Занятие 1. Типовые задачи.

Задача 1.

Для приведенных ниже предложений сформируйте, выделив константы и элементарные отношения, алфавит логического языка. Представьте каждое из утверждений в виде адекватно соответствующей ему формулы логики предикатов.

1. Каждый любит сам себя. Значит кто-то кого-то любит.
2. Если задача имеет решение, то математик может ее решить. Я - математик, но не могу решить этой задачи. Значит задача неразрешима.
3. Вы можете обманывать всех иногда, вы можете обманывать кого-то всегда, но вы не можете обманывать всех всегда.

Обратить внимание на многозначность (полисемантичность) некоторых выражений, допускающую их двоякое истолкование.

Задача 2.

Введем следующие предикаты геометрии:

- $P(x)$ — x — точка на плоскости;
- $L(x)$ — x — прямая на плоскости;
- $B(x, y)$ — предмет x лежит на предмете y;
- $E(x, y)$ — предмет x совпадает с предметом y.

Записать формулы, выражающие следующие утверждения геометрии:

1. Через любые две различные точки плоскости проходит единственная прямая.
2. Определение параллельных прямых.
3. Через любую точку вне прямой проходит единственная прямая параллельная заданной.

Построить геометрические интерпретации, в которых записанные формулы могут быть выполнимыми и невыполнимыми.

Задача 3. Пусть $\Sigma =< X, S^{(3)}, P^{(3)} >$ — алфавит арифметики,

$I =< N, \bar{S}^{(3)}, \bar{P}^{(3)} >$ — интерпретация, где N — множество натуральных чисел $0, 1, 2 \ldots$ (область интерпретации), $\bar{S}^{(3)}(x, y, z) = \top \iff x + y = z$, $\bar{P}^{(3)}(x, y, z) = \top \iff x \times y = z$.

Записать формулу с одной свободной переменной x, истинную в интерпретации I тогда и только тогда, когда

1. $x = 0$;
2. $x = 1$;
3. $x = 2$;

4. x — заданное натуральное число n;
5. x — четное число;
6. x — простое число.

Записать формулу с двумя свободными переменными x, y, истинную в интерпретации I тогда и только тогда, когда

1. $x = y$;
2. $x < y$;
3. x кратно y.

Задача 4.

Пусть R — двухместный предикатный символ, соответствующий некоторому отношению на множестве M. Записать формулы, определяющие следующие свойства двухместного отношения;

1. рефлексивность;
2. транзитивность;
3. симметричность;
4. антисимметричность;
5. эквивалентность;
6. частичный порядок;
7. линейный (тотальный) порядок;
8. плотный порядок;
9. наличие максимального элемента.

Задача 5.

Выполнимы (общезначимы, противоречивы) ли следующие формулы логики предикатов:

1. $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$;
2. $\neg(\exists x P(x) \to \forall x P(x))$;
3. $\exists x \forall y (Q(x, x) \& \neg Q(x, y))$;
4. $\exists x \exists y (P(x) \& \neg P(y))$;
5. $(\forall x \exists y Q(x, y)) \to (\exists y \forall x Q(x, y))$;
6. $(\exists y \forall x Q(x, y)) \to (\forall x \exists y Q(x, y))$

Ответ обосновать.

ВЫВОД СЕМАНТИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

АКСИОМЫ

$$\langle \Gamma \mid \Delta \rangle, \qquad \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$$

ПРАВИЛА ВЫВОДА

L¬ $\dfrac{\langle \neg \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A},\ \Delta \rangle}$

R¬ $\dfrac{\langle \Gamma \mid \neg \mathrm{A},\ \Delta \rangle}{\langle \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$

L& $\dfrac{\langle \mathrm{A}\&\mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$

R& $\dfrac{\langle \Gamma \mid \mathrm{A}\&\mathrm{B},\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A},\ \Delta \rangle;\ \langle \Gamma \mid \mathrm{B},\ \Delta \rangle}$

L∨ $\dfrac{\langle \mathrm{A} \vee \mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta \rangle;\ \langle\ \mathrm{B}, \Gamma \mid \Delta \rangle}$

R∨ $\dfrac{\langle \Gamma \mid \mathrm{A} \vee \mathrm{B},\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \Delta \rangle}$

L → $\dfrac{\langle \mathrm{A} \to \mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta \rangle;\ \langle \Gamma \mid \mathrm{A},\ \Delta \rangle}$

R → $\dfrac{\langle \Gamma \mid \mathrm{A} \to \mathrm{B},\ \Delta \rangle}{\langle \mathrm{A},\ \Gamma \mid \mathrm{B},\ \Delta \rangle}$

L∀ $\dfrac{\langle \forall \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \mathrm{A}\{\mathrm{x}/\mathrm{t}\},\ \forall \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$

где переменная x свободна в формуле A для терма t

R∀ $\dfrac{\langle \Gamma \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A}\{\mathrm{x}/\mathrm{c}\},\ \Delta \rangle}$

где константа c не содержится в формуле A, а также в формулах множеств Γ и Δ

L∃ $\dfrac{\langle \exists \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \mathrm{A}\{\mathrm{x}/\mathrm{c}\},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$

где константа c не содержится в формуле A, а также в формулах множеств Γ и Δ

R∃ $\dfrac{\langle \Gamma \mid \exists \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A}\{\mathrm{x}/\mathrm{t}\},\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Delta \rangle}$

где переменная x свободна в формуле A для терма t

Здесь A, B — формулы логики предикатов,
$\Gamma,\ \Delta$ — множества формул логики предикатов,
x — предметная переменная,
c — константа,
t — терм.

Задача 1. Установить, являются ли приведенные ниже формулы

1. выполнимыми,
2. общезначимыми (тождественно истинными),
3. невыполнимыми:

$$\begin{array}{l}
\exists x\ P(x)\ \&\ \exists x\ \neg P(x);\\
\exists x\ P(x)\ \vee\ \exists x\ \neg P(x);\\
\exists x\ \forall y\ (P(x)\ \&\ \neg P(y));\\
P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ P(x);\\
\forall x\ P(x)\ \rightarrow\ P(x);\\
\forall y \exists x\ R(x,y)\ \rightarrow\ \exists x \forall y\ R(x,y);\\
(\forall x\ P(x)\ \rightarrow\ \forall x\ Q(x))\ \rightarrow\ \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ Q(x)).
\end{array}$$

Задача 2. Применяя табличный вывод, обосновать общезначимость следующих формул:

$$\begin{array}{l}
\exists x\ P(x)\ \rightarrow\ \neg \forall x\ \neg P(x);\\
\exists x\ \forall y\ R(x,y)\ \rightarrow\ \forall y\ \exists x\ R(x,y);\\
\forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ \exists y\ R(x,f(y)))\ \rightarrow\ (\exists x\ \neg P(x)\ \vee\ \forall x \exists z R(x,z));\\
\forall x\ \exists y\ \forall z\ (P(x,y)\ \rightarrow\ P(y,z));\\
\exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(x,y)\ \rightarrow\ P(y,z));
\end{array}$$

Задача 3. Будет ли успешно завершен табличный вывод для следующих формул:

$$\begin{array}{l}
\forall x\ (P(x)\ \vee\ Q(x))\ \rightarrow (\forall x\ P(x)\ \vee\ \forall x\ Q(x));\\
\exists x\ (P(x)\ \vee\ Q(x))\ \rightarrow (\exists x\ P(x)\ \vee\ \exists x\ Q(x))?
\end{array}$$

Задача 4. Доказать, что формула

$$\exists x \forall y\ (P(x,y)\ \rightarrow\ (\neg P(y,x)\ \rightarrow\ (P(x,x)\ \equiv\ P(y,y))))$$

истинна в любой интерпретации, область которой содержит не более трех элементов.

Задача 5. Существует ли необщезначимая формула, истинная на всякой интерпретации, область которой содержит не менее трех элементов?

Задача 6. Записать формулу, истинную на любой интерпретации, предметная область которой содержит не более пяти элементов.

МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ

Задача 1. Используя правила равносильных преобразований формул, привести следующие формулы к предваренной нормальной форме.

$$\exists x \forall y P(x,y) \& \forall x \exists y P(y,x);$$
$$\forall x((\exists y P(y,x) \to \exists y P(x,y)) \to Q(x)) \to \exists x Q(x);$$
$$\neg \forall y(\exists x P(x,y) \to \forall u(R(y,u) \to \neg \forall z(P(z,u) \vee \neg R(z,y)))).$$

Задача 2. Привести формулы к стандартной сколемовской форме.

$$\forall x \exists y \forall z \exists u R(x,y,z,u);$$
$$\neg \forall x(\exists y R(x,y) \to \forall z P(z,x)).$$

Задача 3. Найти наиболее общий унификатор следующих атомарных формул, применяя алгоритм унификации.

$$P(f(x,y), z, h(z,y)),\ P(f(y,x), g(y), v);$$
$$R(z, f(x,b,z)),\ R(h(x), f(g(a), y, z));$$
$$P(x, f(y), h(z,x)),\ P(f(y), x, h(f(y), f(z))).$$

Задача 4. Найти резольвенту следующих дизъюнктов.

$$\neg P(f(x,y), z, h(z,y)) \vee R(z,v),\ Q(x) \vee P(f(y,x), g(y), v);$$
$$P(x, y, h(y,x)) \vee R(y, f(x)),\ \neg P(x, f(x), h(x,y)) \vee \neg P(y, g(x), h(y,y));$$

Задача 5. Построив резолютивный вывод, доказать противоречивость следующих множеств дизъюнктов.

1. $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}$

$$\begin{aligned} D_1 &= E(x) \vee V(y) \vee C(f(x)), \\ D_2 &= E(x) \vee S(x, f(x)), \\ D_3 &= \neg E(a), \\ D_4 &= P(a), \\ D_5 &= P(f(x)) \vee \neg S(y,x), \\ D_6 &= \neg P(x) \vee \neg V(g(x)) \vee \neg V(y), \\ D_7 &= \neg P(x) \vee \neg C(y); \end{aligned}$$

2. $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$

$$\begin{aligned} D_1 &= P(y, f(x)), \\ D_2 &= \neg Q(y) \vee \neg Q(z) \vee \neg P(y, f(z)) \vee Q(v), \\ D_3 &= Q(b), \\ D_4 &= \neg Q(a); \end{aligned}$$

Задача 6. Используя метод резолюций, обосновать общезначимость следующих формул.

$\exists x\ P(x)\ \rightarrow\ \neg\forall x\ \neg P(x)$;
$\exists x\ \forall y\ R(x,y)\ \rightarrow\ \forall y\ \exists x\ R(x,y)$;
$\forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ \exists y\ R(x,f(y)))\ \rightarrow\ (\exists x\ \neg P(x)\ \vee\ \forall x\exists z R(x,z))$;
$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (P(x,y)\ \rightarrow\ P(y,z))$;
$\exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(x,y)\ \rightarrow\ P(y,z))$;
$\exists x\forall y(\forall z(P(y,z)\rightarrow P(x,z))\rightarrow(P(x,x)\rightarrow P(y,x)))$.

Задача 7. Используя формализм логики предикатов и метод резолюций, записать утверждение о существовании ориентированного маршрута в графе $\mathcal{G} = \langle\{a,b,c,d\},\{(a,b),(b,c),(b,a),(c,d)\}\rangle$ из вершины a в вершину d и проверить его справедливость. Разрешается использовать константы a,b,c,d для обозначения вершин орграфа и предикаты $R^{(2)},\ Q^{(2)}$ для обозначения отношений соединения дугой и достижимости соответственно.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задача 1.

Следующие основные свойства и отношения мать(x, y), отец(x, y), мужчина(x), женщина(y) описываются фактами, например,

`мужчина(Adam)`$\leftarrow$;

`женщина(Eva)`$\leftarrow$;

`отец(Adam,Abel)`$\leftarrow$;

Используя данные предикаты, описать программными утверждениями следующие родственные отношения:

1. родитель(x, y);
2. дед(x, y);
3. быть_отцом(x);
4. брат(x, y);
5. предок(x, y);
6. родственник(x, y);

Задача 2.

Описать при помощи логических программ следующие отношения
$list(x)$ — "x является списком".
$elem(x, y)$ — "x является элементом списка y",

Выяснить, какие ответы будут вычислены при обращении к этим программам с запросами

1. `? list(a.b.c.nil)`
2. `? list(a.`x`.nil)`
3. `? list(a.b)`
4. `? list(a.y)`
5. `? elem(b,a.b.c.nil)`
6. `? elem(`x`,a.b.c.nil)`
7. `? elem(a,`x`)`

Задача 3.

Построить дерево вычислений запроса G, обращенного к программе $\mathcal{P}$.

G: `R(`y`),P(`z`);`

$\mathcal{P}$: `R(`y`)` $\leftarrow$ `P(`y`),Q(`y`);`
`P(a)` $\leftarrow$;
`P(b)` $\leftarrow$;
`Q(a)` $\leftarrow$;
`Q(`$f(x)$`)` $\leftarrow$ `Q(f(f(`x`)));`

Как изменится дерево вычислений, если в теле первого программмного утверждения изменить порядок расположения атомов?
Как изменится дерево вычислений, если в программме поменять местами четвертое и пятое программные утверждения?

Задача 4.

Построить логические программы, осуществляющие следующие манипуляции со списками.

1. Выделить заголовок x списка L.
   Запрос ? head(L, x).
2. Выделить хвост y списка L.
   Запрос ? tail(L, y).
3. Проверить, является ли один список началом другого.
   Запрос ? check_head_list(x, y).
4. Построить конкатенацию (последовательное соединение) списков.
   Запрос ? concat(x, y, z).
5. Проверить вхождение одного списка в другой в качестве подсписка.
   Запрос ? chek_sublist(x, y).
6. Обратить список.
   Запрос ? reverse(x, y).
7. Проверить, является ли текст палиндромом.
   Запрос ? palindrom(x).
8. Построить пересечение множеств, представленных бесповторными списками.
   Запрос ? common(x, y, z).
9. Построить список L_3, состоящий из всех тех и только тех элементов списка L_1, которые не содержатся в списке L_2
   Запрос ? sieve(L_1, L_2, L_3).
10. Построить список L_2, состоящий из тех и только тех элементов списка L_1, которые содержатся в нем однократно.
    Запрос ? single(L_1, L_2).

Встроенные функции и предикаты

Задача 1.

Используя встроенные предикаты сравнения чисел, написать логические программы решения следующих задач

1. Проверить, является ли заданный целочисленный список L упорядоченным. Запрос `? ordered(`L`)`.

2. Для заданного целочисленного списка L отыскать его наибольший элемент. Запрос `? max(`L, x`)`.

3. Для заданного целочисленного списка L отыскать элемент, следующий по порядку за его наибольшим элементом. Запрос `? next_max(`L, x`)`.

4. Упорядочить целочисленный список L. Запрос `? make_ordered(`L_1, L_2`)`.

5. Построить список L_3, состоящий из всех элементов списка L_1, не содержащихся в списке L_2. Запрос `? diff(`L_1, L_2, L_3`)`.

Задача 2.

Используя встроенные арифметические операции и оператор вычисления значения **is**, написать логические программы решения следующих задач

1. Вычисления длины списка L. Запрос `? length(`L, x`)`.

2. Вычисления суммы элементов целочисленного списка L. Запрос `? sum(`L, x`)`.

3. Вычисления кратности вхождения заданного элемента e в список L. Запрос `? multiplicity(`e, L, x`)`.

4. Вычисления наибольшего общего делителя заданных натуральных чисел x, y. Запрос `? GCD(`x, y, z`)`.

5. Вычисления наиболее часто встречающейся буквы в заданном тексте L. Запрос `? most_often(`L, x`)`.

6. Вычисления всех простых чисел, не превосходящих заданного числа x.

7. Решения уравнения $x^5 - 4x^3 + 4.95x^2 - 99x - 10 = 0$.

Задача 3.

Представляя граф G посредством пары списков, — списка вершин V и списка ребер E, — написать логические программы решения теоретико-графовых задач.

1. Для заданного графа G и пары вершин x, y выяснить, существует ли путь, соединяющий x и y в G. Запрос `? reachable(`V, E, x, y`)`.

Проверить выполнение программы для запросов

`? reachable(`$a.b.c.d.\mathbf{nil}, (a.b.\mathbf{nil}).(b.c.\mathbf{nil}), (c.a.\mathbf{nil}), (b.d.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, a, d$)

2. Для заданного графа G и пары вершин x, y построить кратчайший путь, соединяющий x и y. Запрос `? short_path(`V, E, x, y, L`)`.

3. Для заданного графа G построить наименьшую его правильную раскраску.

Операторы отсечения и отрицания

Задача 1.

Вычислить ответы на запрос $G : ?\ A(x)$ к программе Π

$$\begin{array}{rcl}
A(y) & \longleftarrow & B(y), C(a_2, y); \\
A(x) & \longleftarrow & D(a_1, x), C(x, y); \\
B(u) & \longleftarrow & D(u, v), \mathbf{!}, E(v); \\
B(v) & \longleftarrow & E(a_5); \\
E(a_2) & \longleftarrow & ; \\
E(a_3) & \longleftarrow & ; \\
E(z) & \longleftarrow & ; \\
D(u, a_1) & \longleftarrow & C(u, f(u)); \\
D(u, u) & \longleftarrow & ; \\
D(x, a_2) & \longleftarrow & ; \\
C(z, a_3) & \longleftarrow & ;
\end{array}$$

Задача 2.

Используя оператор отсечения написать программы решения следующих задач:

1. Вычисления наибольшего из двух чисел.
Запрос ? `max(`x, y, z`)`.
2. Вычисления пересечения L_3 множеств L_1 и L_2, представленных бесповторными списками.
Запрос ? `cap(`L_1, L_2, L_3`)`.
3. Вычисления объединения L_3 множеств L_1 и L_2, представленных бесповторными списками.
Запрос ? `cup(`L_1, L_2, L_3`)`.
4. Упорядочения целочисленного списка методом пузырьковой сортировки.
Запрос ? `buble-ordering(`L_1, L_2`)`.
5. Удаления всех повторных вхождений элементов из списка.
Запрос ? `single(`L_1, L_2`)`.
6. Вычисления всех элементов целочисленного списка L_1, квадраты которых не содержатся в этом списке.
Запрос ? `nonsquare(`L_1, L_2`)`.

Задача 3.

Вычислить ответы на запрос $G : ?\ A(x)$ к программе Π

$$\begin{array}{rcl} A(y) & \longleftarrow & B(y), \mathbf{not}(D(y)); \\ B(a) & \longleftarrow & ; \\ B(b) & \longleftarrow & ; \\ D(u) & \longleftarrow & C(y), \mathbf{!}, E(u,y); \\ C(a) & \longleftarrow & ; \\ C(b) & \longleftarrow & ; \\ E(a,b) & \longleftarrow & ; \\ E(b,a) & \longleftarrow & ; \end{array}$$

Задача 4.

Используя оператор **not**, написать логические программы решения следующих задач

1. Вычисления максимального элемента списка L.
Запрос `? max(`L, x`)`.
2. Вычисления списка самых распространенных слов в тексте L.
Запрос `? max_occur(`L_1, L_2`)`.
3. Вычисления кратчайшего пути между двумя вершинами в ориентированном графе, представленном списком дуг Γ.
Запрос `? short_path(`v_1, v_2, Γ, L`)`.
4. Вычисления наименьшего количества цветов, в которые можно правильно раскрасить заданный граф, представленный списком ребер Γ.
Запрос `? min_colour(`x, y, z`)`.
5. Вычисления наиболее часто встречающейся буквы в заданном тексте L.
Запрос `? most_often(`L, x`)`.
6. Вычисления всех простых чисел, не превосходящих заданного числа x.