

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР:
Владимир Анатольевич Захаров

`zakh@cs.msu.su`

<http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html>

Лекция 2.

Классическая логика предикатов
первого порядка
Синтаксис. Термы и формулы.
Семантика. Интерпретация.
Выполнимость формул.

ПРЕДИКАТ

(от лат. praedicatum — высказанное)

термин, обозначающий член предложения — сказуемое.

Студент уныло слушает лектора

Субъект *Атрибут* *Предикат* *Объект*

Другое значение термина «предикат» — отношение между лицами, предметами, событиями, явлениями.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

изучает законы причинно-следственной зависимости между событиями, представленными в виде отношений. Для этого вводится формальный язык, выражения которого предназначены для описания отношений между произвольными предметами.

Язык логики предикатов определяется

1. алфавитом,
2. синтаксисом,
3. семантикой.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные переменные $Var = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\};$

Предметные константы $Const = \{c_1, c_2, \dots, c_l, \dots\};$

Функциональные символы $Func = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \dots, f_r^{(n_r)}, \dots\};$

Предикатные символы $Pred = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \dots, P_s^{(m_s)}, \dots\}.$

n_r — местность функционального символа f_r ;

m_s — местность предикатного символа P_s .

Тройка $\langle Const, Pred, Func \rangle$ называется **сигнатурой** алфавита.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные константы — это **имена** предметов;

Функциональные символы обозначают **операции** над предметами;

Предикатные символы обозначают **отношения** между предметами.

Пример.

Константы $0, 1, \pi, \dots;$

Функциональные символы $+, \times, \text{mod}, \dots;$

Предикатные символы $=, <, \dots$

АЛФАВИТ

Логические связки и кванторы.

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	\vee
Отрицание	(логическое НЕ)	\neg
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	\rightarrow
Квантор всеобщности	(«для каждого»)	\forall
Квантор существования	(«хотя бы один»)	\exists

Знаки препинания.

Разделитель	,
Скобки	()

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Предметы, вступающие в отношения друг с другом, описываются термами.

Определение термина.

Терм — это

x	, если $x \in Var$	x — переменная;
c	, если $c \in Const$	c — константа;
$f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, если $f^{(n)} \in Func$	составной терм. t_1, t_2, \dots, t_n — термы

$Term$ — множество термов заданного алфавита.

Var_t — множество переменных, входящих в состав термина t .

$t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — запись обозначающая терм t , у которого
 $Var_t \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Если $Var_t = \emptyset$, то терм t называется **основным термом**.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры термов.

x_2 т. к. $x_2 \in Var$;

c_1 т. к. $c_1 \in Const$;

$f^{(2)}(x_2, c_1)$ т. к. $f^{(2)} \in Func$, $x_2, c_1 \in Term$;

$x \times (1 + \exp(2, y))$ т. к. $\times, +, \exp \in Func$,
 $1, 2 \in Const$, $x, y \in Var$;

$x \times (1 + 2^y)$ инфиксная форма записи термов;

$f(c_1, g(h(c_1), c_2))$ основной терм.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Для описания отношений между предметами используются формулы.

Определение формулы.

Формула — это

атомарная формула

$P^{(m)}(t_1, t_2, \dots, t_m)$, если $P^{(m)} \in Pred, \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subseteq Term$;

составная формула

$(\varphi \& \psi)$, если φ, ψ — формулы;

$(\varphi \vee \psi)$

$(\varphi \rightarrow \psi)$

$(\neg \varphi)$

$(\forall x \varphi)$, если $x \in Var, \varphi$ — формула.

$(\exists x \varphi)$

Form — множество всех формул заданного алфавита.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$P^{(m)}(t_1, t_2, \dots, t_m)$ «значения термов t_1, t_2, \dots, t_m находятся в отношении $P^{(m)}$ »;

$(\varphi \& \psi)$ « φ и ψ »;

$(\varphi \vee \psi)$ « φ или ψ »;

$(\varphi \rightarrow \psi)$ «если φ , то ψ »;

$(\neg \varphi)$ «неверно, что φ »;

$(\forall x \varphi)$ «для любого значения x верно φ »;

$(\exists x \varphi)$ «существует такое значение x , для которого верно φ ».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры формул.

$P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))$ т. к. $P^{(2)} \in Pred$, $x_1, f(c, x_2) \in Term$;

$R^{(1)}(x_1)$ т. к. $R^{(1)} \in Pred$, $x_1 \in Term$;

$(\neg R^{(1)}(x_1))$

$(\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1)))$

$((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))$

$(\exists x_2((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

связанные вхождения
переменной x_2

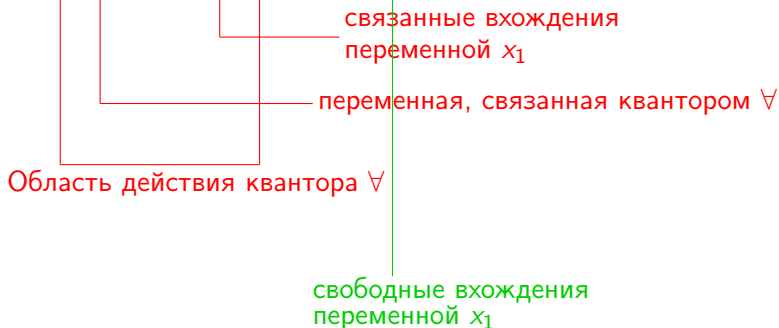
переменная, связанная квантором \exists

Область действия квантора \exists

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

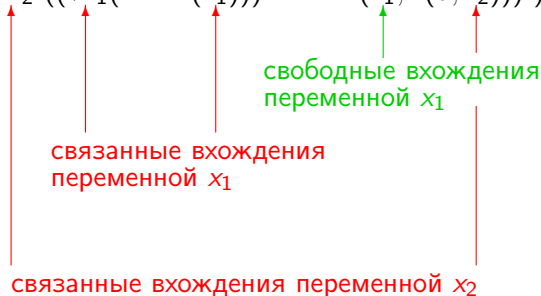
$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$



СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$



СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и **связанные** переменные.

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним.

Вхождение переменной в области действия квантора, связывающего эту переменную, называется **связанным**.

Вхождение переменной в формулу, не являющееся связанным, называется **свободным**.

Переменная называется **свободной**, если она имеет свободное вхождение в формулу.

Пример .

$$\varphi = (\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

Формула φ имеет единственную **свободную** переменную x_1 .

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Var_φ — множество свободных переменных формулы φ .

$$\varphi = P^{(m)}(t_1, t_2, \dots, t_m) \quad Var_\varphi = \bigcup_{i=1}^m Var_{t_i};$$

$$\varphi = (\psi_1 \& \psi_2) \quad Var_\varphi = Var_{\psi_1} \cup Var_{\psi_2};$$

$$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$$

$$\varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$$

$$\varphi = (\neg \psi) \quad Var_\varphi = Var_\psi;$$

$$\varphi = (\forall x \psi) \quad Var_\varphi = Var_\psi \setminus \{x\}.$$

$$\varphi = (\exists x \psi)$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — запись, обозначающая формулу φ , у которой
 $Var_\varphi \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Если $Var_\varphi = \emptyset$, то формула φ называется
замкнутой формулой, или **предложением**.

$CForm$ — множество всех замкнутых формул.

Соглашение о приоритете логических операций

В порядке убывания приоритета связки и кванторы
располагаются так:

\neg, \forall, \exists

$\&$

\vee

\rightarrow

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример правильного восстановления скобок

$$\forall x_1 \neg P(x_1) \ \& \ \exists x_2 R(x_1, x_2) \ \rightarrow \ \exists x_1 (\neg P(x_1) \vee P(x_2))$$

$$\left(\forall x_1 (\neg P(x_1)) \right) \ \& \ \left(\exists x_2 R(x_1, x_2) \right) \ \rightarrow \ \left(\exists x_1 ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)) \right)$$

$$\left((\forall x_1 (\neg P(x_1))) \ \& \ (\exists x_2 R(x_1, x_2)) \right) \ \rightarrow \ (\exists x_1 ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))$$

$$\left(((\forall x_1 (\neg P(x_1))) \ \& \ (\exists x_2 R(x_1, x_2))) \ \rightarrow \ (\exists x_1 ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2))) \right)$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Алфавит

Константы

0 — константа, действительное число ноль;

Функциональные символы

$h^{(2)}(x, y)$ — «абсолютная разность чисел x и y »;

Предикатные символы

$R^{(1)}(x)$ — « x — действительное число»;

$N^{(1)}(x)$ — « x — натуральное число»;

$S^{(1)}(x)$ — « x — последовательность действительных чисел»;

$E^{(3)}(x, y, z)$ — « x — это y -ый член последовательности z »;

$<^{(2)}(x, y)$ — «число x меньше числа y ».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Формула $limit(x, y)$

«действительное число x — предел последовательности действительных чисел y ».

$limit(x, y)$:

$$R(x) \ \& \ S(y) \ \& \ \forall z \left(R(z) \ \& \ <(0, z) \ \rightarrow \right. \\ \left. \exists u \left(N(u) \ \& \ \forall v \left(N(v) \ \& \ <(u, v) \ \rightarrow \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \exists w (E(w, v, y) \ \& \ <(h(w, x), z)) \right) \right) \right)$$

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Семантика — это свод правил, наделяющих значением (смыслом) синтаксические конструкции языка.

В языке логики предикатов значением термов являются функции, а значением формул — отношения (предикаты).

Значения термов и формул определяются на основе **алгебраических систем**.

Алгебраические системы, используемые в таком качестве, называются **интерпретациями**.

Интерпретации — это математические миры, в которых оценивается выполнимость отношений, представленных логическими формулами.

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Интерпретация сигнатуры $\langle Const, Func, Pred \rangle$ — это алгебраическая система $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, где

- ▶ D_I — непустое множество, которое называется **областью интерпретации**, **предметной областью**, или **универсумом** ;
- ▶ $\overline{Const} : Const \rightarrow D_I$ — **оценка констант**, сопоставляющая каждой константе с элемент (предмет) \bar{c} из области интерпретации;
- ▶ $\overline{Func} : Func^{(n)} \rightarrow (D_I^n \rightarrow D_I)$ — **оценка функциональных символов**, сопоставляющая каждому функциональному символу $f^{(n)}$ местности n всюду определенную n -местную функцию $\bar{f}^{(n)}$ на области интерпретации;
- ▶ $\overline{Pred} : Pred^{(m)} \rightarrow (D_I^m \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\})$ — **оценка предикатных символов**, сопоставляющая каждому предикатному символу $P^{(m)}$ местности m всюду определенное m -местное отношение $\bar{P}^{(m)}$ на области интерпретации.

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Пример

Сигнатура $Const = \{c_1, c_2\}$, $Func = \{f^{(1)}\}$, $Pred = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$.

Интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$:

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $c_1 = d_1$, $c_2 = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

f(x)

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

P(x)

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

R(x, y)

x \ y	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Значение термина

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, терм $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и набор d_1, d_2, \dots, d_n элементов (предметов) из области интерпретации D_I .

Значение $t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ **терма** $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе d_1, d_2, \dots, d_n определяется рекурсивно.

- ▶ Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$, то
$$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = d_i;$$
- ▶ Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$, то
$$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = \bar{c};$$
- ▶ Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(t_1, \dots, t_k)$, то
$$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = \bar{f}(t_1[d_1, d_2, \dots, d_n], \dots, t_k[d_1, d_2, \dots, d_n]).$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

Значение формул в интерпретации определяется при помощи отношения выполнимости \models .

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, формула $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и набор d_1, d_2, \dots, d_n элементов (предметов) из области интерпретации D_I .

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе d_1, d_2, \dots, d_n определяется рекурсивно.

Запись $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ означает, что в интерпретации I отношение, представленное формулой $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выполняется на наборе значений переменных d_1, d_2, \dots, d_n .

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

▶ атомарная формула

Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(t_1, \dots, t_m)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

\iff

$$\overline{P}(t_1[d_1, d_2, \dots, d_n], \dots, t_m[d_1, d_2, \dots, d_n]) = \mathbf{true};$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

► КОНЪЮНКЦИЯ

Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \& \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

\iff

$$\begin{cases} I \models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] \\ I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] \end{cases}$$

► ДИЗЪЮНКЦИЯ

Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \vee \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

\iff

$$I \models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

или

$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

▶ импликация

Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \rightarrow \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

\iff

$$I \not\models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

или

$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

▶ отрицание

Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \neg\psi$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

\iff

$$I \not\models \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

▶ квантор всеобщности

Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \forall x_0 \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

\iff

для **любого** элемента d_0 , $d_0 \in D_I$, имеет место

$$I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$$

▶ квантор существования

Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exists x_0 \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

\iff

для **некоторого** элемента d_0 , $d_0 \in D_I$, имеет место

$$I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Немного об импликации

Обратите внимание на то, что в классической логике импликация \rightarrow не в полной мере отражает смысл утверждений вида «если ψ_1 , то ψ_2 ». Об этом свидетельствуют так называемые парадоксы материальной импликации. Например, если утверждение ψ_2 истинно, то импликация позволяет считать истинным также и утверждение $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ независимо от посылки ψ_1 . А если утверждение ψ_1 ложно, то утверждение $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ истинно независимо от следствия ψ_2 .

Если у кошки четыре ноги, то у орла два крыла.

Если кошка — сороконожка, то у орла два крыла.

Если кошка — сороконожка, то орлы не летают.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Пример

Рассмотрим интерпретации, предметная область которых состоит из квадратов и шаров черного и белого цвета, расположенных на плоскости.

Сигнатура Σ состоит из пяти предикатных символов, которые обозначают следующие свойства и отношения:

$C(x)$ — «предмет x — квадрат»;

$S(x)$ — «предмет x — шар»;

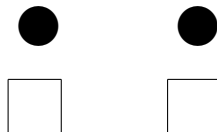
$B(x)$ — « x — черный предмет»;

$W(x)$ — « x — белый предмет»;

$U(x, y)$ — «предмет y лежит над предметом x ».

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I :



$$\varphi = \forall x (W(x) \& C(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& S(y) \& U(x, y)))$$

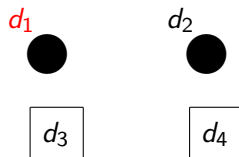
Для каждого предмета x , если x является белым и является квадратом, то существует предмет y , который является черным и является шаром и лежит над предметом x .

Каждый белый квадрат лежит под каким-то черным шаром.

Проверим выполнимость формулы φ в интерпретации I .

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I :



$$\varphi_1 = \forall x (W(x) \& C(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& S(y) \& U(x, y)))$$

Рассмотрим последовательно все предметы мира I в качестве значений связанной переменной x .

1. Если значением x является предмет d_1 , то

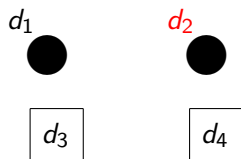
$I \not\models W(x)[d_1]$, (в мире I предмет d_1 не является белым)

$I \not\models (W(x) \& C(x)) [d_1]$,

$I \models (W(x) \& C(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& S(y) \& U(x, y))) [d_1]$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I :



$$\varphi_1 = \forall x (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y)))$$

2. Если значением x является предмет d_2 , то

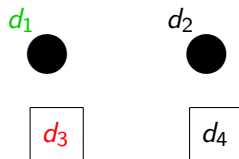
$I \not\models W(x)[d_2]$, (в мире I предмет d_2 не является белым)

$I \not\models (W(x) \ \& \ C(x)) [d_2]$,

$I \models (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y))) [d_2]$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I :



$$\varphi_1 = \forall x (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y)))$$

3. Если значением x является предмет d_3 , то

$I \models B(y)[d_1]$, (в мире I предмет d_1 является черным)

$I \models S(y)[d_1]$, (в мире I предмет d_1 является шаром)

$I \models U(x, y)[d_3, d_1]$, (в мире I предмет d_1 лежит над d_3)

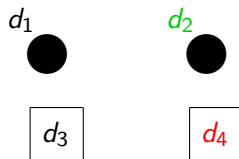
$I \models (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y)) [d_3, d_1]$,

$I \models \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y)) [d_3]$,

$I \models (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y))) [d_3]$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I :



$$\varphi_1 = \forall x (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y)))$$

4. Если значением x является предмет d_4 , то

$I \models B(y)[d_2]$, (в мире I предмет d_2 является черным)

$I \models S(y)[d_2]$, (в мире I предмет d_2 является шаром)

$I \models U(x, y)[d_4, d_2]$, (в мире I предмет d_2 лежит над d_4)

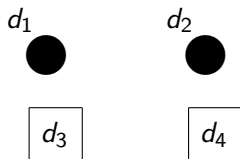
$I \models (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y)) [d_4, d_2]$,

$I \models \exists y(B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y)) [d_4]$,

$I \models (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y))) [d_4]$.

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация I :



$$\varphi_1 = \forall x (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y)))$$

Итак, мы имеем:

$$I \models (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y))) [d_1],$$

$$I \models (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y))) [d_2],$$

$$I \models (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y))) [d_3],$$

$$I \models (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y))) [d_4],$$

Значит,

$$I \models \forall x (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \exists y (B(y) \ \& \ S(y) \ \& \ U(x, y))).$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация

$$I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$$

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $\mathbf{c}_1 = d_1, \mathbf{c}_2 = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

$\mathbf{f}(x)$

x	\mathbf{f}
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	\mathbf{P}
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \ y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

Формула

$$\varphi = \forall x_1 (P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \ y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$$

$$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \Rightarrow I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$$

$$I \models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$$

$$I \models \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

$$I \models P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

x y	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$I \not\models P(x_1)[d_2]$

$I \models P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

x y	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$$I \models P(x_1)[d_3]$$

$$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$$

$$I \not\models \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_3]$$

$$I \not\models P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_3]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Итак, мы имеем

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))[d_1]$$

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))[d_2]$$

$$I \not\models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))[d_3]$$

Значит,

$$I \not\models \forall x_1 (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 2.