Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 9.

Резолютивный вывод. Корректность резолютивного вывода. Применение метода резолюций.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

О терминологии.

Пусть задано выражение E и подстановка θ.

Подстановка θ : **Var** $\rightarrow$ **Var** называется переименованием , если θ — биекция.

Выражение $E\theta$ называется примером выражения E.

Если $Var_{E\theta} = \emptyset$, то пример $E\theta$ называется основным примером выражения E.

Если θ — переименование, то пример $E\theta$ называется вариантом выражения E.

Резолютивный вывод

Пример

Пусть $E = P(x, f(y)) \vee \neg R(y, c)$.

$\theta = \{x/u, y/z, u/x, z/y\}$ — переименование.

$E' = E\{x/g(d), y/z\} = P(g(d), f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — пример E.

$E'' = E\{x/g(d), y/c\} = P(g(d), f(c)) \vee \neg R(c, c)$ — основной пример E.

$E''' = E\{x/u, y/z\} = P(u, f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — вариант E.

В частности, пустая (тождественная) подстановка является переименованием.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Правило резолюции.

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1$ и $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$ — два дизъюнкта.

Пусть $\theta \in НОУ(L_1, L_2)$.

Тогда дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee D_2')\theta$ называется резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2.

Пара литер L_1 и $\neg L_2$ называется контрарной парой .

Правило резолюции

$$\frac{D_1' \vee L_1,\; D_2' \vee \neg L_2}{(D_1' \vee D_2')\theta}, \quad \theta \in НОУ(L_1, L_2)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$D_1 = P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))$

$D_2 = Q(x) \vee R(y, x) \vee \neg P(g(z, y), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y))$, $\neg P(g(z, y), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z, y), z)$

$$HOY\Big(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)\Big)$$

Резолютивный вывод

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z,y), z)$

$$НОУ\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} x = g(z,y) \\ f(y) = z \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)), \ \neg P(g(z,y), z)$

$$НОУ\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} x = g(z,y) \\ f(y) = z \end{cases} \quad \xrightarrow{(3),(5)} \quad \mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = g(f(y), y) \\ z = f(y) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y))$, $\neg P(g(z, y), z)$

$$НОУ\Big(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)\Big) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \left\{ \begin{array}{l} x = g(z, y) \\ f(y) = z \end{array} \right. \quad \xrightarrow{(3),(5)} \quad \mathcal{E}_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = g(f(y), y) \\ z = f(y) \end{array} \right.$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)),\ \neg P(g(z,y), z)$

$$НОУ\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \Big(\underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'} \vee \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'}\Big)\theta$$

Резолютивный вывод

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x,z), f(z))}_{D_1'}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y,x)}_{D_2'} \vee \neg P(g(z,y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y))$, $\neg P(g(z,y), z)$

$$НОУ\Big(P(x, f(y)), P(g(z,y), z)\Big) = \theta = \{x/g(f(y),y), z/f(y)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \neg R(g(g(f(y),y),y), f(f(y))) \vee Q(g(f(y),y)) \vee R(y, g(f(y),y)).$$

Резолютивный вывод

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

Резолютивный вывод

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y,x) \vee \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)$

$$HOУ\Big(R(g(x,z), f(z)), R(y,x)\Big)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$HOY\Big(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x, z) = y \\ f(z) = x \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y,x) \vee \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)$

$$HOY\Big(R(g(x,z), f(z)), R(y,x)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x,z) = y \\ f(z) = x \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = g(f(z), z) \\ x = f(z) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y,x) \vee \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)$

$$НОУ\Big(R(g(x,z), f(z)), R(y,x)\Big) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z),z)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x,z) = y \\ f(z) = x \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = g(f(z),z) \\ x = f(z) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$НОУ\Big(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\Big) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \Big(\underbrace{P(x, f(y))}_{D_1''} \vee \underbrace{Q(x) \vee \neg P(g(z, y), z)}_{D_2''}\Big)\eta$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D_1'} \vee \neg R(g(x,z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D_2'} \vee R(y,x) \vee \underbrace{\neg P(g(z,y), z)}_{D_2'}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x,z), f(z)), R(y,x)$

$$HOУ\Big(R(g(x,z), f(z)), R(y,x)\Big) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\}$$

Резольвента

$$D_0 = P(f(z), f(g(f(z), z))) \vee Q(f(z)) \vee \neg P(g(z, g(f(z), z)), z).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Правило склейки.

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1 \vee L_2$ — дизъюнкт.

Пусть $\eta \in HOY(L_1, L_2)$.

Тогда дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee L_1)\eta$ называется склейкой дизъюнкта D_1.

Пара литер L_1 и L_2 называется склеиваемой парой .

Правило склейки

$$\frac{D_1' \vee L_1 \vee L_2}{(D_1' \vee L_1)\eta}, \quad \eta \in HOY(L_1, L_2)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$D_1 = P(x) \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$НОУ\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x))$, $\neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases} \xrightarrow{(1),(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = c \\ z = f(c) \\ x = c \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)),\ \neg R(x, f(c), z)$

$$HOY\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases} \xrightarrow{(1),(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = c \\ z = f(c) \\ x = c \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y,z,f(x)) \vee \neg R(x,f(c),z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y,z,f(x)),\ \neg R(x,f(c),z)$

$$НОУ\Big(R(y,z,f(x)), R(x,f(c),z)\Big) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

Склейка

$$D_0 = \Big(\underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y,z,f(x))\Big)\eta$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D_1'} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x))$, $\neg R(x, f(c), z)$

$$HOУ\Big(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\Big) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

Склейка

$$D_0 = P(c) \vee R(c, f(c), f(c)).$$

Резолютивный вывод

Определение резолютивного вывода.

Пусть $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_N\}$ — система дизъюнктов.

Резолютивным выводом из системы дизъюнктов S называется конечная последовательность дизъюнктов

$$D'_1, D'_2, \ldots, D'_i, D'_{i+1}, \ldots, D'_n,$$

в которой для любого i, $1 \le i \le n$, выполняется одно из трех условий:

1. либо D'_i — **вариант** некоторого дизъюнкта из S;
2. либо D'_i — резольвента дизъюнктов D'_j и D'_k, где $j, k < i$;
3. либо D'_i — склейка дизъюнкта D'_j, где $j < i$.

Дизъюнкты $D'_1, D'_2, \ldots, D'_n$ считаются резолютивно выводимыми из системы S.

Резолютивный вывод

Пример резолютивного вывода.

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}$$

$D_1 = P(x, f(y)) \vee R(y)$,
$D_2 = \neg R(y)$,
$D_3 = \neg P(f(x), z) \vee \neg P(y, y)$.

Резолютивный вывод из S

1. $D_1' = P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$, вариант дизъюнкта D_1
2. $D_2' = \neg R(y_2)$, вариант дизъюнкта D_2
3. $D_3' = P(x_3, f(y_3))$, резольвента дизъюнктов D_1', D_2'
4. $D_4' = \neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$, вариант дизъюнкта D_3
5. $D_5' = \neg P(f(x_5), f(x_5))$, склейка D_4'
6. $D_6' = \square$, резольвента дизъюнктов D_3' и D_5'

Здесь $\square$ — пустой дизъюнкт , **тождественная ложь.**

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример резолютивного вывода.

А почему пустой дизъюнкт $\square$ — это тождественная ложь?

А потому, что каждый дизънкт $D = L_1 \vee \cdots \vee L_n$ равносилен утверждению $L_1 \vee \cdots \vee L_n \vee \textbf{false}$.

Поэтому резольвентой дизъюнктов $D_1 = L \vee \textbf{false}$ и $D_2 = \neg L \vee \textbf{false}$ будет дизъюнкт $D_0 = \textbf{false}$.

Этот дизъюнкт не содержит ни одной литеры, и поэтому называется пустым дизънктом .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Обратите внимание на то, что я постоянно переименовываю переменные так, чтобы каждый дизъюнкт резолютивного вывода содержал свою **индивидуальную** систему переменных!

Резолютивный вывод из S

1. $D_1' = P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$
2. $D_2' = \neg R(y_2)$
3. $D_3' = P(x_3, f(y_3))$
4. $D_4' = \neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$
5. $D_5' = \neg P(f(x_5), f(x_5))$
6. $D_6' = \square$

Зачем это нужно?

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Все дело в том, что все переменные дизъюнктов связаны кванторами $\forall$, и поэтому их имена можно достаточно произвольно изменять, полностью сохраняя смысл формул. Однако, случайное совпадение имен переменных (коллизия) может привести к тому, что резольвенту дизъюнктов построить не удастся.

Пусть $S = \{D_1 = P(x), D_2 = \neg P(f(x))\}$.

1. $D'_1 = P(x)$
2. $D'_2 = \neg P(f(x))$
3. $НОУ\Big(P(x), P(f(x))\Big) = \emptyset$,

и поэтому D'_1, D'_2 не имеют резольвенты.

1. $D''_1 = P(x_1)$
2. $D''_2 = \neg P(f(x_2))$
3. $D''_3 = \square$

резольвента D''_1, D''_2.

Итак, наш девиз:
НОВЫЙ ДИЗЪЮНКТ — НОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Резолютивный вывод называется успешным (или, по другому, резолютивным опровержением), если этот вывод оканчивается пустым дизъюнктом $\square$.

В чем же состоит успех такого резолютивного вывода и что при этом опровергнуто?

Успешный вывод — это свидетельство того, что система дизъюнктов S **противоречива** и опровергнуто предположение о ее выполнимости!

Но это придется обосновать.

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема корректности резолютивного вывода

Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$, то S — противоречивая система дизъюнктов.

Доказательство теоремы

Пустой дизъюнкт тождественно ложен, т.е. не имеет моделей. Покажем, что каждый дизъюнкт, резолютивно выводимый из S, является логическим следствием S. Тогда

$$S \models \square,$$

и это означает, что S также не имеет моделей, т.е. является противоречивой системой.

Остается доказать две леммы.

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма 1.

Если D_0 — резольвента дизъюнктов D_1 и D_2, то $D_1, D_2 \models D_0$

Доказательство леммы 1.

$D_1 = D_1' \vee L_1$, $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$, $\theta \in НОУ(L_1, L_2)$, $D_0 = (D_1' \vee D_2')\theta$

Таким образом, $L_1\theta = L_2\theta = L_0$.

Поэтому мы получаем следующие соотношения

$$\begin{array}{rr} D_1, D_2 \models D_1\theta, & D_1, D_2 \models D_2\theta \\ D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L_1\theta, & D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_2\theta \\ D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee L_0, & D_1, D_2 \models D_2'\theta \vee \neg L_0 \\ D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee L_0, & D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta \vee \neg L_0 \end{array}$$

$$D_1, D_2 \models D_1'\theta \vee D_2'\theta$$

$$D_1, D_2 \models D_0$$

Вот и все. $\square$

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма 2.

Если D_0 — склейка дизъюнкта D, то $D \models D_0$.

Доказательство леммы 2.

Самостоятельно.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Пример.

Рассмотрим формулу φ

$$\forall x \quad \Big(\forall y \exists v \forall u \quad \big((A(u,v) \to B(y,u))\&$$
$$(\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\big) \quad \to \exists y B(x,y)\Big)$$

Задача

Проверить, верно ли, что $\models \varphi$.

Решение

Методом резолюций.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 1. Покажем, что формула $\varphi_1 = \neg\varphi$ противоречивая.

$$\varphi_1 \;=\; \neg\forall x \;\; \Big(\forall y \exists v \forall u \;\; \big((A(u,v) \to B(y,u))\;\&\; (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\big) \;\; \to \exists y B(x,y)\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Исходная формула

$$\neg\forall x \Big(\forall y \exists v \forall u \Big((A(u,v) \to B(y,u)) \,\&\, (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\Big) \to \exists y B(x,y)\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Переименование переменных

$$\neg\forall x \quad \Big(\forall y'\exists v\forall u \quad \Big((A(u,v) \to B(y',u)) \ \& \\ (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\Big) \quad \to \exists y'' B(x,y'')\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Удаление импликаций

$$\neg\forall x \quad \Big(\neg\forall y'\exists v\forall u \quad \Big((\neg A(u,v) \vee B(y',u)) \,\&\, (\neg\neg\exists w A(w,u) \vee \forall z A(z,v))\Big) \quad \vee\ \exists y'' B(x,y'')\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Продвижение отрицаний

$$\exists x \quad \Big(\forall y' \exists v \forall u \quad \big((\neg A(u,v) \vee B(y',u)) \;\&\; (\exists w A(w,u) \vee \forall z A(z,v))\big) \quad \& \; \forall y'' \neg B(x,y'')\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Вынесение кванторов

$$\varphi_2 = \exists x \forall y' \exists v \forall u \exists w \forall z \forall y'' \left(\begin{array}{l} (\neg A(u,v) \vee B(y',u)) \; \& \\ (A(w,u) \vee A(z,v)) \; \& \\ \neg B(x,y'') \end{array} \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 3. Приведем φ_2 к ССФ φ_3.

$$\varphi_3 = \quad \forall y' \quad \forall u \quad \forall z \forall y'' \left(\begin{array}{l} (\neg A(u, f(y')) \vee B(y', u)) \ \& \\ (A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y'))) \ \& \\ \neg B(c, y'') \end{array} \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 4. Формирование системы дизъюнктов S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$, (вариант D_1)
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$, (вариант D_2)
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$, (склейка D_2')
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 &=& \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 &=& A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 &=& \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1)$,
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2))$,
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3))$,
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4)))$, (резольвента D'_1 и D'_3)
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5)$,
6. $D'_6 = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1)$,
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2))$,
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3))$,
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4)))$,
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5)$, (вариант D_3)
6. $D'_6 = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$,
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$,
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$,
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$,
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$,
6. $D_6' = \square$. (резольвента D_4' и D_5')

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Заключение. Успешный резолютивный вывод из S_φ означает, что S_φ — противоречивая система дизъюнктов.

Значит, $\varphi_1 = \neg\varphi$ — невыполнимая формула.

Значит, φ — общезначимая формула,

$$\models \varphi.$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вопрос полноты

А можно ли таким способом проверять общезначимость любых формул?

Этот вопрос может быть уточнен так:

1. Верно ли, что для любой общезначимой формулы φ можно построить успешный резолютивный вывод из соответствующей системы дизъюнктов S_φ?
2. Верно ли, что в том случае, когда формулы φ необщезначима (система дизъюнктов S_φ выполнима), мы сможем каким-то образом обнаружить невозможность построения успешного резолютивного вывода?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 9.