Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

zakh@cs.msu.su

http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html

Лекция 6.

Общая схема метода резолюций.
Равносильные формулы.
Теорема о равносильной замене.
Предваренная нормальная форма.
Сколемовская стандартная форма.
Системы дизъюнктов.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi\,?$$

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости.

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi_0 = \neg\varphi$$

φ общезначима $\iff$ φ_0 противоречива.

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ).

$$\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 = Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n\,(D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

φ_0 равносильна φ_1, т. е. $I \models \varphi_0 \;\Leftrightarrow\; I \models \varphi_1$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ).

$$\varphi_1 \rightsquigarrow \varphi_2 = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_k} \, (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

φ_1 противоречива $\iff$ φ_2 противоречива.

Этап 4. Построение системы дизъюнктов.

$$\varphi_2 \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1, \; D_2, \; \dots, D_N\},$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \dots \vee L_{im_i}$.

φ_2 противоречива $\iff$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 5. Резолютивный вывод тождественно ложного (противоречивого) дизъюнкта $\square$ из системы S_φ.

Правило резолюции Res : $\dfrac{D_1 = D_1' \vee L,\ D_2 = D_2' \vee \neg L}{D_0 = D_1' \vee D_2'}$.

Дизъюнкт D_0 называется резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2.

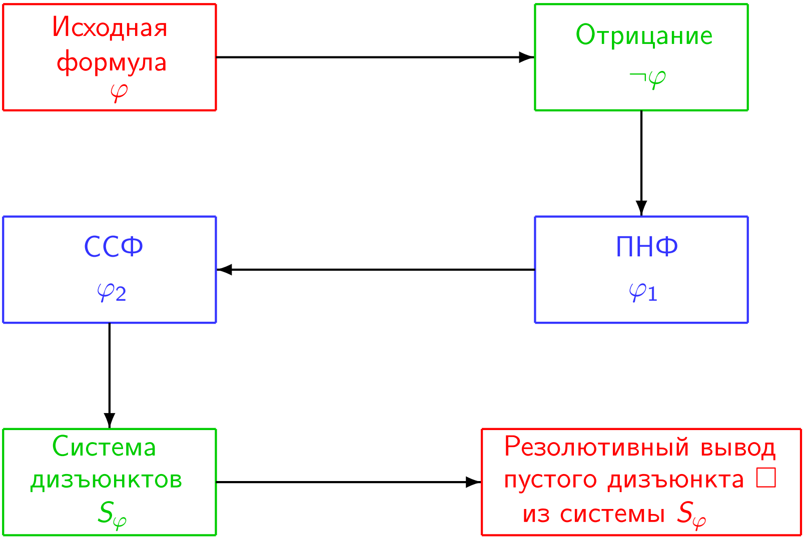
Резольвенты строят, пока не будет получен пустой дизъюнкт $\square$. Это возможно в случае $D_1 = L,\ D_2 = \neg L$:

$$\frac{D_1 = L,\ D_2 = \neg L}{D_0 = \square}$$

Система дизъюнктов S_φ противоречива $\Leftrightarrow$ из S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ИТОГ. Формула φ общезначима $\Leftrightarrow$ из системы дизъюнктов S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Введем вспомогательную логическую связку эквиваленции $\equiv$. Выражение $\varphi \equiv \psi$ — это сокращенная запись формулы $(\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$.

Определение

Формулы φ и ψ будем называть равносильными , если формула $\varphi \equiv \psi$ общезначима, т. е. $\models (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$.

Утверждение.

1. Отношение равносильности — это отношение эквивалентности.
2. Если формула φ общезначима (выполнима) и равносильна ψ, то формула ψ также общезначима (выполнима), т. е.

$$\models \varphi \text{ и } \models \varphi \equiv \psi \implies \models \psi$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры равносильных формул

1. Удаление импликации. $\models\ \varphi \to \psi \ \equiv\ \neg\varphi \vee \psi$,
2. Переименование переменных.
   $\models\ \substack{\forall \\ \exists}\, x\ \varphi(x)\ \equiv\ \substack{\forall \\ \exists}\, y\ \varphi(y)$,
   здесь формула $\varphi(x)$ не содержит свободных вхождений переменной y, а формула $\varphi(y)$ не содержит свободных вхождений переменной x.
3. Продвижение отрицания.
   $\models\ \neg\neg\varphi\ \equiv\ \varphi$,
   $\models\ \neg(\varphi \substack{\& \\ \vee} \psi)\ \equiv\ \neg\varphi \substack{\vee \\ \&} \neg\psi$,
   $\models\ \neg \substack{\forall \\ \exists} x\varphi\ \equiv\ \substack{\exists \\ \forall}\, x\neg\varphi$,

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры равносильных формул

4. Вынесение кванторов.
$\models \ \overset{\forall}{\underset{\exists}{}} x\varphi(x) \& \psi \ \equiv \ \overset{\forall}{\underset{\exists}{}} x(\varphi(x) \& \psi)$,
$\models \ \overset{\forall}{\underset{\exists}{}} x\varphi(x) \vee \psi \ \equiv \ \overset{\forall}{\underset{\exists}{}} x(\varphi(x) \vee \psi)$,
здесь формула ψ не содержит свободных вхождений переменной x,
5. Законы булевой алгебры.
$\models \ \varphi \overset{\&}{\vee} \psi \ \equiv \ \psi \overset{\&}{\vee} \varphi$,
$\models \ \varphi \overset{\&}{\vee} (\psi \overset{\&}{\vee} \chi) \ \equiv \ (\varphi \overset{\&}{\vee} \psi) \overset{\&}{\vee} \chi$,
$\models \ \varphi \& (\psi \vee \chi) \ \equiv \ (\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \chi)$,
$\models \ \varphi \vee (\psi \& \chi) \ \equiv \ (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \chi)$,
$\models \ \varphi \overset{\&}{\vee} \varphi \ \equiv \ \varphi$,

Доказать равносильность методом семантических таблиц.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Запись $\varphi[\psi]$ означает, что формула φ содержит подформулу ψ. Запись $\varphi[\psi/\chi]$ обозначает формулу, которая образуется из формулы φ заменой некоторых (не обязательно всех) вхождений подформулы ψ на формулу χ.

Теорема

$$\models \psi \equiv \chi \quad \Longrightarrow \quad \models \varphi[\psi] \equiv \varphi[\psi/\chi]$$

Доказательство

Индукцией по числу связок и кванторов в формуле φ

Базис. $\varphi[\psi] = \psi$. Очевидно.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Индуктивный переход. $\varphi[\psi] = \forall x \varphi_1[\psi](x)$.

По индуктивному предположению, если $\models \psi \equiv \chi$, то в любой интерпертации I и для любого элемента $d \in D_I$ верно

$$I \models \varphi_1[\psi](d) \to \varphi_1[\psi/\chi](d)$$
$$I \models \varphi_1[\psi/\chi](d) \to \varphi_1[\psi](d)$$

Значит,

$$I \models \forall x(\varphi_1[\psi](x) \to \varphi_1[\psi/\chi](x))$$
$$I \models \forall x(\varphi_1[\psi/\chi](x) \to \varphi_1[\psi](x))$$

Как следует из примера $\models \forall x(A \to B) \to (\forall x A \to \forall x B)$ (см. Лекция 3),

$$I \models \forall x \varphi_1[\psi](x) \to \forall x \varphi_1[\psi/\chi](x))$$
$$I \models \forall x \varphi_1[\psi/\chi](x) \to \forall x \varphi_1[\psi](x))$$

(Остальные случаи формулы φ — самостоятельно.)

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x) \ \equiv \ \neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

Поскольку $\models \ \varphi \to \psi \ \equiv \ \neg\varphi \vee \psi$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x) \ \equiv \ \neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \ \neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x) \ \equiv \ \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

Поскольку $\models \neg\forall x\varphi \ \equiv \ \exists x\neg\varphi$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x) \ \equiv \ \neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \ \neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x) \ \equiv \ \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \ \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \ \equiv \ \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

Поскольку $\models \exists x \ \varphi(x) \ \equiv \ \exists y \ \varphi(y)$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x) \ \equiv \ \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \ \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \ \equiv \ \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \ \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \ \equiv \ \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\models \ \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y) \ \equiv \ \exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$$

Поскольку $\models \ \exists x \varphi(x) \vee \psi \ \equiv \ \exists x (\varphi(x) \vee \psi)$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\models \ \forall x P(x) \to \exists x P(x) \ \equiv \ \neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \ \neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x) \ \equiv \ \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \ \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \ \equiv \ \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\models \ \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y) \ \equiv \ \exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$$

Таким образом, вопрос об общезначимости $\forall x P(x) \to \exists x P(x)$ сводится к вопросу об общезначимости $\exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Определение

Замкнутая формула φ называется предваренной нормальной формой (ПНФ) , если

$$\varphi \;=\; Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n \; M(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где

- $Q_1x_1 \; Q_2x_2 \; \dots \; Q_nx_n$ — кванторная приставка , состоящая из кванторов $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$,
- $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — матрица — бескванторная конъюнктивная нормальная форма (КНФ), т. е.

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 \; \& \; D_2 \; \& \dots \& \; D_N,$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \dots \vee L_{ik_i}$ — дизъюнкты , состоящие из литер $L_{ij} = A_{ij}$ или $L_{ij} = \neg A_{ij}$, где A_{ij} — атомарная формула.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\forall x \exists y \exists z \forall u \; (P(x) \;\&\; \neg R(x,u) \;\&\; (\neg P(y) \;\vee\; R(x,z))),$$

кванторная приставка: $\forall x \exists y \exists z \forall u$

матрица: $P(x) \;\&\; \neg R(x,u) \;\&\; (\neg P(y) \;\vee\; R(x,z))$

дизъюнкты: $D_1 = P(x)$,

$D_2 = \neg R(x,u)$,

$D_3 = \neg P(y) \;\vee\; R(x,z)$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Теорема о ПНФ

Для любой замкнутой формулы φ существует равносильная предваренная нормальная форма ψ.

Доказательство

Замкнутую формулу φ можно привести к ПНФ применением равносильных преобразований. Покажем, как это надо делать на примере формулы

$$\varphi = \neg\ \exists x(\ (P(x)\ \&\ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x,y)))\ \rightarrow\ \exists y R(x,y)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

1. Переименование переменных.
Применяем равносильности $\models \ \substack{\forall \\ \exists}\, x\ \varphi(x) \ \equiv \ \substack{\forall \\ \exists}\, y\ \varphi(y)$

$$\varphi = \neg\ \exists \mathbf{x}(\ (P(\mathbf{x})\ \&\ (\forall \mathbf{x} P(\mathbf{x}) \to \exists y R(\mathbf{x}, y)))\ \to\ \exists y R(\mathbf{x}, y)\ )$$

$$\neg\ \exists x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\forall x_2 P(x_2) \to \exists \mathbf{y} R(x_1, \mathbf{y})))\ \to\ \exists \mathbf{y} R(x_1, \mathbf{y})\ )$$

$$\neg\ \exists x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\forall x_2 P(x_2) \to \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \to\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

Предваренные нормальные формы

Доказательство

2. Удаление импликаций.
Применяем равносильность $\models\ \varphi \to \psi\ \equiv\ \neg\varphi \vee \psi$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

$$\neg\ \exists x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \rightarrow\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

$$\neg\ \exists x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\forall x_2 P(x_2) \to \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \to\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

Применяем равносильности

$\models\ \neg\neg\varphi\ \equiv\ \varphi,$

$\models\ \neg(\varphi \genfrac{}{}{0pt}{}{\&}{\vee} \psi)\ \equiv\ \neg\varphi \genfrac{}{}{0pt}{}{\vee}{\&} \neg\psi,$

$\models\ \neg \genfrac{}{}{0pt}{}{\forall}{\exists} x\varphi\ \equiv\ \genfrac{}{}{0pt}{}{\exists}{\forall}\ x\neg\varphi$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \neg(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \neg(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \neg\neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \neg\exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \neg(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \neg\neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \neg\exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg\ \exists x_1(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \neg(\ \neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \vee\ \exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \neg\neg(P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \neg\exists y_2 R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg\forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

Применяем равносильности

$\models\ \substack{\forall\\ \exists} x\varphi(x)\&\psi \ \equiv\ \substack{\forall\\ \exists} x(\varphi(x)\&\psi)$,

$\models\ \substack{\forall\\ \exists} x\varphi(x)\vee\psi \ \equiv\ \substack{\forall\\ \exists} x(\varphi(x)\vee\psi)$,

$\models\ \varphi \substack{\&\\ \vee} \psi \ \equiv\ \psi \substack{\&\\ \vee} \varphi$.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ \exists \mathbf{x_2}(\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ \exists \mathbf{x_2}(\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \exists \mathbf{x_2}(P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ \exists \mathbf{x_2}(\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \exists \mathbf{x_2}(P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \exists \mathbf{x_2}(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

и так далее...

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ (\exists \mathbf{x_2} \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ (P(x_1)\ \&\ \exists \mathbf{x_2}(\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1(\ \exists \mathbf{x_2}(P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\forall x_1 \exists \mathbf{x_2}(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1)))\ \&\ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2)\ )$$

и так далее...

$$\forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2(\ (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)))\ \&\ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

5. Приведение матрицы к конъюнктивной нормальной форме. Применяем законы булевой алгебры.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

5. Приведение матрицы к конъюнктивной нормальной форме.

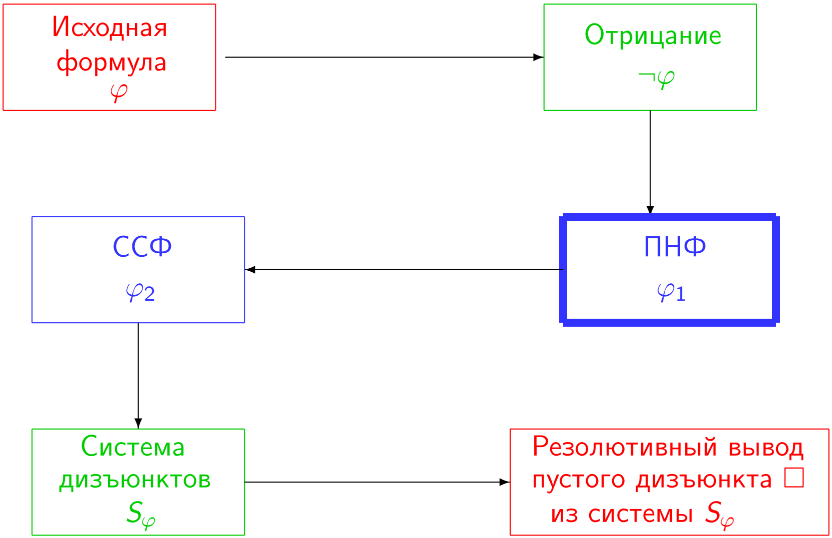
$$\psi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1))\ \&\ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

В результате получаем формулу ψ, которая

- является предваренной нормальной формой,
- равносильна исходной формуле φ.

$\square$

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Определение

Предваренная нормальная форма вида

$$\varphi \;=\; \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_m}\; M(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}),$$

в которой кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$, называется сколемовской стандартной формой (ССФ) .

Примеры ССФ

$$\forall x_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1)))\ \&\ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$R(c_1, f(c_1, c_2)) \vee P(c_2)$$

Сколемовские стандартные формы

Теорема о ССФ

Для любой замкнутой формулы φ существует такая сколемовская стандартная форма ψ, что

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \text{ выполнима.}$$

Доказательство

Воспользуемся леммой об удалении кванторов существования .

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Лемма об удалении кванторов существования

Пусть $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists x_{k+1}\ \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$ — замкнутая формула, $k \geq 0$, и k-местный функциональный символ $f^{(k)}$ не содержится в формуле φ.
Тогда формула φ выполнима в том и только том случае, когда выполнима формула

$$\psi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k\ \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)).$$

Доказательство леммы.

($\Leftarrow$) Пусть I — модель для ψ.
Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ имеет место
$I \models\ \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)]$,
т. е. для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ существует такой элемент $d_{k+1} = f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)$, что
$I \models\ \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}]$.
Это означает, что $I \models\ \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \varphi_0$.

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство леммы об удалении $\exists$.

($\Rightarrow$) Пусть I — модель для φ. Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ существует такой элемент $d_{k+1} \in D_I$, что $I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}]$.
Пусть $\bar{\mathbf{f}} : D_I^k \to D_I$ — это некоторая функция, вычисляющая для каждого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ такой элемент $d_{k+1} = \bar{\mathbf{f}}(d_1, d_2, \dots, d_k)$, что $I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}]$.
Рассмотрим интерпретацию I', которая отличается от I только тем, что оценкой функционального символа $f^{(k)}$ является функция $\mathbf{f}$.
Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k$ верно $I' \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)]$. (почему?)
Это означает, что
$I' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \; \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k))$. $\square$

Сколемовские стандартные формы

Продолжение доказательства теоремы об ССФ

Удаляем по очереди кванторы существования с помощью леммы.

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \exists x_{m+1} \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2} \dots x_m, x_{m+1}, \dots)$$

$$\varphi' = \forall x_1 \dots \forall x_k \ \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \exists x_{m+1} \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k), x_{k+2} \dots x_m, x_{m+1}, \dots)$$

$$\varphi'' = \forall x_1 \dots \forall x_k \ \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k), x_{k+2} \dots x_m, g(x_1, \dots, x_k, x_{k+2}, \dots, x_m), \dots)$$

и. т. д.

При этом выполнимость формул сохраняется. $\square$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2) \ )$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\varphi' = \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

Сколемовские стандартные формы

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1))\ \&\ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\varphi' = \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, y_1))\ \&\ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

$$\varphi'' = \forall x_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1)))\ \&\ \neg R(x_1, y_2)\ )$$

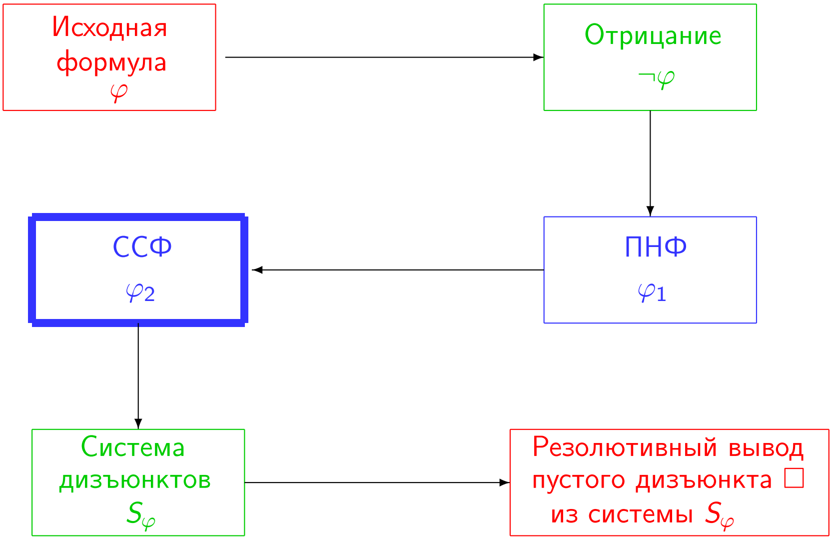
φ выполнима $\iff$ φ'' выполнима.

Сколемовские стандартные формы

Терм $f^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$, который подставляется вместо удаляемой переменной x_{k+1}, связанной квантором $\exists$, называется сколемовским термом .
Если $k = 0$, то терм называется сколемовской константой .

Процедура удаления кванторов $\exists$ называется сколемизацией .

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Утверждение

$$\models \ \forall x(\varphi \& \psi) \ \equiv \ \forall x \varphi \& \forall x \psi$$

Иначе говоря, кванторы $\forall$ можно равномерно распределить по сомножителям (дизъюнктам) КНФ.

Теорема

Сколемовская стандартная форма

$$\varphi \ = \ \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \ (D_1 \ \& \ D_2 \ \& \ldots \& \ D_N)$$

невыполнима тогда и только тогда, когда множество формул

$$S_\varphi = \{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_1, \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_2, \ldots, \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_N\}$$

не имеет модели.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Каждая формула множества S_φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m (L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_k)$$

и называется дизъюнктом .

В дальнейшем (по умолчанию) будем полагать, что все переменные дизъюнкта связаны кванторами $\forall$, и кванторную приставку выписывать **не будем**.

Каждый дизъюнкт состоит из литер $L_1, L_2, \ldots, L_k$.
Литера — это либо атом, либо отрицание атома.

Особо выделен дизъюнкт, в котором **нет ни одной литеры**. Такой дизъюнкт называется пустым дизъюнктом и обозначается $\square$. Пустой дизъюнкт $\square$ тождественно ложен (почему?).

Потому что $\models L_1 \vee \cdots \vee L_k \equiv L_1 \vee \cdots \vee L_k \vee \textbf{false}$, и поэтому при $k = 0$ имеем $\models \square \equiv \textbf{false}$.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Систему дизъюнктов, не имеющую моделей, будем называть невыполнимой , или противоречивой системой дизъюнктов.

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi\,?$$

φ общезначима $\iff$ $\varphi_0 = \neg\varphi$ невыполнима.

φ_0 невыполнима $\iff$ ПНФ φ_1 невыполнима.

φ_1 невыполнима $\iff$ ССФ φ_2 невыполнима.

φ_2 невыполнима $\iff$ система дизъюнктов S_φ невыполнима.

Итак, проверка общезначимости $\models \varphi$? сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ.

Системы дизъюнктов: пример

Исходная формула:

$$\varphi = \exists x(\ (P(x)\ \&\ (\forall x P(x) \to \exists y R(x,y)))\ \to\ \exists y R(x,y)\ )$$

Ее отрицание:

$$\varphi_0 = \neg\ \exists x(\ (P(x)\ \&\ (\forall x P(x) \to \exists y R(x,y)))\ \to\ \exists y R(x,y)\ )$$

Предваренная нормальная форма для φ_0:

$$\varphi_1 = \ \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(x_2) \vee R(x_1,y_1))\ \&\ \neg R(x_1,y_2)\ )$$

Сколемовская стандартная форма:

$$\varphi_2 = \forall x_1 \forall y_2 (P(x_1)\ \&\ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1)))\ \&\ \neg R(x_1,y_2)\ )$$

Системы дизъюнктов: пример

Система дизъюнктов:

$$S_\varphi = \{ \quad \begin{aligned} D_1 &= P(x_1), \\ D_2 &= \neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1)), \\ D_3 &= \neg R(x_1, y_2) \end{aligned} \quad \}$$

Задача:

как проверить противоречивость произвольной системы дизъюнктов?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 6.