathit{Term}$;

составная формула
$(\varphi \& \psi)$, если φ, ψ — формулы;
$(\varphi \vee \psi)$
$(\varphi \to \psi)$
$(\neg \varphi)$

$(\forall x \varphi)$, если $x \in \mathit{Var}$, φ — формула.
$(\exists x \varphi)$

Form — множество всех формул заданного алфавита.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$	«значения термов $t_1, t_2, \ldots, t_m$ находятся в отношении $P^{(m)}$»;
$(\varphi \& \psi)$	«φ и ψ»;
$(\varphi \vee \psi)$	«φ или ψ»;
$(\varphi \to \psi)$	«если φ, то ψ»;
$(\neg\varphi)$	«неверно, что φ»;
$(\forall x \varphi)$	«для любого значения x верно φ»;
$(\exists x \varphi)$	«существует такое значение x, для которого верно φ».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры формул.

$P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))$ т. к. $P^{(2)} \in Pred$, $x_1, f(c, x_2) \in Term$;

$R^{(1)}(x_1)$ т. к. $R^{(1)} \in Pred$, $x_1 \in Term$;

$(\neg R^{(1)}(x_1))$

$((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))$

$(\exists x_2((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\ x_2\ ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$\underbrace{(\exists\, x_2\ ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )}_{\text{Область действия квантора } \exists}$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

переменная, связанная квантором $\exists$

Область действия квантора $\exists$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\ x_2\ ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

связанные вхождения переменной x_2

переменная, связанная квантором $\exists$

Область действия квантора $\exists$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

переменная, связанная квантором $\forall$

Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

связанные вхождения переменной x_1

переменная, связанная квантором $\forall$

Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall\, x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

свободные вхождения
переменной x_1

Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists\, x_2\ ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\ )$$

свободные вхождения переменной x_1

связанные вхождения переменной x_1

связанные вхождения переменной x_2

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним.

Вхождение переменной в области действия квантора, связывающего эту переменную, называется **связанным** .

Вхождение переменной в формулу, не являющееся связанным, называется **свободным** .

Переменная называется **свободной** , если она имеет свободное вхождение в формулу.

Пример .

$$\varphi \;=\; (\exists\, x_2\, ((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \to P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))\,)$$

Формула φ имеет единственную свободную переменную x_1.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Var_φ — множество свободных переменных формулы φ.

$$\varphi = P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad Var_\varphi = \bigcup_{i=1}^{m} Var_{t_i};$$

$$\begin{array}{lll} \varphi = (\psi_1 \& \psi_2) & & Var_\varphi = Var_{\psi_1} \cup Var_{\psi_2}; \\ \varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) & & \\ \varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2) & & \end{array}$$

$$\varphi = (\neg\psi) \qquad Var_\varphi = Var_\psi;$$

$$\begin{array}{lll} \varphi = (\forall x \psi) & & Var_\varphi = Var_\psi \setminus \{x\}. \\ \varphi = (\exists x \psi) & & \end{array}$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — запись, обозначающая формулу φ, у которой $Var_\varphi \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Если $Var_\varphi = \emptyset$, то формула φ называется **замкнутой формулой** , или **предложением** .

$CForm$ — множество всех замкнутых формул.

Соглашение о приоритете логических операций

В порядке убывания приоритета связки и кванторы располагаются так:

$$\neg,\ \forall,\ \exists$$
$$\&$$
$$\vee$$
$$\rightarrow$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример правильного восстановления скобок

$$\forall x_1 \; \neg P(x_1) \;\&\; \exists x_2 R(x_1, x_2) \;\rightarrow\; \exists x_1 \; (\neg P(x_1) \vee P(x_2))$$

$$(\forall x_1 \; (\neg P(x_1))) \;\&\; (\exists x_2 \; R(x_1, x_2)) \;\rightarrow\; (\exists x_1 \; ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))$$

$$((\forall x_1 \; (\neg P(x_1))) \;\&\; (\exists x_2 R(x_1, x_2))) \;\rightarrow\; (\exists x_1 \; ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))$$

$$(((\forall x_1 \; (\neg P(x_1))) \;\&\; (\exists x_2 R(x_1, x_2))) \;\rightarrow\; (\exists x_1 \; ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2))))$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Алфавит

Константы

0 — константа, действительное число ноль;

Функциональные символы

$h^{(2)}(x, y)$ — «абсолютная разность чисел x и y»;

Предикатные символы

$R^{(1)}(x)$ — «x — действительное число»;

$N^{(1)}(x)$ — «x — натуральное число»;

$S^{(1)}(x)$ — «x — последовательность действительных чисел»;

$E^{(3)}(x, y, z)$ — «x — это y-ый член последовательности z»;

$<^{(2)} (x, y)$ — «число x меньше числа y».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Формула $limit(x, y)$

$limit(x, y)$ — «число x — предел последовательности действительных чисел y».

$limit(x, y)$:

$$R(x) \ \& \ S(y) \ \& \ \forall z(R(z) \ \& \ <(0, z) \ \rightarrow \exists u(N(u) \ \& \ \forall v(N(v) \ \& \ <(u, v) \ \rightarrow \exists w(E(w, v, y) \ \& \ <(h(w, x), z)))))$$

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Семантика — это свод правил, наделяющих значением (смыслом) синтаксические конструкции языка.

В языке логики предикатов значением термов являются функции, а значением формул — отношения (предикаты).

Значения термов и формул определяются на основе алгебраических систем .

Алгебраические системы, используемые в таком качестве, называются интерпретациями .

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Интерпретация сигнатуры $\langle Const, Func, Pred \rangle$ — это алгебраическая система $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, где

- D_I — непустое множество, которое называется областью интерпретации , предметной областью , или универсумом ;
- $\overline{Const} \ : \ Const \ \to \ D_I$ — оценка констант , сопоставляющая каждой константе c элемент (предмет) $\bar{\mathbf{c}}$ из области интерпретации;
- $\overline{Func} \ : \ Func^{(n)} \ \to \ (D_I^n \ \to \ D_I)$ — оценка функциональных символов , сопоставляющая каждому функциональному символу $f^{(n)}$ местности n всюду определенную n-местную функцию $\bar{\mathbf{f}}^{(n)}$ на области интерпретации;
- $\overline{Pred} \ : \ Pred^{(m)} \ \to \ (D_I^m \ \to \ \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\})$ — оценка предикатных символов , сопоставляющая каждому предикатному символу $P^{(m)}$ местности m всюду определенное m-местное отношение $\bar{\mathbf{P}}^{(m)}$ на области интерпретации.

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Пример

Сигнатура $Const = \{c_1, c_2\}, Func = \{f^{(1)}\}, Pred = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$.

Интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$:

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $\mathbf{c_1} = d_1,\ \mathbf{c_2} = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Значение терма

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, терм $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \dots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I.

Значение $t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ терма $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе $d_1, d_2, \dots, d_n$ определяется рекурсивно.

- Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$, то
  $t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = d_i$;
- Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$, то
  $t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = \bar{\mathbf{c}}$;
- Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(t_1, \dots, t_k)$, то
  $t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] =$
  $\bar{\mathbf{f}}(t_1[d_1, d_2, \dots, d_n], \dots, t_k[d_1, d_2, \dots, d_n])$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

Значение формул в интерпретации определяется при помощи отношения выполнимости $\models$.

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, формула $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \dots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I.

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе $d_1, d_2, \dots, d_n$ определяется рекурсивно.

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(t_1, \dots, t_m)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$
$$\iff$$
$$\bar{\mathbf{P}}(t_1[d_1, d_2, \dots, d_n], \dots, t_m[d_1, d_2, \dots, d_n]) = \mathbf{true};$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \& \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} I \models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] \\ I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] \end{cases}$$

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \vee \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$$\iff$$

$$I \models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

или

$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \to \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$I \not\models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

или

$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \neg\psi$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$I \not\models \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \forall x_0\ \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

  $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$

  $\iff$

  для **любого** элемента d_0, $d_0 \in D_I$, имеет место

  $I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exists x_0\ \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

  $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$

  $\iff$

  для **некоторого** элемента d_0, $d_0 \in D_I$, имеет место

  $I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация

$$I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$$

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $\mathbf{c_1} = d_1$, $\mathbf{c_2} = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

Формула

$$\varphi = \forall x_1 \, (P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

Семантика: выполнимость формул

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	true
d_2	false
d_3	true

R(x, y)

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$$

$$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \;\Rightarrow\; I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$$

Семантика: выполнимость формул

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$$

$$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \;\Rightarrow\; I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$$

$$I \models R(x_1, x_2) \;\&\; \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	true
d_2	false
d_3	true

R(x, y)

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \;\Rightarrow\; I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$

$I \models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$

$I \models \exists x_2(R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_1]$

Семантика: выполнимость формул

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$$

$$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \;\Rightarrow\; I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$$

$$I \models R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$$

$$I \models \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

$$I \models P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

$\mathbf{R}(x,y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \not\models P(x_1)[d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \not\models P(x_1)[d_2]$

$$I \models P(x_1) \to \exists x_2(R(x_1, x_2)\& \neg P(f(x_2)))[d_2]$$

Семантика: выполнимость формул

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

${}_{x}\,{}^{y}$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	**P**
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

$x \quad y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	**true**
d_2	**false**
d_3	**true**

R(x, y)

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3
d_1	**true**	**true**	**false**
d_2	**true**	**false**	**true**
d_3	**false**	**true**	**true**

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2) \;\&\; \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2) \;\&\; \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

$_x\ ^y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	**f**
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	**P**
d_1	true
d_2	false
d_3	true

R(x, y)

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$

$I \not\models \exists x_2\ (R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2)))[d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \quad ^y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$

$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \quad \Rightarrow \quad I \not\models R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$

$I \not\models \exists x_2\ (R(x_1, x_2)\ \&\ \neg P(f(x_2)))[d_3]$

$$I \not\models P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_3]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Итак, мы имеем

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))[d_1]$$

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))[d_2]$$

$$I \not\models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))[d_3]$$

Значит,

$$I \not\models \forall x_1\, (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \,\&\, \neg P(f(x_2))))$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 2.