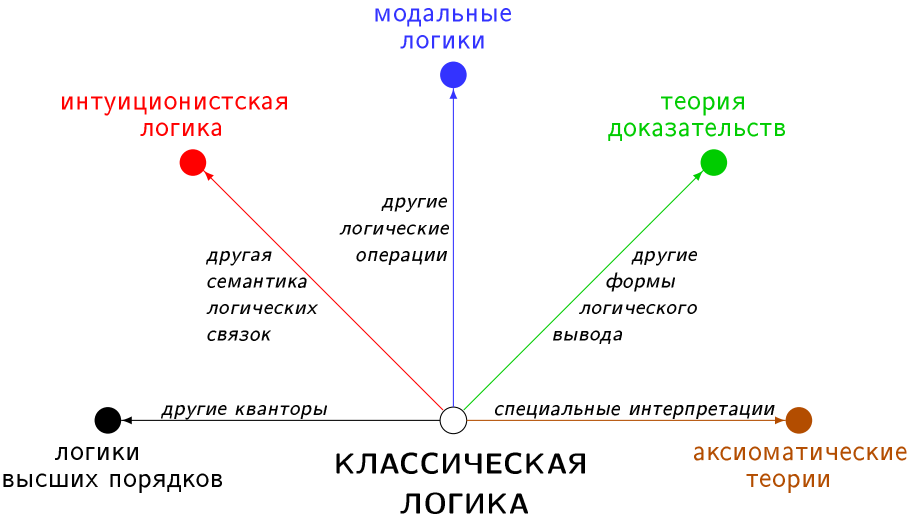
Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 19.

Неклассические логики и их применение в информатике



модальные логики
интуиционистская логика
теория доказательств
другие логические операции
другая семантика логических связок
другие формы логического вывода
другие кванторы
специальные интерпретации
логики высших порядков
КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
аксиоматические теории

Интуиционистская логика

Интуиционизм — это философское течение в математике, возникшее в начале 20 века как критический отклик на неограниченное применение формальных логических методов в математике, приводящее к парадоксам (антиномиям).
По мнению интуиционистов (Брауэр, Вейль, Пуанкаре), парадоксы возникают в связи с тем, что законы логики, справедливые для конечных множеств, безосновательно переносятся на бесконечные множества.

Не все математические утверждения, верные для конечных множеств, остаются справедливыми и для бесконечных множеств. Например, для конечных множеств верен принцип Архимеда «**Часть всегда меньше целого**», а для бесконечных множеств — нет.

Вполне возможно, что не все законы классической (аристотелевой) логики допускают неограниченное и безоговорочное использование в математике.

Интуиционистская логика

Например, рассмотрим одну широко распространенную схему доказательства.

Доказать: Если выполнены условия A, то $\exists x \; P(x)$.

Схема доказательства: Предположим противное, т. е. $\forall x \; \neg P(x)$.
Тогда ...(фа-фа, ля-ля)..., что противоречит условиям A.
Значит, предположение $\forall x \; \neg P(x)$ неверно, и поэтому $\exists x \; P(x)$.
QED

Все хорошо, но где же та x, для которой верно $P(x)$?
Из такого доказательства это значение извлечь невозможно.

Но тогда, по мнению интуиционистов, это не доказательство, а словоблудие.

Чтобы исключить доказательства такого рода, нужно пересмотреть семантику логических связок и кванторов.

Интуиционистская логика

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

Попробуем взглянуть на логические формулы как на утверждения о разрешимости математических задач.

Каждая атомарная формула A будет обозначать некоторую задачу. Истинность A будет означает, что задача имеет решение, и это решение можно предъявить. Ложность A будет означать, что задача решения не имеет.

Логические связки позволяют конструировать из простых задач составные задачи.

Оценим, как (не)разрешимость составных задач зависит от (не)разрешимости простых задач.

Интуиционистская логика

Семантика Колмогорова–Брауэра–Гейтинга

$\varphi \,\&\, \psi$:	Решить обе задачи φ и ψ и предъявить решение;
$\varphi \vee \psi$:	Выбрать одну из двух задач φ и ψ, решить выбранную задачу и предъявить решение;
$\varphi \to \psi$:	Показать, что решение задачи ψ сводится к решению задачи φ, т. е. предъявить способ, который позволяет, располагая решением задачи φ, построить решение задачи ψ;
$\neg \varphi$:	Доказать, что задача φ не имеет решения.

Законами интуиционистской логики считаются только те формулы, которые соответствуют описаниям составных задач, имеющих решение при любых условиях.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Законы интуиционистской логики

- $P \to P$ — каждую задачу можно свести к ней самой;
- $(P \to Q) \& (Q \to R) \to (P \to R)$ — чтобы свести задача R к задаче P достаточно найти задачу Q, к которой можно свести задачу R, и которую, в свою очередь, можно свести к задаче P;
- $P \to \neg\neg P$ — чтобы убедиться в том, что не существует доказательства неразрешимости задачи P, достаточно найти решение задачи P;
- $(\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \& Q)$ — чтобы показать, что обе задачи P и Q нельзя решить одновременно, достаточно выбрать одну из этих задач и показать, что она неразрешима.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Формулы, не являющиеся законами интуиционистской логики

- $\neg\neg P \to P$ — если вы можете обосновать, что нельзя построить доказательства неразрешимости задачи P, то этого еще недостаточно, чтобы получить решение самой задачи P;
- $P \vee \neg P$ — неправда, что для любой задачи можно либо получить решение, либо доказать, что никакого решения не существует;
- $\neg(P\&Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ — если можно доказать, что обе задачи P и Q нельзя решить одновременно, то это не дает основания считать, что хотя бы одна из них является неразрешимой.

Да как же это так?
Уж не скрывается ли здесь простая игра слов?

Интуиционистская логика

Попробуем строго определить семантику утверждений, касающихся разрешимости задач.
Истинность формул оценивается в интерпретациях. Поскольку задачи решают люди, в качестве интерпретаций могут выступать способности людей решать задачи.
Но эти способности у людей со временем изменяются. Значит, интерпретации должны быть динамическими .
Рассмотрим модель идеального математика (**Dutch Mathematician**), который

- может пребывать в разных состояниях знания и переходить из одних состояний знания в другие;
- в каждом состоянии знания он точно знает, какие из элементарных задач он умеет решать, а какие нет;
- не утрачивает навыков в решении задач при переходе из одного состояния знания в другое.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Определение (модель Крипке)

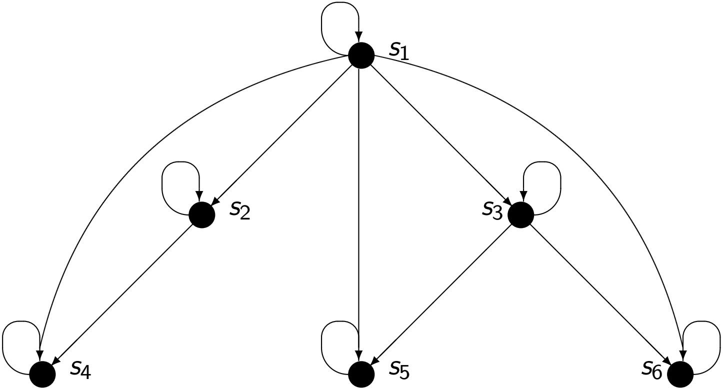
Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ — множество атомарных формул (названия задач).

Интуиционистская интерпретация — это реляционная система $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi\rangle$, в которой

1. $S \neq \emptyset$ — множество состояний (состояний знания);
2. $\mathbf{R} \subseteq S \times S$ — отношение переходов на S, которое является отношением нестрогого частичного порядка:
   рефлексивное $R(s, s)$;
   транзитивное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_3) \Rightarrow R(s_1, s_3)$;
   антисимметричное $R(s_1, s_2) \& R(s_2, s_1) \Rightarrow s_1 = s_2$;
3. $\xi \ : \ S \times \mathcal{P} \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ — оценка атомарных формул, удовлетворяющая условию монотонности:
   $R(s_1, s_2) \ \& \ \xi(P, s_1) = \mathbf{true} \ \Rightarrow \ \xi(P, s_2) = \mathbf{true}$.

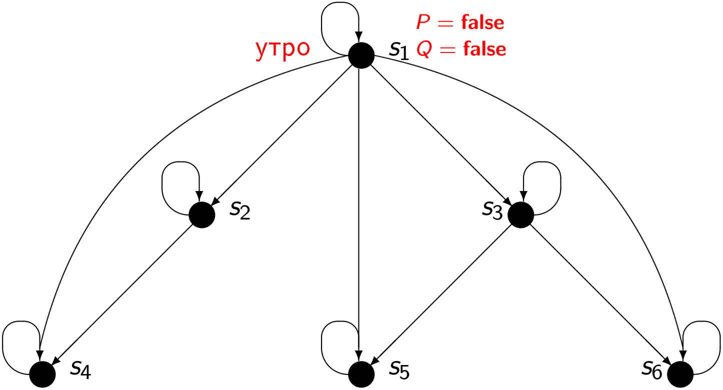
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



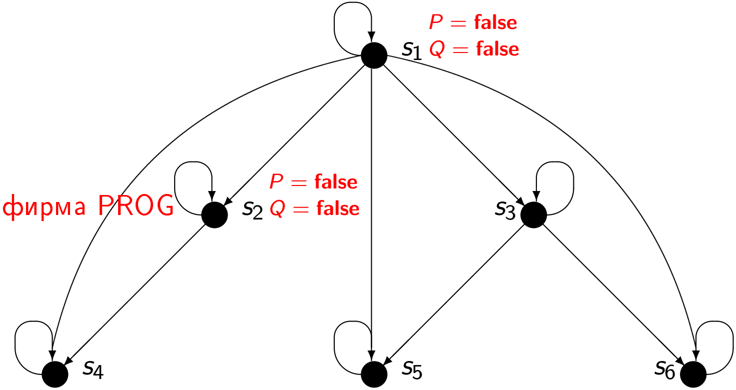
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



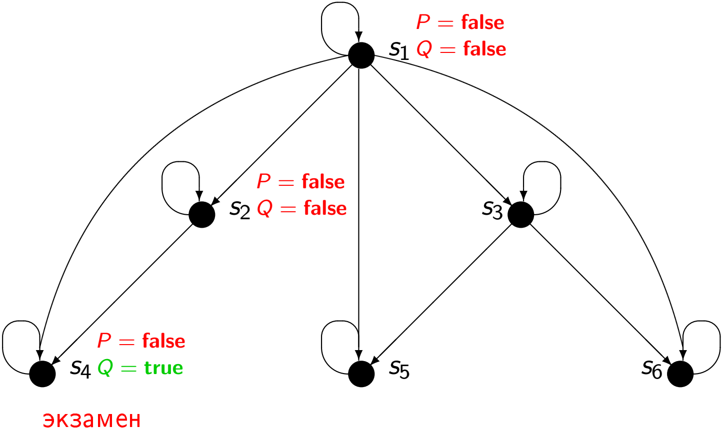
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



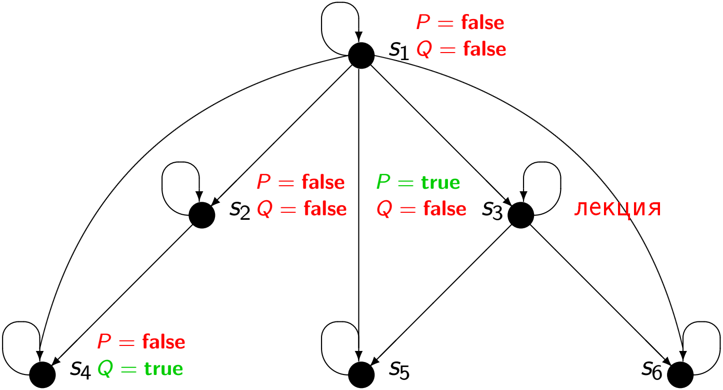
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



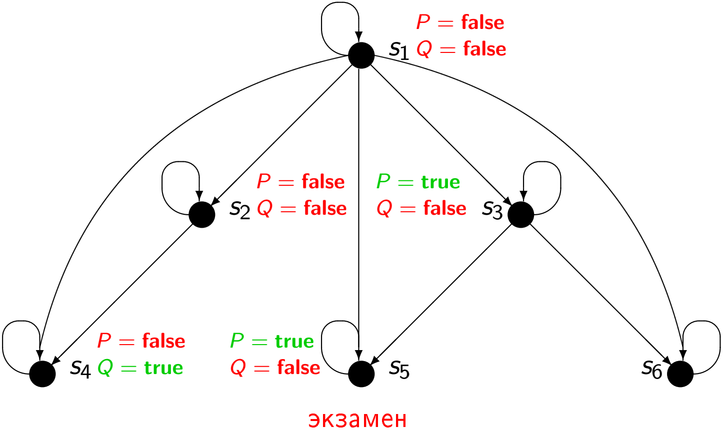
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



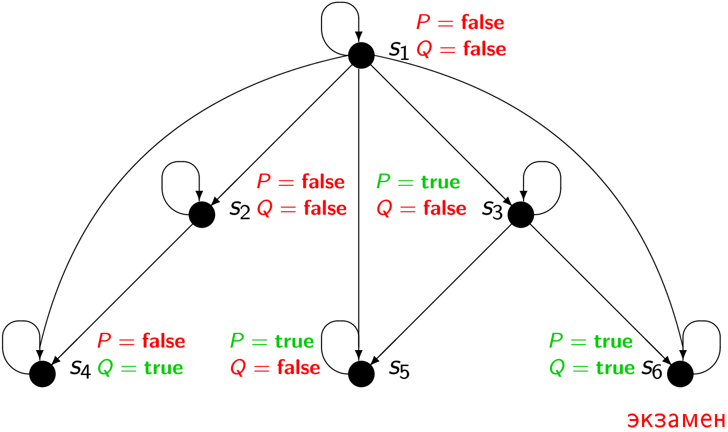
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



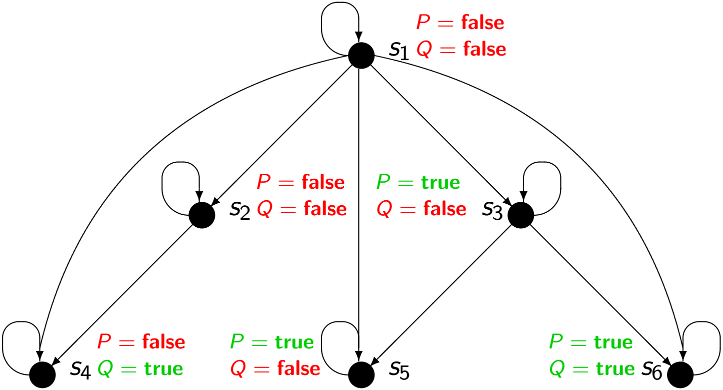
ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример интуиционистской интерпретации



ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Определение (семантика Крипке)

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — интуиционистская интерпретация. Тогда отношение выполнимости $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$ формулы φ в состоянии s интерпретации I определяется так:

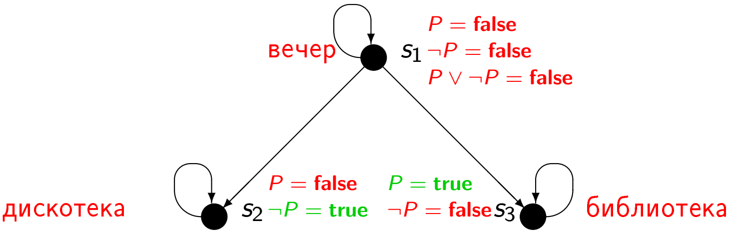
1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi \iff \xi(s, P) = \textbf{true}$;
2. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ и $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
3. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$ или $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
4. $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi_1 \to \varphi_2 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$ и $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_1$, то $I, s' \models_{\mathcal{I}} \varphi_2$;
5. $I, s \models_{\mathcal{I}} \neg\varphi_1 \iff$ для любого состояния s', если $(s, s') \in \mathbf{R}$, то $I, s' \not\models_{\mathcal{I}} \varphi_1$.

Формула φ называется интуиционистски общезначимой (законом интуиционистской логики), если для любой интерпретации I и для любого состояния s верно $I, s \models_{\mathcal{I}} \varphi$.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Пример необщезначимой формулы

$$\not\models_{\mathcal{I}} P \vee \neg P$$



Интуиционистская логика

Другие необщезначимые формулы

Докажите самостоятельно, выбрав подходящую интерпретацию (контрмодель) I,

$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg\neg P \to P$$

$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg(P \& Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$$

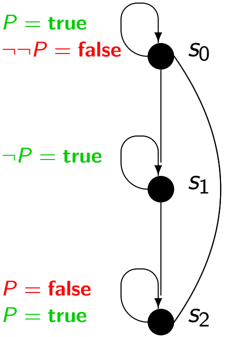
$$\not\models_{\mathcal{I}} \neg(P \vee Q) \to (\neg P \& \neg Q)$$

Интуиционистская логика

Пример общезначимой формулы

$$\models_{\mathcal{I}} P \to \neg\neg P$$

От противного. Допустим, что $I, s_0 \not\models P \to \neg\neg P$. Тогда



Полученное противоречие свидетельствует о невозможности построения контрмодели для формулы $P \to \neg\neg P$.

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Другие общезначимые формулы

Докажите самостоятельно интуиционистскую общезначимость следующих формул

$$\models_{\mathcal{I}} \neg\neg\neg P \to \neg P$$

$$\models_{\mathcal{I}} (\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \& Q)$$

$$\models_{\mathcal{I}} \neg P \vee \neg\neg P$$

Интуиционистская логика

Некоторые особенности интуиционистской логики

Теорема 1

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \implies \models_{\mathcal{C}} \varphi$

Теорема 2 (дизъюнктивное свойство)

$\models_{\mathcal{I}} \varphi \vee \psi \iff \models_{\mathcal{I}} \varphi$ **или** $\models_{\mathcal{I}} \psi$

Теорема 3 (экзистенциальное свойство)

$$\models_{\mathcal{I}} \forall x_1 \ldots \forall x_1 \exists y \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$$
$$\iff$$
существует такой терм $t(x_1, \ldots, x_n)$, что
$$\models_{\mathcal{I}} \varphi(x_1, \ldots, x_n, t(x_1, \ldots, x_n))$$

$t(x_1, \ldots, x_n)$ — это программа решения задачи φ.

Модальные логики

Зимой идет снег

Зимой всегда идет снег

Зимой иногда идет снег

Это разные высказывания. И поэтому они должны быть записаны разными формулами.

Эти высказывания по смыслу связаны друг с другом. И это должно быть отражено в формулах. Поскольку высказывания отличаются лишь словами **всегда**, **иногда** (модальности времени), нужно ввести какие-то логические конструкции для выражения этих модальностей.

Может быть для этой цели пригодны кванторы?

Модальные логики

Студенты посещают лекции

Студенты обязаны посещать лекции

Студенты имеют право посещать лекции

обязан, **имею право** — деонтические модальности .

А будут ли пригодны кванторы в этом случае для выражения модальностей?

Модальные логики

Задача имеет решение

Известно, что задача имеет решение

Можно допустить, что задача имеет решение

знаю, **предполагаю** — эпистемические модальности.

А как быть здесь?

Модальные логики

Модальности (в естественном языке они, как правило, представлены наречиями или служебными глаголами) выражают различные оттенки истинности (уверенность, необходимость, доказуемость, осведомленность и др.).

Эти оттенки можно классифицировать:

Модальности необходимого	Модальности возможного
необходимо	возможно
обязательно	не исключено
всегда	иногда
должен	имею право
знаю	предполагаю
доказуемо	непротиворечиво

Модальные логики

Модальности (в естественном языке они, как правило, представлены наречиями или служебными глаголами) выражают различные оттенки истинности (уверенность, необходимость, доказуемость, осведомленность и др.).

Эти оттенки можно классифицировать:

Модальности необходимого	Модальности возможного
необходимо	возможно
обязательно	не исключено
всегда	иногда
должен	имею право
знаю	предполагаю
доказуемо	непротиворечиво

Модальные логики

Модальности (в естественном языке они, как правило, представлены наречиями или служебными глаголами) выражают различные оттенки истинности (уверенность, необходимость, доказуемость, осведомленность и др.).

Эти оттенки можно классифицировать:

Модальности необходимого	Модальности возможного
необходимо	возможно
обязательно	не исключено
всегда	иногда
должен	имею право
знаю	предполагаю
доказуемо	непротиворечиво
$\Box$	$\Diamond$

Модальные логики

Синтаксис модальных формул

Расширим синтаксис классической логики предикатов, введя два логических оператора

$\Box$ (модальность необходимого) и

$\Diamond$ (модальность возможного),

при помощи которых разрешается строить формулы следующего вида:

$(\Box\varphi)$ «необходимо φ»,

$(\Diamond\varphi)$ «возможно φ».

Во избежание большого количества скобок, будем считать, что модальные операторы имеют такой же приоритет, что и кванторы.

Модальные логики

Семантика модальных формул многообразна и непроста. Рассмотрим

Пример

Верно ли, что формула $\Box\varphi \to \varphi$ — это закон модальной логики?

Если $\Box$ — модальность времени, «всегда», то $\Box\varphi \to \varphi$ — это закон модальной логики.

Если студенты всегда ходят на лекции, то они ходят на лекции.

А вот если $\Box$ — деонтическая модальность, «должны», то формула $\Box\varphi \to \varphi$ уже не может претендовать на статус логического закона.

Если студенты должны ходить на лекции, то они ходят на лекции.

Это неправда, а законы логики не зависят от прихоти студентов.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Семантика Крипке модальных формул

Определим самое общее отношение выполнимости для модальных формул.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n, \dots\}$ — множество атомарных формул (элементарные высказывания).

Модальная интерпретация или модель Крипке — это реляционная система $I = \langle W, \mathbf{R}, \xi \rangle$, в которой

1. $W \neq \emptyset$ — множество состояний (возможные миры);
2. $\mathbf{R} \subseteq W \times W$ — отношение достижимости на W,
3. $\xi : W \times \mathcal{P} \to \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\}$ — оценка атомарных формул.

Система $\langle W, \mathbf{R} \rangle$ называется шкалой Крипке (frame).

Если $(w, w') \in \mathbf{R}$, то возможный мир w' называется альтернативным миром для w.

МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Отношение выполнимости для модальных формул

Пусть $I = \langle W, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — модель Крипке. Тогда отношение выполнимости $I, w \models \varphi$ формулы φ в мире w модели I определяется так:

1. если $\varphi = P \in \mathcal{P}$, то $I, w \models \varphi \iff \xi(w, P) = \mathbf{true}$;
2. $I, w \models \varphi_1 \& \varphi_2 \iff I, w \models \varphi_1$ и $I, w \models \varphi_2$;
3. $I, w \models \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff I, w \models \varphi_1$ или $I, w \models \varphi_2$;
4. $I, w \models \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ $I, w \not\models \varphi_1$ или $I, w \models \varphi_2$;
5. $I, w \models \neg\varphi_1 \iff I, w \not\models \varphi_1$;
6. $I, w \models \Box\varphi \iff$

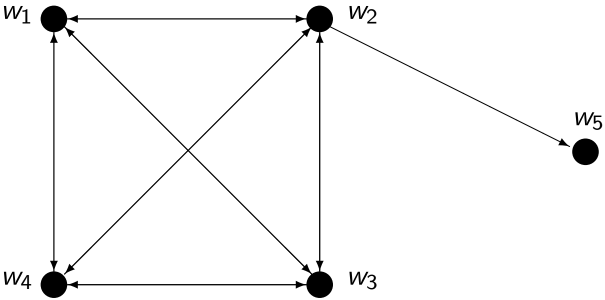
   для любого альтернативного мира w'
   если $\langle w, w' \rangle \in \mathbf{R}$, то $I, w' \models \varphi$;
7. $I, w \models \Diamond\varphi \iff$

   существует такой альтернативный мир w',
   что $\langle w, w' \rangle \in \mathbf{R}$ и $I, w' \models \varphi$.

Модальные логики

Пример

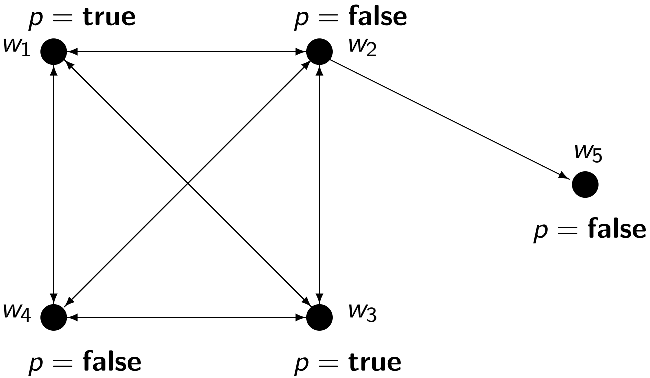
Шкала Крипке



Модальные логики

Пример

Модель Крипке

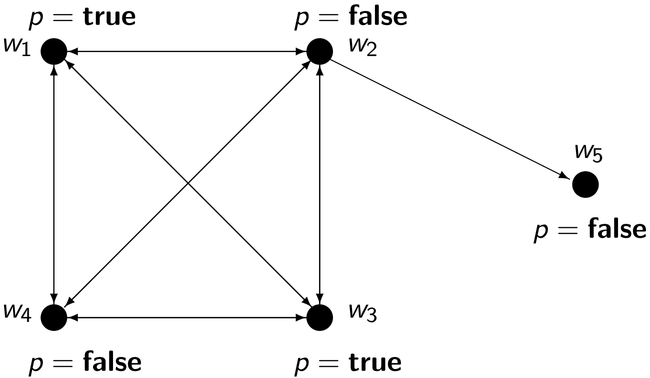


МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Пример

Выполнимость

$I, w_1 \models \Diamond p$



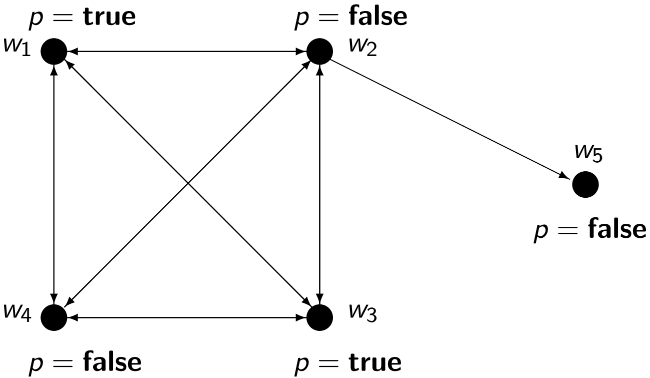
Модальные логики

Пример

Выполнимость

$I, w_1 \models \Diamond p$

$I, w_1 \not\models \Box p$



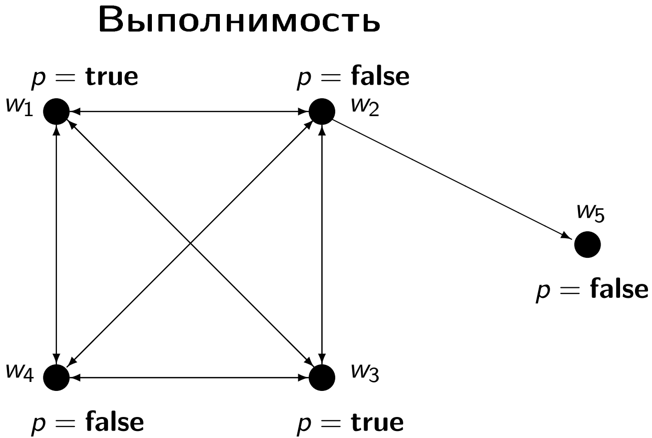
Модальные логики

Пример

$I, w_1 \models \Diamond p$

$I, w_1 \not\models \Box p$

$I, w_1 \models \Box\Diamond p$



Модальные логики

Пример

Выполнимость

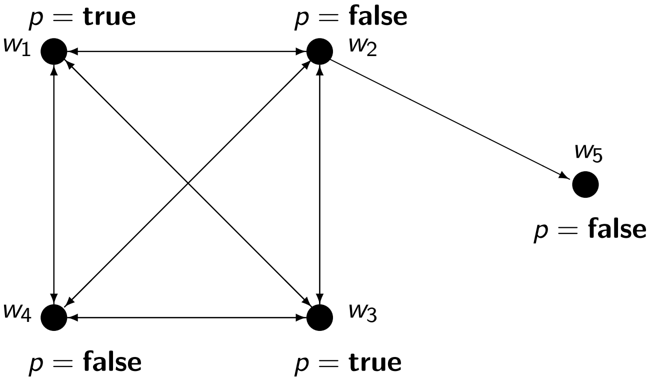
$I, w_1 \models \Diamond p$

$I, w_1 \not\models \Box p$

$I, w_1 \models \Box\Diamond p$

$I, w_5 \models \Box p$

$I, w_5 \not\models \Diamond p$



Модальные логики

Простейшие свойства

1. $\models \Diamond\varphi \equiv \neg\Box\neg\varphi$;
2. $\models \Box(\varphi_1 \to \varphi_2) \;\to\; (\Box\varphi_1 \to \Box\varphi_2)$;
3. $\models \varphi \implies \models \Box\varphi$ (правило необходимости).

В разных приложениях модальность необходимого может пониматься по разному. Отсюда большое разнообразие модальных логик. И поэтому в разных модальных логиках отношение выполнимости определяется на разных классах шкал. Каждая разновидность шкал (отношения достижимости **R**) характеризуется определенным законом (формулой) модальной логики.

Модальные логики

Характеристические формулы

1. $\Box\varphi \to \varphi$ рефлексивные шкалы
   $\forall w \mathbf{R}(w, w)$;

2. $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ транзитивные шкалы
   $\forall w_1 \forall w_2 \forall w_3 (\mathbf{R}(w_1, w_2) \& \mathbf{R}(w_2, w_3) \to \mathbf{R}(w_1, w_3))$;

3. $\Diamond\Box\varphi \to \varphi$ симметричные шкалы
   $\forall w_1 \forall w_2 (\mathbf{R}(w_1, w_2) \to \mathbf{R}(w_2, w_1))$.

Утверждение

Шкала $F = (W, R)$ транзитивна тогда и только тогда, когда для любой оценки ξ и для любого альтернативного мира w верно соотношение

$$(W, R, \xi), w \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi \ .$$

Модальные логики

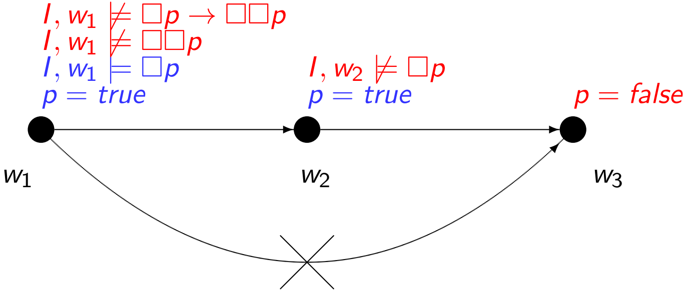
Доказательство:

($\Rightarrow$) Допустим, что шкала $F = \langle W, R \rangle$ нетранзитивна.

Модальные логики

Доказательство:

($\Rightarrow$) Допустим, что шкала $F = \langle W, R \rangle$ нетранзитивна. Тогда рассмотрим вот такую оценку ξ на ней.



Модальные логики

Доказательство:

($\Leftarrow$) Допустим, что шкала $F = \langle W, R \rangle$ транзитивна и $(W, R, \xi), w_1 \models \Box\varphi$.

Модальные логики

Доказательство:

($\Leftarrow$) Допустим, что шкала $F = \langle W, R \rangle$ транзитивна и $(W, R, \xi), w_1 \models \Box\varphi$.

Если в шкале не существует такой пары миров w_2, w_3, для которой верно $R(w_1, w_2)$ и $R(w_2, w_3)$, то $(W, R, \xi), w_1 \models \Box\Box\varphi$ и, следовательно, $(W, R, \xi), w \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

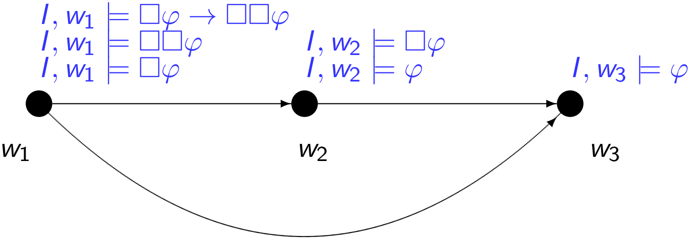
МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Доказательство:

($\Leftarrow$) Допустим, что шкала $F = \langle W, R \rangle$ транзитивна и $(W, R, \xi), w_1 \models \Box\varphi$.

Если в шкале не существует такой пары миров w_2, w_3, для которой верно $R(w_1, w_2)$ и $R(w_2, w_3)$, то $(W, R, \xi), w_1 \models \Box\Box\varphi$ и, следовательно, $(W, R, \xi), w \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

Предположим, что такая пара миров есть



Модальные логики

Доказательство:

Значит, формула $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ истинна при любой оценке в любом мире шкалы F (т. е. является логическим законом шкалы F) тогда и только тогда, когда шкала F транзитивна.

Модальные логики

Характеристические формулы

4. $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$

строгий частичный порядок без бесконечно возрастающих последовательностей

невыразим формулами логики предикатов;

5. иррефлексивные шкалы

$\forall x \neg R(x, x)$;

нельзя охарактеризовать модальными формулами.

Рассмотрим модальные логики, активно используемые в информатике.

Модальные логики

Эпистемические логики и мультиагентные системы

Эпистемические логики — это разновидности модальных логик, изучающие модальности знания и мнения (веры) идеализированных агентов. Интерес представляют вопросы о том, какими знаниям располагает субъект, насколько он осознает свои знания (и незнания), и какие причинно-следственные связи возникают между утверждениями, касающимися вопросов знания и веры.

В эпистемической логике модальный оператор $\Box\varphi$ следует прочитывать «Я знаю, что φ», а $\Diamond\varphi$ — «Я допускаю, что φ».

Модальные логики

Эпистемические логики и мультиагентные системы

Основные законы (аксиомы) эпистемической логики:

1. Аксиома адекватности знания: $\Box\varphi \to \varphi$
   «Мои знания верны».
2. Аксиома позитивной интроспекции: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
   «Я вполне представляю все, что мне известно».
3. Аксиома негативной интроспекции: $\Diamond\Box\varphi \to \varphi$
   «Я вполне сознаю, что именно мне неизвестно».

Используется при решении задач, когда коллектив субъектов (мультиагентная система) пытается совместными усилиями или в конкурентной борьбе достичь какой-то цели. В таком случае каждый агент должен принимать в расчет не только знания о предметной области, но и представления о том, какими знаниями располагают другие агенты.

Модальные логики

Задача.

Три мудреца спорили о том, кто из них мудрее. Прохожий взялся разрешить их спор. Он сказал: «У меня в мешке пять шапок: 3 черных и 2 белых. Я завяжу вам глаза, надену каждому на голову одну из шапок, а потом развяжу глаза. Тот из вас, кто первым догадается, какого цвета шапка у него на голове, будет признан мудрейшим». Мудрецы согласились, и прохожий исполнил все то, о чем он говорил. После того, как с глаз мудрецов были сняты повязки, некоторое время никто не произнес ни слова. И после этого один из мудрецов заявил: «На моей голове черная шапка». Он оказался прав, и был признан мудрейшим.

Вопрос: Докажите, что мудрейший из мудрых слеп.

Модальные логики

Задача 2.

Несколько смышленных, но неаккуратных детей ели на солнечной веранде клубничное варенье. Некоторые из них испачкали свои щеки в варенье. На веранду зашел отец, заметил испачкавшихся в варенье детей, и сказал: «Те из вас, у кого щеки испачканы в варенье, должны немедленно пойти умыться».

Вопрос: Сколько раз должен повторить отец свое указание, для того чтобы все чумазые дети встали, и пошли умываться?

Модальные логики

Эпистемические логики и мультиагентные системы

В мультиагентных системах нужно ввести более специальные модальные операторы.

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ — множество агентов. Тогда

$\Box_a \varphi$ означает «Агент a знает, что φ верно».

$\Box_C \varphi$ означает «Все агенты знают, что φ верно».

Специальные разновидности эпистемических логик применяются для описания и проверки требований безопасности сетевых протоколов.

Модальные логики

Пример

Хороший футболист — это футболист, передающий мяч партнеру вовремя.

P : футболист А передает мяч футболисту Б.

При каких условиях?

$\Box_A P$: футболист А делает это сознательно.

$\Box_B P$: футболист Б знает, что это произойдет.

$\Box_A \Box_B P$: футболист А знает, что Б готов к пасу.

$\Box_B \Box_A \Box_B P$: футболист Б знает, что А в нем уверен.

Формула взаимопонимания партнеров:

$$P \ \rightarrow \ (\Box_A P \ \& \ \Box_B P \ \& \ \Box_A \Box_B P \ \& \ \Box_B \Box_A \Box_B P)$$

Модальные логики

Темпоральные логики

Темпоральные (временные) логики применяются для описания и исследования причинно-следственных зависимостей, развивающихся во времени.
Модальный оператор $\Box$ означает «всегда»,
а оператор $\Diamond$ — «когда-нибудь».

Семантика темпоральных логик существенно зависит от той математической модели, которая используется для описания феномена времени. В самом общем случае в качестве модели времени можно взять любое частично упорядоченное множество. Элементы этого множества соответствуют различным моментам времени.

В качестве темпоральных моделей могут выступать любые модели Крипке, построенные на основе частично упорядоченных шкал. Разные отношения частичного порядка порождают разные темпоральные логики.

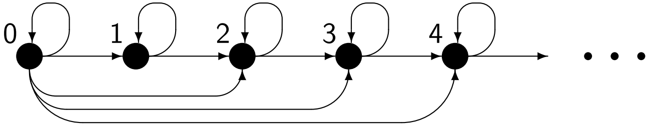
Модальные логики

Темпоральные логики

Поскольку вычисление — это процесс, развивающийся во времени, состояния которого находятся в причинно-следственной связи друг с другом, темпоральные логики используются для спецификации и верификации программ. Наиболее широкое распространение получили две разновидности темпоральных логик.

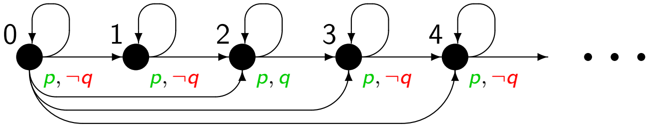
Логика линейного времени LTL

Шкала Крипке для LTL (Linear Temporal Logics) — это натуральный ряд с естественным отношением порядка $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.



Модальные логики

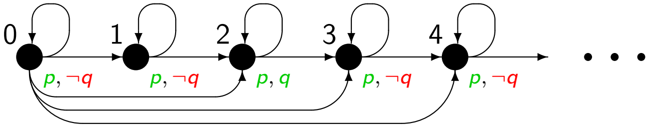
Логика линейного времени LTL



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика линейного времени LTL

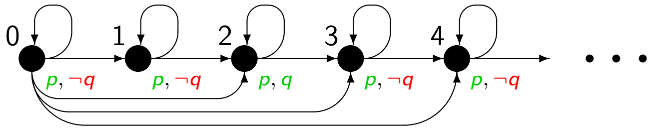
$I, 0 \models \Box p, \qquad I, 0 \not\models \Box q, \qquad I, 0 \models \Diamond q$



МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ

Логика линейного времени LTL

$I, 0 \models \Box p, \qquad I, 0 \not\models \Box q, \qquad I, 0 \models \Diamond q$

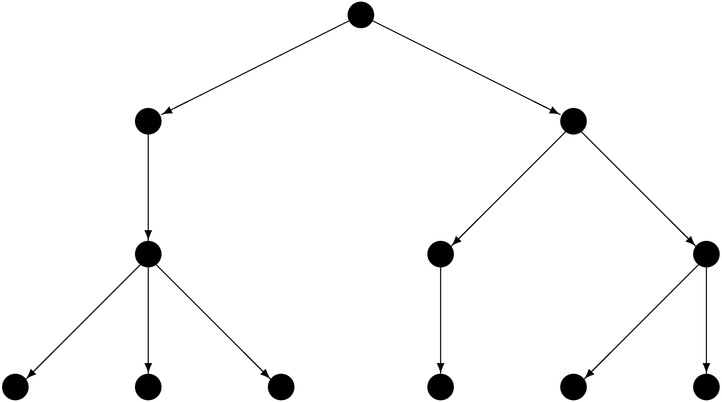


Применение LTL для верификации моделей программ более подробно будет обсуждаться в последующих лекциях.

Модальные логики

Темпоральные логики

В других темпоральных логиках время — это ветвящаяся структура; в каждый момент времени может быть несколько альтернатив дальнейшего развития событий.



Модальные логики

Логика деревьев вычислений CTL

Темпоральные логики такого вида называются логиками ветвящегося времени (BTL, Branching Time Logics).

Одной из логик ветвящегося времени является логика деревьев вычислений (CTL, Computational Tree Logic), используемая для спецификации и верификации распределенных программ и микроэлектронных схем.

В логике CTL имеются темпоральные операторы двух типов — универсальные и экзистенциальные.

$$\forall\Box, \quad \forall\Diamond, \qquad\qquad \exists\Box, \quad \exists\Diamond.$$

Тип темпорального оператора указывет на то, будет ли выполнимость формулы проверяться на всех ветвях древесной модели или только на одной ветви.

Модальные логики

Логика деревьев вычислений CTL

Пусть $I = \langle S, \mathbf{R}, \xi \rangle$ — древесная модель Крипке для логики CTL, $s_0 \in S$ — одно из состояний модели. Тогда

$I, s_0 \models \forall\Box\varphi \iff$
в каждом состоянии s, достижимом из состояния s_0, верно $I, s \models \varphi$;

$I, s_0 \models \exists\Box\varphi \iff$
существует ветвь, исходящая из состояния s_0, в каждом состоянии s которой верно $I, s \models \varphi$;

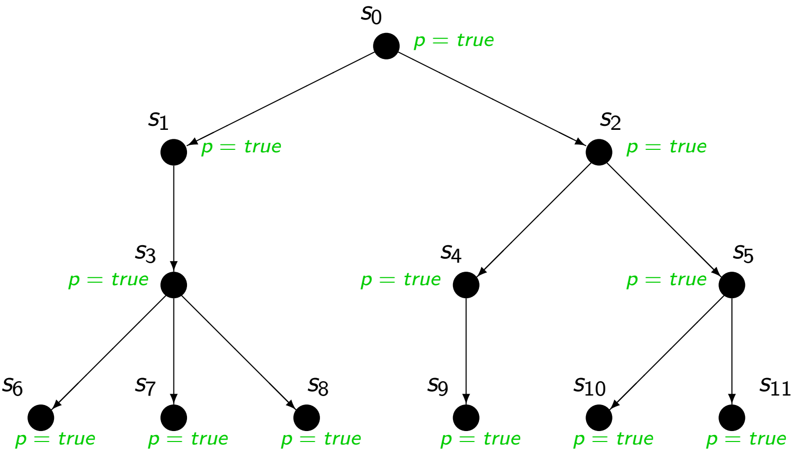
$I, s_0 \models \forall\Diamond\varphi \iff$
в каждой ветви, исходящей из состояния s_0, есть состояние s, в котором верно $I, s \models \varphi$;

$I, s_0 \models \exists\Diamond\varphi \iff$
существует ветвь, исходящая из состояния s_0, в одном из состояний s которой верно $I, s \models \varphi$.

Модальные логики

Логика деревьев вычислений CTL

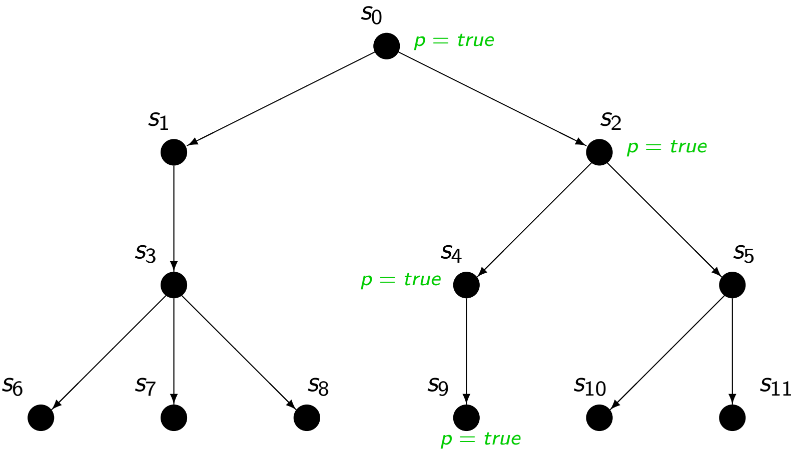
$$I, s_0 \models \forall\Box p$$



Модальные логики

Логика деревьев вычислений CTL

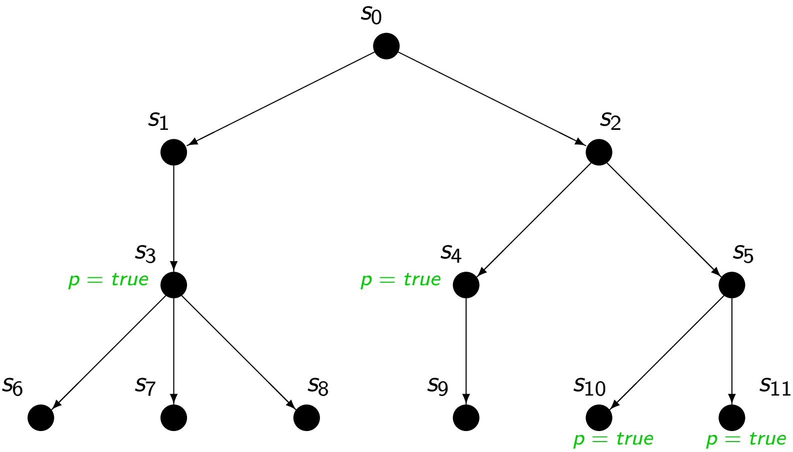
$$I, s_0 \models \exists\Box p$$



Модальные логики

Логика деревьев вычислений CTL

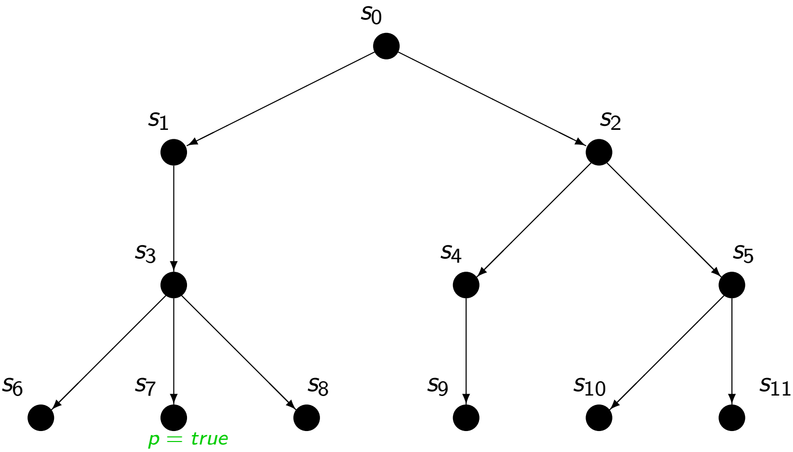
$$I, s_0 \models \forall\Diamond p$$



Модальные логики

Логика деревьев вычислений CTL

$$I, s_0 \models \exists\Diamond p$$



Модальные логики

Логика деревьев вычислений CTL

Формулы CTL можно использовать для формальной спецификации многих интересных свойств поведения программ

$\forall\Box\ \exists\Diamond\ \mathit{Restart}$:
на любом этапе функционирования системы можно осуществить ее перезапуск;

$\forall\Box\ (\mathit{Request} \ \rightarrow\ \forall\Diamond\ \mathit{Response})$:
когда бы ни был послан запрос, рано или поздно на него обязательно поступит отклик.

А как проверить,
что вычисления программ
удовлетворяют заданным спецификациям?

И можно ли эту проверку
автоматизировать?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 19.