

# Функциональный анализ

## 318, 319 группы (III курс, V семестр)

лектор — доцент Н. Ю. Капустин

1. Открытые и замкнутые множества на прямой. Канторово множество и его свойства.
2. Свойства внешней меры. Измеримость открытого и счетного объединения открытых множеств. Измеримость замкнутого множества, дополнения, разности и счетного пересечения замкнутых множеств.
3. Свойство  $\sigma$ -аддитивности меры. Множества типа  $G_\delta$  и  $F_\sigma$ . Пример неизмеримого множества.
4. Измеримые функции и их свойства. Измеримость верхнего и нижнего пределов последовательности измеримых функций.
5. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Теорема Лебега. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.
6. Теорема Рисса. Эквивалентность функций. Теоремы Егорова и Лузина.
7. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Интегрируемость ограниченной и измеримой функций.
8. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.
9. Интеграл Лебега от неограниченной неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Мажорантный признак суммируемости.
10. Интеграл Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
11. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Теорема Леви и следствие ее для рядов. Теорема Фату. Теорема Лебега — критерий интегрируемости.
12. Теорема Фубини. Интеграл Лебега для неограниченного множества.
13. Классы  $L_p$ ,  $p \geq 1$ . Неравенства Гельдера и Минковского.
14. Полнота пространства  $L_p$ .
15. Плотность множества непрерывных функций в  $L_p(E)$ . Непрерывность в метрике  $L_p(E)$ .
16. Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.
17. Принцип сжимающих отображений. Теорема Бэра.
18. Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса.
19. Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов.
20. Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и следствие из нее.
21. Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного оператора.
22. Теорема Банаха об обратном операторе.
23. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в линейном нормированном пространстве.
24. Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах.
25. Слабая сходимость. Связь между сильной и слабой сходимостью. Критерий сильной сходимости.
26. Определение гильбертова пространства и его основные свойства. Теорема об элементе с наименьшей нормой.
27. Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.
28. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.
29. Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость ее к нулю.
30. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств.
31. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства.
32. Сопряженный оператор, теорема о сопряженном операторе. Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного оператора и ядра сопряженного.
33. Вполне непрерывный оператор. Пример интегрального вполне непрерывного оператора. Свойства вполне непрерывного оператора.
34. Первая теорема Фредгольма о разрешимости уравнения  $Lx = f$ , где  $L = I - A$ ,  $I$  — тождественный,  $A$  — вполне непрерывный операторы.
35. Вторая теорема (альтернатива) Фредгольма.
36. Третья теорема Фредгольма.