1 Формулы логики предикатов

Упражнение 1.1. Для приведенных ниже предложений сформируйте, выделив константы и элементарные отношения, алфавит логического языка. Представьте каждое из утверждений в виде адекватно соответствующей ему формулы логики предикатов.

1. Каждый любит сам себя. Значит кто-то кого-то любит.
2. Если задача имеет решение, то математик может ее решить. Я - математик, но не могу решить этой задачи. Значит задача неразрешима.
3. Вы можете обманывать всех иногда, вы можете обманывать кого-то всегда, но вы не можете обманывать всех всегда.

Обратить внимание на многозначность (полисемантичность) некоторых выражений, допускающую их двоякое истолкование.

Упражнение 1.2. Используя приведенные ниже предикаты:

- $C(x)$ — «x — квадрат»;
- $S(x)$ — «x — шар»;
- $B(x)$ — «x — черный предмет»;
- $W(x)$ — «x — белый предмет»;
- $U(x, y)$ — «предмет x лежит ниже предмета y».

напишите формул логики предикатов для следующих утверждений:

1. «Хотя бы один предмет, лежащий ниже всех черных квадратов, является шаром»;
2. «Нет такого белого квадрата, который лежит под каким-то черным шаром»;
3. «Каков бы ни был черный предмет, либо он является шаром, лежащим выше всех белых квадратов, либо он является квадратом, лежащим ниже какого-нибудь шара»;
4. «Никакой черный квадрат и никакой белый шар не лежат друг над другом»;
5. «Если все шары черные, то белых квадратов нет»;
6. «Всякая фигура, не являющаяся белым квадратом, лежащим хотя бы под одним шаром, имеет черный цвет и лежит над всеми белыми фигурами».

Упражнение 1.3. Введем следующие предикаты геометрии:

- $P(x)$ — x — точка на плоскости;
- $L(x)$ — x — прямая на плоскости;
- $B(x, y)$ — предмет x лежит на предмете y;
- $E(x, y)$ — предмет x совпадает с предметом y.

Записать формулы, выражающие следующие утверждения геометрии:

1. Через любые две различные точки плоскости проходит единственная прямая.
2. Определение параллельных прямых.
3. Через любую точку вне прямой проходит единственная прямая параллельная заданной.

Построить геометрические интерпретации, в которых записанные формулы могут быть выполнимыми и невыполнимыми.

Упражнение 1.4. Пусть $\Sigma =< X, S^{(3)}, P^{(3)} >$ — алфавит арифметики, $I =< N, \bar{S}^{(3)}, \bar{P}^{(3)} >$ — интерпретация, где N — множество натуральных чисел $0, 1, 2 \ldots$ (область интерпретации), $\bar{S}^{(3)}(x, y, z) = \top \iff x + y = z$, $\bar{P}^{(3)}(x, y, z) = \top \iff x \times y = z$. Записать формулу с одной свободной переменной x, истинную в интерпретации I тогда и только тогда, когда

1. $x = 0$;
2. $x = 1$;
3. $x = 2$;
4. x — заданное натуральное число n;
5. x — четное число;
6. x — простое число.

Записать формулу с двумя свободными переменными x, y, истинную в интерпретации I тогда и только тогда, когда

1. $x = y$;
2. $x < y$;
3. x кратно y.

2 Вывод семантических таблиц

Закрытая таблица (аксиома): $\langle \Gamma \mid \Delta \rangle, \quad \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

ПРАВИЛА ВЫВОДА

L¬ $$\frac{\langle \neg A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A,\ \Delta \rangle}$$

R¬ $$\frac{\langle \Gamma \mid \neg A,\ \Delta \rangle}{\langle A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

L& $$\frac{\langle A\&B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A,\ B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

R& $$\frac{\langle \Gamma \mid A\&B,\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A,\ \Delta \rangle;\ \langle \Gamma \mid B,\ \Delta \rangle}$$

L∨ $$\frac{\langle A \vee B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle;\ \langle\ B, \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

R∨ $$\frac{\langle \Gamma \mid A \vee B,\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A,\ B,\ \Delta \rangle}$$

L → $$\frac{\langle A \to B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle B,\ \Gamma \mid \Delta \rangle;\ \langle \Gamma \mid A,\ \Delta \rangle}$$

R → $$\frac{\langle \Gamma \mid A \to B,\ \Delta \rangle}{\langle A,\ \Gamma \mid B,\ \Delta \rangle}$$

L∀ $$\frac{\langle \forall x\ A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A\{x/t\},\ \forall x\ A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

где переменная x свободна
в формуле A для терма t

R∀ $$\frac{\langle \Gamma \mid \forall x\ A,\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A\{x/c\},\ \Delta \rangle}$$

где константа c не содержится
в формуле A, а также в
формулах множеств Γ и Δ

L∃ $$\frac{\langle \exists x\ A,\ \Gamma \mid \Delta \rangle}{\langle A\{x/c\},\ \Gamma \mid \Delta \rangle}$$

где константа c не содержится
в формуле A, а также в
формулах множеств Γ и Δ

R∃ $$\frac{\langle \Gamma \mid \exists x\ A,\ \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid A\{x/t\},\ \exists x\ A,\ \Delta \rangle}$$

где переменная x свободна
в формуле A для терма t

Здесь A, B — формулы логики предикатов,
$\Gamma,\ \Delta$ — множества формул логики предикатов,
x — предметная переменная,
c — константа,
t — терм.

Упражнение 2.1. Установить, являются ли приведенные ниже формулы

1. выполнимыми,
2. общезначимыми (тождественно истинными),
3. невыполнимыми:

$$
\begin{array}{l}
\exists x\ P(x)\ \&\ \exists x\ \neg P(x);\\
\exists x\ P(x)\ \vee\ \exists x\ \neg P(x);\\
\exists x\ \forall y\ (P(x)\ \&\ \neg P(y));\\
P(x)\ \to\ \forall x\ P(x);\\
\forall x\ P(x)\ \to\ P(x);\\
\forall y \exists x\ R(x,y)\ \to\ \exists x \forall y\ R(x,y);\\
(\forall x\ P(x)\ \to\ \forall x\ Q(x))\ \to\ \forall x\ (P(x)\ \to\ Q(x)).
\end{array}
$$

Упражнение 2.2. Применяя табличный вывод, обосновать общезначимость следующих формул:

$$
\begin{array}{l}
\exists x\ P(x)\ \to\ \neg\forall x\ \neg P(x);\\
\exists x\ \forall y\ R(x,y)\ \to\ \forall y\ \exists x\ R(x,y);\\
\forall x\ (P(x)\ \to\ \exists y\ R(x,f(y)))\ \to\ (\exists x\ \neg P(x)\ \vee\ \forall x \exists z R(x,z));\\
\forall x\ \exists y\ \forall z\ (P(x,y)\ \to\ P(y,z));\\
\exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(x,y)\ \to\ P(y,z));\\
\forall x\ (P(x) \& R(x))\ \to\ (\forall x\ P(x)\ \&\ \forall x\ R(x));\\
(\forall x\ P(x)\ \&\ \forall x\ R(x))\ \to\ \forall x\ (P(x) \& R(x));\\
\exists x\ (P(x) \vee R(x))\ \to\ (\exists x\ P(x)\ \vee\ \exists x\ R(x));\\
(\exists x\ P(x)\ \vee\ \exists x\ R(x))\ \to\ \exists x\ (P(x) \vee R(x));\\
(\forall x\ P(x)\ \vee\ R(y))\ \to\ \forall x\ (P(x)\ \vee\ R(y));\\
\forall x\ (P(x)\ \vee\ R(y))\ \to\ (\forall x\ P(x)\ \vee\ R(y));\\
\exists y\ \forall x\ Q(x,y)\ \to\ \forall x\ \exists y\ Q(x,y).
\end{array}
$$

Упражнение 2.3. Будет ли успешно завершен табличный вывод для следующих формул:

$$
\begin{array}{l}
\forall x\ (P(x)\ \vee\ Q(x))\ \to (\forall x\ P(x)\ \vee\ \forall x\ Q(x));\\
\exists x\ (P(x)\ \vee\ Q(x))\ \to (\exists x\ P(x)\ \vee\ \exists x\ Q(x))?
\end{array}
$$

Упражнение 2.4. Существует ли необщезначимая формула, истинная на всякой интерпретации, область которой содержит не менее трех элементов?

Упражнение 2.5. Записать формулу, истинную на любой интерпретации, предметная область которой содержит не более пяти элементов.

3 Нормальные формы и унификация

Упражнение 3.1. Используя правила равносильных преобразований формул, привести следующие формулы к предваренной нормальной форме.

$$\exists x \forall y\ P(x,y)\ \&\ \forall x \exists y\ P(y,x);$$
$$\forall x\ ((\exists y\ P(y,x)\ \rightarrow\ \exists y\ P(x,y))\ \rightarrow\ Q(x))\ \rightarrow\ \exists x\ Q(x);$$
$$\neg \forall y (\exists x P(x,y) \rightarrow \forall u (R(y,u) \rightarrow \neg \forall z (P(z,u) \vee \neg R(z,y))));$$
$$\exists x \exists y (P(x,y)\ \rightarrow\ R(x)) \rightarrow \forall x (\neg \exists y P(x,y) \vee R(x));$$
$$\exists x \forall y\ (P(x,y)\ \rightarrow\ (\neg P(y,x)\ \rightarrow\ (P(x,x)\ \equiv\ P(y,y))));$$
$$\exists x (\forall x P(x,x)\ \vee\ \exists x \neg R(x))\ \rightarrow\ \exists x (R(x)\ \rightarrow\ \exists y P(f(x),y)).$$

Упражнение 3.2. Используя правило сколемизации, постройте сколемовские стандартные формы для следующих формул.

$$\forall x \exists y \forall z \exists u R(x,y,z,u);$$
$$\neg \forall x (\exists y R(x,y) \rightarrow \forall z P(z,x));$$
$$\neg \forall y (\exists x P(x,y) \rightarrow \forall u (R(y,u) \rightarrow \neg \forall z (P(z,u) \vee \neg R(z,y))));$$
$$\exists x \exists y (P(x,y)\ \rightarrow\ R(x)) \rightarrow \forall x (\neg \exists y P(x,y) \vee R(x));$$
$$\exists x \forall y\ (P(x,y)\ \rightarrow\ (\neg P(y,x)\ \rightarrow\ (P(x,x)\ \equiv\ P(y,y))));$$
$$\exists x (\forall x P(x,x)\ \vee\ \exists x \neg R(x))\ \rightarrow\ \exists x (R(x)\ \rightarrow\ \exists y P(f(x),y)).$$

Упражнение 3.3. Вычислите композицию подстановок $\theta_1 \theta_2$, где

1. $\theta_1\ =\ \{x/f(x), y/g(x,z), u/v, v/f(c)\},\ \theta_2 = \{x/f(y), y/c, z/g(y,v), v/u\}$;
2. $\theta_1\ =\ \{x/y\},\ \theta_2 = \{y/z\}\ \{z/x\}\{x/y\}$.

Упражнение 3.4. Найти наиболее общий унификатор следующих пар атомарных формул (заглавными буквами обозначены переменные, а прописными — константы и функциональные символы):

$$\begin{array}{ll}
P(c,X,f(X)), & P(c,Y,Y); \\
P(f(X,Y),Z,h(Z,Y)), & P(f(Y,X),g(Y),V); \\
R(Z,f(X,b,Z)), & R(h(X),f(g(a),Y,Z)); \\
P(X,f(Y),h(Z,X)), & P(f(Y),X,h(f(Y),f(Z))); \\
P(X_1,X_2,X_3,X_4), & P(f(c,c),f(X_1,X_1),f(X_2,X_2),f(X_3,X_3)).
\end{array}$$

4 Метод резолюций

Упражнение 4.1. Найти резольвенту следующих дизъюнктов.

$$\neg P(f(x,y),z,h(z,y)) \vee R(z,v),\ Q(x) \vee P(f(y,x),g(y),v);$$
$$P(x,y,h(y,x)) \vee R(y,f(x)),\ \neg P(x,f(x),h(x,y)) \vee \neg P(y,g(x),h(y,y));$$

Упражнение 4.2. Построив резолютивный вывод, доказать противоречивость следующих множеств дизъюнктов.

1. $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$

$$\begin{array}{rcl} D_1 &=& P(X, f(X)), \\ D_2 &=& R(Y,Z) \vee \neg P(Y, f(a)), \\ D_3 &=& \neg R(c,X), \\ D_4 &=& R(X,Y) \vee R(Z, f(Z)) \vee \neg P(Z,Y), \\ D_5 &=& P(X,X). \end{array}$$

2. $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7\}$

$$\begin{array}{rcl} D_1 &=& E(x) \vee V(y) \vee C(f(x)), \\ D_2 &=& E(x) \vee S(x, f(x)), \\ D_3 &=& \neg E(a), \\ D_4 &=& P(a), \\ D_5 &=& P(f(x)) \vee \neg S(y,x), \\ D_6 &=& \neg P(x) \vee \neg V(g(x)) \vee \neg V(y), \\ D_7 &=& \neg P(x) \vee \neg C(y); \end{array}$$

3. $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$

$$\begin{array}{rcl} D_1 &=& P(y, f(x)), \\ D_2 &=& \neg Q(y) \vee \neg Q(z) \vee \neg P(y, f(z)) \vee Q(v), \\ D_3 &=& Q(b), \\ D_4 &=& \neg Q(a); \end{array}$$

Упражнение 4.3. Используя метод резолюций, обосновать общезначимость следующих формул.

$$\begin{array}{l} \exists x\ P(x)\ \rightarrow\ \neg\forall x\ \neg P(x); \\ \exists x\ \forall y\ R(x,y)\ \rightarrow\ \forall y\ \exists x\ R(x,y); \\ \forall x\ (P(x)\ \rightarrow\ \exists y\ R(x,f(y)))\ \rightarrow\ (\exists x\ \neg P(x)\ \vee\ \forall x \exists z R(x,z)); \\ \forall x\ \exists y\ \forall z\ (P(x,y)\ \rightarrow\ P(y,z)); \\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (P(x,y)\ \rightarrow\ P(y,z)); \\ \exists x \forall y (\forall z (P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \rightarrow (P(x,x) \rightarrow P(y,x))). \end{array}$$

Упражнение 4.4. Используя формализм логики предикатов и метод резолюций, записать утверждение о существовании ориентированного маршрута в графе $\mathcal{G} = \langle \{a,b,c,d\}, \{(a,b),(b,c),(b,a),(c,d)\}\rangle$ из вершины a в вершину d и проверить его справедливость. Разрешается использовать константы a,b,c,d для обозначения вершин орграфа и предикаты $R^{(2)}$, $Q^{(2)}$ для обозначения отношений соединения дугой и достижимости соответственно.

5 Хорновские логические программы. Декларативная и операционная семантики.

Упражнение 5.1. Следующие основные свойства и отношения

- мужчина(X),
- женщина(Y),
- мать(X, Y),
- отец(X, Y),
- супруги(X, Y)

описываются фактами хорновской логической программы, например,

```
мужчина(adam)←;

женщина(eve)←;

отец(adam,abel)←;

мать(eve,cain)←;
```

Продолжите эту логическую программу, создав подходящие программные утверждения, описывающие следующие родственные свойства и отношения:

1. родитель(X, Y);
2. дед(X, Y);
3. быть_отцом(X);
4. брат(X, Y);
5. потомок(X, Y);

Упражнение 5.2. Создайте логические программы, описывающие следующие свойства термов:
$list(X)$ — "Y является списком".
$elem(X, Y)$ — "X является элементом списка Y",
Выяснить, каково множество правильных ответов на следующие запросы, обращенные к построенным программам:

1. `? list(a.b.c.nil)`
2. `? list(a.X.nil)`
3. `? list(a.b)`
4. `? elem(X,a.b.c.nil)`

5. ? `elem(a,X)`

Упражнение 5.3. Постройте SLD-резолютивные вычисления для каждого из запросов, приведенных в упражнении 5.2, обращенных к программам, описывающим предикаты *list* и *elem*.

Упражнение 5.4. Постройте всевозможные SLD-резолютивные вычисления для запроса $G=$? `R(Y),P(Z)`, обращенного к программе $\mathcal{P}$, выделяя в каждом целевом утверждении самую левую подцель. Каково множество вычисленных ответов на запрос G к программе $\mathcal{P}$?

$\mathcal{P}$: `R(Y)` $\leftarrow$ `P(Y),Q(Y);`

`P(a)` $\leftarrow$ `;`

`P(b)` $\leftarrow$ `;`

`Q(a)` $\leftarrow$ `;`

`Q(f(X))` $\leftarrow$ `Q(X);`

Упражнение 5.5. Построить логические программы, описывающие следующие свойства и отношения на множестве списков.

1. $head(L, X)$: Заголовком списка L является элемент X;
2. $tail(L, X)$: Хвостом списка L является список X;
3. $prefix(L, X)$: Префиксом (начальным подсписком) списка L является список X;
4. $sublist(L, X)$: Список X является подсписком списка L;
5. $less(X, Y)$: Длина списка X меньше длины списка Y;
6. $subset(X, Y)$: Список X состоит только из элементов, содержащихся в списке Y;
7. $concat(X, Y, Z)$: Список X является конкатенацией (последовательным соединением) списков Y и Z;
8. $reverse(X, Y)$: Список X является обращением списка Y, т. е. X состоит из тех же элементов, что и список Y, но в списке X эти элементы следуют друг за другом в обратном порядке;
9. $period(X, Y)$: Список X является периодической последовательностью, полученной в результате многократного повторения списка Y;

Упражнение 5.6. Натуральные числа X и Y представлены в двоичной системе счисления и их двоичные записи представлены в виде списков. Построить логические программы, описывающие следующие отношения на множестве натуральных чисел.

1. $less(X, Y)$: Число X меньше числа Y;
2. $sum(X, Y, Z)$: Число Z равно сумме чисел X и Y;

6 Встроенные функции и предикаты

Упражнение 6.1. Используя встроенные предикаты равенства, неравенства и сравнения чисел, написать логические программы решения следующих задач

1. Упорядочить целочисленный список L_1.
   Запрос ? $make\_ordered(L_1, L_2)$.

2. Построить бесповторный список L_2, состоящий из всех элементов, содержащихся в списке L_1.
   Запрос ? $single(L_1, L_2)$.

3. Построить бесповторный список L_3, состоящий из всех элементов, содержащихся как в списке L_1, так и в списке L_2.
   Запрос ? $common(L_1, L_2, L_3)$.

Упражнение 6.2. Используя оператор вычисления значений, построить логические программы, решающие следующие задачи.

1. Вычислить длину X списка L
   Запрос $length(L, X)$;

2. Вычислить сумму X элементов целочисленного списка L;
   Запрос $sum(L, X)$;

3. Вычислить кратность Y вхождения элемента X в список L;
   Запрос $mult(L, X, Y)$;

4. Вычислить самый распространенный элемент X в списке L;
   Запрос $most\_oft(L, X)$;

5. Вычислить список всех простых чисел, не превосходящих заданного числа X;
   Запрос $prime(L, X)$;

6. Вычислить наибольший общий делитель Z двух целых чисел X и Y;
   Запрос $GCD(X, Y, Z)$;

7 Операторы отсечения и отрицания.

Упражнение 7.1. Вычислить ответы на запрос $G : ?\ A(X)$ к программе Π

$$
\begin{array}{rcl}
A(Y) & \longleftarrow & B(Y), C(a_2, Y); \\
A(X) & \longleftarrow & D(a_1, X), C(X, Y); \\
B(U) & \longleftarrow & D(U, V), \mathbf{!}, E(V); \\
B(V) & \longleftarrow & E(a_5); \\
E(a_2) & \longleftarrow & ; \\
E(a_3) & \longleftarrow & ; \\
E(Z) & \longleftarrow & ; \\
D(U, a_1) & \longleftarrow & C(U, f(U)); \\
D(U, U) & \longleftarrow & ; \\
D(X, a_2) & \longleftarrow & ; \\
C(Z, a_3) & \longleftarrow & ;
\end{array}
$$

Упражнение 7.2. Используя оператор отсечения написать программы решения следующих задач:

1. Вычисления наибольшего из двух чисел.
   Запрос `?` `max(`X, Y, Z`)`.
2. Вычисления пересечения L_3 множеств L_1 и L_2, представленных бесповторными списками.
   Запрос `?` `common(`L_1, L_2, L_3`)`.
3. Вычисления всех элементов целочисленного списка L_1, квадраты которых не содержатся в этом списке.
   Запрос `?` `nonsquare(`L_1, L_2`)`.

Упражнение 7.3. Вычислить ответы на запрос $G : ?\ A(X)$ к программе Π

$$
\begin{array}{rcl}
A(Y) & \longleftarrow & B(Y), \mathbf{not}(D(Y)); \\
B(a) & \longleftarrow & ; \\
B(b) & \longleftarrow & ; \\
D(U) & \longleftarrow & C(Y), \mathbf{!}, E(U, Y); \\
C(a) & \longleftarrow & ; \\
C(b) & \longleftarrow & ; \\
E(a, b) & \longleftarrow & ; \\
E(b, a) & \longleftarrow & ;
\end{array}
$$

Упражнение 7.4. Используя оператор **not**, написать логические программы решения следующих задач

1. Вычисления максимального элемента списка L.
   Запрос `?` `max(`L, x`)`.

2. Вычисления списка самого длинного слова в тексте L.
   Запрос `? max_occur(`L_1, L_2`).`

3. Вычисления кратчайшего пути между двумя вершинами в ориентированном графе, представленном списком дуг Γ.
   Запрос `? short_path(`v_1, v_2, Γ, L`).`

Упражнение 7.5. Представляя граф G посредством пары списков, — списка вершин V и списка ребер E, — написать логические программы решения теоретико-графовых задач.

1. Для заданного графа G и пары вершин x, y выяснить, существует ли путь, соединяющий x и y в G. Запрос `? reach(`V, E, x, y`).`

2. Проверить выполнение программы для запросов
   `? reach(`$a.b.c.d.\mathbf{nil}, (a.b.\mathbf{nil}).(b.c.\mathbf{nil}), (c.a.\mathbf{nil}), (b.d.\mathbf{nil}).\mathbf{nil}, a, d$`)`

3. Для заданного графа G и пары вершин x, y построить кратчайший путь, соединяющий x и y. Запрос `? short_path(`V, E, x, y, L`).`

4. Для заданного графа G построить наименьшую его правильную раскраску.