Основы математической логики и логического программирования

Владимир Анатольевич Захаров

zakh@cs.msu.su

http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html

Билет 1.

Классическая логика предикатов первого порядка. Выполнимые и общезначимые формулы. Метод резолюции проверки общезначимости формул.

Алфавит

Базовые символы.

Предметные переменные	$Var = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$;
Предметные константы	$Const = \{c_1, c_2, \ldots, c_l, \ldots\}$;
Функциональные символы	$Func = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots, f_r^{(n_r)}, \ldots\}$;
Предикатные символы	$Pred = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \ldots, P_s^{(m_s)}, \ldots\}$.

Тройка $\langle Const, Pred, Func\rangle$ называется сигнатурой алфавита.

АЛФАВИТ

Логические связки и кванторы.

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ)	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	$\to$.

Квантор всеобщности	(«для каждого»)	$\forall$
Квантор существования	(«хотя бы один»)	$\exists$

Знаки препинания.

Разделитель	**,**
Скобки	( )

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Определение терма.

Терм — это

x	, если $x \in Var$	x — переменная;
c	, если $c \in Const$	c — константа;
$f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$	, если $f^{(n)} \in Func$ $t_1, t_2, \dots, t_n$ — термы	составной терм.

$Term$ — множество термов заданного алфавита.

Var_t — множество переменных, входящих в состав терма t.

$t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — запись обозначающая терм t, у которого $Var_t \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Определение формулы.

Формула — это

атомарная формула

$P^{(m)}(t_1, t_2, \dots, t_m)$, если $P^{(m)} \in Pred$, $\{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subseteq Term$;

составная формула

$(\varphi \& \psi)$, если φ, ψ — формулы;

$(\varphi \vee \psi)$

$(\varphi \to \psi)$

$(\neg \varphi)$

$(\forall x \varphi)$, если $x \in Var$, φ — формула.

$(\exists x \varphi)$

Form — множество всех формул заданного алфавита.

Синтаксис: термы и формулы

Свободные и связанные переменные.

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним.

Вхождение переменной в области действия квантора, связывающего эту переменную, называется **связанным** .

Вхождение переменной в формулу, не являющееся связанным, называется **свободным** .

Переменная называется **свободной** , если она имеет свободное вхождение в формулу.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Var_φ — множество свободных переменных формулы φ.

$$\varphi = P^{(m)}(t_1, t_2, \ldots, t_m) \qquad Var_\varphi = \bigcup_{i=1}^{m} Var_{t_i};$$

$$\varphi = (\psi_1 \& \psi_2) \qquad Var_\varphi = Var_{\psi_1} \cup Var_{\psi_2};$$
$$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$$
$$\varphi = (\psi_1 \to \psi_2)$$

$$\varphi = (\neg\psi) \qquad Var_\varphi = Var_\psi;$$

$$\varphi = (\forall x \psi) \qquad Var_\varphi = Var_\psi \setminus \{x\}.$$
$$\varphi = (\exists x \psi)$$

Синтаксис: термы и формулы

$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — запись, обозначающая формулу φ, у которой $Var_\varphi \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Если $Var_\varphi = \emptyset$, то формула φ называется **замкнутой формулой** , или **предложением** .

$CForm$ — множество всех замкнутых формул.

Соглашение о приоритете логических операций

В порядке убывания приоритета связки и кванторы располагаются так:

$$\neg,\ \forall,\ \exists$$

$$\&$$

$$\vee$$

$$\rightarrow$$

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Интерпретация сигнатуры $\langle Const, Func, Pred \rangle$ — это алгебраическая система $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, где

- D_I — непустое множество, которое называется областью интерпретации, предметной областью, или универсумом;
- $\overline{Const} : Const \rightarrow D_I$ — оценка констант, сопоставляющая каждой константе c элемент (предмет) $\bar{\mathbf{c}}$ из области интерпретации;
- $\overline{Func} : Func^{(n)} \rightarrow (D_I^n \rightarrow D_I)$ — оценка функциональных символов, сопоставляющая каждому функциональному символу $f^{(n)}$ местности n всюду определенную n-местную функцию $\bar{\mathbf{f}}^{(n)}$ на области интерпретации;
- $\overline{Pred} : Pred^{(m)} \rightarrow (D_I^m \rightarrow \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\})$ — оценка предикатных символов, сопоставляющая каждому предикатному символу $P^{(m)}$ местности m всюду определенное m-местное отношение $\bar{\mathbf{P}}^{(m)}$ на области интерпретации.

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Значение терма

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, терм $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \dots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I.

Значение $t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ терма $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе $d_1, d_2, \dots, d_n$ определяется рекурсивно.

- Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$, то
  $$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = d_i;$$
- Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$, то
  $$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = \bar{\mathbf{c}};$$
- Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(t_1, \dots, t_k)$, то
  $$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = \bar{\mathbf{f}}(t_1[d_1, d_2, \dots, d_n], \dots, t_k[d_1, d_2, \dots, d_n]).$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

Значение формул в интерпретации определяется при помощи отношения выполнимости $\models$.

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, формула $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \dots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I.

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе $d_1, d_2, \dots, d_n$ определяется рекурсивно.

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(t_1, \dots, t_m)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$$\iff$$

$$\bar{\mathbf{P}}(t_1[d_1, d_2, \dots, d_n], \dots, t_m[d_1, d_2, \dots, d_n]) = \mathbf{true};$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 \& \psi_2$, то
$$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
$$\iff$$
$$\begin{cases} I \models \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] \\ I \models \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n] \end{cases}$$
- Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1 \vee \psi_2$, то
$$I \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
$$\iff$$
$$I \models \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$
или
$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)[d_1, d_2, \ldots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \to \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$I \not\models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$
или
$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \neg\psi$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$I \not\models \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \forall x_0\ \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

  $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$

  $\Longleftrightarrow$

  для **любого** элемента d_0, $d_0 \in D_I$, имеет место

  $I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exists x_0\ \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

  $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$

  $\Longleftrightarrow$

  для **некоторого** элемента d_0, $d_0 \in D_I$, имеет место

  $I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой в интерпретации I, если существует такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется истинной в интерпретации I, если для любого набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется выполнимой , если есть интерпретация I, в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется общезначимой (или тождественно истинной), если эта формула истинна в любой интерпретации.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется противоречивой (или невыполнимой), если она не является выполнимой.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Определение

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I, в которой выполняются все формулы множества Γ, называется моделью для множества Γ.

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, и φ — замкнутая формула. Формула φ называется логическим следствием множества предложений (базы знаний) Γ, если каждая модель для множества формул Γ является моделью для формулы φ, т. е. для любой интерпретации I верно

$$I \models \Gamma \implies I \models \varphi$$

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

Для обозначения общезначимости формулы φ будем использовать запись $\models \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Если $I \not\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, то $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$.

Если $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, то $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$, т. е. I — модель для Γ. Поскольку $\Gamma \models \varphi$, получаем $I \models \varphi$.
Значит, $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$.

Таким образом, для любой интерпретации I имеет место $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $\psi_1 \& \dots \& \psi_n \to \varphi$ — общезначимая формула.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. **Тогда**

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ, т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n$.

Так как $\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$ — общезначимая формула, имеет место $I \models \psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi$.

Значит, $I \models \varphi$.

Так как I — произвольная модель для Γ, приходим к заключению $\Gamma \models \varphi$.

$\square$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Общезначимые формулы — это каналы причинно-следственной связи, по которым передаются знания, представленные в виде логических формул, преобразуясь при этом из одной формы в другую.

Практически важно уметь определять эти каналы и настраивать их на извлечение нужных знаний.

- База знаний — множество предложений Γ;
- Запрос к базе знаний — предложение φ;
- Получение ответа на запрос — проверка логического следствия $\Gamma \models \varphi$.

Если Γ — конечное множество, то проверка логического следствия сводится к проверке общезначимости формулы

$$\psi_1 \& \ldots \& \psi_n \to \varphi \ .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Таким образом, возникает проблема общезначимости формул:

Для заданной формулы φ проверить ее общезначимость:

$$\models \varphi?$$

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi \, ?$$

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости.

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi_0 = \neg\varphi$$

φ общезначима $\iff$ φ_0 противоречива.

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ).

$$\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \, (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

φ_0 равносильна φ_1, т. е. $I \models \varphi_0 \;\Leftrightarrow\; I \models \varphi_1$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ).

$$\varphi_1 \rightsquigarrow \varphi_2 = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_k} \ (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

φ_1 противоречива $\iff$ φ_2 противоречива.

Этап 4. Построение системы дизъюнктов.

$$\varphi_2 \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1, \ D_2, \ \dots, D_N\},$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \dots \vee L_{im_i}$.

φ_2 противоречива $\iff$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 5. Резолютивный вывод тождественно ложного (противоречивого) дизъюнкта $\square$ из системы S_φ.

Правило резолюции Res : $\dfrac{D_1 = D_1' \vee L,\ D_2 = D_2' \vee \neg L}{D_0 = D_1' \vee D_2'}$.

Дизъюнкт D_0 называется резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2.

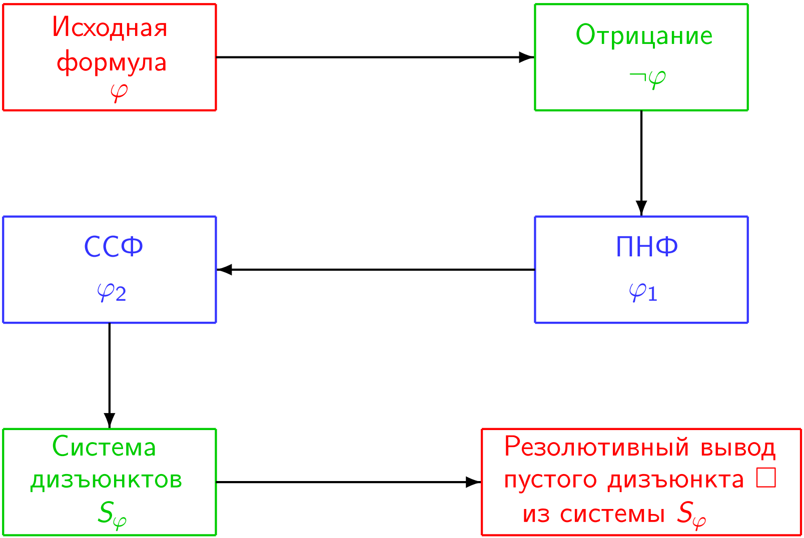
Резольвенты строят, пока не будет получен пустой дизъюнкт $\square$. Это возможно в случае $D_1 = L,\ D_2 = \neg L$:

$$\frac{D_1 = L,\ D_2 = \neg L}{D_0 = \square}$$

Система дизъюнктов S_φ противоречива $\Leftrightarrow$ из S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ИТОГ. Формула φ общезначима $\Leftrightarrow$ из системы дизъюнктов S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Введем вспомогательную логическую связку эквиваленции $\equiv$. Выражение $\varphi \equiv \psi$ — это сокращенная запись формулы $(\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$.

Определение

Формулы φ и ψ будем называть равносильными , если формула $\varphi \equiv \psi$ общезначима, т. е. $\models (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$.

Запись $\varphi[\psi]$ означает, что формула φ содержит подформулу ψ. Запись $\varphi[\psi/\chi]$ обозначает формулу, которая образуется из формулы φ заменой некоторых (не обязательно всех) вхождений подформулы ψ на формулу χ.

Теорема

$$\models \ \psi \equiv \chi \quad \Longrightarrow \quad \models \ \varphi[\psi] \equiv \varphi[\psi/\chi]$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Замкнутая формула φ называется предваренной нормальной формой (ПНФ) , если

$$\varphi \;=\; Q_1x_1 Q_2x_2 \ldots Q_nx_n \; M(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где

- $Q_1x_1 \; Q_2x_2 \; \ldots \; Q_nx_n$ — кванторная приставка , состоящая из кванторов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$,
- $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — матрица — бескванторная конъюнктивная нормальная форма (КНФ), т. е.
$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = D_1 \;\&\; D_2 \;\&\ldots\&\; D_N,$$
где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \cdots \vee L_{ik_i}$ — дизъюнкты , состоящие из литер $L_{ij} = A_{ij}$ или $L_{ij} = \neg A_{ij}$, где A_{ij} — атомарная формула.

Теорема о ПНФ

Для любой замкнутой формулы φ существует равносильная предваренная нормальная форма ψ.

Сколемовские стандартные формы

Предваренная нормальная форма вида

$$\varphi \;=\; \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \ldots \forall x_{i_m}\; M(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}),$$

в которой кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$, называется сколемовской стандартной формой (ССФ) .

Теорема о ССФ

Для любой замкнутой формулы φ существует такая сколемовская стандартная форма ψ, что

$$\varphi \text{ выполнима} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi \text{ выполнима.}$$

Системы дизъюнктов

Утверждение

$$\models \forall x\,(\varphi \,\&\, \psi) \equiv \forall x\,\varphi \,\&\, \forall x \psi$$

Иначе говоря, кванторы $\forall$ можно равномерно распределить по сомножителям (дизъюнктам) КНФ.

Теорема

Сколемовская стандартная форма

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m\,(D_1 \,\&\, D_2 \,\&\ldots\&\, D_N)$$

невыполнима тогда и только тогда, когда множество формул

$$S_\varphi = \{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_1, \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_2, \ldots, \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m D_N\}$$

не имеет модели.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Каждая формула множества S_φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k)$$

и называется дизъюнктом .
В дальнейшем (по умолчанию) будем полагать, что все переменные дизъюнкта связаны кванторами $\forall$, и кванторную приставку выписывать **не будем**.

Каждый дизъюнкт состоит из литер $L_1, L_2, \dots, L_k$. Литера — это либо атом, либо отрицание атома.

Особо выделен дизъюнкт, в котором **нет ни одной литеры**. Такой дизъюнкт называется пустым дизъюнктом и обозначается $\square$. Пустой дизъюнкт $\square$ тождественно ложен.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Систему дизъюнктов, не имеющую моделей, будем называть **невыполнимой**, или **противоречивой** системой дизъюнктов.

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi\,?$$

φ общезначима $\iff$ $\varphi_0 = \neg\varphi$ невыполнима.

φ_0 невыполнима $\iff$ ПНФ φ_1 невыполнима.

φ_1 невыполнима $\iff$ ССФ φ_2 невыполнима.

φ_2 невыполнима $\iff$ система дизъюнктов S_φ невыполнима.

Итак, проверка общезначимости $\models \varphi$? сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

О терминологии.

Пусть задано выражение E и подстановка θ.

Подстановка $\theta : \mathbf{Var} \to \mathbf{Var}$ называется переименованием , если θ — биекция.

Если θ — переименование, то пример $E\theta$ называется вариантом выражения E.

Подстановка θ называется унификатором выражений E_1 и E_2, если $E_1\theta = E_2\theta$.

Подстановка θ называется наиболее общим унификатором (НОУ) выражений E_1 и E_2, если

1. θ — унификатор выражений E_1 и E_2;
2. для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ, для которой верно равенство

$$\eta = \theta\rho$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Правило резолюции.

Пусть $D_1 = D'_1 \vee L_1$ и $D_2 = D'_2 \vee \neg L_2$ — два дизъюнкта.

Пусть $\theta \in НОУ(L_1, L_2)$.

Тогда дизъюнкт $D_0 = (D'_1 \vee D'_2)\theta$ называется резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2.

Пара литер L_1 и $\neg L_2$ называется контрарной парой .

Правило резолюции

$$\frac{D'_1 \vee L_1,\ D'_2 \vee \neg L_2}{(D'_1 \vee D'_2)\theta}, \quad \theta \in НОУ(L_1, L_2)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Правило склейки.

Пусть $D_1 = D_1' \vee L_1 \vee L_2$ — дизъюнкт.

Пусть $\eta \in НОУ(L_1, L_2)$.

Тогда дизъюнкт $D_0 = (D_1' \vee L_1)\eta$ называется склейкой дизъюнкта D_1.

Пара литер L_1 и L_2 называется склеиваемой парой .

Правило склейки

$$\frac{D_1' \vee L_1 \vee L_2}{(D_1' \vee L_1)\eta}, \quad \eta \in НОУ(L_1, L_2)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Определение резолютивного вывода.

Пусть $S = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — система дизъюнктов.

Резолютивным выводом из системы дизъюнктов S называется конечная последовательность дизъюнктов

$$D'_1, D'_2, \dots, D'_i, D'_{i+1}, \dots, D'_n,$$

в которой для любого i, $1 \leq i \leq n$, выполняется одно из трех условий:

1. либо D'_i — **вариант** некоторого дизъюнкта из S;
2. либо D'_i — резольвента дизъюнктов D'_j и D'_k, где $j, k < i$;
3. либо D'_i — склейка дизъюнкта D'_j, где $j < i$.

Дизъюнкты $D'_1, D'_2, \dots, D'_n$ считаются резолютивно выводимыми из системы S.

Резолютивный вывод

Резолютивный вывод называется успешным (или, по другому, резолютивным опровержением), если этот вывод оканчивается пустым дизъюнктом $\Box$.

Успешный вывод — это свидетельство того, что система дизъюнктов S **противоречива** и опровергнуто предположение о ее выполнимости!

Теорема корректности резолютивного вывода

Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\Box$, то S — противоречивая система дизъюнктов.

Теорема о полноте резолютивного вывода

Если S — противоречивая система дизъюнктов, то из S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\Box$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Пример.

Рассмотрим формулу φ

$$\forall x \quad \Big(\forall y \exists v \forall u \quad \Big((A(u,v) \to B(y,u))\& \\ (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\Big) \quad \to \exists y B(x,y)\Big)$$

Задача

Проверить, верно ли, что $\models \varphi$.

Решение

Методом резолюций.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 1. Покажем, что формула $\varphi_1 = \neg\varphi$ противоречивая.

$$\varphi_1 \;=\; \neg\forall x \;\; \Big(\forall y \exists v \forall u \;\; \big((A(u,v) \to B(y,u)) \;\&\; (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\big) \;\; \to \exists y B(x,y)\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Исходная формула

$$\neg\forall x \quad \Big(\forall y\exists v\forall u \quad \Big((A(u,v) \to B(y,u))\ \&$$

$$(\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\Big) \quad \to \exists y B(x,y)\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Переименование переменных

$$\neg\forall x \quad \Big(\forall y'\exists v\forall u \quad \big((A(u,v) \to B(y',u)) \;\&\; (\neg\exists w A(w,u) \to \forall z A(z,v))\big) \quad \to \exists y'' B(x,y'')\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Удаление импликаций

$$\neg\forall x \quad \Big(\neg\forall y'\exists v\forall u \quad \big((\neg A(u,v) \vee B(y',u))\ \&$$
$$(\neg\neg\exists w A(w,u) \vee \forall z A(z,v))\big) \quad \vee \exists y'' B(x,y'')\Big)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Продвижение отрицаний

$$\exists x \quad \Bigl(\forall y' \exists v \forall u \quad \bigl((\neg A(u,v) \vee B(y',u)) \;\&\; (\exists w A(w,u) \vee \forall z A(z,v))\bigr) \quad \& \; \forall y'' \neg B(x,y'')\Bigr)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2.

Вынесение кванторов

$$\varphi_2 = \exists x \forall y' \exists v \forall u \exists w \forall z \forall y'' \left(\begin{array}{l} (\neg A(u,v) \vee B(y',u)) \ \& \\ (A(w,u) \vee A(z,v)) \ \& \\ \neg B(x,y'') \end{array} \right)$$

Применение метода резолюций

Решение

Этап 3. Приведем φ_2 к ССФ φ_3.

$$\varphi_3 = \quad \forall y' \quad \forall u \quad \forall z \forall y'' \left(\begin{array}{l} (\neg A(u, f(y')) \vee B(y', u)) \ \& \\ (A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y'))) \ \& \\ \neg B(c, y'') \end{array} \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 4. Формирование системы дизъюнктов S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ.

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{lcl} D_1 & = & \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 & = & A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 & = & \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D_1' = \neg A(u_1, f(y_1')) \vee B(y_1', u_1)$, (вариант D_1)
2. $D_2' = A(g(y_2', u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y_2'))$, (вариант D_2)
3. $D_3' = A(g(y_3', f(y_3')), f(y_3'))$, (склейка D_2')
4. $D_4' = B(y_4', g(y_4', f(y_4')))$, (резольвента D_1' и D_3')
5. $D_5' = \neg B(c, y_5'')$, (вариант D_3)
6. $D_6' = \square$. (резольвента D_4' и D_5')

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Заключение. Успешный резолютивный вывод из S_φ означает, что S_φ — противоречивая система дизъюнктов.

Значит, $\varphi_1 = \neg\varphi$ — невыполнимая формула.

Значит, φ — общезначимая формула,

$$\models \varphi.$$

КОНЕЦ ОТВЕТА НА БИЛЕТ 1.