created by : Кунцьо Степан aka StepLg (421)
version/date : 0.3 / 14.11.2008
thanks to : Азимов Александр aka mitradir (421) за доскональную проверку
mailto : StepLg@GMail.com
homepage : http://github.com/StepLg/book-mathlog-theormin

предикат — термин, обозначающий член предложения — сказуемое.

предикат — отношение между лицами, предметами, событиями, явлениями.

логика предикатов — изучает законы причинно-следственной зависимости между событиями, представленными в виде отношений.

Язык логики предикатов определяется

- алфавитом,
- синтаксисом,
- семантикой

Базовые символы

- предметные переменные (**Var**) — имена предметов
- предметные константы (**Const**) —
- функциональные символы (**Func**) — операции над предметами
- предикатные символы (**Pred**) — отношения между предметами

Сигнатура алфавита - тройка $< \text{Const}, \text{Pred}, \text{Func} >$

Логические связки и кванторы

- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание
- импликация
- квантор всеобщности
- квантор существования

Знаки препинания: разделитель запятая и скобки

Термы — предметы, вступающие в отношения друг с другом.

Терм — рекурсивное определение (2.8)

Term — множество термов заданного алфавита

Var_t — множество переменных, входящих в состав заданного терма t

Основной терм — такой терм t, что его $Var_t = \varnothing$

Формула — рекурсивное определение (2.10) через **атомарную формулу** и **составную формулу**

Form — множество всех формул заданного алфавита

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним.

Связанное вхождение переменной — вхождение этой переменной в области действия квантора, связывающего ее.

Свободное вхождение переменной — вхождение, не являющееся связанным.

Свободная переменная — переменная, имеющая свободное вхождение в формулу.

Var_φ — множество всех свободных переменных формулы φ.

Замкнутая формула (предложение) — такая формула, у которой $Var_\varphi = \varnothing$.

Приоритеты логических операций: $\{\neg, \exists, \forall\}$, $\{\wedge\}$, $\{\vee\}$, $\{\rightarrow\}$

Семантика — это свод правил, наделяющих значением (смыслом) синтаксические конструкции языка.

Интерпретации — алгебраические системы, определяющие значения термов и формул.

Интерпретации — это математические миры, в которых оценивается выполнимость отношений, представленных логическими формулами.

Интерпретация сигнатуры $< Const, Func, Pred >$ — это алгебраическая система $I =< D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} >$, где

- D_I — непустое множество, которое называется областью интерпретации , предметной областью , или универсумом ;
- $\overline{Const} : Const \rightarrow D_I$ — оценка констант , сопоставляющая каждой константе с элемент (предмет) $\overline{c}$ из области интерпретации;
- $\overline{Func} : Func^{(n)} \rightarrow (D_I^n \rightarrow D_I)$ — оценка функциональных символов , сопоставляющая каждому функциональному символу $f^{(n)}$ местности n всюду определенную n-местную функцию $\overline{f}^{(n)}$ на области интерпретации;
- $\overline{Pred} : Pred^{(m)} \rightarrow (D_I^m \rightarrow \{true, false\})$ — оценка предикатных символов, сопоставляющая каждому предикатному символу $P^{(m)}$ местности m всюду определенное m-местное отношение $\overline{P}^{(m)}$ на области интерпретации.

Значение терма — рекурсивно (2.25)

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе $d_1, d_2, \dots, d_n$ определяется рекурсивно (2.27-30)

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **выполнимой в интерпретации** I, если существует такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **истинной в интерпретации** I, если для любого набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **выполнимой**, если есть интерпретация I, в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется **общезначимой** (или тождественно истинной), если эта формула истинна в любой интерпретации.

Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ называется **противоречивой** (или невыполнимой), если она не является выполнимой.

CForm — множество всех замкнутых формул.

Модель для множества замкнутых формул $\Gamma \subseteq CForm$ - любая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ.

Любая интерпретация является моделью пустого множества $\Gamma = \varnothing$

Замкнутая формула φ является **логическим следствием** множества замкнутых формул Γ (база знаний), если каждая модель для Γ является моделью для формулы φ, т.е. для любой интерпретации $I \models \Gamma \Rightarrow I \models \varphi$. Обозначается $\Gamma \models \varphi$

Обозначение общезначимых формул: $\models \varphi$

Теорема о логическом следствии. Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm, \varphi \in CForm$. Тогда $\Gamma \models \psi \ \Leftrightarrow \models \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$.

Существует такая замкнутая формула φ, которая истинна в любой интерпретации I с конечной предметной областью D_I , но не является общезначимой. $\forall x \neg R(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x \forall y \neg R(x,y)$.

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $< \Gamma; \Delta >$, $\Gamma, \Delta \subseteq Form$. При этом Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными, а Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Выполнимая семантическая таблица $< \Gamma; \Delta >$ — такая таблица, что существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \ldots, d_n \in D_I$ свободных переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в формулах множеств Γ, Δ, для которых

- $I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ для любой формулы $\varphi, \varphi \in \Gamma$
- $I \not\models \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$ для любой формулы $\psi, \psi \in \Delta$

Теорема о табличной проверке общезначимости. $\models \varphi \Leftrightarrow$ таблица $T_\varphi =< \varnothing, \{\varphi\} >$ невыполнима.

Закрытая семантическая таблица $< \Gamma, \Delta >$ — семантическая таблица, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$

Теорема о невыполнимости семантической таблицы. Закрытая семантическая таблица невыполнима.

Атомарная семантическая таблица $< \Gamma, \Delta >$ — семантическая таблица, в которой множества Γ и Δ состоят только из атомарных формул.

Теорема о выполнимости семантической таблицы. Незакрытая атомарная семантическая таблица выполнима.

Логический вывод — доказательство общезначимости путем преобразования семантической таблицы $T_\varphi =< \varnothing, \{\varphi\} >$ к закрытым таблицам.

Табличный вывод — такой вывод, в котором участвуют семантические таблицы.

Корректный табличный вывод — такой табличный вывод, при котором правила преобразования таблиц (правила табличного вывода) сохраняют выполнимость семантических таблиц.

Подстановка — это всякое отображение $\theta : Var \rightarrow Term$, сопоставляющее каждой переменной некоторый терм.

Область подстановки Dom_θ — множество $\{x : \theta(x) \neq x\}$

Конечная подстановка — такая подстановка θ, у которой Dom_θ — конечное множество.

Subst — множество конечных подстановок.

Переменная x называется **свободной для терма t** в формуле $\varphi(x)$, если любое свободное вхождение переменной x в формуле $\varphi(x)$ не лежит в области действия ни одного из квантора, связывающего переменную из множества Var_t.

Подстановка $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ называется **правильной** для формулы φ, если для любой связки x_i/t_i переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ.

Правила табличного вывода — 12 правил (4.11-15)

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, вершинами которого служат семантические таблицы и при этом

1) корнем дерева является таблица T_0 ;
2) из вершины T_i исходят дуги в вершины $T_j(T_k)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{T_i}{T_j,(T_k)}$ — правило табличного вывода.
3) листьями дерева могут быть только закрытые и атомарные таблицы.

Успешный табличный вывод (табличное опровержение) — табличный вывод, в котором дерево вывода является конечным, а все его листья — закрытые таблицы.

Существование успешного вывода означает, что корневая семантическая таблица T_0 невыполнима.

Лемма о корректности правил вывода. Каково бы ни было правило табличного вывода $L\wedge, R\wedge, L\vee, R\vee, L \rightarrow, R \rightarrow, L\neg, R\neg, L\forall, R\forall, L\exists, R\exists$ $\frac{T_0}{T_1,(T_2)}$, таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2).

Теорема корректности табличного вывода. Если для семантической таблицы T_0 существует успешный табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима.

Теорема полноты табличного вывода. Если семантическая таблица T_0 невыполнима, то для T_0 существует успешный табличный вывод.

Теорема Геделя (о полноте). Если формула φ общезначима, то существует успешный табличный вывод для таблицы $T_\varphi =< \varnothing|\varphi >$.

Теорема Левенгейма-Сколема. Формула φ выполнима $\Leftrightarrow$ φ имеет модель с конечной или счетно-бесконечной предметной областью.

Теорема компактности Мальцева. $\Gamma \models \varphi$ $\Leftrightarrow$ существует такое конечное подмножество $\Gamma', \Gamma' \subseteq \Gamma$, что $\Gamma' \models \varphi$

Эквиваленция $\equiv$ — выражение $\varphi \equiv \psi$ есть сокращенная запись $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$

Формулы φ и ψ называются **равносильными**, если формула $\varphi \equiv \psi$ общезначима, то есть $\models \varphi \equiv \psi$.

Отношение равносильности — это отношение эквивалентности.

Если φ общезначима(выполнима) и $\varphi \equiv \psi$, то и ψ общезначима (выполнима).

Запись $\varphi[\psi]$ означает, что формула φ содержит подформулу ψ.

Запись $\varphi[\psi/\chi]$ обозначает формулу, которая образуется из формулы φ заменой некоторых (не обязательно всех) вхождений подформулы ψ на формулу χ.

Теорема о равносильной замене. $\models \psi \equiv \chi \Rightarrow \models \varphi[\psi] \equiv \varphi[\psi/\chi]$

Замкнутая формула φ называется **предваренной нормальной формой** (ПНФ), если $\phi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n M(x_1, x_2 \dots x_n)$, где

- $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ — кванторная приставка, состоящая из кванторов $Q_1 Q_2 \dots Q_n$
- $M(x_1, x_2 \dots x_n)$ — матрица — базкванторная конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

Теорема о ПНФ. Для любой замкнутой формулы φ существует равносильная предваренная нормальная формула ψ.

Сколемовская стандартная форма (ССФ) — предваренная нормальная форма, у которой в кванторной приставке отсутствуют кванторы существования: $\phi = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_m} M(x_{i_1}, x_{i_2} \dots x_{i_m})$

Теорема о ССФ. Для любой замкнутой формулы φ существует такая сколемовская стандартная форма ψ, что φ выполнима $\Leftrightarrow$ ψ выполнима.

Лемма об удалении кванторов существования. Пусть $\phi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \varphi_0(x_1, x_2 \dots x_{k+1})$ — замкнутая формула, $k \geqslant 0$, и k-местный функциональный символ $f^{(k)}$ не содержится в формуле φ. Тогда формула φ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула $\psi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \varphi_0(x_1, x_2 \dots x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k))$

Сколемизация — процесс удаления кванторов $\exists$

Сколемовский терм — терм $f^{(k)}(x_1, \dots, x_n)$, который подставляется вместо удаляемой переменной x_{k+1}, связанной квантором существования $\exists$.

Если $k = 0$, то терм называется **сколемовской константой**.

Теорема о невыполнимости сколемовской формулы. Сколемовская стандартная форма $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_N)$ невыполнима тогда и только тогда, когда множество формул $S_\varphi = \{\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_1, \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_2, \dots, \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_N\}$ не имеет модели.

Дизъюнкт — формула из множества S_φ. Дизъюнкт имеет вид $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k)$, где L_i — литера, которая является либо атомом, либо отрицанием атома.

Пустой дизъюнкт — дизъюнкт, не имеющий литер и тождественно ложный.

Невыполнимая (противоречивая) система дизъюнктов — система дизъюнктов, не имеющая модели.

Теорема о противоречивости системы дизъюнктов. Система дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ протеворечива тогда и только тогда, когда для каждой интерпретации I в системе S найдется такой дизъюнкт $D_i = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$, а в предметной области такой набор $d_1, \dots, d_n$, для которых имеют место: $I \not\models L_{1i}[d_1, \dots, d_n] \quad \dots \quad I \not\models L_{k_i i}[d_1, \dots, d_n]$

Эрбрановские интерпретации (H-интерпретации) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат свободные алгебры.

Эрбрановский универсум (H-универсум) — предметная область эрбрановских интерпретаций.

Эрбрановским универсумом H_σ для сигнатуры $\sigma =< Const, Func, Pred >$ называется множество $H_\sigma = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} H_i$, где

- $i = 0 \;\; H_0 = \begin{cases} Const & \text{если } Const \neq \varnothing \\ \{c\} & \text{если } Const = \varnothing \text{(эрбрановская константа)} \end{cases}$
- $i \to i+1 \;\; H_{i+1} = H_i \cup \{f^{(k)}(t_1, t_2, \dots, t_k) : t^{(k)} \in Func \;,\; t_1, t_2, \dots, t_k \in H_i\}$

Основной терм — терм эрбрановского универсума. Не содержат переменных.

Эрбрановская интерпретация $I_H =< H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred} >$ сигнатуры $\sigma =< Const, Func, Pred >$ состоит из

- стандартной предметной области — эрбрановского универсума H_σ
- стандартной оценки констант $\overline{Const}_H(c) = c$, т.е. значением каждого константного символа является его отображение
- стандартной оценки функциональных символов $\overline{Func}_H(f^{(n)}) = \overline{f} : \overline{f}(t_1, \dots, t_n) = f^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$, то есть каждый функциональный символ f играет роль конструктора термов эрбрановского универсума
- произвольной оценки предикатных символов

Теорема о H-интерпретациях. Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда имеет эрбрановскую модель, т.е. выполнима хотя бы в одной H-интерпретации.

Основной атом — формула $P^{(m)}(t_1, \dots, t_m)$, где $P^{(m)} \in Pred \;,\; t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ (набор основных термов)

Эрбрановский базис (B_H) — набор всех основных атомов.

Всякая H-интерпретация I задается подмножеством B^I истинных основных атомов: $B^I = \{P^{(m)}(t_1, \dots, t_m) : I \models P^{(m)}(t_1, \dots, t_m), t_1, \dots, t_m \in H\}$

Основной пример дизъюнкта $D = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k)$ — дизъюнкт $D' = (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k)\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$, полученный из D путем подстановки основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ эрбрановского универсума.

Теорема о противоречивости системы дизъюнктов (через эрбрановские интерпретации). Система дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_N\}$ противоречива

$\Leftrightarrow$

для каждой H-интерпретации в S найдется такой дизъюнкт $D = (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ и такой набор основных термов $t_1, \dots, t_m$, для которых имеет место $I \not\models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[t_1, \dots, t_m]$

$\Leftrightarrow$

для каждой H-интерпретации существует основной пример $D' = D_i\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$ дизъюнкта $D \in S$, для которого $I \not\models D'$

Теорема Эрбрана. Система дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_N\}$ противоречива тогда и только тогда, когда существует конечное противоречивое множество G' основных примеров дизъюнктов S.

Следствие теоремы Эрбрана. Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда S невыполнима ни в одной эрбрановской интерпретации.

Композиция подстановок $\mu = \theta\eta$, $\theta, \eta \in Subst$, которая определяется как $\mu(x) = (x\theta)\eta$ для любой $x \in Var$.

Утверждение. Пусть $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$, $\eta = \{y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m\}$, тогда подстановка $\mu = \{x_1/t_1\eta, \ldots, x_n/t_n\eta\} \cup \{y_i/s_i : y_i \notin \{x_1, \ldots, x_n\}\} - \{x_j/t_j\eta : x_j = t_j\eta\}$.

Унификатор — подстановка θ логических выражений E_1, E_2 такая, что $E_1\theta = E_2\theta$.

Наиболее общий унификатор (НОУ) — унификатор выражений E_1, E_2 такой, что для любого унификатора η для этих же выражений существует подстановка p такая, что $\eta = \theta p$ является композицией θ и р.

Задача унификации — для двух выражений E_1, E_2 выяснить, являются ли они унифицируемыми и, в случае унифицируемости, вычислить наиболее общий унификатор.

Лемма о связке. Пусть $x \in Var, t \in Term$, тогда

1) если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in$ НОУ(x, t)
2) если $x \in Var_t$, $x \neq t$, то НОУ$(x, t) = \varnothing$

Приведенная система — система уравнений $E = \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \ldots \\ x_n = s_n \end{cases}$ и при этом

- $x_1, \ldots, x_n \subseteq Var$
- все переменные $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны
- $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} Var_{s_i} = \varnothing$

Лемма о приведенной системе. Если система E является приведенной, то унификатор $\{x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n\}$ является ее наиболее общим унификатором.

Равносильные системы E_1, E_2 — такие системы, что НОУ(E_1) = НОУ(E_2)

Алгоритм унификации (алгоритм Мартелли-Монтанари) — недетерменированный алгоритм из 6 правил, которые можно применять в любом порядке до тех пор, пока ни одно из правил нельзя применить или не применялось одно из правил, устанавливающих невозможность унификации.

Теорема об унификации. Какова бы ни была система уравнений E

1) Алгоритм Мартелли-Монтари всегда завершает свою работу
2) Если система E унифицируема, то в результате работы алгоритма будет построена приведенная система, равносильная E.
3) Если система E неунифицируема, то в результате работы алгоритма применено правило, устанавливающее невозможность унификации.

Переименование — подстановка $\theta : Var \to Var$ такая, что θ является биективным отображением.

Пример выражения E — выражение $E\theta$

Основной пример — пример такой, что $Var_{E\theta} = \varnothing$.

Вариант выражения — выражение $E\theta$, если θ является переименованием.

Пустая (тождественная) подстановка — переименование.

Правило резолюции. $\frac{D_1, D_2}{(D_1' \vee D_2')\theta}$, где:

- $D_1 = D_1' \vee L_1$, $D_2 = D_2' \vee \neg L_2$ — два дизъюнкта
- $\theta =$ НОУ(L_1, L_2)

Резольвента дизъюнктов D_1, D_2 — дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee D_2')\theta$

Контрактная пара — пара литер L_1 и $\neg L_2$

Правило склейки. $\frac{D_1}{(D_1' \vee L_1)\theta}$, где:

- $D_1 = D_1' \vee L_1 \vee L_2$ — дизъюнкт
- $\theta =$ НОУ(L_1, L_2)

Склейка дизъюнкта D_1 — дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee L_1)\theta$

Склеиваемая пара — пара литер L_1 и L_2

Резолютивный вывод системы дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_N\}$ — конечная последовательность дизъюнктов $D_1', D_2', \ldots, D_n'$ (резолютивно выводимые дизъюнкты) такая, что для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется одно из трех условий:

1) либо D_i' — вариант некоторого из дизъюнктов из S
2) либо D_i' — резольвента дизъюнктов D_k', D_j' , $k, j < i$
3) либо D_i' — склейка дизъюнктов D_j' , $j < i$

Успешный резолютивный вывод (резолютивное опровержение) — резолютивный вывод, который оканчивается пустым дизъюнктом $\square$.

Теорема корректности резолютивного вывода. Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$, то S — противоречивая система дизъюнктов.

Теорема о полноте резолютивного вывода. Если S — противоречивая система дизъюнктов, то из S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

Метод резолюций: корректен, полон, алгоритмизируем.

Полная стратегия резолютивного вывода — такая стратегия, которая позволяет вывести пустой дизъюнкт $\square$ из любой противоречивой системы дизъюнктов.

Семантическая резолюция (11.5)

Теорема полноты I-резолюции. Если система дизъюнктов S противоречива, то для любой интерпретации I существует успешный I-резолютивный вывод пустого дизъюнктов $\square$ из S.

Линейная резолюция (11.8)

Теорема полноты линейного резолютивного вывода. Если система дизъюнктов S противоречива, а система дизъюнктов $S\backslash\{D_0\}$ непротиворечива, то существует успешный линейный резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S.