СПИСОК ВОПРОСОВ, ВЫНОСИМЫЙ НА ЗАЧЕТ

1. Открытые и замкнутые множества на прямой. Канторово множество и его свойства.
2. Свойства внешней меры. Измеримость открытого множества и счетного объединения измеримых множеств. Измеримость замкнутого множества, дополнения измеримого множества , разности и счетного пересечения измеримых множеств.
3. Свойство счетной аддитивности (σ - аддитивности) меры. Множества типа G_δ и F_σ. Пример неизмеримого множества.
4. Измеримые функции и их свойства. Измеримость верхнего и нижнего пределов последовательности измеримых функций.
5. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.
6. Теорема Рисса. Эквивалентность функций, являющихся пределами по мере одной последовательности измеримых функций.
7. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Интегрируемость ограниченной и измеримой функции на множестве конечной меры.
8. Свойства интеграла Лебега от оганиченной функции.
9. Интеграл Лебега от неограниченной и неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Мажорантный признак суммируемости.
10. Интеграл Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
11. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Леви и следствие ее для рядов. Теорема Лебега-критерий интегрируемости.
12. Теорема Фубини. Интеграл Лебега для множества бесконечной меры.
13. Классы Lp, p>1. Неравенства Гельдера и Минковского.
14. Полнота пространства Lp.
15. Плотность множества непрерывных функций в Lp. Непрерывность в метрике Lp.
16. Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.
17. Принцип сжатых отображений. Теорема Бэра о категориях.
18. Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса.
19. Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов.
20. Теорема Банаха-Штейнгауза(принцип равномерной ограниченности) и следствие из нее. Пример из теории рядов Фурье на применение теоремы Банаха-Штейнгауза.
21. Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного оператора.
22. Теорема Банаха об обратном операторе.
23. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в линейном нормированном пространстве.
24. Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах.
25. Слабая сходимость. Связь между сильной и слабой сходимостью. Критерий сильной сходимости.
26. Определение гильбертова пространства и его основные свойства. Теорема об элементе с наименьшей нормой.
27. Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

28. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.
29. Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость ее к нулю.
30. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств.
31. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства.
32. Сопряженный оператор, теорема о сопряженном операторе. Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного оператора и ядра сопряженного.
33. Вполне непрерывный оператор. Пример интегрального вполне непрерывного оператора. Свойства вполне непрерывного оператора.
34. Первая теорема Фредгольма.
35. Вторая теорема(альтернатива) Фредгольма.
36. Третья теорема Фредгольма.
37. Понятие и спектре линейного оператора в бесконечномерных пространствах. Теорема Гильберта-Шмидта.

Задачи по функциональному анализу

1. Какова мощность всех непрерывных функций на $[a,b]$?
2. Доказать, что подмножество $M \subset C[0,1]$ такое, что $M = \{f(x) \mid A \le f(x) \le B\}$-замкнутое в $C[0,1]$
3. Является ли множество M - непрерывных функций, удовлетворяющих условию $A < f(x) < B$ открытым в $C[0,1]$?
4. Доказать, что пространство m - ограниченных последовательностей с метрикой $\rho(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|$ является полным пространством.
5. Пусть A - отображение n-мерного пространства в себя, задаваемое с системой линейных уравнений $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_j$ или $Ax = Y$. В пространстве введена метрика двумя способами: а) $\rho(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$, и б) $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Доказать, что условие $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le \alpha < 1$, $i = 1,\dots,n$ является необходимым и достаточным, чтобы отображение являлось сжатием.
6. Доказать, что любое измеримое множество E на прямой с мерой $|E| = p > 0$ содержит измеримое подмножество меры q, $0 < q < p$.
7. Пусть E - измеримое на сегменте $[0,1]$ и для любого интервала Δ имеет место неравенство $|E \cap \Delta| \le \alpha |\Delta|$, $\alpha < 1$. Доказать, что $|E| = 0$.
8. Пусть A_1 и A_2 - измеримые подмножества сегмента $[0,1]$ и $|A_1| + |A_2| > 1$. Доказать, что $|A_1 \cap A_2| > 0$.
9. Может ли открытое неограниченное множество иметь конечную меру ?
10. Пусть замкнутое множество имеет конечную меру. Может ли оно быть неограниченным ?
11. Доказать, что непрерывные функции на $[0,1]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда они равны.
12. Доказать, что непрерывные на измеримом множестве E функции являются измеримыми.
13. Доказать, что если $f(x)$ имеет производную на сегменте $[a,b]$, то производная $f'(x)$ измерима.
14. Привести пример ограниченной, измеримой функции, не эквивалентной никакой функции, интегрируемой по Риману.
15. Привести пример неизмеримой функции. Доказать, что множество и его характеристическая функция измеримы или не измеримы одновременно.
16. Будет ли измерима функция $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ на $[0,1]$?
17. Будет ли измерима функция $f(x) = \begin{cases} n, x = m/n - рац \\ 1, x - иррац \end{cases}$
18. Пусть E - неизмеримое множество на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Будет ли функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in CE \\ \sin x, & x \in E \end{cases}$ измеримой ?
19. Привести пример ограниченной функции, разрывной в каждой точке отрезка $[a,b]$ и интегрируемой по Лебегу. Будет ли эта функция интегрируема по Риману ? являющейся
20. Привести пример функции, интегрируемой по Лебегу на $[0,1]$, но неограниченной ни на каком отрезке $[\alpha, \beta] \subset [0,1]$.
21. При каких α и β функция $f(x) = x^{\alpha} \sin(x^{\beta})$ интегрируема по Лебегу на $[0,1]$.

22. Доказать, что если $f(x) \geq 0$ на множестве E и $C > 0$, то функция удовлетворяет неравенству Чебышева: $|E[f(x) \geq C]| \leq \frac{1}{C}\int_E f(x)dx$.

23. Существует ли интеграл Лебега от $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ на $[0,1]$?

24. Будет ли функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на $[0,+\infty]$, если
$$f(x) = \begin{cases} 1/x^{\alpha}, & x - \textit{иррац. число}, \\ 0, & x - \textit{рац. число}. \end{cases}$$

25. При каких α и β существует интеграл Лебега на $(1,+\infty]$, от функции $f(x) = x^{\alpha}\ln^{\beta} x$.

26. Существует ли интеграл Лебега на $[2,+\infty)$ от функции $f(x) = 1/x\ln^2 x$.

27. Привести пример последовательности функций, сходящейся по мере на измеримом E, но не сходящейся ни в одной точке множества E.

28. Показать, что из сходимости почти всюду не следует сходимости в среднем. Рассмотреть пример:
$$f_n(x) = \begin{cases} n, \textit{ если } 0 < x < 1/n \\ 0, \textit{ для остальных } x. \end{cases}$$

29. Показать, что из сходимости в среднем не следует сходимости почти всюду. Пример: для любого $n = 2^k + m$, где $0 \leq m < 2^k$ определим $f_n(x) = \begin{cases} 1, \textit{ если } \frac{m}{2^k} \leq x \leq \frac{m+1}{2^k} \\ 0, \textit{ для остальных } x \in R \end{cases}$

30. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости почти всюду. Рассмотрите пример задачи 29.

31. Показать, что из сходимости по мере не следует сходимости в среднем. Пример: при $n = 2^k + m$
$$f_n(x) = \begin{cases} 2^k, \textit{ если } \frac{m}{2^k} \leq x \leq \frac{m+1}{2^k}, \\ 0, \textit{ если } x \notin \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right] \end{cases}$$

32. Показать, что если мера множества E бесконечна, то из сходимости почти всюду не следует сходимость по мере. Пример: $f_n(x) = \begin{cases} 1, n \leq x \leq n+1 \\ 0 \textit{ для остальных } x \in R \end{cases}$

33. Показать, что из сходимости в $L_1[0,1]$ не следует сходимости в $L_2[0,1]$. Пример:
$$f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}}, x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right], \\ 0, \quad x \notin \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right] \end{cases}$$

34. Доказать полноту пространства $C[0,1]$.

35. Будет ли полным пространство многочленов на сегменте $[0,1]$, если метрика вводится по формуле: $\rho(x,y) = \max\limits_{0 \leq t \leq 1}|x(t) - y(t)|$

36. Доказать, что пространство l_2 - сепарабельно.

37. Пусть A - компактное множество в банаховом пространстве X. Доказать, что для любого $x \in X$ найдется точка $y \in A$ такая, что $\rho(x,A) = \|x - y\|$.

38. Если на метрическом компакте $\rho(Ax, Ay) < \rho(x,y)$ для любых x, y, принадлежащих компакту, то оператор A имеет единственную неподвижную точку. Существенно ли условие компактности?

39. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $x(t)$ таких, что $|x(0)| \le K_1$; $\int_0^1 |x'(t)|^2\, dt \le K_2$, где $K_1, K_2 > 0$ - постоянные, компактно в пространстве $C[0,1]$.
40. Будет ли компактом множество всех степеней x^n, $n = 1,2,\ldots$ в пространстве $C[0,1]$.
41. Доказать, что не всякое ограниченное множество в метрическом пространстве компактно.
42. Доказать, что в конечно-мерном пространстве всякое ограниченное множество компактно.
43. Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$. являются линейными и непрерывными и найти их нормы:

   а) $f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$ б) $f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)dt - \int_{0}^{1} x(t)dt$ в) $f(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$

44. Пусть X - множество функций $f(x)$, определенных на всей вещественной прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого конечного интервала. Введем норму, полагая $\|f\| = \max_x |f(x)|$. Будет ли пространство банаховым?
45. Является ли пространство непрерывных на отрезке $C[0,1]$. функций гильбертовым пространством, если скалярное произведение задается следующим образом: $(f,g) = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)dx$?
46. Показать, что если в гильбертовом пространстве H любая последовательность x_n, слабо сходящаяся к x и такая, что $\|x_n\| \to \|x\| (n \to \infty)$, то последовательность x_n сходится сильно.
47. Доказать, что любой линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H достигает нормы на замкнутом единичном шаре.
48. Найти норму оператора A, действующего в пространстве $C[0,1]$ (или в пространстве $L_2[0,1]$) : $Ax = tx(t)$.
49. Определить оператор A^* и нормы операторов A и A^*, если $A: l_2 \to l_2$, где $A(x_1,\ldots,x_n,\ldots) = (0, x_1,\ldots,x_n,\ldots)$.
50. Определить спектр оператора A, действующего в пространстве $l_2 : A(x_1,\ldots,x_n,\ldots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$.
51. В пространстве $C[0,1]$ задан оператор A:

   а) $Ax(t) = tx(t)$ б) $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ в) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$.

   Будет ли оператор A компактным?

52. В пространстве l_2 задан оператор A: $A(x_1, x_2,\ldots,x_n,\ldots) = (o, \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots)$. Доказать, что оператор A компактен, найти его спектр.
53. Привести примеры линейных, но не непрерывных функционалов.