

семинарист: Селеунёва Светлана Николаевна

программа: <http://mathconf.cs.msu.su>

Математическая логика и логическое программирование.
(Семинары)

13.09.10.
Семинары

Лекция

1. Предметные переменные. **Var**
 x, y, z

2. Предметные константы (константные символы) **Const**
 a, b, c

3. Функциональные символы. **Func.**
 $f^{n_1}, g^{n_2}, h^{n_3}, n_i \geq 1.$

4. Предикатные символы. **Pred**
 $P^{m_1}, Q^{m_2}, R^{m_3}, m_i \geq 0$

5. Связки.

\neg - отрицание "не"

$\&$ - конъюнкция "и"

\vee - дизъюнкция "или"

\rightarrow - импликация "если..., то..."

\equiv - равносильность "...тогда, и только тогда..."

6. Кванторы

\forall - всеобщности "для любого", "для каждого"

\exists - существования "для какого-то", "хотя бы для одного"

7. Служебные символы.
(,), ?

Термы (определение по индукции):

$t \in \text{Var}_t$ - лн. вo переменных терм.т.

1) $x \in \text{Var}$, $t = x$ - терм, $\text{Var}_t = \{x\}$

2) $a \in \text{Const}$, $t = a$ - терм, $\text{Var}_t = \emptyset$.

3) Если t_1, \dots, t_n - термы, $f^n \in \text{Func}$, то $f(t_1, \dots, t_n)$ - терм, $\text{Var}_t = \bigcup_{i=1}^n \text{Var}_{t_i}$

Формулы (определение по индукции):

1) t_1, \dots, t_m - термы, $P^m \in \text{Pred}$, $P(t_1, \dots, t_m)$ - формула атом. $\text{Var}_{P(t_1, \dots, t_m)} = \bigcup_{i=1}^m \text{Var}_{t_i}$

2) φ, ψ - ф.-лн. $(\neg\varphi), (\varphi \& \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$. $\text{Var}_{\neg\varphi} = \text{Var}_{\varphi}$; $\text{Var}_{\varphi \& \psi} = \text{Var}_{\varphi} \cup \text{Var}_{\psi}$.

3) φ - ф.-лн., $x \in \text{Var}$ $(\forall x\varphi), (\exists x\varphi)$ - ф.-лн. $\text{Var}_{\forall x\varphi} = \text{Var}_{\varphi} \setminus \{x\}$.

Пример:

$$\Sigma = (\text{Var}, \text{Const}, \text{Func}, \text{Pred})$$

$$\Sigma = (a, f, g, P)$$

$x, a, f(a), g(x, f(a))$ - термы

$P(g(x, f(a)))$ $\{x\}$ -ли-во пред.

$(\exists x P(x)) \rightarrow P(x)$ $\{x\}$ -ли-во пред.

$\varphi(x)$ свободная переменная

1. Внешние переменные - огуляются

2. Проверка: \neg, \forall, \exists
2) \exists
3) \forall, \rightarrow

Пример:

$$\varphi = ((\forall x (\exists y Q(x, y))) \rightarrow (\neg (\exists x (\forall y Q(y, x))))$$

$\text{Var } \varphi = \emptyset$ Замкнутая ф-ла (или предложение)

$(\forall x \varphi)$ $(\exists x \varphi)$

область действия квантора \forall (или \exists)
 \neq область переменной x или a свободная.

$$f(x) = e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

в формуле i и x - переменной.
 i - свободная, f от нее не зависит.

Упр. 1.1.

1. L^2 -двухместный предикат, $L(x, y)$ - "x меньше y".

$$\forall x L(x, x) \rightarrow \exists x \exists y L(x, y)$$

2. Если задача имеет реш-е, то математик может ее решить....

$P3(x)$ - "x-разрешима задача"

$P(x, y)$ - "математик может решить задачу y"

$M(x)$ - "x-математик"

$Z(x)$ - "x-задача"

\exists - квантор

$\exists Z$ - квантор. "эта задача"

M/3

$$\varphi = \varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \varphi_3$$

$$\forall y (M(y) \rightarrow P(y, x)) \leftarrow \text{математик или так?}$$

$$\varphi_1 = \forall x (P3(Z(x)) \rightarrow \forall y (P(y, P3(x)))) \text{ или } \forall x (P3(x) \rightarrow \forall y (P(y, x)))$$

$$\varphi_2 = M(\exists) \& \neg P(\exists, \exists Z)$$

$$\varphi_3 = \neg P3(\exists Z)$$

к.1.2.

$C(x)$ - "х-корова"

$S(x)$ - "х-шар"

$B(x)$ - "верный предмет х"

$W(x)$ - "дешевый предмет х"

$U(x,y)$ - "предмет х лучше чем у"

1. $\exists x (S(x) \& \forall y (C(y) \& B(y) \rightarrow U(x,y)))$

если все пред. имеют свойства об-кта А, то для них верно В.

$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$
!!!

$\exists (A(x) \& B(x))$

2. $\neg (\exists x (W(x) \& C(x) \& (\exists y (B(y) \& S(y) \& U(x,y))))))$

к.1.3.

$P(x)$ - "х- (·) на трое"

$L(x)$ - "х-лучше на трое"

$B(x,y)$ - "х лучше чем у"

$E(x,y)$ - "х совпадает с у" (можно а(·), можно а(трое))

1. $\forall x \forall y (P(x) \& P(y) \& (\neg E(x,y))) \rightarrow \exists z (L(z) \& B(x,z) \& B(y,z) \& (\forall w (L(w) \& B(x,w) \& B(y,w) \rightarrow E(z,w))))$

Интерпретация

$\Sigma = (Const, Func, Pred)$

$I = (D_I, Const, Func, Pred)$

$D_I \neq \emptyset$

$a \in Const \rightarrow \bar{a} \in D_I$

$f \in Func \rightarrow \bar{f}^n : D_I^n \rightarrow D_I$

$P \in Pred \rightarrow \bar{P}^m : D_I^m \rightarrow \{1, 0\}$
истина лже.

Пример: $\Sigma = (a, f, g, P)$

$I_1 = (N, 1, x+1, x \cdot y, x \text{ - простое})$

$I_2 = (Q, 1, 0, f(0)=1, f(1)=0, g(x,y)=0, P(0)=1, P(1)=0)$