Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 3.

Выполнимые и общезначимые формулы.
Модели. Логическое следование.
Проблема общезначимости.
Семантические таблицы.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой в интерпретации I, если существует такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется истинной в интерпретации I, если для любого набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой , если есть интерпретация I, в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется общезначимой (или тождественно истинной), если эта формула истинна в любой интерпретации.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется противоречивой (или невыполнимой), если она не является выполнимой.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

$P(x_1)\&\neg P(x_2)$,
$\forall x P(x) \to \exists x P(x)$,
$\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ — выполнимые формулы.

$I_1 \; : \; D_I = \{d_1, d_2\}$, $\bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true}$, $\bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false}$

$I_1 \models P(x_1)\&\neg P(x_2)[d_1, d_2]$, $\quad I_1 \models \forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$I_2 \; : \; D_I = \{d\}$, $\bar{\mathbf{P}}(d) = \mathbf{true}$

$I_2 \models \exists x P(x) \to \forall x P(x)$

Формулы $P(x_1)\&\neg P(x_2)$, $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ необщезначимые.

$I_2 \not\models P(x_1)\&\neg P(x_2)[d, d]$, $\quad I_1 \not\models \exists x P(x) \to \forall x P(x)$.

Формула $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ является общезначимой.

Но почему? И как в этом убедиться?

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Выполнимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний. Каждая выполнимая формула несет определенную информацию.

Общезначимые формулы — это трюизмы, банальности, тавтологии, не несущие никакой информации.

Какую же роль играют общезначимые формулы?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ.

Пример

$I \;:\; D_I = \{d_1, d_2\},\; \bar{\mathbf{P}}(d_1) = \mathbf{true},\; \bar{\mathbf{P}}(d_2) = \mathbf{false}$

I — модель для множества формул $\Gamma = \{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$.

Замечание

А какая интерпретация является моделью пустого множества формул $\Gamma = \emptyset$?

Правильный ответ: любая интерпретация . Почему ?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — «x — квадрат»;

$S(x)$ — «x — шар»;

$B(x)$ — «x — черный предмет»;

$W(x)$ — «x — белый предмет»;

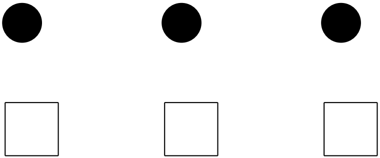
$U(x, y)$ — «предмет x лежит под предметом y».

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

$$\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \rightarrow\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))$$

Модель I



$$\cancel{\forall x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \exists y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \&\ U(x,y)))}$$

Каждый предмет является белым кубом
и лежит под каким-то черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

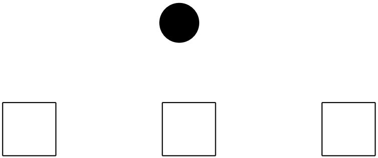
$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель I

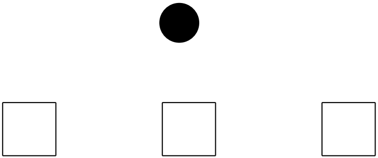


МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель I



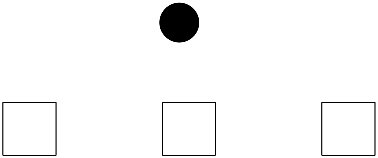
$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x) \rightarrow \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Модель I



$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x) \rightarrow \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \rightarrow\ U(x,y)))$$

Какой-то предмет либо не является белым кубом,
либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x)\ \&\ \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \to\ U(x,y)))$$

Модель J

$$\cancel{\exists x\ (W(x)\ \&\ C(x) \to \forall y\ (B(y)\ \&\ S(y)\ \to\ U(x,y)))}$$

Какой-то предмет либо не является белым кубом,
либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Общий принцип правильного построения формул.

Каждый предмет, наделенный атрибутом A, обладает свойством B:

$$\forall x \ (A(x) \ \rightarrow \ B(x))$$

Некоторый предмет, наделенный атрибутом A, обладает свойством B:

$$\exists x \ (A(x) \ \& \ B(x))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Определение

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, и φ — замкнутая формула. Формула φ называется логическим следствием множества предложений (базы знаний) Γ, если каждая модель для множества формул Γ является моделью для формулы φ, т. е.

$$\text{для любой интерпретации } I: \quad I \models \Gamma \implies I \models \varphi$$

Логические следствия — это «производные» знания, которые неизбежно сопутствуют «базовым» знаниям Γ, находятся в причинно-следственной зависимости от предложений Γ. Одна из главных задач (и одновременно наиболее характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это извлечение логических следствий из баз знаний.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Обозначения

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

А какие формулы являются логическими следствиями пустой базы знаний $\Gamma = \emptyset$? Правильный ответ: общезначимые .

Поэтому для обозначения общезначимости формулы φ будем использовать запись $\models \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Если $I \not\models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$, то $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Если $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$, то $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$, т. е. I — модель для Γ.

Поскольку $\Gamma \models \varphi$, получаем $I \models \varphi$. Значит,
$I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Таким образом, для любой интерпретации I имеет место
$I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$ — общезначимая формула.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ, т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$.

Так как $\models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$, верно $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $I \models \varphi$.

Так как I — произвольная модель для Γ, приходим к заключению $\Gamma \models \varphi$.

$\square$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Общезначимые формулы — это каналы причинно-следственной связи, по которым передаются знания, представленные в виде логических формул, преобразуясь при этом из одной формы в другую.

Практически важно уметь определять эти каналы и настраивать их на извлечение нужных знаний.

- База знаний — множество предложений Γ;
- Запрос к базе знаний — предложение φ;
- Получение ответа на запрос — проверка логического следствия $\Gamma \models \varphi$.

Если Γ — конечное множество, то проверка логического следствия сводится к проверке общезначимости формулы

$$\psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Таким образом, возникает проблема общезначимости формул:

Для заданной формулы φ проверить ее общезначимость:

$$\models \varphi?$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Утверждение.

Для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ верно, что

1. $\models \varphi(x_1, \ldots, x_n) \iff \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$;
2. $$\begin{array}{c} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — выполнимая} \\ \iff \\ \exists x_1 \ldots \exists x_n\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — выполнимая;} \end{array}$$
3. $$\begin{array}{c} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ — выполнима в любой интерпретации} \\ \iff \\ \models \exists x_1 \ldots \exists x_n\ \varphi(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Доказательство

Самостоятельно. Это просто.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Как же решать проблему общезначимости

$$\models \varphi \quad ?$$

Может быть проверять все интерпретации по очереди ?

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Нет, такой подход заведомо обречен на неудачу. Почему? Потому, что верно

Утверждение.

Существует такая замкнутая формула φ, которая истинна в любой интерпретации I с конечной предметной областью D_I, но не является общезначимой .

$$\forall x \neg R(x,x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \& R(y,z) \ \to \ R(x,z)) \ \to \ \exists x \forall y \neg R(x,y).$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект **y** — начальник субъекта **x**»;

1). $\forall x \neg R(x, x)$: «никто не командует самим собой»;

2). $\forall x \forall y \forall z\ (R(x, y) \& R(y, z) \ \rightarrow \ R(x, z))$: «начальник моего начальника — мой начальник»;

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$: «кто-то никому не подчиняется».

В каждой компании с конечным множеством сотрудников, в которой действуют законы 1) и 2), выполняется и закон 3).

Значит, наша формула истинна во всех интерпретациях с конечной предметной областью.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

Но наша формула не является общезначимой.

$R(x, y)$: «натуральное число **y** больше натурального числа **x**»

1). $\forall x \neg R(x, x)$;

2). $\forall x \forall y \forall z \; (R(x, y) \& R(y, z) \; \rightarrow \; R(x, z))$;

выполняются на множестве натуральных чисел.

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$ на множестве натуральных чисел не выполняется: неверно, что существует максимальное натуральное число.

$\square$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Не только перебор всех интерпретаций, но даже проверку истинности формулы в интерпретации с бесконечной предметной областью осуществить затруднительно.

Значит, необходимо придумать более изощренный способ проверки.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow\ R(x)) \ \rightarrow\ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ R(x))\ .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow \ R(x)) \ \rightarrow \ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ R(x)) \ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x \ (P(x) \ \rightarrow \ R(x)) \ \rightarrow \ (\forall x \ P(x) \ \rightarrow \ \forall x \ R(x)) \ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\Big| \ I \not\models \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{r|l} & I \not\models \varphi \\ I \models \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x)) & I \not\models \forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow \ R(x)) \ \rightarrow \ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \varphi \\ I \models \ \forall x\ (P(x) \ \rightarrow \ R(x)) & I \not\models \ \forall x\ P(x) \ \rightarrow \ \forall x\ R(x) \\ I \models \ \forall x\ P(x) & I \not\models \ \forall x\ R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \ \rightarrow\ R(x)) \ \rightarrow\ (\forall x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l}
 & I \not\models \varphi \\
I \models\ \forall x\ (P(x) \ \rightarrow\ R(x)) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ R(x) \\
I \models\ \forall x\ P(x) & I \not\models\ \forall x\ R(x) \\
 & I \not\models\ R(x)[d]
\end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x))\ \rightarrow\ (\forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

	$I \not\models \varphi$
$I \models\ \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x))$	$I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ R(x)$
$I \models\ \forall x\ P(x)$	$I \not\models\ \forall x\ R(x)$
	$I \not\models\ R(x)[d]$
$I \models (P(x)\ \rightarrow R(x))[d]$	

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x\ (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ R(x)$
$I \models \forall x\ P(x)$	$I \not\models \forall x\ R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x))\ \rightarrow\ (\forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ R(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

	$I \not\models \varphi$
$I \models\ \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ R(x))$	$I \not\models\ \forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ R(x)$
$I \models\ \forall x\ P(x)$	$I \not\models\ \forall x\ R(x)$
	$I \not\models\ R(x)[d]$
$I \models (P(x)\ \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	
$I \models R(x)[d]$	

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x\ (P(x) \to R(x)) \to (\forall x\ P(x) \to \forall x\ R(x)) \ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ. Изучим эту контрмодель.

	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x\ (P(x) \to R(x))$	$I \not\models \forall x\ P(x) \to \forall x\ R(x)$
$I \models \forall x\ P(x)$	$I \not\models \forall x\ R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \to R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	
$I \models R(x)[d]$	

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

Значит, $\models \varphi$.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\mid\ I \not\models \exists x\ (P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x))$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{r|l} & I \not\models \exists x\ (P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x)) \\ I \models\ \exists x\ (P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\, (P(x) \;\rightarrow\; \forall x\; P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \exists x\, (P(x) \;\rightarrow\; \forall x\; P(x)) \\ I \models\; \exists x\, (P(x) & I \not\models\; \forall x\; P(x) \\ I \models\; P(x)[d_1] & \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\, (P(x) \;\rightarrow\; \forall x\, P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \exists x\, (P(x) \;\rightarrow\; \forall x\, P(x)) \\ I \models\ \exists x\, (P(x) & I \not\models\ \forall x\, P(x) \\ I \models\ P(x)[d_1] & \\ & I \not\models\ P(x)[d_2] \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x\ (P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x))\ .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ.

$$\begin{array}{l|l} & I \not\models \exists x\ (P(x) \ \rightarrow\ \forall x\ P(x)) \\ I \models\ \exists x\ (P(x) & I \not\models\ \forall x\ P(x) \\ I \models\ P(x)[d_1] & \\ & I \not\models\ P(x)[d_2] \end{array}$$

Противоречия нет.

$I = \langle D_I, \overline{Pred}\rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$,

$I \not\models \varphi$.

Следовательно, $\not\models \varphi$.

Семантические таблицы

Попробуем систематизировать этот способ проверки общезначимости формул.

- Общезначимость формулы доказываем «от противного», пытаясь построить контрмодель.
- Контрмодель строим, указывая, какие формулы должны в ней выполняться, а какие нет. Требования (не)выполнимости формул, предъявляемые к контрмодели, сводим в таблицу и последовательно их уточняем.
- Если требования, которые предъявляются к контрмодели, оказываются несовместными, значит, проверяемая формула неопровержима, т. е. общезначима.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, $\Gamma, \Delta\ \subseteq Form$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$ называется выполнимой , если существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \ldots, d_n \in D_I$ свободных переменных, для которых

- $I \models\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ для любой формулы φ, $\varphi \in \Gamma$,
- $I \not\models\ \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ для любой формулы ψ, $\psi \in \Delta$.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Примеры

Семантическая таблица

$$T = \langle \{\exists x\ P(x),\ \neg P(y)\}\ ;\ \{\forall x P(x),\ P(x)\ \&\ \neg P(x)\}\ \rangle$$

выполнима. Ее выполнимость подтверждает интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Pred} \rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$, и набор d_1, d_2 значений свободных переменных $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Семантическая таблица

$$T = \langle\ \emptyset\ ;\ \{\exists y \forall x R(x,y)\ \rightarrow\ \forall x \exists y R(x,y)\}\ \rangle$$

невыполнима. Почему?

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Теорема (о табличной проверке общезначимости)

$$\models \varphi \iff \text{таблица } T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle \text{ невыполнима.}$$

Доказательство. $\models \varphi \iff$ для любой интерпретации I и для любого набора $d_1, \dots, d_n \in D_I$ значений свободных переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n] \iff$ таблица $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle$ невыполнима ни в одной интерпретации.

□

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется закрытой .

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

Семантическая таблица $\langle\ \Gamma\ ;\ \Delta\ \rangle$, у которой множества Γ, Δ состоят только из **атомарных** формул, называется атомарной .

Утверждение

Незакрытая атомарная таблица выполнима.

Доказательство. Самостоятельно.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таким образом, для доказательства общезначимости $\models \varphi$ достаточно разработать систему правил, позволяющих преобразовывать семантическую таблицу $T_\varphi = \langle\ \emptyset\ ; \{\varphi\}\ \rangle$ к закрытым таблицам.

Доказательства такого вида называются логическим выводом . Если в выводе участвуют семантические таблицы, то логический вывод называется табличным .

Чтобы табличный вывод был корректным, правила преобразования таблиц (правила табличного вывода) должны сохранять выполнимость семантических таблиц.

Поэтому начнем с разработки правил табличного вывода и проверки их корректности.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 3.