Вариант

Задача 0 (6 баллов). Слово — это конечный непустой список букв фиксированного конечного алфавита. Словарь — это конечный непустой список попарно различных слов. Построить логическую программу, которая для заданного словаря L разбивает множество слов L на два таких непересекающихся словаря X и $Y = L \setminus X$, что никакие два слова $w_1 \in X$ и $w_2 \in Y$ не имеют ни одной общей буквы. Запрос к программе должен иметь вид ? $G(L, X, Y)$.

Задача 1 (3 балла). Используя константные, функциональные и предикатные символы алфавита (см. Приложение 1), построить замкнутую формулу логики предикатов, соответствующую следующему утверждению.

«Всякая неограниченная сверху последовательность действительных чисел не имеет предела.»

Задача 2 (3 балла). Для заданной формулы φ выяснить, применяя метод семантических таблиц, является ли эта формула общезначимой.

$$\varphi \;=\; \exists y(\exists x P(y,x) \;\rightarrow\; \forall x R(x)) \rightarrow \forall x(\neg \forall y P(y, f(x)) \vee R(x))$$

Задача 3 (3 балла). Для заданной формулы φ выяснить, применяя метод резолюций, является ли эта формула общезначимой.

$$\varphi \;=\; \forall x(P(x,x) \;\rightarrow\; \forall x(R(x) \;\rightarrow\; \exists x(\exists x P(x,x) \;\&\; R(x))))$$

Задача 4 (3 балла). Для заданного запроса $G =?\ A(Y,Y), \mathbf{not}(A(X,Y))$ к заданной логической программе $\mathcal{P}$ построить на основе стандартной стратегии вычислений (с использованием операторов отсечения и отрицания) дерево SLD-резолютивных вычислений и определить множество вычисленных ответов. Примечание: заглавными буквами начинаются имена переменных и предикатов, а строчными буквами — имена констант и функций.

$$\begin{array}{lllll}
\mathcal{P}: & A(c,Y) & \leftarrow & B(g(Y)),\ E(Y); \\
 & A(X,b) & \leftarrow & E(X),\ \mathbf{!},\ \mathbf{not}(B(X)); \\
 & B(c) & \leftarrow & \mathbf{!}; \\
 & B(g(X)) & \leftarrow & B(X); \\
 & E(b) & \leftarrow & ;
\end{array}$$

Задача 5 (2 балла). Сформулируйте теорему компактности Мальцева. Следует ли из этой теоремы утверждение: «Если бесконечное множество предложений Γ не имеет модели, то хотя бы одно предложение множества Γ является противоречивым»?

Задача 6 (2 балла). Какие формулы логики предикатов называются равносильными? Докажите, что два предложения φ и ψ являются равносильными тогда и только тогда, когда множество логических следствий формулы φ совпадает с множеством логических следствий формулы ψ?

Задача 7 (2 балла). Какой ответ на запрос G к хорновской логической программе $\mathcal{P}$ называется вычисленным? Существуют ли такие правильные ответы на запрос G к хорновской логической программе $\mathcal{P}$, которые не могут быть вычислены?

Задача 8 (2 балла). Что такое допущение замкнутости мира? Верно ли, что $\varphi \vee \psi \models_{CWA} \neg\varphi$?

Задача 9 (2 балла). Как определяется отношение выполнимости $I, s_0 \models \varphi \mathbf{U} \psi$ в темпоральной логике PLTL? Являются ли формулы $\varphi \mathbf{U}(\psi_1 \& \psi_2)$ и $\varphi \mathbf{U} \psi_1 \;\&\; \varphi \mathbf{U} \psi_2$ равносильными?

Задача 10 (3 балла). Известно, что для семантической таблицы $T = \langle \{\varphi\}, \{\psi\} \rangle$ нельзя построить ни одного успешного табличного вывода. Какие из приведенных ниже утверждений всегда верны для любых замкнутых формул φ и ψ ?

1. Таблица $T = \langle \{\varphi\}, \{\psi\} \rangle$ не является выполнимой, потому что...
2. Для таблицы $T' = \langle \{\psi\}, \{\varphi\} \rangle$ также не существует ни одного успешного табличного вывода, потому что...
3. Формула φ не является логическим следствием формулы ψ, потому что...
4. Формула ψ не является логическим следствием формулы φ, потому что...
5. Все приведенные выше утверждения в общем случае неверны, потому что...

Задача 11 (3 балла). Пусть $A(X)$ — атом, $\mathcal{P}$ — хорновская логическая программа, I — эрбрановская модель для логической программы $\mathcal{P}$. Какие из приведенных ниже утверждений всегда справедливы и почему?

1. Если $I \models \exists X\ A(X)$, то запрос $?\ A(X)$, обращенный к программе $\mathcal{P}$, имеет хотя бы одно успешное вычисление, потому что...
2. Если все вычисления запроса $?\ A(X)$, обращенного к программе $\mathcal{P}$, являются успешными, то $I \models \forall X\ A(X)$, потому что...
3. Если хотя бы одно вычисление запроса $?\ A(X)$, обращенного к программе $\mathcal{P}$, является успешным, то $I \models \exists X\ A(X)$, потому что...
4. Если $I \models \forall X\ A(X)$, то все вычисления запроса $?\ A(X)$, обращенного к программе $\mathcal{P}$, являются успешными, потому что...

Задача 12 (3 балла). Пусть φ — замкнутая формула логики предикатов, а ψ — ее сколемовская стандартная форма. Какие из приведенных ниже утверждений всегда верны и почему?

1. Если формула φ общезначима, то ψ также общезначима, потому что...
2. Какова бы ни была интерпретация I, если $I \models \varphi$, то $I \models \psi$, потому что...
3. Какова бы ни была интерпретация I, если $I \models \psi$, то $I \models \varphi$, потому что...
4. Если формула ψ общезначима, то φ также общезначима, потому что...
5. Все приведенные выше утверждения неверны.

Задача 13 (3 балла). Докажите, что существует алгоритм, проверяющий общезначимость формул логики предикатов, предваренная нормальная форма которых имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n\ \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Каков этот алгоритм?