КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ (6 СЕМЕСТР) ЛЕКТОР ШКАЛИКОВ А.А.

В нашем нынешнем курсе мы рассмотрим вопросы, которые можно разбить на следующие три части:

1) спектральная теория

Рекомендуемая литература к этой главе - лекции и книга Рид М., Саймон Б. "Функциональный анализ" (это первый том четырехтомника "Методы современной математической физики")

2) обобщенные функции

Хорошей литературы по этой теме лектор нигде не видел, поэтому читать раздел об обобщенных функциях он будет по-своему. Однако есть все же книга, в которой можно будет найти полезные сведения – это книга Гельфанд И., Шилов Г. "Обобщенные функции и действие над ними". В это книге, по словам лектора, представлен такой рабоче-крестьянский подход к изложению темы

3) преобразования Фурье, гармонический анализ

Рекомендуемая литература к этой главе - лекции, книга Рид М., Саймон Б. "Гармонический анализ. Самосопряженность" (это второй том вышеуказанного четырехтомника), а также книга Колмогорова А.Н., Фомина С.В. "Элементы теории функций и функционального анализа"

4) возможен также **аддон** к лекциям в виде дополнительных вопросов спектральной теории, но он появится, если лектор успеет рассказать вышеуказанные три темы

Итак, приступим

ГЛАВА 1. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ.

ВВЕДЕНИЕ

В прошлом семестре мы обозначали пространство всех ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, через $L(X,Y)$. Обозначим здесь и далее через $L(X)$ пространство $L(X,X)$, где X банахово.

Замечание: Пространство $L(X)$ с нормой $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \|Ax\| / \|x\|$ является банаховым.

Замечание: L(X) является даже ***банаховой алгеброй***.

Определение: Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является ***резольвентной точкой*** оператора A (или иначе – ***принадлежит резольвентному множеству*** $\rho(A)$), если оператор $A-\lambda I$ - биекция. Об обозначениях: здесь и далее будем писать вместо $A-\lambda I$ просто $A-\lambda$, а через I будем обозначать тождественный оператор.

Понятие, которое мы сейчас определили очень важно в теории спектров, а потому стоит дать ему еще одно, эквивалентное

Определение: Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ является ***резольвентной точкой*** оператора A, если $\exists$ ограниченный обратный оператор $R_\lambda(A) := (A-\lambda)^{-1}$.

Это действительно будут эквивалентные определения, т.к все мы помним теорему Банаха об обратном операторе. По теореме если у нас есть биективный оператор A из X в X, где X – банахово, то $\exists A^{-1}$ и он ограничен. Обратно, если у нас для оператора A существует ограниченный обратный, то A^{-1} будет определен на всем X. Тогда оператор A обязан быть инъективным, чтобы $\forall x \in X$ существовал однозначно определенный прообраз, сюръективность нужна для того, чтобы был корректно определен обратный.

Определение: Множество $\sigma(A) := C \setminus \rho(A)$ называется ***спектром*** оператора A.

Раньше у нас были различные конечномерные пространства (матрицы $n\times n$, R^n и прочие), в них спектру соответствовали собственные значения. А это понятие уже в свою очередь было важнейшим понятием в линале, дуфурах и других дисциплинах. В ∞-мерном пространстве это понятие наполняется новым содержанием.

Рассмотрим в ∞-мерном банаховом пространстве X вопрос о том, почему оператор $A-\lambda$ может не иметь ограниченного обратного:

1) $Ker(A-\lambda) \neq \{0\}$

Тогда λ является собственным значением (поскольку $\exists\ x \neq 0 :\ (A-\lambda)x = 0$, т.е. $Ax = \lambda x$). И оператор в этом случае задает неинъективное отображение X на себя.

2) $\mathrm{Im}(A-\lambda) \neq X$

Тогда обратный оператор просто не может быть корректно определен, т.к. A не сюръективен.

Замечание: В ∞-мерном пространстве $\mathrm{Im}\,A$ и $KerA$ никак между собой не связаны и поэтому 1) не влечет 2), а 2) не влечет 1).

ПРИМЕР:

Рассмотрим оператор сдвига в l_2. $S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_{2,...})$. Очевидно, что $KerS = \{0\}$, а при этом $\operatorname{Im} S \neq l_2$, т.к. в образе первая компонента всегда равна 0.

ЛЕММА. *Пусть* $A \in L(X)$ *и* $\|X\| < 1$. *Тогда* $1 - A$ *обратим, т.е.* $1 \in \rho(A)$.

<u>Доказательство:</u> Обозначим $B_n = 1 + A + ... + A^n$ и $\|A\| = q < 1$.

Тогда покажем, что последовательность $\{B_n\}$ фундаментальна в $L(X)$: будем считать, что n < m

$\|B_n - B_m\| \leq \|A_{n+1}\| + ... + \|A_m\| = q^{n+1} + ... + q^m < \dfrac{q^{n+1}}{q^m} \to 0$ при $m, n \to \infty$. Т.о. последовательность $\{B_n\}$ в полном пространстве $L(X)$ (ведь $L(X)$ у нас банахово - это было в самом начале лекции) фундаментальна, т.е. сходится к элементу $B \in L(X)$. Заметим, что сходимость у нас равномерная: $B_n \rightrightarrows B$. Далее заметим, что если $C \in L(X)$ и $B_n \rightrightarrows B$, то $CB_n \rightrightarrows CB$ и $B_n C \rightrightarrows BC$. Тогда запишем: $B_n(1 - A) = (1 + A + ... + A^n)(1 - A) = 1 - \underset{\Rightarrow 0}{A^{n+1}} \rightrightarrows 1$. Аналогично получаем, что $(1 - A)B_n \rightrightarrows 1$. Теперь, используя соображение, приведенное чуть выше, получаем $B_n(1 - A) \rightrightarrows B(1 - A)$ и $(1 - A)B_n \rightrightarrows (1 - A)B$. Таким образом, в силу того, что предел у нас единственен, получаем: $B(1 - A) = 1 = (1 - A)B$.

Т.е. оператор B является обратным к $1 - A$ по определению, т.е. $B = (1 - A)^{-1}$. **ЧТД**

Возникшая в ходе доказательства леммы последовательность операторов, очевидно, является последовательностью частичных сумм ряда $1 + A + ... + A^n + ...$. Этот ряд называется ***операторным рядом Неймана***. Ясно, что оператор, обратный к $1 - A$, является суммой указанного ряда, т.е. обратный к $1 - A$ может быть построен в явном виде.

ТЕОРЕМА. $\rho(A)$ *- открытое множество в* $\mathbb{C}$.

<u>Доказательство:</u> Пусть $\mu \in \rho(A)$. Возьмем λ из некоторой окрестности точки μ (радиус этой окрестности мы сейчас укажем). Тогда запишем: $A - \lambda = A - \mu - (\lambda - \mu) = (A - \mu)(1 - (\lambda - \mu)(A - \mu)^{-1})$, $A - \mu$ обратим, т.к. $\mu \in \rho(A)$. Теперь сведем все к известному факту из курса алгебры: если операторы A и B обратимы, то обратим и оператор AB, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Осталось сделать так, чтобы оператор $(1 - (\lambda - \mu)(A - \mu)^{-1})$ был обратим. Воспользуемся только что доказанной леммой: если $\|(\lambda - \mu)(A - \mu)^{-1}\| < 1$, то $1 - (\lambda - \mu)(A - \mu)^{-1}$ обратим. Таким образом, при $|\lambda - \mu| < \dfrac{1}{\|(A - \mu)^{-1}\|}$ по лемме оператор будет обратим. Т.е. если $\mu \in \rho(A)$, то $\forall \lambda$: $|\lambda - \mu| < \dfrac{1}{\|(A - \mu)^{-1}\|}$ оператор $A - \lambda$ обратим. А это значит, что резольвентная точка μ содержится в $\rho(A)$ вместе со своей окрестностью указанного вида. Что и означает, что $\rho(A)$ - открытое множество в $\mathbb{C}$. **ЧТД**

Напомним, что мы условились обозначать через $R_\lambda(A)$ оператор $(A - \lambda)^{-1}$, где $\lambda \in \rho(A)$. В дальнейшем будет полезна

ТЕОРЕМА. *Справедливо тождество Гильберта:*

$\forall \lambda, \mu \in \rho(A)$ *выполнено* $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A)$.

<u>Доказательство:</u> запишем:

$\lambda - \mu = (A - \mu) - (A - \lambda)$, а теперь умножаем это очевидное тождество справа на $R_\lambda(A)$ и слева на $R_\mu(A)$. Учитывая, что $(A - \lambda)R_\lambda(A) = 1$, получаем требуемое. **ЧТД**

ЛЕММА. *Пусть* $\mu \in \rho(A)$ *и* $\lambda \to \mu$. *Тогда* $R_\lambda(A) \rightrightarrows R_\mu(A)$.

Доказательство: поскольку $\lambda \to \mu$, то можем считать, что $\lambda \in \rho(A)$. Тогда $R_\lambda(A) = ((A-\mu)-(\lambda-\mu))^{-1} = (A-\mu)^{-1}(1-(\lambda-\mu)R_\mu(A))^{-1} \Rightarrow (A-\mu)^{-1} = R_\mu(A)$, поскольку $1-(\lambda-\mu)R_\mu(A) \Rightarrow 1$. А это так, поскольку $\|(\lambda-\mu)R_\mu(A)\| = |\lambda-\mu|\|R_\mu(A)\| \to 0$. **ЧТД**

Рассмотрим теперь $A(\lambda)$ - оператор-функцию со значениями в $L(X)$, $\lambda \in \Omega$ - область в C.

Определение: $A(\lambda)$ называется ***голоморфной оператор-функцией***, если $\forall \mu \in \Omega$ $\exists$ $\lim\limits_{\lambda\to\mu} \dfrac{A(\lambda)-A(\mu)}{\lambda-\mu} = A'(\mu)$.

Замечание: Здесь предел понимается в смысле равномерной операторной топологии.

ТЕОРЕМА. $R_\mu(A)$ *- голоморфная оператор-функция в* $\Omega = \rho(A)$.

Доказательство: эта теорема - прямое следствие определения и тождества Гильберта:0

$$\lim_{\lambda\to\mu} \frac{R_\lambda(A)-R_\mu(A)}{\lambda-\mu} \overset{т-во Гильберта}{=} \lim_{\lambda\to\mu} R_\lambda(A)R_\mu(A) \overset{пред.лемма}{=} R_\mu{}^2(A).$$ **ЧТД**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\sigma(A) \subset \mathrm{K}_{\|A\|} = \{\lambda \mid |\lambda| < \|A\|\}$ *- круг радиуса* $\|A\|$.

Доказательство: запишем:

$A-\lambda = -\lambda(1-\lambda^{-1}A)$ - этот оператор обратим, если $\|\lambda^{-1}A\| = |\lambda|^{-1}\|A\| < 1$ по лемме в самом начале. Поэтому, если $|\lambda| > \|A\|$, $\lambda \in \rho(A)$. **ЧТД**

Следующая теорема довольно важна. И студенты, частенько забывая от напряжения о ней на экзаменах, говорят преподавателям:”…ну, значит, нет у этого оператора спектра.” И сразу замечают, как лица экзаменаторов постепенно округляются. Они-то знают, что такого быть не может. Итак,

ТЕОРЕМА. $\sigma(A) \neq \varnothing$.

Т.е. хотя бы одна точка комплексной плоскости в спектре найдется и будет лежать в круге радиуса $\|A\|$. Заметим также, что этот факт верен лишь для ограниченных операторов.

Доказательство: пусть $f \in X$, а $g \in X^*$ (это, напомним, пространство непрерывных линейных функционалов на X, $g: X \to \mathbb{C}$). Введем следующее обозначение: далее будем писать вместо $g(f)$ выражение (f,g), т.е. $g(f) = (f,g)$. Рассмотрим $\Phi(\lambda) = (R_\lambda(A)f, g) = ((A-\lambda)^{-1}f, g)$ - голоморфную в $\rho(A)$ функцию, это будет $\forall f \in X, g \in X^*$. Это будет обычная голоморфная функция (для пущей убедительности – “скалярная”).

Пусть $\sigma(A) = \varnothing$. Тогда $\Phi(\lambda)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и при этом $\Phi(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ в силу того, что $\|A\| = Const$ и $(A-\lambda)^{-1} = -\underset{\Rightarrow 0}{\lambda^{-1}}(\underset{\Rightarrow 1}{1-\lambda^{-1}A})^{-1} \Rightarrow 0$, т.е. при $\lambda \to \infty$ резольвентный оператор $R_\lambda(A)$ по норме стремится к нулю, поэтому при фиксированных элементах f и g: $\|R_\lambda(A)f\| \to 0$ и тем более $(R_\lambda(A)f, g) \to 0$. А раз $\Phi(\lambda)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и $\Phi(\lambda) \to 0$, то $\Phi(\lambda)$ ограничена в $\mathbb{C}$. А т.к. $\Phi(\lambda)$ ограничена и голоморфна в $\mathbb{C}$, то по теореме Лиувилля $\Phi(\lambda) = Const$. Далее, учитывая, что на ∞-ти $\Phi(\lambda) \to 0$, получаем, что $\Phi(\lambda) \equiv 0$ $\forall f \in X, g \in X^*$. Но очевидно, при некотором $f \neq 0$ обратимый оператор $R_\lambda(A)$ переводит его в элемент $y \neq 0$, но тогда $\exists g \in X^* u \neq 0$: $g(y) \neq 0$. Т.е получили противоречие. **ЧТД**

// 2я лекция

Определение: Число $r(A) := \inf_r \{\sigma(A) \subset \mathrm{K}_r\}$ называется ***спектральным радиусом*** оператора A.

Можно дать эквивалентное определение понятия спектрального радиуса (вполне очевидное): $r(A) := \sup\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$. Причем этот супремум достигается, т.к. спектр – замкнутое множество (компакт).

А теперь мы докажем аналог формулы Коши-Адамара

ТЕОРЕМА. $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|$.

Доказательство: обозначим правую часть формулировки через S, т.е. $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Заметим, что $(A-\lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}A)^{-1} = -\lambda(1+\lambda^{-1}A+\lambda^{-2}A^2+...) = -\lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^{-1}A)^k$ (*). Этот ряд сходится в равномерной топологии при $|\lambda| > S$, т.к. $\left\|\lambda^{-n-1}A^{n+1}+...+\lambda^{-m}A^m\right\| \to 0$ при $m,n \to 0$, поскольку $\forall \varepsilon > 0$ $\left\|A^n\right\| \le (S+\varepsilon)^n$, т.е. все λ такие, что $|\lambda| > S$ принадлежат $\rho(A)$. Значит, $r(A) \le S$.

Докажем, что $r(A) \ge S$. Рассмотрим фиксированные $f \in X, g \in X^*$ и рассмотрим $\Phi(\lambda) = ((A-\lambda)^{-1}f, g) = g((A-\lambda)^{-1}f)$ - скалярная голоморфная в $\rho(A)$ функция. Разложим $\Phi(\lambda)$ в ряд Лорана в точке ∞: $\Phi(\lambda) = -\lambda^{-1}\sum_0^{\infty}(A^k f, g)\lambda^{-k}$. $\Phi(\lambda)$ голоморфна при $|\lambda| > r(A)$ по определению спектрального радиуса (т.к. спектр лежит в круге радиуса $r(A)$). Т.к. ряд Лорана сходится, то выполнено необходимое условие: $\forall \varepsilon > 0$ $|(A^k f, g)| \le C(r(A)+\varepsilon)^k$ при $k \ge k_0(\varepsilon)$, где $C = C(f,g)$. Рассмотрим функционал на X^*: $(r(A)+\varepsilon)^{-k}(A^k f, g) : X^* \to \mathbb{C}$. По теореме Банаха-Штейнгауза имеем $\forall k$ $\left\|(r(A)+\varepsilon)^{-k}(A^k f, g)\right\| \le C(f,g,\varepsilon)$. "Разморозим" g, тогда по теореме Банаха-Штейнгауза имеем, что $\exists C = C(f,\varepsilon)$ такое, что $(r(A)+\varepsilon)^{-k}\left\|A^k f\right\| \le C(f,\varepsilon)$. Теперь "разморозим" f и опять применим теорему Банаха-Штейнгауза: $(r(A)+\varepsilon)^{-k}\left\|A^k\right\| \le C(\varepsilon)$. Значит, $\left\|A^k\right\| \le C(\varepsilon)(r(A)+\varepsilon)^k$, что равносильно $\left\|A^k\right\|^{1/k} \le C^{1/k}(\varepsilon)(r(A)+\varepsilon)$. Но $\sqrt[k]{c} \to 1, k \to \infty$, значит, $S = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|} \le r(A)+\varepsilon$ и это $\forall \varepsilon$. Следовательно, $S = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|} \le r(A)$. Откуда и следует утверждение теоремы. **ЧТД**

Этот вариант предлагался на лекции. Если он читателя не устроит, предлагается другое доказательство по мотивам книжки Кириллова и Гвишиани [2]. Итак,

Доказательство: для начала рассмотрим положительную последовательность $\{a_n\}_1^{\infty}$ со свойством: $0 \le a_{n+m} \le a_n + a_m$. Покажем, что предел $\lim \frac{a_n}{n}$ существует и равен $\inf \frac{a_n}{n}$. Заметим, что $a_{n+1} \le a_n$. Далее, чтобы сравнить $\frac{a_n}{n}$ и $\frac{a_{n+1}}{n+1}$, достаточно сравнить $na_n + a_n$ и na_{n+1}, а для этого достаточно сравнить $n(a_n - a_{n+1}) + a_n$ и 0. Но в силу только что сделанного замечания $n(a_n - a_{n+1}) + a_n \ge 0$, значит, $\frac{a_n}{n} \ge \frac{a_{n+1}}{n+1}$, т.е. последовательность $b_n = \frac{a_n}{n}$ невозрастающая с положительными членами. Значит $\exists \lim \frac{a_n}{n} = \inf \frac{a_n}{n}$.

Теперь положим $a_n = \ln\left\|A^n\right\|$, в силу $\|BC\| \le \|B\|\|C\|$ имеем $\left\|A^{n+m}\right\| \le \left\|A^n\right\|\left\|A^m\right\|$, что в терминах последовательности запишется $0 \le a_{n+m} \le a_n + a_m$. Значит, $\exists \lim \frac{a_n}{n} = \lim \ln\left\|A^n\right\|^{1/n} = \inf \ln\left\|A^n\right\|^{1/n}$, а значит, в силу непрерывности и монотонного возрастания логарифма на R_+ получаем, что $\exists \lim\left\|A^n\right\|^{1/n} = \inf\left\|A^n\right\|^{1/n}$.

Осталось заметить, что разложение резольвенты в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки задается формулой (*) из первого доказательства. Радиус сходимости этого ряда R, очевидно, равен $r(A)$. Однако, по формуле Адамара радиус сходимости вышеобозначенного ряда связан с коэффициентами разложения соотношением $R = \underline{\lim}\left\|A^n\right\|^{1/n} = \lim\left\|A^n\right\|^{1/n}$. **ЧТД**

Замечание: рассмотрим следующий оператор $Af(x) = \int_0^x f(t)dt$ в $L_2(0,1)$. Можно показать, что его спектральный радиус $r(A) = 0$, при этом $\|A\| = 1$, как нетрудно видеть, т.е. $r(A) \ne \|A\|$.

СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Так исторически сложилось, что единого подхода к определению сопряженного оператора нет. В разных пространствах это понятие вводят по-разному. Сначала мы определим его для банаховых пространств и рассмотрим свойства сопряженного оператора в банаховом пространстве. А затем перейдем к рассмотрению сопряженных операторов в гильбертовых пространствах.

СЛУЧАЙ БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА:

Пусть $f \in X$ и $g \in X^*$, а $A \in L(X)$. Тогда введем обозначение (было в прошлом семестре): $g(Af) = (Af, g)$. При фиксированном $g \in X^*$ это будет некоторый линейный функционал на X, поэтому $\exists! g^* \in X^*$: $(Af, g) = (f, g^*) = g^*(f)$. Важно понимать, что это не теорема Рисса(!). Определим теперь ***сопряженный оператор*** A^*: $\forall g \in X^*$ мы строим вышеуказанным способом элемент $g^* \in X^*$ и полагаем $A^* g = g^*$. Таким образом, по определению $A^* : X^* \to X^*$, при этом сопряженный к линейному непрерывному A оператор A^* тоже будет линейным и непрерывным на X^*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *A^* – ограниченный оператор из X^* в X^*.*

<u>Доказательство:</u> заметим, что $\|A\| = \sup\limits_{f\neq 0, g\neq 0} \dfrac{|(Af, g)|}{\|f\|\|g\|}$, аналогично и про сопряженный можно записать $\|A^*\| = \sup\limits_{f\neq 0, g\neq 0} \dfrac{|(f, A^* g)|}{\|f\|\|g\|}$. А поскольку $(Af, g) = (f, A^* g)$ по определению, то очевидно получаем $\|A\| = \|A^*\|$. А это значит, что A^* ограничен. **ЧТД**

Теперь докажем некоторые

СВОЙСТВА операции сопряжения:

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$

Док-во: $(f, (A+B)^* g) = ((A+B)f, g) = (Af, g) + (Bf, g) = (f, A^* g) + (f, B^* g) = (f, (A^* + B^*)g)$

2) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$ Док-во: $(f, (\lambda A)^* g) = ((\lambda A) f, g) = \lambda (Af, g) = \lambda (f, A^* g) = (f, \lambda A^* g)$

3) $(AB)^* = B^* A^*$ Док-во: $(f, (AB)^* g) = ((AB) f, g) = (A(Bf), g) = (Bf, A^* g) = (f, B^* A^* g)$

А из свойства 3) следует, что $(A^{-1})^* A^* = (AA^{-1})^* = I^* = (A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^* = I$, т.е. $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Таким образом, операции сопряжения и обращения коммутируют.

СЛУЧАЙ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА:

Пусть теперь $X = H$ и $A : H \to H$. Сейчас воспользуемся тем, что в H есть скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$.

<u>Определение:</u> Оператор A^* называется ***сопряженным*** к оператору A, если $\forall x, y \in H \;\; (Ax, y) = (x, A^* y)$.

<u>Замечание:</u> Важно различать: в банаховом X сопряженный A^* действует из X^* в X^*, а в гильбертовом H сопряженный оператор действует из H в H. Но как и в случае банаховых пространств в гильбертовых сопряженный к A оператор существует и единственен (это следствие теоремы Рисса-Фреше у нас было в прошлом семестре).

У сопряжения в гильбертовом пространстве имеются аналогичные сопряжению в банаховом

СВОЙСТВА:

1) $(A+B)^* = A^* + B^*$

2) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ Док-во: $(f, (\lambda A) g) = (\lambda A f, g) = \lambda (Af, g) = \lambda (f, A^* g) = (f, \overline{\lambda} A^* g)$

3) $(AB)^* = B^* A^*$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

Здесь черта означает сопряжение.

<u>Доказательство:</u> сперва заметим, что $(A-\lambda)^* = A^* - \overline{\lambda}$. Тогда $((A-\lambda)^{-1})^* = (A^* - \overline{\lambda})^{-1}$. Откуда получаем, что если $\lambda \in \rho(A)$, то $\overline{\lambda} = \rho(A^*)$. А это значит, что $\overline{\rho(A)} = \rho(A^*)$. Или, что равносильно, $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$. **ЧТД**

<u>Замечание:</u> Ясно, что подобные рассуждения можно прокрутить и для банахова пространства, тогда получим, что в банаховых пространствах $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

<u>Важная договоренность:</u> Далее, если не оговорено противное, полагаем, что $X = H$ **- гильбертово, причем сепарабельно**. Также разумно рассматривать лишь бесконечномерные пространства, т.к. конечномерные пространства и так были хорошо разобраны в курсе линала. Отклонения от уговора будут отмечаться особо.

ТЕОРЕМА. $H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus Ker A^*$.

Замечание: Здесь черта означает замыкание. $KerA$ всегда замкнут. В теореме оператор A и сопряженный ему A^* можно поменять местами - $H = \overline{\operatorname{Im} A^*} \oplus KerA$.

Доказательство: пусть $x = Ay \in \operatorname{Im} A$, а $z \in KerA^*$. Тогда $(x,z) = (Ay,z) = (y, A^*z) = 0$, т.е. $\operatorname{Im} A \perp KerA^*$. А значит $\overline{\operatorname{Im} A} \perp KerA^*$, т.к. скалярное произведение непрерывно.

Почему их сумма даст все H? Пусть $z \perp \overline{\operatorname{Im} A} \oplus KerA^*$, тогда $\forall y \in H$ имеем $(z, Ay) = (A^*z, y) = 0$, т.к. $z \perp \operatorname{Im} A$. Но это значит, $\forall y \ (A^*z, y) = 0 \Rightarrow A^*z = 0$. Но $z \perp KerA^* \Rightarrow z = 0$. Т.е. $H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus KerA^*$. **ЧТД**

ЛЕММА. *Пусть* $\exists \varepsilon > 0 : \|Ax\| > \varepsilon \|x\| \ \forall x \in H$. *Тогда* $\operatorname{Im} A$ *замкнут.*

Доказательство: условие в теореме означает *отделенность от нуля* оператора. Пусть $\{x_n\} \subset \operatorname{Im} A$, $x_n = Ay_n$, и $x_n \to x$. Докажем, что $\exists y \in H : Ay = x$. Заметим, что $\varepsilon \|y_n - y_m\| \le \|A(y_n - y_m)\| = \|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. А тогда $\{y_n\}$ - фундаментальна в $H \Rightarrow \exists y : y_m \to y$ при $m \to \infty$. Но тогда $x_n = Ay_n \to Ay = x$, где $x \in \operatorname{Im} A$. **ЧТД**

УПРАЖНЕНИЕ. *Доказать, что в условиях леммы у оператора A $\exists$ левый обратный.*

ТЕОРЕМА.(Следствие из леммы) *Если* $\forall x \in H \ \|Ax\| \ge \varepsilon \|x\|$ *и* $KerA^* = \varnothing$, *то* A *обратим.*

Определение: Множество $W(A) = \{(Af, f) \mid f \in H, \|f\| = 1\}$ называется ***числовым образом оператора***.

ТЕОРЕМА. $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$, более того $\|(A-\lambda)^{-1}\| \le 1 / dist(\lambda, W(A))$.

Здесь $dist(\lambda, W(A))$ означает расстояние от резольвентной точки λ до замыкания множества $W(A)$.

Доказательство: по выражению лектора дешевое доказательство

Пусть $\delta = dist(\lambda, W(A)) > 0$. Тогда $\delta \le_{\|f\|=1} |(Af, f) - \lambda| = |((A-\lambda) f, f)| \le \|(A-\lambda) f\| \|f\| = \|(A-\lambda) f\|$.

Итак, получили

(1) $\|(A-\lambda) f\| \ge_{\|f\|=1} \delta$, тогда $\forall f \in H \ \|(A-\lambda) f\| \ge \delta \|f\|$

(2) $\delta \le |(Af, f) - \lambda| = |\overline{(Af, f)} - \overline{\lambda}| = |(f, Af) - \overline{\lambda}| = |((A^* - \overline{\lambda}) f, f)| \le_{\|f\|=1} \|(A^* - \overline{\lambda}) f\|$. Следовательно, $\forall f \in H \ \|(A^* - \overline{\lambda}) f\| \ge \delta \|f\|$

(2) Говорит о том, что $Ker(A-\lambda)^* = \{0\}$ и $Ker(A-\lambda) = \{0\}$. Из (1) и (2) получаем, что $(A-\lambda)$ обратим по предыдущей теореме-следствию. Таким образом, мы взяли число не из $\overline{W(A)}$ и показали, что это число лежит в $\rho(A)$. Значит, $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$.

Далее, из (1) имеем также, что $(A-\lambda) f = g \Rightarrow f = (A-\lambda)^{-1} g \Rightarrow \|(A-\lambda)^{-1} g\| = \|f\|$ и $\|g\| = \|(A-\lambda) f\|$, но тогда $\dfrac{\|(A-\lambda)^{-1} g\|}{\|g\|} = \dfrac{\|f\|}{\|g\|} = \dfrac{\|f\|}{\|(A-\lambda) f\|} \le \dfrac{1}{\delta}$, а значит, когда будем брать супремум по всем $g \ne 0$, он окажется также $\le 1/\delta$. Т.е. $\|(A-\lambda)^{-1}\| = \sup\limits_{g \ne 0} \dfrac{\|(A-\lambda)^{-1} g\|}{\|g\|} \le \dfrac{1}{\delta}$ - еще одно утверждение теоремы. **ЧТД**

/// 3я лекция

ТЕОРЕМА(Теплица-Хаусдорфа).

Числовой образ оператора A $W(A)$ – выпуклое множество, т.е. $\forall \omega_1, \omega_2 \in W(A)$ отрезок $[\omega_1, \omega_2] = t\omega_1 + (1-t)\omega_2 \in W(A), t \in (0,1)$.

Доказательство: пусть $\omega_1 = (Af_1, f_1)$ и $\omega_2 = (Af_2, f_2)$, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$. Покажем, что $\forall t \in (0,1) \ \exists z \in C : (Ah, h) = t\omega_1 + (1-t)\omega_2$, где $h = \dfrac{f_1 + zf_2}{\|f_1 + zf_2\|}$, т.е. $\|h\| = 1$. Ясно, что это и будет означать справедливость теоремы. А то, что мы записали, эквивалентно следующему: $\forall t \in (0,1) \ \exists z$ такой, что

$(A(f_1+zf_2),f_1+zf_2)-[t\omega_1+(1-t)\omega_2](f_1+zf_2,f_1+zf_2)=0$ (*). После приведения этого выражения к виду уравнения от z, получим: $p|z|^2+az+b\bar{z}+q=0$. Для нашего доказательства a и b не важны, найдем p и q:

$p=\overbrace{(Af_2,f_2)}^{=\omega_2}-[t\omega_1+(1-t)\omega_2]=t(\omega_2-\omega_1)$ и $q=\overbrace{(Af_1,f_1)}^{=\omega_1}-[t\omega_1+(1-t)\omega_2]=(t-1)(\omega_2-\omega_1)\in C$. Итак, получили уравнение на z. Пусть $z=x+iy$, тогда (*) перепишется: приведенные уравнения

$\begin{cases}(x^2+y^2)+a_1x+a_2y+p/q=0-(\mathrm{Re})\\ cx+dy=0-(\mathrm{Im})\end{cases}$. Это уравнение на точки пересечения окружности (с началом координат внутри нее) и примой, проходящей через это начало. Очевидно, у нас есть всегда два различных решения этой системы. А значит, аж две точки в C, удовлетворяющие условию (*). **ЧТД**

САМОСОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР

Определение: Оператор A называется ***самосопряженным***, если $A=A^*$.
Далее, если это особо не оговорено, все операторы самосопряженные.

Мы уже знаем, что в гильбертовом пространстве $\sigma(A^*)=\overline{\sigma(A)}$, в частности, спектр самосопряженного оператора симметричен относительно вещественной оси. Докажем более сильное утверждение:

ТЕОРЕМА. *Пусть* A *- самосопряженный, тогда* $\sigma(A)$ *вещественный.*

Доказательство: в теореме о числовом образе мы установили, что $\sigma(A)\subset\overline{W(A)}$. А если $A=A^*$, то $(Af,f)=(f,A^*f)=(f,Af)=\overline{(Af,f)}$, т.е. числовой образ состоит из чисел, которые себе комплексно сопряжены, а значит, вещественны. Таким образом, $W(A)\subset R\Rightarrow\sigma(A)\subset R$. **ЧТД**

Итак, если A самосопряженный, то $W(A)\subset R$ (как и $\overline{W(A)}\subset R$), а помня теорему Теплица-Хаусдорфа, т.е. что $\overline{W(A)}$ выпуклое множество, легко видеть, что $\overline{W(A)}=[\nu,\mu]\subset R$ некоторый отрезок:

$\nu=\inf\limits_{\|f\|=1}(Af,f)$ и $\mu=\sup\limits_{\|f\|=1}(Af,f)$. Важно понимать, что вовсе не обязательно $\sigma(A)=[\nu,\mu]$

ЛЕММА. *Пусть* $A=A^*$ *и* $\rho=\max\{|\nu|,|\mu|\}$. *Тогда* $\|Af\|\le\rho\|f\|$.

Доказательство: $\|Af\|^2=\frac{1}{4}\{(A(\lambda f+\frac{1}{\lambda}Af),(\lambda f+\frac{1}{\lambda}Af))-(A(\lambda f-\frac{1}{\lambda}Af),(\lambda f-\frac{1}{\lambda}Af))\}\le$

$\le 1/4\,\rho(\|(\lambda f+1/\lambda\,Af)\|^2+\|(\lambda f-1/\lambda\,Af)\|^2)\overset{рав.парал-ма}{=}1/2\,\rho(\lambda^2\|f\|^2+1/\lambda^2\,\|Af\|^2)=(*)$

это неравенство верно $\forall\lambda$, возьмем $\lambda=(\|Af\|/\|f\|)^{1/2}$. Тогда запишем: $(*)=\rho\|Af\|\|f\|$. Таким образом, $\|Af\|^2\le\rho\|f\|\|Af\|\Rightarrow\|Af\|\le\rho\|f\|$. **ЧТД**

ТЕОРЕМА. *Если* $A=A^*$, *то* $\|A\|=\rho=r(A)$.

Доказательство: только что мы доказали, что $\|A\|\le\rho$. Докажем обратную оценку:

$\rho=\sup\limits_{\|f\|=1}(Af,f)\le\sup\limits_{\|f\|=1}\|Af\|\underbrace{\|f\|}_{=1}=\sup\limits_{\|f\|=1}\|Af\|\overset{def}{=}\|A\|$. А значит, $\rho=\|A\|$. Далее, мы доказывали, что $r(A)\le\|A\|$. Но ведь $r(A)=\max\{\lambda\mid\lambda\in\sigma(A)\}$, а ν и $\mu\in\sigma(A)$ (это мы сейчас докажем), следовательно, указанный максимум достигается либо на ν, либо на μ. **ЧТД**

ТЕОРЕМА. *Пусть* A *- самосопряженный, а* $\nu=\inf\limits_{\|f\|=1}(Af,f)$ *и* $\mu=\sup\limits_{\|f\|=1}(Af,f)$. *Тогда* $\nu,\mu\in\sigma(A)$.

Доказательство: рассмотрим оператор $B=\frac{1}{\mu-\nu}(A-\nu)$. Проверим, что $0\le(Bf,f)\le(f,f)$. Достаточно проверить это неравенство на единичной сфере: пусть $\|f\|=1$, тогда

$(Bf,f)=(\frac{1}{\mu-\nu}(A-\nu)f,f)=\frac{1}{\mu-\nu}(Af,f)-\frac{\nu}{\mu-\nu}\underset{=1}{(f,f)}=\frac{1}{\mu-\nu}\underset{\in W(A)}{(Af,f)}-\frac{\nu}{\mu-\nu}$. Но для всех элементов числового образа выполнено: $\nu\le(Af,f)\le\mu$, подставляя это двойное неравенство в выражение строкой выше получаем, что при $\|f\|=1$ $0\le(Bf,f)\le1$. А это означает, что $\forall f$ $0\le(Bf,f)\le(f,f)$. Таким образом, $W(B)\subset[0,1]$, при этом (важно!) $\nu=\inf\{W(A)\}\Leftrightarrow 0=\inf\{W(B)\}$ и $\mu=\sup\{W(A)\}\Leftrightarrow 1=\sup\{W(B)\}$. То же самое можно сказать, заменив числовой образ на спектр: $\nu\in\sigma(A)\Leftrightarrow 0\in\sigma(B)$ и $\mu\in\sigma(A)\Leftrightarrow 1\in\sigma(B)$. По предыдущей теореме $\|B\|=1$, т.к. $1=\rho=\max\{|\sup W(B)|,|\inf W(B)|\}$, как видно ниже. Поэтому $(Bf,Bf)=\|Bf\|^2\le\|B\|^2\|f\|^2=\|f\|^2$.

Но $\mu\in\overline{W(A)}\Rightarrow 1\in\overline{W(B)}\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists f_\varepsilon:\|f_\varepsilon\|=1$ и $(Bf_\varepsilon,f_\varepsilon)_{\in W(B)}\ge1-\varepsilon\Rightarrow$ $\|(B-1)f_\varepsilon\|^2=((B-1)f_\varepsilon,(B-1)f_\varepsilon)=(Bf_\varepsilon,Bf_\varepsilon)_{\le1}+(f_\varepsilon,f_\varepsilon)_{=1}-2(Bf_\varepsilon,f_\varepsilon)_{т.к.\,B=B^*}\le2-2(1-\varepsilon)=2\varepsilon$. А раз так, то оператор $B-1$ необратим. Следовательно, $1\in\sigma(B)\Rightarrow\mu\in\sigma(A)$.

Аналогичное доказательство проводится и для того, чтобы доказать, что $\nu\in\sigma(A)$. Для этого надо рассмотреть оператор $B=\frac{1}{\nu-\mu}(A-\mu)$. В этом случае также будет $\|B\|=1$ и $\nu\in\sigma(A)\Leftrightarrow1\in\sigma(B)$. **ЧТД**

Замечание: попутно в доказательстве мы применили одну замечательную конструкцию. Мы ввели сравнение оператора с числами, а соответственно и операторов между собой. Подробнее об этом в (Д).

Теперь мы готовы приступить к одной из важных теорем.

ТЕОРЕМА (Гильберта). *Пусть $A=A^*$ и A - компактный оператор в гильбертовом сепарабельном пространстве H. Тогда в H $\exists$ ПОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, состоящая из собственных векторов, отвечающих собственным значениям μ_n оператора A, причем $\mu_n\to0$.*

По поводу утверждения необходимо сказать несколько слов, т.к. теорема действительно важная.

Во-первых, теорема утверждает, что спектр компактного самосопряженного оператора состоит из собственных значений $\{\mu_n\}$ оператора A конечной кратности, которые имеют “единственную предельную точку в нуле” (слова лектора).

Во-вторых, здесь используется факт, который часто игнорируется студентами, а именно, что ядро оператора – это тоже собственные вектора, отвечающие собственному значению 0.

// 4я лекция

Для доказательства сформулированной теоремы нам понадобятся вспомогательные утверждения. Приступим к их доказательству. В формулировках лемм будем вместо “A - самосопряженный” писать “$A=A^*$”.

ЛЕММА1. *Пусть $A=A^*$, A - компактный и $\overline{W(A)}=[\nu,\mu]$. Тогда, если $\mu\ne0$, μ - собственное значение.*

<u>Доказательство:</u> имеем $H=Ker(A-\mu)\oplus\overline{\mathrm{Im}(A-\mu)}$, т.к. $A=A^*$ и $(A-\mu)^*=A^*-\mu^*=A-\mu$. Тогда, если $Ker(A-\mu)\ne\{0\}$, μ - собственное значение. И все доказано.

Пусть $Ker(A-\mu)=\{0\}$, тогда $\overline{\mathrm{Im}(A-\mu)}=H$. Если $\exists\varepsilon>0:\|(A-\mu)f\|>\varepsilon\|f\|\ \forall f\in H$, то $\mathrm{Im}(A-\mu)$ замкнут. Следовательно, $\mathrm{Im}(A-\mu)=H$ и $Ker(A-\mu)=\{0\}$, т.е. $A-\mu$ - обратим по теореме Банаха об обратном операторе (в самой первой лекции у нас было соображение о том, что если $KerA=\{0\}$ и $\mathrm{Im}A=H$, то A - биекция). Но тогда получили противоречие с тем, что $\mu\in\sigma(A)$. Т.е. такого $\varepsilon\ \nexists$.

Тогда $\exists\{f_n\}:\|f_n\|=1$ и $\|(A-\mu)f_n\|\to0$, т.е. $Af_n\xrightarrow{сильно}\mu f_n$ (*). Но по условию $\{Af_n\}$ - предкомпактно $\Rightarrow\exists\ \{n_k\}$: $Af_{n_k}\to g$. И тогда, учитывая (*), $\mu f_{n_k}\to g$ или, по-другому, $f_{n_k}\to\frac{1}{\mu}g=:h$. А т.к. A - ограниченный оператор, то $Af_{n_k}\to Ah$. Откуда очевидно следует: $Ah-\mu h=0$. При этом $\|h\|=1$, т.к. $\|f_{n_k}\|=1$. Т.о. мы нашли собственный вектор h для собственного значения μ. **ЧТД**

ЛЕММА2. *Пусть A - компактный. Тогда $\forall\mu\ne0$, $\mu\in\sigma(A)$, имеем:* $\dim Ker(A-\mu)<\infty$.

Доказательство: пусть $\mu \in \sigma(A)$ и $Ker(A-\mu) = H_0 \subset H$ (H_0 - собственное подпространство, т.е. $H_0 \neq H$, т.к., если бы $H_0 = H$, тогда бы $A = \mu I$, который, очевидно, не является компактным (т.к. по договоренности H - бесконечномерно)). Допустим, что $\dim H_0 = \infty$. Тогда $A\big|_{H_0} = \mu I$, $\mu \neq 0$ - мы взяли сужение оператора на подпространство H_0. В нем тождественный (как и гомотетичный) оператор не является компактным $\Rightarrow$ противоречие. **ЧТД**

Замечание: По завершении доказательства лектором была брошена фраза о том, что компактные операторы есть почти то же самое, что и матрицы. Заметим также, что это означает, что любое собственное значение для компактного самосопряженного оператора имеет конечную кратность.

ЛЕММА3. *Если $A = A^*$ и $\mu_1 \neq \mu_2$ - собственные значения оператора A, то $Ker(A-\mu_1) \perp Ker(A-\mu_2)$.*

Доказательство: пусть $f \in Ker(A-\mu_1)$, а $g \in Ker(A-\mu_2)$, т.е. $Af = \mu_1 f$ и $Ag = \mu_2 g$. Далее, $(Af,g) = (f,Ag)$, т.к. A - самосопряженный. Но тогда $\mu_1(f,g) = (Af,g) = (f,Ag) = \mu_2(f,g)$ (в последнем переходе должно было стоять сопряжение, но ведь у самосопряженного оператора спектр вещественен, поэтому сопряжения нет). А т.к. $\mu_1 \neq \mu_2$, то $(f,g) = 0$. **ЧТД**

ТЕОРЕМА (Гильберта). *Пусть $A = A^*$ и A - компактный. Тогда $\sigma(A) = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$, $\mu_n \to 0$, $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots$ Каждое собственное значение нумеруется столько раз, какова его кратность. Тогда $\exists$ ОНС $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\omega}$ из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям μ_n. А если $\{\psi_n\}_{n=1}^{\omega'}$ - ПОНС в $KerA$, то $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\omega} \cup \{\psi_n\}_{n=1}^{\omega'}$ есть ПОНС в H, где $\omega, \omega' \in \overline{N}$.*

Доказательство: т.к. $A = A^*$ и A - компактный, то $[\nu, \mu]$ - числовой образ.

Если $\nu = \mu = 0$, то $\|A\| = \max\{|\nu|, |\mu|\} = 0$, т.е. $A = 0$, и справедливость утверждения очевидна, т.к. любая ПОНС будет удовлетворять утверждению теоремы.

Пусть, например, $\rho = \max\{|\nu|, |\mu|\} = |\mu| \neq 0$ (для случая $\lambda \neq 0$ будет все аналогично). Тогда обозначим $\mu_1 = \mu$ - максимальное по модулю собственное значение конечной кратности. Выберем ПОНС $\{\varphi_k\}_1^{n_1}$ в $H_1 = Ker(A-\mu_1)$. Таким образом, $H_1 = Lin\{\varphi_k\}_1^{n_1}$ и H_1 инвариантно относительно A. Далее рассмотрим $H_1^{\perp} = Ker(A-\mu_1)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im}(A-\mu_1)}$, инвариантное относительно A. Далее рассмотрим сужение оператора A на $H_1^{\perp}$: $A_1 = A\big|_{H_1^{\perp}}$ - он самосопряжен в $H_1^{\perp}$ и компактен. Теперь μ_1 не есть его собственное значение, и $\overline{W(A_1)} = [\nu, \mu']$, где $\mu' < \mu_1$ (если бы оказалось, что $\mu = \mu_1$, это бы означало, что $H_1^{\perp} \not\perp H$).

Повторим процесс далее. В качестве следующего значения берем $\mu_2 = \max\{|\nu|, |\mu'|\}$. Тогда либо $+\mu_2$, либо μ_2 – собственное значение конечной кратности. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu_2 > 0$. Тогда $Ker(A_1 - \mu_2) = H_2 \subset H_1^{\perp}$, $\dim H_2 < \infty$. Выберем в H_2 ПОНС $\{\varphi_k\}_{n_1+1}^{n_2}$. Продолжая так и далее, получим последовательность собственных значений: $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \ldots$, при это мы построим ОНС $\{\varphi_k\}_1^{n_1} \cup \{\varphi_k\}_{n_1+1}^{n_2} \cup \{\varphi_k\}_{n_2+1}^{n_3} \cup \ldots (*)$

Если A имеет конечное число собственных значений (т.е. он конечномерный), то процесс оборвется на m-ом шаге, и мы получим конечную ОНС собственных векторов оператора A, которая очевидно будет полной в $\bigcup_1^m H_k$. В конце получим (после последнего сужения) нулевой оператор. Выбираем на $KerA$ ПОНС $\{\psi_k\}_1^{\omega_1}$, можно так сделать т.к. $KerA$ - есть гильбертово пространство. И тогда (*) вместе с $\{\psi_k\}_1^{\omega_1}$ образуют ПОНС в H.

Пусть процесс не оборвется, тогда число СЗ бесконечно. Докажем, что $|\mu_n| \to 0$.

Предположим, что $\forall \mu_k \; |\mu_k| \geq \varepsilon$, тогда $A\varphi_n = \mu_n \varphi_n$ и $\|A\varphi_n\| = |\mu_n| \|\varphi_n\| \geq \varepsilon$, т.к. $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\omega}$ - ОНС и $\|\varphi_n\| = 1$. А тогда $\rho(\mu_k\varphi_k, \mu_n\varphi_n) = \|\mu_k\varphi_k - \mu_n\varphi_n\| \geq \sqrt{2}\varepsilon > \varepsilon$, т.к. вектора $\mu_k\varphi_k$ и $\mu_n\varphi_n$ ортогональны, поэтому

$\left\|\mu_k\varphi_k - \mu_n\varphi_n\right\| = \sqrt{\mu_k{}^2 + \mu_n{}^2} \geq \sqrt{2}\varepsilon$. А значит, образ оператора A непредкомпактен. Противоречие с определением компактного оператора. $\Rightarrow$ $|\mu_n| \to 0$.

Далее, возьмем $\bigcup_{j=0}^{\infty} \{\varphi_k\}_{n_j+1}^{n_{j+1}}$ - ПОНС по построению, $n_0 = 0$. Рассмотрим $H' = Lin\bigcup_{j=0}^{\infty} \{\varphi_k\}_{n_j+1}^{n_{j+1}}$. Ясно, что H' инвариантно относительно оператора A, как, собственно, и $H'^{\perp}$. Теперь вспомним тот общий факт, что если некоторое пространство H инвариантно относительно оператора A, то пространство $H^{\perp}$ инвариантно относительно A^*. Но в этом случае тогда $H'^{\perp}$ инвариантно относительно A, при этом в $H'^{\perp}$ нет ненулевых собственных значений (мы их все загнали в H'). $\Rightarrow$ $A\big|_{H'^{\perp}} = 0$. Возьмем в $H'^{\perp}$ любую ПОНС, она вместе с $\bigcup_{j=0}^{\infty} \{\varphi_k\}_{n_j+1}^{n_{j+1}}$ будет образовывать по построению ПОНС в H. **ЧТД**.

Замечание: Чем же мы занимались при доказательстве этой довольно важной теоремы? Попросту, брали крайние точки числового образа, которые в случае компактного и самосопряженного оператора являются его собственными значениями.

ПРИМЕР. 1) Рассмотрим оператор $Af(x) = xf(x)$ в $L_2[0,1]$. Его числовой образ $W(A) = [0,1]$, спектр $\sigma(A) = [0,1]$. Однако A не имеет собственных значений, т.е. спектр не состоит из собственных значений, стремящихся к 0. Доказать.

2) Рассмотрим оператор правого сдвига $S\{x_1, x_2, ...\} = \{0, x_1, x_2, ...\}$. Найти его спектр.

Теперь вспомним один факт из прошлого семестра:

Напомним, что любой конечномерный оператор A имеет вид $Af = \sum_1^N (f, \psi_k)\varphi_k$, где $\psi_k, \varphi_k \in H$. И действительно, по определению конечномерного оператора $\dim \operatorname{Im} A < \infty$, тогда $Af = \sum_1^N c_k(f)\varphi_k$, где $\{\varphi_k\}_1^N$ - ПОНС в $\operatorname{Im} A$. При этом очевидно, что $(Af, \varphi_k) = c_k(f) = (f, A^*\varphi_k) = (f, \psi_k)$.

// 5я лекция

Определение: Оператор P называется ***проектором***, если $P = P^2$.

Определение: Проектор P называется ***ортогональным***, если $P = P^*$.

Используя соображения, похожие на те, что приведены чуть выше про вид конечномерного оператора, легко получим, что $Pf = \sum_1^{\infty} (f, P\varphi_k)\varphi_k$. Далее, если рассмотреть $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ - ПОНС в H и $P_n = \sum_1^n (\cdot, \varphi_k)\varphi_k$, то P_n окажется ортопроектором . Это так, поскольку:

Факт1. $P^2 f = \sum (Pf, \varphi_k)\varphi_k = \sum(\sum(f, \varphi_l)\varphi_l, \varphi_k)\varphi_k = \sum (f, \varphi_k)\varphi_k = Pf \quad \forall f$

Факт2. Если $K = (\cdot, \psi)\varphi$, то $K^* = (\cdot, \varphi)\psi$, т.к. $(Kf, g) = ((f, \psi)\varphi, g) = (f, \psi)(\varphi, g) = (\varphi, g)(f, \psi) =$
$= (f, \overline{(\varphi, g)}\psi) = (f, (g, \varphi)\psi) = (f, K^* g) \quad \forall f, g \in H$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* $P_n = \sum_1^n (\cdot, \varphi_k)\varphi_k$, *где* $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ *- ПОНС в* H. *Тогда* $P_n \xrightarrow{\text{сильно}} I$.

Доказательство: Действительно,
$\|f - P_n f\| = \left\|\sum_1^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k - \sum_1^n (f, \varphi_k)\varphi_k\right\| = \left\|\sum_{n+1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k\right\| = \sum_{n+1}^{\infty} |(f, \varphi_k)|^2 = \sum_{n+1}^{\infty} |c_k|^2 \to 0$, т.к. этот ряд при фиксированном f сходится. **ЧТД**.

ТЕОРЕМА. Пусть $A = A^*$ и A - компактный, $\{\mu_n > 0\}_1^{\omega}$ - собственные значения, $\{\varphi_k\}_1^{\omega}$ - соответствующие им собственные вектора. Тогда $A = \sum_1^{\omega} \mu_k (\cdot, \varphi_k)\varphi_k$, причем ряд сходится в равномерной операторной топологии.

Доказательство: $A_n = \sum_1^n \mu_k (\cdot, \varphi_k)\varphi_k$, тогда $A - A_n = (A - A_n)^*$ и его спектр $\{\mu_k > 0\}_{n+1}^{\omega} \Rightarrow$
$\|A - A_n\| = \sup \mu_k = \mu_{n+1} \to 0, n \to \infty$. **ЧТД**.

ТЕОРЕМА(о конечномерном приближении). *A компактен в гильбертовом пространстве H $\Leftrightarrow$ $\exists$ конечномерные операторы A_n такие, что $\|A - A_n\| \to 0, n \to \infty$.*

Доказательство: $\Leftarrow$ в это сторону включение было в конце прошлого семестра

$\Rightarrow$ пусть K компактный $\Rightarrow$ оператор $A = K^*K$ тоже будет компактным, а еще самосопряженным. Пусть, далее, $\{\mu_k > 0\}_1^{\omega}$ - собственные значения A (они будут больше нуля, т.к. если $Af = \mu f$, то $(Af, f) = \mu(f, f) = \mu\|f\|$, но с другой стороны, $(Af, f) = (Kf, Kf) = \|Kf\|$, т.е. $\mu = \|Kf\|/\|f\|$), а $\{\varphi_k\}_1^{\omega}$ - ОНС из собственных векторов в H. Рассмотрим $P_n = \sum_1^n (\cdot, \varphi_k)\varphi_k$ - ортопроекторы, и $Q_n = I - P_n$ - дополнительные ортопроекторы. Рассмотрим конечномерные операторы $K_n = KP_n$, $K_n = \sum_1^n (\cdot, \varphi_k)K\varphi_k$. Тогда $\|(K - K_n)f\|^2 = \|KQ_n f\|^2 = (KQ_n f, KQ_n f) = (Q_n K^* KQ_n f, f)$. Но тогда т.к. $B_n = Q_n K^* KQ_n = Q_n AQ_n =$ $[\sum_{n+1}^{\infty} (\cdot, \varphi_k)\varphi_k][\sum_1^{\infty} \mu_k (\cdot, \varphi_k)\varphi_k][\sum_{n+1}^{\infty} (\cdot, \varphi_k)\varphi_k] = \sum_{n+1}^{\infty} \mu_k (\cdot, \varphi_k)\varphi_k$ - очевидно, компактный и самосопряженный, то $\|B_n\| = \max\{\mu_k\}_{n+1}^{\infty} = \mu_{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. $\Rightarrow \|(K - K_n)f\| \le \mu_{n+1}\|f\| \Rightarrow \|K - K_n\| \le \mu_{n+1} \to 0$. Таким образом, мы в явном виде построили приближение. **ЧТД**.

Замечание: По окончании доказательства этой теоремы Андрей Андреевич рассказал, что $\exists$ банаховы пространства, в которых эта теорема не верна, т.е. в них нет аппроксимации (компактных операторов конечномерными). Видимо, в этом смысле и понималась лектором его фраза о том, что компактные операторы суть почти то же, что и матрицы.

Переходя к новой теме, лектор позволил себе небольшой исторический экскурс. Он рассказал, что начало нижеследующей теории было положено в 1901 году работами Гильберта. В то время стояла задача решения систем интегральных уравнений. Проблема решалась, но “дикими методами”. Под это дело стала подгоняться теория, уравнения математической физики (урчпы) стали решаться функциональными методами. Важной вехой в этой работе были труды шведского математика Эрика Ивара Фредгольма (1866—1927).

Определение: Оператор T называется ***фредгольмовым***, если:

1) $\dim KerT = \alpha < \infty$,
2) $\dim KerT^* = \beta < \infty$,
3) $\operatorname{Im} T$ замкнут.

ПРИМЕР: Рассмотрим оператор правого сдвига: $S\{x_1, x_2, ...\} = \{0, x_1, x_2, ...\}$ в пространстве $H = l_2$. Он фредгольмов. Т.к. $KerS = \{0\}$, оператор S^*, сопряженный к оператору правого сдвига, - это оператор левого сдвига. Поэтому $KerS^* = \{\{x_1, 0, 0, ...\} \mid x_1 \in C\}$ и $\dim KerS^* = 1 < \infty$, $\operatorname{Im} S$ замкнут, как ортогональный к первому базисному вектору.

ТЕОРЕМА. *Пусть $T = 1 + K$, где K компактный в гильбертовом пространстве H. Тогда T фредгольмов.*

Доказательство: 1) Пусть $KerT = Ker(1 + K) = H_0 \subset H$. Тогда $\forall \varphi \in H_0$ имеем $K\varphi = (-1)\cdot\varphi$, т.е все элементы H_0 суть собственные вектора, соответствующие значению -1. По сути $H_0 = Ker(K - \mu)$, где K компактный, а $\mu = -1$. А по Лемме2 перед Теоремой Гильберта $\dim H_0 < \infty$.

2) $T^* = 1 + K^*$. Но тогда по Теореме о конечномерном приближении K^* - компактный, поскольку если K_n - конечномерные (тогда и $K_n{}^*$ будут конечномерными) и $\|K - K_n\| \to 0$, то и $\|K - K_n\| = \|K^* - K_n{}^*\| \to 0$ а $\Rightarrow$ по Теореме о конечномерном приближении K^* приближается конечномерными, т.е. компактен. Но тогда по пункту 2) имеем, что $\dim T^* < \infty$

3) Теперь докажем, что $\operatorname{Im} T$ замкнут.

$H = KerT \oplus \operatorname{Im} T^* = H_0 \oplus H_1$. Покажем, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\|Tx\| \ge \varepsilon\|x\|$ $\forall x \in H_1$.

Пусть $\exists x_n$, $\|x_n\| = 1$: $\|Tx_n\| \to 0$ (*). Единичная сфера в H слабо компактна, т.е. $\exists x_{n_k} \to x_0 \Rightarrow Kx_{n_k} \to Kx_0$. Заметим, что $x_n = (T - K)x_n \Rightarrow \|x_{n_k} - x_{n_m}\| = \|(T - K)(x_{n_k} - x_{n_m})\| \le \underbrace{\|Tx_{n_k}\|}_{1)} + \underbrace{\|Tx_{n_m}\|}_{2)} + \underbrace{\|K(x_{n_k} - x_{n_m})\|}_{3)} \to 0$, поскольку $1) \to 0$ и $2) \to 0$ из-за (*), а $3) \to 0$ из-за того, что $Kx_{n_k} \to Kx_0$, значит $\|Kx_{n_k} - Kx_{n_m}\| \to 0$. $\Rightarrow$

$\left\|x_{n_k} - x_{n_m}\right\| \to 0$. Т.е. $x_{n_k} \to x_0$ сильно, а к сильно сходящейся последовательности можно применять оператор T: $0 \leftarrow Tx_{n_k} \to Tx_0$, т.е. $Tx_0 = 0$, $\|x_0\| = 1$, т.е. $x_0 \in KerT$. Получили противоречие, т.к. $x_{n_k} \in H_1$, которое замкнуто. Таким образом, $\|Tx\| \ge \varepsilon\|x\| \ \forall x \in H_1$, т.е. $\operatorname{Im} T$ замкнут (это было ранее, правда, в не совсем такой форме). **ЧТД**.

Замечание: Эта теорема верна и в банаховых пространствах, но там очень тяжелое доказательство.

Замечание2: Любой конечномерный оператор $K_n = \sum_1^n (\cdot, \psi_k)\varphi_k$, а тогда $K_n{}^* = \sum_1^n (\cdot, \varphi_k)\psi_k$.

А теперь мы перейдем к основной теореме первой главы.

Аналитическая ТЕОРЕМА Фредгольма (теорема о голоморфной оператор-функции). *Пусть* $A(\lambda)$ *- голоморфная оператор-функция (в равномерной операторной топологии) в области* $\Omega \subset C$ *со значениями в (двустороннем) идеале комплексных операторов. Пусть* $\exists \lambda_0 \in \Omega$ *такое, что* $I + A(\lambda_0)$ *обратим. Тогда* $I + A(\lambda)$ *обратим* $\forall \lambda \in \Omega$*, кроме, быть может, последовательности изолированных чисел* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Omega$*. В точках* $\{\lambda_k\}_1^\infty$*:* $Ker(1 + A(\lambda_k)) \ne \{\varnothing\}$.

Доказательство: пусть $I + A(\lambda_0)$ обратим.

$\exists\ K = \sum_1^n (\cdot, \psi_k)\varphi_k$ такой, что $\|A(\lambda_0) - K\| < \frac{1}{2}$, далее $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall \lambda \in U_\delta(\lambda_0) = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \delta\}$ выполнено $\|A(\lambda) - A(\lambda_0)\| < \frac{1}{2}$. Следовательно, $\|A(\lambda) - K\| \le \|A(\lambda) - A(\lambda_0)\| + \|A(\lambda_0) - K\| < 1$, тогда

$1 + A(\lambda) = \overbrace{1 + \underbrace{A(\lambda) - K}_{\| \, \| < 1}}^{обратим} + K = (1 + K(1 + A(\lambda) - K)^{-1})(1 + A(\lambda) - K)$. Получили, что $1 + A(\lambda)$ обратим $\Leftrightarrow$ оператор $1 + G(\lambda)$ обратим, где $G(\lambda) = K(1 + A(\lambda) - K)^{-1}$.

$1 + G(\lambda)$ обратим $\Leftrightarrow$ $\forall \psi \in H$ уравнение $(1 + G(\lambda))\varphi = \psi$ (*) имеет единственное решение φ. Запишем далее: $\varphi = \psi - G(\lambda)\varphi \Leftrightarrow (1 + G(\lambda)(\psi - G(\lambda)\varphi) = \psi \Leftrightarrow (1 + G(\lambda))G(\lambda) = G(\lambda)\psi$.

Вспомним теперь, что $G(\lambda) = K(1 + A(\lambda) - K)^{-1}$ конечномерный и $K = \sum_1^n (\cdot, \psi_k)\varphi_k$. Тогда $G(\lambda)\varphi = \sum_1^n \alpha_k(\lambda)\varphi_k$, а $G(\lambda)\psi = \sum_1^n \beta_k(\lambda)\varphi_k$, где $\alpha_k(\lambda)$ и $\beta_k(\lambda)$ аналитичны по λ в $U_\delta(\lambda_0)$. Обозначим $H_n = Lin\{\varphi_k\}_1^n$, ясно, что $\dim H_n = n$, т.к. $\{\varphi_k\}_1^n$ мы изначально полагали базисом в $\operatorname{Im} K$. Теперь, для $\{\varphi_k\}_1^n$ $\exists$ сопряженный базис: $\exists$ $\{\chi_k\}_1^n$ такой, что $(\varphi_k, \chi_m) = \delta_{km}$.

Учитывая все введенные обозначения, запишем:

$(1 + G(\lambda))\sum_1^n \alpha_k(\lambda)\varphi_k = \sum_1^n \beta_k(\lambda)\varphi_k$ (**). Далее можем опустить зависимость коэффициентов от λ. Теперь домножим равенство (**) на вектора $\{\chi_k\}_1^n$, получим систему равенств:

$\sum_1^n \alpha_k(\lambda)((1 + G(\lambda)\varphi_k, \chi_m) = \beta_m(\lambda)$, $m = 1, 2, ..., n$ (***) - n уравнений на n неизвестных. Эта система имеет решение $\Leftrightarrow$ $\det\|((1 + G(\lambda)\varphi_k, \chi_m)\| \ne 0$. В системе мы знаем столбец свободных коэффициентов, т.к. это коэффициенты в разложении $G(\lambda)\psi$ по базису $\{\varphi_k\}_1^n$ (значит, он не может быть равен нулю). Разрешимость системы, т.е. неравенство нулю определителя эквивалентна разрешимости уравнения (*), а значит, и обратимости оператора $1 + G(\lambda)$.

Обозначим $\Delta(\lambda) = \det\|((1 + G(\lambda)\varphi_k, \chi_m)\|$. Это аналитическая в $U_\delta(\lambda_0)$ функция от λ, причем $\Delta(\lambda_0) \ne 0$. Следовательно, из курса комплана следует, что $\Delta(\lambda)$ может иметь в $U_\delta(\lambda_0)$ лишь изолированные нули конечной кратности (это следствие из Теоремы о единственности для голоморфной функции). Таким образом, почти для всех $\lambda \in U_\delta(\lambda_0)$, кроме, быть может, изолированных точек, оператор $1 + G(\lambda)$ обратим, а значит, обратим и $I + A(\lambda)$.

Итак, если $\Delta(\lambda) \ne 0$, то мы находим $G(\lambda)\varphi = \sum_1^n \alpha_k(\lambda)\varphi_k$, тогда и уравнение (*) имеет решение $\varphi = \psi - G(\lambda)\varphi$. Если же $\mu \in U_\delta(\lambda_0)$ и $\Delta(\mu) = 0$, то $\exists \alpha_k(\lambda)$ такие, что $G(\lambda)\varphi = \sum_1^n \alpha_k(\lambda)\varphi_k$ - есть нетривиальное решение уравнения (**) с нулевой правой частью. Следовательно, $\varphi = 0 - G(\lambda)\varphi$ есть нетривиальное решение уравнения (*) с нулевой правой частью, т.е. φ - собственный вектор с собственным значением (-1).

Таким образом, мы показали, что $\exists U_\delta$, в которой либо $\forall$ правой части уравнение (*) разрешимо, либо $\varphi \in Ker(1 + A(\lambda))$. Утверждение теоремы мы доказали для окрестности $U_\delta(\lambda_0) \subset \Omega$.

Распространим теперь этот факт на все Ω.

Рассмотрим компакт $K \subset\subset \Omega$. Т.к. $A(\lambda)$ - голоморфна в Ω, оператор-функция $A(\lambda)$ равномерно непрерывна на K. Следовательно, $\exists \delta(K): \|A(\lambda) - A(\mu)\| < \frac{1}{2} \ \forall |\lambda - \mu| < \delta(K)$. Покроем K окрестностями $U_{\delta(K)}(\mu)$, $\mu \in K$. Поскольку K компакт, то выделим конечное подпокрытие K.

Далее, возьмем произвольное $\mu \in K$ и покажем, что в $U_{\delta(K)}(\mu)$ также выполнено утверждение теоремы. Очевидно, что $\exists$ путь $\gamma \subset \Omega$ с концами λ_0 и μ, т.к. Ω - область – линейносвязное множество. Можно считать, что $\gamma \subset K$. Теперь рассмотрим диски, которые накрывают путь γ, они, ясное дело, пересекаются по некоторым открытым множествам. Пусть для ясности центрами этих дисков являются некоторые точки $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots$. Причем пересекаются только соседние диски. Поскольку в $U_\delta(\lambda_0)$ утверждение теоремы доказано, то и в пересечении нулевого диска и первого (диски номеруются в соответствии с их центрами) оно будет справедливо. Таким образом, в пересечении нулевого и первого диска есть точки, в которых $I + A(\lambda)$ обратим, тогда такие точки есть и в первом диске. Теперь можно повторить наши рассуждения для первого диска. Так сдвигаясь дальше за конечное число шагов мы доберемся до точки μ. **ЧТД**.

СЛЕДСТВИЕ(Теорема Фредгольма(обычная)). *Пусть A компактен. Тогда либо $1 + A$ обратим, либо $Ker(1 + A) \neq \{0\}$.*

__Доказательство:__ Возьмем $A(\lambda) = \lambda A$. Это голоморфная по λ оператор-функция. При $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$ оператор $1 + \lambda A$ обратим. Тогда он обратим всюду, кроме $\lambda = \lambda_k, k = 1,2,\ldots$, причем $(1 + \lambda_k A)\varphi_k = 0$ имеет нетривиальное решение, т.е. собственный вектор. Стоит отметить при этом, что λ_k изолированы, поэтому $\lambda_k \to \infty$ (так же, как и нули целой функции). **ЧТД**.

СЛЕДСТВИЕ2(Теорема Рисса). *Пусть A компактен. Тогда спектр A состоит из изолированных собственных значений μ_k конечной кратности, причем $\mu_k \to 0$.*

__Доказательство:__ $\mu - A = \mu(1 - \mu^{-1}A)$ - голоморфная оператор-функция в C. Она необратима в изолированных точках $\mu_k = -\lambda_k^{-1}$. Именно поэтому $\mu_k \to 0$, т.к. $\lambda_k \to 0$. **ЧТД**

__Замечание:__ Отличие теоремы Рисса от теоремы Гильберта в том, что здесь мы имеем дело с просто компактным оператором, у Гильберта же – самосопряженный случай.

Так же лектор рассказал кое-что выходящее за рамки курса:

__Определение:__ ***Индексом*** оператора T называется $indT = \dim KerT - co\dim KerT$. $co\dim$ - это размерность ортогонального дополнения.

Так вот верна одна примечательная

ТЕОРЕМА. *Если T фредгольмов, то $indT = 0$.*

//13я лекция

Продолжим рассмотрение следствий аналитической теоремы Фредгольма.

СЛЕДСТВИЕ (ТЕОРЕМА Рисса). *Пусть K - компактный оператор в гильбертовом пространстве H, тогда спектр K состоит из изолированных собственных значений конечной кратности $\{\lambda_k\}_1^\infty$, причем $\lambda_k \to 0, n \to \infty$.*

__Определение:__ ***Существенным спектром*** A оператора называется множество $\sigma(A) \setminus \{\lambda_k\}_1^\omega$, где $\{\lambda_k\}$ – изолированные собственные значения конечной кратности. Обозначается $\sigma_{ess}(A)$.

В дальнейшем нам понадобится еще одно

__Определение:__ ***Внешней компонентой*** резольвентного множества оператора A называется наибольшая область, содержащаяся в $\rho(A)$. Иначе говоря, это связная составляющая резольвентного множества, содержащая бесконечно удаленную точку.

СЛЕДСТВИЕ (ТЕОРЕМА Вейля). *Пусть* $A = A^*$. *Тогда* $\forall$ *компактного оператора* K, $K = K^*$, $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+K)$.

Доказательство: воспользуемся общим фактом, который сформулируем в виде леммы

ЛЕММА. *Если* K *- компактный, то во внешней компоненте резольвентного множества* $\rho(A) = C \setminus \sigma(A)$ *находятся только изолированные собственные значения конечной кратности оператора* $A+K$.

Доказательство: $(A+K-\lambda) = \underbrace{(A-\lambda)}_{в\rho(A) обратим} (1+\underbrace{(A-\lambda)^{-1}K}_{голоморф.опер.-ф.})$. Ясно, что при $|\lambda| >> 1$ оператор $(1+(A-\lambda)^{-1}K)$ обратим. Тогда по аналитической Теореме Фредгольма во всей внешней компоненте оператора A он обратим, и, быть может, необратим лишь в изолированных точках (во внешней компоненте есть только дискретный спектр оператора $(A+K)$). Таким образом, в $\rho(A)$ находятся только собственные значения $(A+K)$.**ЧТД**.

Т.е. $\sigma_{ess}(A+K) \subset \sigma(A)$. Покажем теперь, что $\sigma_{ess}(A+K) \subset \sigma(A) \setminus \{\lambda_k\}_1^{\omega}$. Пусть λ_0 - изолированное собственное значение оператора A конечной кратности. Обозначим через $\aleph = Ker(A-\lambda_0)$, $\dim \aleph < \infty$, т.к. кратность конечная. Рассмотрим P - ортопроектор на $\aleph$. Тогда т.к. $A = A^*$, то подпространство $\aleph^{\perp}$ инвариантно относительно самосопряженного оператора (легко проверить!) A и сужение $(A-\lambda_0)\big|_{\aleph} = A_0$- обратим (т.к. не имеет ядра). Следовательно, $\lambda_0 \notin \sigma(A+P)$, т.к. $A+P-\lambda_0$ обратим в $H = \aleph \oplus \aleph^{\perp}$, поскольку $(A+P-\lambda_0)\big|_{\aleph} = P$ и $(A+P-\lambda_0)\big|_{\aleph^{\perp}} = A_0$. А теперь $\forall$ компактного оператора K $\sigma_{ess}(A+P+(K-P)) \subset \sigma(A+P)$, но $\lambda_0 \notin \sigma(A+P)$.

Таким образом, $\forall$ компактного оператора K $\sigma_{ess}(A+K) \subset \sigma(A) \setminus \{\lambda_0\}$. Аналогично продолжив, получим в конце концов $\sigma_{ess}(A+K) \subset \sigma(A) \setminus \{\lambda_k\}_1^{\omega} = \sigma_{ess}(A)$.

Но тогда $\forall$ компактного оператора K_1 $\sigma_{ess}(A+K-K_1) \subset \sigma_{ess}(A+K)$, но если положить $K_1 = -K$, получим $\sigma_{ess}(A) \subset \sigma_{ess}(A+K)$. **ЧТД**.

Итак, мы закончили рассмотрение спектральной теории операторов в гильбертовых пространствах. В концовке курса мы еще коснемся некоторых вопросов функционального исчисления операторов (в том числе *Центральной спектральной теоремы*), но это потом. А сейчас мы переходим к рассмотрению *обобщенных функций*.

ГЛАВА 2. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ.

ВВЕДЕНИЕ.

Под обобщенными функциями понимают элементы некоторых функциональных пространств. В последнее время все чаще (на Западе уже давно) вместо термина “обобщенная функция” употребляют термин “распределение”.

Обозначим через $L_{1,loc}(R)$ пространство локально суммируемых по Лебегу функций, т.е. на $\forall$ конечном отрезке функции интегрируемы по Лебегу.

Определение: ***Финитной*** называется непрерывная функция, обращающаяся в ноль на вне некоторого конечного интервала.

Определение: Будем называть ***пробными*** (или ***основными***) финитные бесконечно дифференцируемые функции. Пространство всех таких функций обозначим через $D(R)$.

Определение: Обозначим через $D(\Omega)$ пространство бесконечно дифференцируемых финитных на Ω функций.

Определение: ***Носителем*** функции $f(x) \in D(\Omega)$ называется множество $Suppf(x) = \overline{\{y \mid f(y) \neq 0\}}$. Иначе это можно записать так: $Suppf(x) = \{y \mid \forall U_{\delta}(y) \exists x \in U_{\delta}(y) : f(x) \neq 0\}$. Важно, что носитель любой функции – есть компакт.

Определение: Обозначим через $D(R^n)$ пространство бесконечно дифференцируемых на R^n функций, равные нулю вне некоторого шара (радиус шара зависит от конкретной функции).

Построим нетривиальную финитную функцию:

Пусть $\psi(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ e^{-1/x^2}, x > 0 \end{cases}$, ясное дело, она бесконечно дифференцируема на R. Теперь возьмем $\psi(x)\psi(1-x)$. Она и будет основной функцией.

ЗАДАЧА. *Доказать, что* $D(a,b)$ *плотно в* $L_1(a,b)$.

Итак, пусть $f(x) \in L_{1,loc}$. Тогда можно рассмотреть ЛНФ на $D(R)$: $F(\varphi) = \int_R f(x)\varphi(x)dx \ \forall \varphi \in D(R)$. Если же рассмотреть пространство пробных функций $D(\Omega)$ и задать на нем топологию, то можно будет изучать пространство получившихся ЛНФ, сопряженное к нему. Обобщенные функции – это элементы некоторых сопряженных пространств, причем чем сильнее топология в $D(\Omega)$, тем шире сопряженное пространство.

ПОЛУНОРМЫ

Определение: Неотрицательная функция $p(x)$ называется ***полунормой*** на X, если $\forall\ x$ и $y \in X$:

1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$

2) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$

(В отличие от нормы нет третьего свойства: $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$)

Пусть X - линейное пространство, $p_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in \mathrm{A}$, - некоторая система полунорм в X. В X можно ввести топологию (систему окрестностей нуля): $U_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \{x \in X \mid p_{\alpha_j}(x) < \varepsilon_j, j = 1,\dots,n\}$. Т.е. окрестности нуля определяются конечными системами неравенств. В этом случае пространство X называется ***полинормированным***.

Определение: Если множество индексов A счетно, то X называется ***счетно нормированным***.

Мы задали в полинормированных и счетно нормированных пространствах топологию $\Rightarrow$ можем ввести понятие сходимости (понятно, как это делать) $\Rightarrow$ можем определить, что такое фундаментальная последовательность $\Rightarrow$ есть и понятие предела последовательности $\Rightarrow$ можно ввести понятие полноты.

Определение: Полное счетно нормированное пространство называется ***пространством Фреше***.

Определение: Линейное пространство L называется ***выпуклым***, если $\forall x, y \in L$ и $\forall \alpha \in [0,1]$ $((1-\alpha)x + \alpha y) \in L$.

ЗАДАЧА. *Пусть* X *- полинормированное пространство. Тогда* X *метризуемо* $\Leftrightarrow$ $\exists$ *эквивалентная счетная система полунорм, т.е.* X *счетно нормировано.*

Пояснения: Если $\exists$ счетная система полунорм $p_n(\cdot)$, то метрику можно задать, например так:
$\rho(x,y) = \sum_1^\infty 2^{-n} \dfrac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$. А обратно: из метризуемости следует наличие счетной базы.

ОСНОВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть Ω - область в R^n. Тогда:

$\varepsilon(\Omega)$ - пространство ***бесконечно дифференцируемых*** в Ω функций

$D(\Omega)$ - пространство ***бесконечно дифференцируемых*** в Ω функций с компактным носителем $K \subset\subset \Omega$ (т.е. $\equiv 0$ в $\Omega \setminus K$)

$S(R^n)$ - пространство Шварца ***быстро убывающих бесконечно дифференцируемых*** функций, т.е.
$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{Z}_+^n$ $\left| x^\beta \dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right| < Const$ в R^n

Теперь несколько слов о будущих обозначениях: пусть $x = (x_1,\dots,x_n)$ и $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ - мультииндекс, где $\alpha_j \ge 0$ - целые. Тогда далее мы будем использовать сокращенную запись:

$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ и $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} := \dfrac{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_n}} f(x)$.

Далее зададим ***топологии*** в основных пространствах:

1) в $S(R^n)$

$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup\limits_{x \in R^n} \left| x^\beta \dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right|$ - это счетная система полунорм. $S(R^n)$ - полное пространство, т.е. оно является пространством Фреше. Это так, поскольку если мы имеем последовательность $f_n(x) \to f(x)$ по системе полунорм $p_{\alpha,\beta}(f)$, то а) сходятся сами функции $\Rightarrow$ функция непрерывна б) сходятся все частные производные $\Rightarrow$

производная непрерывна в) предельная функция имеет все производные, т.к. элементы последовательности бесконечно дифференцируемы. Если $\left|x^{\beta}\,\dfrac{\partial^{\alpha}(f_n(x)-f_m(x))}{\partial x^{\alpha}}\right|<Const$, то и $\left|x^{\beta}\,\dfrac{\partial^{\alpha}(f_n(x)-f(x))}{\partial x^{\alpha}}\right|<Const \;\Rightarrow$ предельная функция убывает быстрее любой степени.

// Этого не было на лекциях, но полезно знать, что введенная система полунорм эквивалентны следующим:

$$\widetilde{p}_{\alpha,\beta}(f)=\int_{R^n}\left|x^{\beta}\frac{\partial^{\alpha}f}{\partial x^{\alpha}}\right|dx \quad \text{и} \quad \widetilde{\widetilde{p}}_{\alpha,\beta}(f)=\Big(\int_{R^n}\left|x^{\beta}\frac{\partial^{\alpha}f}{\partial x^{\alpha}}\right|^2 dx\Big)^{1/2},$$ где α,β - мультииндексы.

2) в $\varepsilon(\Omega)$

$$K_m=\{x\in\Omega \mid \rho(x,\partial\Omega)\ge \tfrac{1}{m}\},\ K_0=\varnothing$$

Вообще, систему полунорм на $\varepsilon(\Omega)$ можно ввести следующим образом: $p_{K,\alpha}(f)=\sup\limits_{x\in K}\left|\dfrac{\partial^{\alpha}f}{\partial x^{\alpha}}\right|$ (1), где $K\subset\Omega$ - произвольный компакт. Эта система полунорм делает $\varepsilon(\Omega)$ полным (потому же, почему и в пункте **1)**). Но число компактов не является счетным $\Rightarrow$ мы не сможем получить пространство Фреше. Поэтому надо брать исчерпание области Ω компактами K_m ($\Omega=\bigcup_1^{\infty}K_m$). Таким образом, имеем счетную систему полунорм $p_{K_m,\alpha}(f)=\sup\limits_{x\in K_m}\left|\dfrac{\partial^{\alpha}f}{\partial x^{\alpha}}\right|$ (2). На последок стоит лишь заметить, что т.к. $\forall K\ \exists K_m$ такой, что $K\subset K_m$, то (1) и (2) эквивалентны $\Rightarrow\ \varepsilon(\Omega)$ - пространство Фреше.

3) в $D(\Omega)$

$\Omega=(0,1)\subset R$, если рассмотреть ту же систему полунорм, что и в пункте **2)**, то полноты для $D(\Omega)$ мы не получим, т.к. можно построить (это легко) последовательность $f_n\in D(\Omega)$ таких, что у предельной функции носитель $Suppf(x)$ не будет лежать в Ω (просто компакты должна неограниченно приближаться в границе Ω). Значит, необходимо ввести другую систему полунорм. Попробуем следующее: $c=\{c_1,c_2,c_3,\ldots\}$ - произвольная последовательность неотрицательных целых чисел, а $p_c=\sum_{m=1}^{\infty}\sup\limits_{\substack{x\in K_m\setminus K_{m-1}\\ |\alpha|\le c_m}}\left|\dfrac{\partial^{\alpha}f}{\partial x^{\alpha}}\right|$, где $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, а K_m - это элементы исчерпания. Для каждой функции $f(x)$ с носителем $K=Suppf(x)\ \exists K_m:K\subset K_m$, т.е. для каждой функции полунорма будет определена корректно, т.к. в определении будет участвовать лишь конечное число слагаемых. Оказывается, что такая система полунорм делает пространство $D(\Omega)$ полным. Однако это система несчетна, поэтому $D(\Omega)$ не является пространством Фреше. $D(\Omega)$ также нельзя метризовать – это мы намерены доказать дальше.

//8я лекция

Определение: Точка x_0 называется ***критической*** для $f(x)\in D(\Omega)$, если $\forall\delta>0$ в окрестности $U_{\delta}(x_0)$ $f(x)\not\equiv 0$ и $\exists\Delta\subset U_{\delta}(x_0)$ такой, что $f(x)\equiv 0\ \forall x\in\Delta$.

Замечание: $\forall f(x)\in D(\Omega)$ существуют критические точки. В случае $\Omega\subset R$ их для любой функции по крайней мере две. Отметим также, что $f(x)$ не является аналитичной в критической точке x_0, т.к. если бы функция была аналитической, то она была бы аналитической в некотором шаре $U_{\delta}(x_0)$, но ведь $\exists\Delta$ такой, что $f(x)\equiv 0\ \forall x\in\Delta$, что для аналитической функции это сразу влечет $f(x)\equiv 0$, что не так.

ЛЕММА. *Пусть* $f(x)\in D(\Omega)$ *и* x_0 *- критическая точка* $f(x)$. *Тогда* $\forall\delta>0\ \overline{\lim}\sup\limits_{x\in U_{\delta}(x_0)}\left|f^{(k)}(x)\right|=\infty$. *(*)*

Доказательство: для функции $f(x)$ имеем:

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x')(x-x_0)^{k+1}$, где $x'\in U_{\delta}(x_0)$. Обозначим через $f_k(x)$ сумму первых k слагаемых.

Предположим, что (*) неверно, тогда $\sup\limits_{x\in U_{\delta}(x_0)}\left|f^{(k)}(x)\right|<C$. Но тогда бы полиномы $f_k(x)\rightrightarrows f(x)$, т.к. остаточный член в этом случае $\rightrightarrows 0$, но тогда бы $f(x)$ была бы аналитической, что не так, поскольку x_0 - критическая точка $f(x)$. **ЧТД**.

ТЕОРЕМА. $f_n(x) \xrightarrow{D(\Omega)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a) f_n(x) \xrightarrow{\varepsilon(\Omega)} f(x) \\ b) \exists компакт K \subset\subset \Omega : Supp f(x) \subset K \end{cases}$.

<u>**Доказательство:**</u> $\Leftarrow$ Очевидно. Действительно, пусть $\exists K$ такой, что имеют место условия a) и b). Тогда на этом компакте $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, т.е. равномерно. Тогда в системе полунорм пространства $D(\Omega)$ фиксированное конечное число слагаемых:

$p_c(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \sup\limits_{\substack{x \in K_m \setminus K_{m-1} \\ |\alpha| \le c_m}} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right| = \sum_{m=1}^{N} \sup\limits_{\substack{x \in K_m \setminus K_{m-1} \\ |\alpha| \le c_m}} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right|$, при этом N зависит только от структуры исчерпания. А отсюда следует эквивалентность этой системы полунорм и системы полунорм $\varepsilon(\Omega)$. Поясним, если $p_{K_m,\alpha}(f_n - f_k) \to 0$ $\forall K_m, n, k$, то понятно, что $\forall c = (c_1,...,c_{n,...})$ будет и $p_c(f_n - f_k) \to 0$ (в силу конечности суммы для последней полунормы в нашем случае).

$\Rightarrow$ пусть $f_n \to f$ в $D(\Omega)$, тогда $f_n \to f$ в $\varepsilon(\Omega)$, поскольку топология в $\varepsilon(\Omega)$ слабее (еще бы!) топологии в $D(\Omega)$. Пусть $\nexists K$ такого, что $Supp f_n \subset K \quad \forall n$. В таком случае, $\exists \{g_k\}$ - подпоследовательность $\{f_n\}$ такая, что критические точки x_k функций g_k неограниченно приближаются к границе (т.к. носители обязаны приближаться к границе). Но тогда из предыдущей леммы получаем, что $\forall \delta_k > 0 \ \overline{\lim} \sup\limits_{x \in U_{\delta_k}(x_0)} \left| g^{(l)}(x) \right| = \infty$. Но тогда в определении системы полунорм в пространстве $D(\Omega)$ запишем условие сходимости к нулю $g_k - f$:

$p_c(g_k - f) = \sum_{m=1}^{\infty} \sup\limits_{\substack{x \in K_m \setminus K_{m-1} \\ |\alpha| \le c_m}} \left| \frac{\partial^\alpha (g_k - f)}{\partial x^\alpha} \right| \ge \sum_{m=1}^{\infty} \sup\limits_{\substack{x \in U_{\delta_k} \subset K_m \setminus K_{m-1} \\ |\alpha| \le c_m}} \left| \frac{\partial^\alpha (g_k - f)}{\partial x^\alpha} \right|$, здесь мы учли, что можно считать $x_k \in K_m \setminus K_{m-1}$ вместе с некоторой окрестностью. Но последний ряд в силу сделанного выше замечания расходится, следовательно, $g_k \not\to f$ в $D(\Omega)$. Получили противоречие. Значит, условие b) все же имеет место. **ЧТД**

ТЕОРЕМА. *Пространство* $D(\Omega)$ *полное, полинормированное, но не является пространством Фреше, в частности, оно не может быть метризуемым.*

<u>**Доказательство:**</u> пусть $D(\Omega)$ пространство Фреше, т.е. $\exists$ счетная система полунорм $p_n(f)$, которая порождает эквивалентную топологию. Тогда

$\rho(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}$ - метрика, порождающая эквивалентную топологию. Причем $\rho(\alpha f, 0) \to 0$ при $\alpha \to 0$. Однако линейности по α нет.

Далее возьмем такие $f_k(x) \in D(\Omega)$, что критические точки x_k функций $f_k(x)$ соответственно подходят к границе. Далее, $\exists \alpha_k$ такие, что $\rho(\alpha_k f_k(x), 0) \le \frac{1}{k}$, но тогда последовательность $\{\alpha_k f_k\}$ сходится к нулю в $D(\Omega)$ по метрике ρ, а она задает исходную (эквивалентную) топологию $\Rightarrow$ $\exists$ последовательность функций, которая сходится к нулю (пространство Фреше – полное счетно нормируемое) в нашей топологии. Но $Supp \alpha_k f_k(x)$ не лежит не в одном компакте $K \subset \Omega$, т.к. x_k подходит к границе $\Rightarrow$ противоречие по предыдущей теореме. **ЧТД**

РЕГУЛЯРНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $f(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$, Ω - область в R^n, т.е. $f(x)$ интегрируема на любом компакте $K \subset \Omega$. Каждой такой функции $f(x)$ поставим в соответствие функционал $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = < f, \varphi >$. Таким образом, $f(x)$ представляет собой функционал на пространстве пробных функций, т.е. на $D(\Omega)$, если $\varphi(x) \in D(\Omega)$. Заметим, что интеграл в определении корректно определен $\forall \varphi(x) \in D(\Omega)$, т.к. интегрированию в этом случае ведется по компакту, φ же финитна, а $f(x)$ суммируема на этом компакте, т.к. принадлежит $L_{1,loc}(\Omega)$.

Определенный нами функционал линеен и непрерывен на $D(\Omega)$, т.к. если $\varphi_k(x) \underset{D(\Omega)}{\to} 0$, то, очевидно, $< f, \varphi_k > \to 0$.

Определение: Пространства линейных непрерывных функционалов на $D(\Omega)$, $\varepsilon(\Omega)$ и $S(\Omega)$ называются соответственно:

1) $D'(\Omega)$ - ***пространство распределений*** (обобщенных функций)
2) $\varepsilon'(\Omega)$ - ***пространство обобщенных функций умеренного роста***
3) $S'(\Omega)$ - ***пространство обобщенных функций с компактным носителем***

Определение: Функционал вида $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$, где $f(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$, называют ***регулярным***. Они строятся по локально суммируемым функциям.

ТЕОРЕМА. *Соответствие* $L_{1,loc}(\Omega) \ni f(x) \to < f, \varphi > \in D'(\Omega)$ *является инъективным, т.е. если* $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0 \;\; \forall \varphi \in D(\Omega)$, *то* $f(x) \equiv 0$ *п.в.* (Т.е. регулярные функции инъективно включены в пространство обобщенных функций)

<u>**Доказательство:**</u> для простоты положим $n = 1,\ \Omega \subset R^1$.

Пусть G - произвольная область, компактно вложенная в $\Omega = R^1$ ($G \subset\subset \Omega$, т.е. $\overline{G} \subset \Omega$), тогда $f(x) \in L_1(G)$ в силу локальной интегрируемости в Ω. Но тогда по определению интеграла Лебега $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ простая функция $f_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{A_k}(x)$, где A_k - измеримые дизъюнктные множества, на которых $f_N(x) \equiv c_k$, такая, что $\int_G |f(x) - f_N(x)| dx < \varepsilon$. Т.к. A_k измеримы, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ E_k$ и F_k - открытые и замкнутые соответственно множества такие, что $F_k \subset A_k \subset E_k$ и $\mu(E_k \setminus F_k) < \varepsilon$ (в частности, $\mu(E_k \setminus A_k) < \varepsilon$). Далее, $\exists\ E_k$ такое, что $\int_G |\chi_{E_k}(x) - \chi_{A_k}(x)| dx < \dfrac{\varepsilon}{|c_k| N}$. Таким образом, все A_k можно читать открытыми, т.е. заменим их на открытые множества E_k. Итак, $\tilde{f}_N(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{E_k}(x)$. Тогда

$\int_G |f(x) - \tilde{f}_N(x)| dx < \int_G |f(x) - f_N(x)| dx + \int_G |f_N(x) - \tilde{f}_N(x)| dx \le \varepsilon + \sum_1^N |c_k| \dfrac{\varepsilon}{|c_k| N} = 2\varepsilon$. Т.к. A_k дизъюнктные множества, а $A_k \subset E_k$ (т.е. E_k, вообще говоря, пересекаются), то можем рассматривать дизъюнктные множества $\Delta_{2k+1} = E_k \cap E_{k+1}$ и $\Delta_{2k} = E_k \setminus (\Delta_{2k-1} + \Delta_{2k+1})$. Рассмотрим далее $\tilde{\tilde{f}}_M(x) = \sum_{k=1}^M b_k \chi_{\Delta_k}(x)$ - другое представление $\tilde{f}$. Возьмем функцию $\varphi(x) = \sum_1^M \frac{1}{|b_k|} \varphi_k(x) \in D(\Omega)$, где $Supp\varphi_k \subset \Delta_k$, $\varphi_k \in D(\Omega)$ и $\int_G \chi_{\Delta_k} |1 - \varphi_k| dx \le \dfrac{\varepsilon}{|b_k| M}$.

Рассмотрим

$$\int_G |f(x)| dx \le \underbrace{\int_G \left| f - \tilde{\tilde{f}}_M \right| dx}_{\le 2\varepsilon} + \int_G \left| \tilde{\tilde{f}}_M \right| dx \le 2\varepsilon + \int_G \left| \tilde{\tilde{f}}_M \varphi \right| dx + \underbrace{\int_G \left| \tilde{\tilde{f}}_M (1-\varphi) \right| dx}_{\le \varepsilon} \le 3\varepsilon + \int_G \underbrace{\left| \tilde{\tilde{f}}_M \varphi \right|}_{\ge 0} dx =$$

$$= 3\varepsilon + \int_G \varphi \cdot \tilde{\tilde{f}}_M dx \le 3\varepsilon + \underbrace{\int_G \varphi \cdot f dx}_{=0} + \underbrace{\int_G \varphi \left| f - \tilde{\tilde{f}}_M \right| dx}_{\le \varepsilon} = 4\varepsilon$$

Следовательно, $f(x) \equiv 0$ п.в. **ЧТД** (что-то не все гладко ☹)

Заметим, что одномерность использовалась здесь для пущей наглядности. Однако, в многомерном случае верны факты, аналогичные тем, которые мы использовали при доказательстве.

ПРИМЕР того, что не все функции являются регулярными . Пусть $\Omega = R$, определим функционал на $D(\Omega)$ следующим образом: $< f, \varphi > = \varphi(0)$. Ясно, что это ЛНФ. Обозначают его - $\delta(x)$. Итак, мы определили одну из самых известных (☺) обобщенных функций – дельта-функцию Дирака.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что $\delta(x)$ не является регулярной.

ДЕЙСТВИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Заметим для начала, что оператор умножения на функцию $\alpha(x)\in\varepsilon(\Omega)$ непрерывен на $D(\Omega)$. Действительно, по доказанному критерию сходимости в $D(\Omega)$, если $\varphi_n\to\varphi$ в $D(\Omega)$, то $\varphi_n\to\varphi$ как элементы $\varepsilon(\Omega)$ и все φ_n имеют один и тот же компактный носитель $K\subset\Omega$. Но тогда $\forall\alpha(x)\in\varepsilon(\Omega)$, если $\varphi_n\to\varphi$, то и $\alpha\varphi_n\to\alpha\varphi$, при этом у всех $\alpha\varphi_n$ один и тот же компактный носитель $K\subset\Omega$ (он тот же, что и у φ_n). По этому по все тому же критерию $\alpha(x)\varphi_n(x)\to\alpha(x)\varphi(x)$ как элементы $D(\Omega)$.

Не трудно понять также, что и оператор дифференцирования в $D(\Omega)$ непрерывен. Это видно, например, из определения топологии в $D(\Omega)$.

Теперь определим аналогичные операторы в $D'(\Omega)$.

1. Пусть $f\in D'(\Omega)$. Сперва рассмотрим случай когда $f(x)$ - регулярная функция, т.е. $\forall\varphi(x)\in\varepsilon(\Omega)$ $<f,\varphi>=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$. Тогда для $\alpha(x)\in\varepsilon(\Omega)$

$<\alpha f,\varphi>=\int_\Omega \underline{\alpha(x)}f(x)\underline{\varphi(x)}dx=\int_\Omega f(x)\alpha(x)\varphi(x)dx=<f,\alpha\varphi>$. При этом, очевидно, что все осуществленные нами переходы справедливы. Первый интеграл определен, т.к. если $f\in L_{1,loc}(\Omega)$, а $\alpha\in\varepsilon(\Omega)$, то $\alpha f\in L_{1,loc}(\Omega)$., т.е. αf является регулярным функционалом. Последнее равенство имеет место по определению регулярного функционала, т.к. $\alpha\varphi\in D(\Omega)$.

Теперь вполне понятным становится следующее

Определение: ***Умножением*** функционала $f\in D'(\Omega)$ на $\alpha(x)\in\varepsilon(\Omega)$ называют функционал $f(x)\alpha(x)\in D'(\Omega)$, определяемый соотношением: $\forall\varphi\in D(\Omega)$ $<\alpha f,\varphi>=<f,\alpha\varphi>$. Предшествовавшие рассуждения показывают, что определение корректно. Очевидно также, что $\alpha f\in D'(\Omega)$.

Заметим лишь, что умножение $f\in D'(\Omega)$ на функцию не из $\varepsilon(\Omega)$ можно определять по-разному, тогда и получать будем разные (возможно, более широкие) классы функций.

2. Пусть $f(x)$ - регулярная функция. Определим ***оператор дифференцирования*** D^α. Рассмотрим следующий интеграл: $<f',\varphi>=\int_\Omega f'(x)\varphi(x)dx=f(x)\varphi(x)\big|_{\partial\Omega}-\int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx=-\int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx=-<f,\varphi'>$ в случае $\Omega\subset R$. Здесь мы учли финитность функций φ. В случае $\Omega\subset R^n$ это соотношение выглядит аналогично: $<D^\alpha f,\varphi>=(-1)^{|\alpha|}<f,D^\alpha\varphi>$, проверить это не составляет труда.

Аналогично пункту 1) получили

Определение: ***α-производной***, $\alpha\in Z_+^n$ - набор индексов, функционала $f\in D'(\Omega)$ называется функционал $D^\alpha f$, определяемый соотношением: $\forall\varphi\in D(\Omega)$ $<D^\alpha f,\varphi>=(-1)^{|\alpha|}<f,D^\alpha\varphi>$. Определение корректно, т.к. D^α непрерывен на $D(\Omega)$, а значит $<f,D^\alpha\varphi>$ есть ЛНФ, т.е. $D^\alpha f\in D'(\Omega)$.

3. Применяя этот же подход, можно определить в $D'(\Omega)$ ***операцию замены переменных***. Итак, пусть $\theta:\Omega\to\Omega$ - взаимно однозначное бесконечно дифференцируемое отображение Ω на себя. Рассмотрим сначала замену переменных для регулярных функций:

$<f(\theta(y)),\varphi(y)>=\int_\Omega f(\theta(y))\varphi(y)dy=\int_\Omega f(x)\varphi(\theta^{-1}(x))J(x)dx=<f(x),\varphi(\theta^{-1}(x))J(x)>$, где $J(x)$ - это якобиан отображения θ.

Таким образом, мы получили правило замены переменных в обобщенных функциях из $D'(\Omega)$.

ПРОСТРАНСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Прежде всего напомним, что если в пространстве Фреше X введена счетная система полунорм $p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$, то можно считать эту систему согласованной, т.е. что каждая последующая полунорма не слабее предыдущей. И действительно, если это не так, мы можем перейти к эквивалентной системе полунорм: $p_1,p_1+p_2,p_1+p_2+p_3,\ldots$. Она будет задавать в X ту же топологию.

ТЕОРЕМА. *Пусть X - пространство Фреше, $f\in X'$ - ЛНФ на X. Пусть также $p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots$ - система полунорм в X. Тогда $\exists n,C$ такие, что $\forall\varphi\in X$ $\left|<f,\varphi>\right|\le Cp_n(\varphi)$.*

Доказательство: $f \in X' \Rightarrow f : X \to \mathbb{C}$ - непрерывное отображение. Значит, $\forall \varepsilon > 0$ $f^{-1}(U_\varepsilon)$ открыто и содержит $\varphi \equiv 0$, где $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$. Тогда по определению открытого множества $\exists V$ - окрестность нуля в X такая, что $V \subset f^{-1}(U_\varepsilon)$. Но в пространстве Фреше любая окрестность нуля, если нормы согласованы, задается равенством: $V = \{\varphi \mid p_n(\varphi) < \delta\}$. Но как мы определяли, $|< f, \varphi >| < \varepsilon$ $\forall \varphi \in f^{-1}(U_\varepsilon)$, тем более это выполнено для $\varphi \in V \subset f^{-1}(U_\varepsilon)$. Следовательно, $\forall \psi \in X$ имеем
$|< f, \psi >| = p_n(\psi)|< f, \widetilde{\psi} >| = p_n(\psi)\delta^{-1}|< f, \delta\widetilde{\psi} >| < \underline{\varepsilon\delta^{-1}} p_n(\psi)$. При этом мы воспользовались линейностью $< f, \varphi >$ и тем, что $p_n(\widetilde{\psi}) = 1$, $p_n(\delta\widetilde{\psi}) = \delta$, а значит, справедливо $|< f, \delta\widetilde{\psi} >| < \varepsilon$. Итак, получили оценку, которая требовалась, т.к. $\varepsilon\delta^{-1} = C$ не зависит от ψ, а зависит лишь от f. **ЧТД**

Дадим теперь определение *носителю обобщенной функции*.

Пусть $f \in D'(\Omega)$. Говорят, что f равна нулю в открытом множестве $U \subset \Omega$, если $< f, \varphi >= 0$ $\forall \varphi \in D(\Omega)$ таких, что $Supp\varphi \subset U$.

Определение: ***Носителем*** функционала f называется множество $\Omega \setminus \mathrm{A}$, где A - это максимальное открытое множество где функционал f равен нулю. (Можно сказать по-другому: ***Носителем*** функционала f называется такое замкнутое множество S, что $\forall E \subset \Omega \setminus S$ $f = 0$ на E.)

ТЕОРЕМА. $\varepsilon'(\Omega) = \{f \in D'(\Omega) \mid \exists K \subset\subset \Omega : Suppf \subset K\}$.

Можно сказать иначе: $\varepsilon'(\Omega)$ - множество таких функционалов из $D'(\Omega)$, для которых $\exists$ компакт $K \subset \Omega$ такой, что $f = 0$ в $\Omega \setminus K$.

Доказательство: $\varepsilon(\Omega)$ является пространством Фреше. Выберем в $\varepsilon(\Omega)$ систему полунорм:
$p_n(\varphi) = \sum_{|\alpha|<n} \sup\limits_{x \in K_n} \left| D^{(\alpha)}\varphi(x) \right|$, где K_n - это элементы исчерпания Ω, т.е. $\Omega = \bigcup\limits_n K_n$ и $K_n \subset K_{n+1}$. Тогда $p_n(\varphi)$ - согласованная система полунорм (с ростом n полунормы все сильнее и сильнее), значит, можно применить предыдущую теорему. А именно, пусть $f \in \varepsilon'(\Omega)$, т.е. f - это ЛНФ на $\varepsilon(\Omega)$. Тогда по теореме $\exists m$ такое, что $|< f, \varphi >| \le C p_m(\varphi)$.

Теперь, если $Supp\varphi \subset \Omega \setminus K_m$, то $p_m(\varphi) = 0$ (по опред. $p_m(\varphi)$). Тогда $< f, \varphi >= 0$ $\forall \varphi : Supp\varphi \subset \Omega \setminus K_n$, а значит, по определению $Suppf \subset K_m$.

Обратно, пусть $f \in D'(\Omega)$, $Suppf \subset K \subset\subset \Omega$. Построим функционал $\widetilde{f} \in \varepsilon'(\Omega)$ такой, что $< \widetilde{f}, \varphi >=< f, \varphi >$. Ясно, что $\exists$ компакт K_1 такой, что $K \subset\subset K_1 \subset\subset \Omega$ (в литературе K_1 называется компактной окрестностью компакта K). Тогда рассмотрим функцию $\chi(x) \in D(\Omega)$ и $\chi(x) \equiv 1$ на K_1. Теперь положим $\forall \varphi \in \varepsilon(\Omega)$
$< \widetilde{f}(x), \varphi(x) >=< f(x), \chi(x)\varphi(x) >$. Итак,

1) покажем, что $< \widetilde{f}, \varphi >=< f, \varphi >$ $\forall \varphi \in \varepsilon(\Omega)$: $< \widetilde{f}, \varphi > - < f, \varphi >=< f(x), \chi(x)\varphi(x) - \varphi(x) >= 0$, т.к. носитель $\chi(x)\varphi(x) - \varphi(x)$ содержится в $\Omega \setminus K$, а f равен нулю на всех таких функциях.

2) покажем, что это и в самом деле ЛНФ на $\varepsilon(\Omega)$. То, что $\widetilde{f}$ линеен, - очевидно. $\widetilde{f}$ непрерывен в $\varepsilon(\Omega)$, действительно, если $\varphi_n \to \varphi$ в $\varepsilon(\Omega)$, тогда $\chi\varphi_n \to \chi\varphi$ в $D(\Omega)$, поэтому и
$< \widetilde{f}, \varphi_n >=< f, \chi\varphi_n > \to < f, \chi\varphi >=< \widetilde{f}, \varphi >$. **ЧТД**

Замечание: по ходу доказательства мы воспользовались тем, что любой ЛНФ на пространстве Фреше является ЛНФ (т.е. непрерывным) относительно некоторой фиксированной полунормы.

ПРИМЕР: Пусть $\Omega = R^1$. Тогда, очевидно, функция e^{x^2} - регулярная функция, принадлежащая $D'(\Omega)$. Но $e^{x^2} \notin \varepsilon'(\Omega)$, т.к. носитель e^{x^2}, как легко видеть, некомпактен (т.к. неограничен).

А сейчас мы докажем один из важнейших фактов этой части лекций. Структуру пространств обобщенных функций раскрывает следующая

ТЕОРЕМА. *Пространства* $D'(\Omega)$, $\varepsilon'(\Omega)$, $S'(R^n)$ **-слабо полны (в лекциях – просто “полны”), т.е. если последовательность* $< f_n, \varphi >$ *фундаментальна* $\forall \varphi \in D(\Omega), \varepsilon(\Omega), S(R^n)$, *то* $\exists f \in D'(\Omega), \varepsilon'(\Omega), S'(R^n)$ *соответственно такая, что* $< f_n, \varphi > \to < f, \varphi >$, $n \to \infty$.

Доказательство: что логично, определим функционал f (т.е. значение функционала f) на каждой пробной функции: $< f, \varphi > = \lim_{n\to\infty} < f_n, \varphi >$. Определение корректно, т.к. для каждой пробной функции последовательность фундаментальна, т.е. имеет предел, который и называем значением “предельного функционала” на этой функции. Линейность f очевидна. Докажем непрерывность. Нам понадобится

ТЕОРЕМА(Банаха - Штейнгауза для пространств Фреше). *Пусть* X *- пространство Фреше и последовательность функционалов* f_n *на* X *такова, что* $\forall \varphi \in \mathrm{X}$ $\left|< f_n, \varphi >\right| \le C_\varphi$ *(константа зависит от* φ*). Тогда* $\exists$ *константа* C *(ни от чего не зависящая!) такая, что* $\left|< f_n, \varphi >\right| \le C\rho(\varphi, 0)$.

Следовательно, для $\varepsilon(\Omega)$ и $S(R^n)$ (это пространства Фреше) по теореме получаем, что $\left|< f, \varphi >\right| \le C\rho(\varphi, 0)$, поскольку C не зависит от n, то можно перейти к пределу. Следовательно, функционал f ограничен на соответствующих пространствах пробных функций, а значит и непрерывен. Итак, для $\varepsilon'(\Omega)$ и $S'(R^n)$ доказали.

Для пространства $D'(\Omega)$ доказывать надо по-другому, т.к. $D(\Omega)$ не является пространством Фреше.

Пусть K произвольный компакт в Ω ($K \subset\subset \Omega$). Рассмотрим $D_K(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in D(\Omega), Supp\varphi \subset K\}$. $D_K(\Omega)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций, равных нулю вне K. $D_K(\Omega)$, наделенное топологией $\varepsilon(\Omega)$, уже является пространством Фреше. Пусть $f_n \in D'(\Omega)$ и последовательность $< f_n, \varphi >$ фундаментальна $\forall \varphi \in D(\Omega)$. Тогда сужения $f_n\big|_K$ на компакт K - это линейные непрерывные функционалы на пространстве Фреше $D_K(\Omega)$, поэтому $\exists$ предел $f\big|_K$ такой, что $\forall \varphi \in D_K(\Omega)$ $< f_n, \varphi > \to < f, \varphi >$, при этом $f\big|_K$ - ЛНФ на $D_K(\Omega)$, т.к. это пространство Фреше.

Далее рассмотрим исчерпание Ω компактами K_m ($\Omega = \bigcup_m K_m$). Далее рассмотрим пределы на каждом из элементов исчерпания: f^m - ЛНФ на $D_{K_m}(\Omega)$ такой, что $\forall \varphi \in D_{K_m}(\Omega)$ $< f_n\big|_{K_m}, \varphi > \to < f^m, \varphi >$. По построению $< f^m, \varphi > = < f^{m-1}, \varphi >$ $\forall \varphi \in D_{K_{m-1}}(\Omega)$, т.е. f^m - это расширение f^{m-1}. Тогда теперь $\forall \varphi \in D(\Omega)$ $\exists$ m такое, что $Supp\varphi \subset K_m$ (по определению пространства $D(\Omega)$). Для таких функций φ определим значение “предельного” функционала f так: $< f, \varphi > = < f^m, \varphi >$. Таким образом, функционал f будет определен на всем $D(\Omega)$, причем $f\big|_{K_m} = f^m$ по построению. Отсюда видно, что так определенный нами функционал действительно будет предельным. Он, очевидно, линеен и непрерывен на K_m $\forall m$. Осталось показать, почему f будет непрерывен на всем $D(\Omega)$. По одно из бывших у нас теорем, если $\varphi_n \to \varphi$ в $D(\Omega)$, то найдется m такое, что $Supp\varphi_n \subset K_m$ $\forall n$. Тогда $\forall n$ $< f, \varphi_n > = < f^m, \varphi_n > \to < f^m, \varphi > = < f, \varphi >$. Итак, непрерывность есть. **ЧТД**

Определение: Обобщенная функция $f \in \varepsilon', D'$ называется ***регулярной***, если $\forall \varphi \in \varepsilon, D$ соответственно $< f, \varphi > = \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx$, где $g(x) \in L_{1,loc}$.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $f \in \varepsilon'(\Omega)$, *тогда* f *имеет конечный порядок сингулярности, т.е.* $\exists$ $g(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ *такая, что* $f = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha g(x)$ $(*)$.

Определение: Наименьшее число m в представлении $(*)$ называется ***порядком сингулярности*** обобщенной функции.

ЛЕММА. *В пространстве* $\varepsilon(\Omega)$ *можно ввести эквивалентную систему полунорм:*

$$p_m^2(\varphi) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{K_m} \left|D^\alpha \varphi(x)\right|^2 dx.$$

Докажем для случая $n = 1$, при $n > 1$ надо применять теорему Соболева, которую логичнее было бы рассказать в курсе УрсЧП. Введем скалярное произведение: $(\varphi, \psi) = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{K_m} D^\alpha \varphi(x)\overline{D^\alpha \psi(x)}dx$. Если положить $K_m = K$, то поимеем норму - $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)} = p_m(\varphi)$. Получим линейное пространство функций (обозначаемое $\varepsilon(K)$), которое будет предгильбертовым по этой норме. Но любое нормированное пространство всегда можно пополнить , т.е. "превратить" в гильбертово. Пополнение пространства $\varepsilon(K)$ относительно этой нормы обозначим через $H_2^m(K)$. Это и есть ***соболевское пространство функций порядка*** m ***на компакте*** K. Отметим, что мы рассматриваем достаточно гладкие области, с гладкой границей.

ТЕОРЕМА(Соболева). *Если* $m > n/2$, *то все* $H_2^m(K)$ *таковы, что* $H_2^m(K) \subset C(K)$, *причем это вложение с сохранением норм:* $\|\varphi\|_{C(K)} \le C\|\varphi\|_{H_2^m(K)}$.

Суть теоремы в том, что при достаточно больших m ($m > n/2$) все функции из $H_2^m(K)$ непрерывны (изначально они не обязаны быть непрерывными!) и $\exists$ указанная оценка для норм.

УПРАЖНЕНИЕ. *Доказать теорему Соболева в следующей формулировке при* $m = 1$, $K = [a,b]$:

$H_2^1([a,b]) \subset C([a,b])$, *причем* $\|f\|_{C(K)} \le \|f\|_{W_a^1(K)}$.

Здесь мы вместо обозначения $H_2^m(K)$ использовали более распространенное для соболевских пространств $W_2^m(K)$. Приведем здесь и

ОБОЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ(Соболева). $W_2^{m+s}(\Omega) \subset C^s(\Omega)$ *при* $m > n/2$, *причем*

$$\sup_{x\in\Omega}\sum_{|\alpha|\le s}\left|D^\alpha f(x)\right| =: \|f\|_{C^s(\Omega)} \le C\|f\|_{W_2^{m+s}(\Omega)} := C\left(\int_\Omega \sum_{|\beta|\le m+s}\left|D^\beta f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Из теорем Соболева сразу следует важная

ЛЕММА. *Набор полунорм в* $\varepsilon(\Omega)$ $p_m(f) := \left(\int_{K_m}\sum_{|\beta|\le m}\left|D^\beta f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}$ *порождает в* $\varepsilon(\Omega)$ *эквивалентную топологию.*

ТЕОРЕМА. *Если* $f \in \varepsilon'(\Omega)$, *то* $\exists$ $g(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ *такая, что* $f = \sum_{|\beta|\le m} D^\beta g(x)$, *т.е.* f *имеет конечный порядок сингулярности.*

__Доказательство:__ если $f \in \varepsilon'(\Omega)$, то $\exists$ $p_m(\varphi) = \left(\int_{K_m}\sum_{|\beta|\le m}\left|D^\beta \varphi(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}$ такая, что $|< f,\varphi >| \le Cp_m(\varphi)$ (*). Заметим, что $p_m(\varphi)$ - норма, для которого справедливо равенство параллелограмма, следовательно, она порождает скалярное произведение: $(f,g) = \int_{K_m}\sum_{|\beta|\le m} D^\beta f(x)\overline{D^\beta g(x)}dx$. Значит, с этим скалярным произведением и этой нормой получим гильбертово пространство – пополненное $\varepsilon(K_m)$ в норме $p_m(\varphi)$, обозначаемое $W_2^m(K_m)$ - соболевское пространство (гильбертово). $f \in \varepsilon'(\Omega)$, значит f - линейный функционал на $\varepsilon(K_m)$, и оценка (*) влечет за собой то, что f продолжается как линейный и ограниченный (а значит, и непрерывный) функционал на всем $W_2^m(K_m)$. Далее, согласно теореме Рисса-Фреше: $\exists$ $g(x) \in W_2^m(K_m)$ такой, что $< f,\varphi >= (\varphi, g)$ в $W_2^m(K_m)$, т.е. $< f,\varphi >= \int_{K_m}\sum_{|\beta|\le m} D^\beta \varphi(x)\overline{D^\beta g(x)}dx$ (**). Осталась самая малость – из представления (**) получить требуемое, надо проинтегрировать по частям.

Ранее мы доказали, что $\forall f \in \varepsilon'(\Omega)$ имеем $Suppf \subset K \subset\subset \Omega$, значит $\exists$ m такое, что $K \subset K_m$, где K_m - это элемент исчерпания Ω ($\Omega = \bigcup_m K_m$). Возьмем $\chi(x)$ с компактным носителем в Ω (т.е. $\chi(x) \in D(\Omega)$) такую, что $\chi(x) \equiv 1$ на K_m. Далее можем считать, что $g(x)$ из представления (**) равна нулю вне K_m (т.к. по определению носителя f равна нулю вне K_m). Можем считать, что m достаточно большое для того, чтобы все функции из соболевского пространства $W_2^m(K_m)$ были непрерывны. Значит, $(\varphi, g)|_W = (\chi\varphi, g)|_W$. Теперь мы можем интегрировать по частям, т.к. $\chi\varphi \in D(\Omega)$: $(\chi\varphi, g)|_W = \int_{K_m}\sum_{|\beta|\le m} D^\beta \chi(x)\varphi(x)dx =$

$= \int_{K_m}\sum_{|\beta|\le m}(-1)^{|\beta|}\chi(x)\varphi(x)D^{2\beta}g(x)dx =< \sum_{|\beta|\le m}(-1)^{|\beta|}\chi(x)D^{2\beta}g(x), \varphi(x) >$ (***). Осталось заметить, что поскольку $Suppg(x) \subset K_m$ и $\chi(x) \equiv 1$ на K_m, то в конечном представлении (***) $\chi(x)$ можно убрать.

Следовательно, $< f,\varphi >= (\varphi, g) = (\chi\varphi, g) =< \sum_{|\beta|\le m}(-1)^{|\beta|} D^{2\beta} g(x), \varphi(x) >$. **ЧТД**

Определение: Функция $g(x)$ называется ***функцией умеренного роста***, если $\exists\alpha$ - мультииндекс такой, что $\left|\frac{g(x)}{x^\alpha}\right| < Const$ (т.е. растет не быстрее некоторой степени).

Аналогичное представление для функций из $S'(R^n)$ дает

ТЕОРЕМА. *Пусть $f \in S'(R^n)$, то $\exists g(x)$ непрерывная в R^n регулярная умеренного роста такая, что имеет место представление:* $f(x) = \sum_{|\alpha|\le l} D^\alpha g(x)$.

Доказательство: система полунорм $p_m(f) = \sup \sum_{|\alpha|\le m} \sum_{|\beta|\le m} \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|$ эквивалентна системе полунорм $\widetilde{p}_l(f) = (\int_{R^n} \sum_{|\alpha|\le l} \sum_{|\beta|\le l} \left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|^2 dx)^{1/2}$. Каждая из этих норм порождает гильбертово пространство $W_2^l(R^n)$ с понятно каким скалярным произведением. Теперь, $f \in S'(R^n)$, поэтому $< f, \varphi >$ продолжается как ЛНФ на пространство $W_2^l(R^n)$ при некотором l. Но тогда согласно теореме Рисса-Фреше $\exists$ $g(x) \in W_2^l(R^n)$ такой, что $\forall \varphi \in S(R^n)$ $< f, \varphi >= (\varphi, g)$ в $W_2^l(R^n)$. И так далее аналогично предыдущей теореме получаем требуемое. ЧТД

Замечание: Важно понимать, что функции $f \in D'(\Omega)$, вообще говоря, могут не иметь конечного порядка сингулярности. Например, $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(x-k) \in D'(R)$.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать, что $f(x)$ с предыдущей строчки – ЛНФ на $D(R)$, а порядок сингулярности $f(x)$ равен ∞.

Однако, сужение $f \in D'(\Omega)$ на любую область $\Omega_1 \subset \Omega$ ($[\Omega_1] \subset\subset \Omega$) имеет конечный порядок сингулярности.

Далее мы переходим к рассмотрению свойств преобразований Фурье обычных и обобщенных функций.

ГЛАВА 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.

ВВЕДЕНИЕ.

Мы начинаем изучение части курса функционального анализа, имеющей значение не только для него самого, но и для теории уравнений с частными производными. Там это очень важный аппарат решения уравнений.

Как и ранее мы полагаем, что $x = (x_1,...,x_n) \in R^n$ и $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n) \in R^n$, а $(x,\lambda) = \sum x_i \lambda_i$.

Определение: ***Преобразованием Фурье*** функции $f \in L_1[-\infty,\infty]$ называется следующая функция: $F(f)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R^n} f(x) e^{-i(x,\lambda)} dx = \hat{f}(x)$. Иногда это понятие называют еще *классическим преобразованием Фурье*.

Ясно, что интеграл определен корректно, т.к. $\left|\int f e^{-i(x,\lambda)} dx\right| \le \left|\int f dx\right|$.

Кстати, сразу можем отметить, что преобразование Фурье линейно в силу линейности интеграла и непрерывно: т.к. $e^{-i(x,\lambda)}$ абсолютно непрерывна в R^n, то $\forall \varepsilon\ \exists \delta : \left|e^{-i(x,\lambda_1)} - e^{-i(x,\lambda_2)}\right| < \varepsilon$ при $\left|\lambda_1 - \lambda_2\right| < \delta$. Но тогда $\left|\hat{f}(\lambda_1) - \hat{f}(\lambda_2)\right| < \int \left|e^{-i(x,\lambda_1)} - e^{-i(x,\lambda_2)}\right| \left|f(x)\right| dx < \varepsilon \|f\|_{L_1}$.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы это определение распространить на $L_2[-\infty,\infty]$ и пространства обобщенных функций. Далее мы докажем несколько свойств преобразования Фурье. Для этого мы будем работать в пространстве $S(R^n)$, чтобы уж все условия на переходы точно выполнялись.

СВОЙСТВА

Прежде всего докажем важную лемму.

ЛЕММА. *Пусть $f \in D(R^n)$. Тогда $\forall \alpha, \beta$ справедливы свойства:*

(1) $F(D^\alpha f)(\lambda) = (i\lambda)^\alpha (F(f))(\lambda)$ *(нужна абсолютная непрерывность $f^{(\beta)}, \forall|\beta| < |\alpha|$, на каждом конечном интервале, $f^\beta \in L_1[R^n] \forall|\beta| \le |\alpha|$)*

(2) $D^\beta (F(f))(\lambda) = F((-ix)^\beta f)(\lambda)$ *(нужна абсолютная интегрируемость $x^\beta f(x), \forall|\beta| \le |\alpha|$)*

(3) сумма первых двух: $(i\lambda)^\alpha D^\beta (Ff)(\lambda) = F(D^\alpha[(ix)^\beta f])(\lambda)$

__Доказательство:__

(1) Достаточно проверить справедливость утверждений для одномерного случая. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f'(x)e^{-i(x,\lambda)}dx =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(fe^{-i(x,\lambda)}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda\int fe^{-i(x,\lambda)}dx) = i\lambda(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int fe^{-i(x,\lambda)}dx)$. Поскольку $f(x)$ финитна, то можем интегрировать по частям. Интегрируем $|\alpha|$ раз. Выполнено.

(2) Та же схема доказательства: $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int fe^{-i(x,\lambda)}dx)'_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int fe^{-i(x,\lambda)}dx)'_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int (fe^{-i(x,\lambda)})'_\lambda dx =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(e^{-(x,\lambda)})'_\lambda dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int (-ix)fe^{-(x,\lambda)}dx$. Для перехода при дифференцировании под интегралом мы воспользовался тем, что производная по параметру является непрерывной функцией ([4], стр. 431)

(3) Это свойство – очевидное следствие первых двух. **ЧТД**

__Замечание:__ Т.к. $\left|\int fe^{-i(x,\lambda)}dx\right| \le \left|\int fdx\right| = Const$, то если $f(x)$ бесконечногладкая и $f^\alpha(x) \in L_1(R^n) \forall \alpha$, тогда из (1) следует, что:

$\left|(i\lambda)^\alpha (Ff)(\lambda)\right| \le Const \Rightarrow \left|(Ff)(\lambda)\right| \le \frac{Const}{|\lambda|^{|\alpha|}}$, т.е. чем больше порядок производной, лежащей в L_1, у функции, тем быстрее она убывает на бесконечности.

Если $f(x) \in L_1(R^n)$*, то* $F(f)(\lambda) \in C_0(R^n)$*, т.е. непрерывна в* R^n *и* $\left|\hat{f}(\lambda)\right| \to 0, |\lambda| \to \infty$.

Ранее мы показали, что $F(f)(\lambda) \in C(R^n)$ и $\|F(f)\| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|f\|_{L_1}$. Заметим, что если $f(x)$ индикаторная функция интервала (a,b), то $F(f)(\lambda) = \int_a^b e^{-i(x,\lambda)}dx = \dfrac{e^{-i(a,\lambda)} - e^{-i(b,\lambda)}}{i\lambda}$ - это, очевидно, непрерывная функция, а на бесконечности она убывает к нулю. (Вспомним действан…) Т.к. взятие преобразования Фурье линейная операция, то преобразование Фурье и любой простой функции (т.е. ступенчатой, т.е. линейной комбинации индикаторов интервалов) будет непрерывной функцией, стремящейся к нулю на бесконечности. А поскольку простые функции плотны в L_1 по определению этого пространства, то это будет справедливо и $\forall f(x) \in L_1(R^n)$.

ТЕОРЕМА. *Если* $f \in D(R^n)$*, то* $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n} e^{i(x,\lambda)}(Ff)(\lambda)d\lambda$.

Доказательство этой теоремы мы должны знать в одномерном случае из курса матана (см [4], Стр. 522, §12).

__Замечание:__ Хотя эта теорема справедлива $\forall f(x) \in L_1(R^n)$, мы избрали такую формулировку, т.к. далее будем работать в $S(R^n)$.

__Очень важнейшее замечание:__ пусть $(Kf)(\lambda) = \int_{R^n} K(x,\lambda)f(x)dx$. Тогда оператор K^*, сопряженный к оператору K, определен равенством $(Kf,g) = (f,K^*g)$. И тогда этот интегральный оператор запишется:

$$(Kf,g) = \int_{R^n}\overline{g(\lambda)}\int_{R^n}K(x,\lambda)f(x)dxd\lambda \underset{Фубини}{\overset{поTh}{=}} \int_{R^n}f(x)\overline{\int_{R^n}\overline{K(x,\lambda)}g(\lambda)d\lambda}dx = (f,K^*g),$$ т.е.

$(K^*g)(x) = \int\overline{K(x,\lambda)}g(\lambda)d\lambda$. Итак, мы получили, что $\forall f \in S(R^n)\ F^*Ff = f$.

ТЕОРЕМА(Планшереля). $\forall f \in S(R^n)$ *выполнено:* $\|Ff\|^2_{L_2(R^n)} = \|f\|^2_{L_2(R^n)} = \|F^*f\|^2_{L_2(R^n)}$.

__**Доказательство:**__ $\|Ff\|^2_{L_2} = (Ff,Ff)_{L_2} = (f,F^*Ff)_{L_2} = (f,f)_{L_2} = \|f\|^2_{L_2}$. Аналогично для $\|F^*f\|^2_{L_2} = \|f\|^2_{L_2}$. **ЧТД**

__Замечание:__ итак, это утверждение справедливо для $f \in S(R^n)$, но т.к. $S(R^n)$ плотно в $L_2(R^n)$, то можем операцию взятия преобразования Фурье продолжить по непрерывности на $L_2(R^n)$ с сохранение нормы. А именно: пусть $f \in L_2$, берем $f_n \in S$: $f_n \xrightarrow{L_2} f$, тогда $\|Ff_n - Ff_m\| = \|f_n - f_m\| \Rightarrow$ это фундаментальная последовательность, поэтому $Ff_n \to g$, при этом $Ff = g = \lim_{n\to\infty} Ff_n$ и $\|g\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n\| = \|f\|$. Теперь имеем: $\|Ff\| = \|f\|$, такие операторы называются ***изометрическими***.

Точно так же продолжается и F^* как изометрический. Причем на всюду плотном множестве было: $F^*F = I$ и $FF^* = I$. Следовательно, и во всем $L_2(R^n)$ будет то же самое. А это означает, что в $L_2(R^n)$ будет определен $F^{-1} = F^*$. Такие операторы называются ***унитарными***.

ТЕОРЕМА. *Оператор* F *действует из* S *в* S *биективно, причем* F *и* F^{-1} *ограничены в топологии* S.

Доказательство: ясно, что F инъективен. Действительно, поскольку $\|Ff\| = \|f\|$, то прообраз нуля есть ноль, а это и значит, что отображение инъективно.

Докажем, сюръективность отображения. Для этого заметим, что $F^*f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R^n} f(-x)e^{i(x,\lambda)}dx =$ $= (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{R^n} f(x)e^{-i(x,\lambda)}dx = (-1)^n Ff(x)$. Значит, $FFf(x) = (-1)^n f(-x) \Rightarrow F^4 = I$.(!) Пусть, далее, $\operatorname{Im} F = S_F \subset S$, тогда $S \subset F^4(S) \subset S_F \Rightarrow S = S_F$. Сюръективность доказана.

Кроме того, мы имеем, что $F^{-1} = F^* = F^3$ непрерывно в топологии S, т.е. F есть топологический гомеоморфизм. **ЧТД**.

Замечание: Что же нам дала эта теорема? Она нам позволила теперь определить преобразование Фурье для обобщенных функций умеренного роста $f(x) \in S'(R^n)$. Ранее мы рассматривали для $f \in L_2$: $(Ff,\varphi) = (f, F^*\varphi)$. В этом равенстве теперь будем считать $\varphi \in S(R^n)$. Тогда оно останется корректным для $f \in S'(R^n)$. Как следует из свойств преобразования Фурье для $f \in S(R^n)$ и линейности скалярного произведения, все свойства преобразования Фурье при таком рассмотрении сохраняются. Итак, $(Ff,\varphi) = (\underbrace{f}_{\in S'}, F^*\varphi)$.

ПРИМЕР: $F\delta(x)$ в R^1

$(F\delta(x),\varphi(x)) = (\delta(x), F^*\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{i(x,\lambda)}\varphi(x)dx\Big|_{\lambda=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \varphi(x)dx = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi(x))$. Т.о. $F\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

///13я лекция

СВЕРТКА ФУНКЦИЙ

Пусть $f_1(x), f_2(x) \in L_1(R^n)$.

Определение: Сверткой функций $f_1(x), f_2(x) \in L_1(R^n)$ называется функция $f(x) = (f_1 * f_2)(x) = \int_{R^n} f_1(x-y)f_2(y)dy$.

Далее для простоты полагаем $n = 1$.

<u>СВОЙСТВА свертки:</u>

(1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (легко получаем после замены переменных)

(2) $\forall f_1, f_2 \in L_1$ имеем $f = f_1 * f_2 \in L_1$, причем $\|f\|_{L_1} \le \|f_1\|_{L_1}\|f_2\|_{L_1}$.

Доказательство: воспользуемся теоремой Фубини: $\int_R |f(x)|dx = \int_R \left|\int_R f_1(x-y)f_2(y)dy\right|dx \le$ $\le \int_R |f_2(y)| \int_R |f_1(x-y)|d(x-y)dy \le \|f_1(x)\|_{L_1}\int_R |f_2(y)|dy = \|f_1(x)\|_{L_1}\|f_2(x)\|_{L_1}$

(3) $F(f_1(x) * f_1(x)) = \sqrt{2\pi}F(f_1)(\lambda)\cdot F(f_2)(\lambda) = \sqrt{2\pi}\hat{f}_1(\lambda)\hat{f}_2(\lambda)$

Небольшой комментарий по поводу обозначений: ранее, когда мы рассматривали преобразование Фурье как унитарный оператор на S, мы писали $F(f)$, теперь же пишем $\hat{f}$ как обозначении операции над f (взятие соответствующего интеграла). В разных ситуациях удобно какое-то одно обозначение.

Доказательство: $F(f_1 * f_2)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-i\lambda x}\int_R f_1(x-y)f_2(y)dydx = \|x - y = z\| =$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-i\lambda z}f_1(z)dx\int_R e^{-i\lambda y}f_2(y)dy = \sqrt{2\pi}\hat{f}_1(\lambda)\cdot\hat{f}_1(\lambda)$. Использовали мы здесь то, что интеграл $\iint_{R^2}\left|e^{-i\lambda x}f_1(x)f_2(x)\right|dxdy$ сходится абсолютно – в этом случае мы можем переставлять пределы интегрирования.

Далее мы хотим определить свертку для обобщенных функций. Но тут возникают трудности, такие же, что и с преобразованием Фурье, мы не можем ее определить для всех обобщенных функций. Сначала определим *прямое произведение* обобщенных функций.

Пусть $f(x)\in D'(R^n)$, а $g(y)\in D'(R^m)$. Рассматриваем именно такие пространства, т.к. свертка и преобразование Фурье определяются по всему пространству R^n, а не по какой-то области, свертка на каких-то других областях не имеет прикладного значения. Поскольку все, чем мы сейчас занимаемся есть аппарат для УРЧП, то работаем в R^n.

<u>Определение:</u> ***Прямым произведением*** регулярных обобщенных функций $f(x)\in D'(R^n)$ и $g(y)\in D'(R^m)$ называется функционал $f(x)\times g(y)$ в $D'(R^{n+m})$, определенный следующим образом: $\forall\varphi(x,y)\in D(R^{n+m})$
$< f(x)\times g(y),\varphi(x,y) >= \int_{R^n} f(x)\underbrace{\int_{R^m} g(y)\varphi(x,y)dy}_{=\psi(x)}dx =< f(x),\psi(x) >$, где $\psi(x) =< g(y),\varphi(x,y) >$.

<u>Замечание:</u> Ясно, что если $\varphi(x,y)$ была финитной, то и $\psi(x)$ будет финитной, т.к.

1) если $Supp\varphi(x,y)\subset K \;\Rightarrow\; Supp\,\psi(x)\subset K\big|_{R^n}$

2) если $\varphi(x,y)$ бесконечно дифференцируема по (x,y), значит $\varphi(x,y)$ бесконечно дифференцируема по $x \;\Rightarrow\; \psi(x)$ будет бесконечно дифференцируема по x

Таким образом, $\forall\varphi(x,y)\in D(R^{n+m})$ и $f(x)\in D'(R^n)$, $g(y)\in D'(R^m)$ существует интеграл из определения. То есть корректно определено действие $f(x)\times g(y)$ на $\varphi(x,y)$. Значит так будем определять прямое произведение для всех обобщенных функций.

Определим теперь ***свертку двух обобщенных функций*** $f_1,f_2\in D'(R^n)$. Если f_1,f_2 - регулярны, то
$< f_1 * f_2,\varphi >= \int_R[\int_R f_1(x-y)f_2(y)dy]\varphi(x)dx = \|x-y=z\| = \int_R\int_R f_1(z)f_2(y)\varphi(z+y)dydx =$
$=< f_1(z)\times f_2(y),\varphi(z+y) >$. Поясним, что $\varphi(x)\in D(R^n)$, а $\varphi(x+y)$ понимается как функция $\varphi(x+y)=\widetilde{\varphi}(x,y)\in R^{2n}$, где $x+y=(x_1+y_1,...,x_n+y_n)$. Теперь поскольку прямое произведение у нас было корректно определено $\forall f_1,f_2\in D'(R^n)$, то и свертка также будет корректно определена $\forall f_1,f_2\in D'(R^n)$.

Напоследок отметим, что мы здесь изначально доказывали все свойства преобразования Фурье для $f\in S(R^n)$, но есть одна замечательная

ТЕОРЕМА. *Пространство $D(R^n)$ плотно в $L_p(R^n,dx)$, где под dx понимается мера Лебега в R^n, при $1\le p<\infty$, в $S(R^n)$ и в $\varepsilon(R^n)$. Пространство $S(R^n)$ плотно в $L_p(R^n,dx)$ при $1\le p<\infty$ и в $\varepsilon(R^n)$.*

<u>Доказательство:</u> см. А.А.Кириллов, А.Д.Гвишиани "Теоремы и задачи функционального анализа" стр. 97.

Также уместно вспомнить, что имеют место непрерывные вложения $D(R^n)\subset S(R^n)\subset\varepsilon(R^n)$. Поэтому все доказанное будет справедливо и для других рассмотренных нами основных пространств, т.к. вес свойства могут быть продолжены по непрерывности.

Что же касается преобразования Фурье и свертки обобщенных функций для $\forall f_1,f_2\in D'(R^n)$, здесь ситуация несколько проще. В самом деле, вложения в классах обобщенных функций обратные: $\varepsilon'(R^n)\subset S'(R^n)\subset D'(R^n)$. Поэтому выше указанные понятия мы ввели на самом широком из рассмотренных нами классов обобщенных функций.

В приложениях, например, в физике, в УРЧП, изначально не сильно заботятся о строгости переходов. Сразу полагается, что все функции "хорошие", поэтому все операции правомочны. Однако, это себя оправдывает.

На этом мы заканчиваем изложение основных глав курса функционального анализа в 6-м семестре. Закончим же мы наши лекции рассмотрением некоторых вопросов *функционального исчисления* самосопряженных операторов.

<u>ГЛАВА 4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА</u>

ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ЛЕММА(о монотонной последовательности операторов). *Пусть $0\le A_n\le A_{n+1}\le 1$. Тогда $\exists$ $s-\lim A_n = A$, причем $0\le A\le 1$ ($s-\lim$ - означает сильный предел).*

<u>Доказательство:</u> $B\ge 0$, тогда по определению сравнения операторов форма $(Bx,y)=[x,y]$ задает почти скалярное произведение (свойств невырожденности: $[x,x]=0\Leftrightarrow x=0$ - необязательно). Но нам важно то, что сохраняется неравенство Шварца: $\left|[x,y]\right|^2 \le [x,x][y,y]$. Тогда можно записать: при $n>m$ $B = A_n - A_m \ge 0$

$$\left\|(A_n - A_m)f\right\|^4 = \left|((A_n - A_m)f,(A_n - A_m)f)\right|^2 = \left|[f,(A_n - A_m)f]\right|^2 \le [f,f][(A_n - A_m)f,(A_n - A_m)f] =$$

$= ((A_n - A_m)f,f)((A_n - A_m)^2 f,(A_n - A_m)f)$. Первый множитель, очевидно, стремится к нулю при $n,m\to\infty$ (обозначив $\alpha_n = (A_n f,f)$, получим ограниченную единицей возрастающую последовательность, значит, $\alpha_n - \alpha_m \to 0$ при $n,m\to\infty$), а второй множитель, т.к. $0 \le A_n - A_m \le 1$, оценивается $\le \|f\|^2$. Таким образом, $\left\|(A_n - A_m)f\right\| \to 0$, т.е. существует сильный предел A такой, что $\forall f$ $Af = \lim A_n f$. **ЧТД**

ТЕОРЕМА(о квадратном корне). Пусть $A\ge 0$, A ограниченный. Тогда $\exists!$ $X\ge 0$ такой, что $X^2 = A$. При этом оператор X коммутирует с любым оператором, коммутирующим с A ($CA = AC$).

Сразу заметим, что $A = A^* \Leftrightarrow \forall f \ (Af,f)\in R$. Значит, наш оператор самосопряжен.

__**Доказательство:**__ не ограничивая общности, можем считать, что $A\le 1$. Теперь сделаем замену: $B = 1 - A$, $Y = 1 - X$. Тогда $X^2 = A \Leftrightarrow 2Y - Y^2 = B \Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$ (*). Т.е. по оператору B надо построить такой оператор Y, что $\frac{1}{2}(B+Y^2)$. Будем делать это, методом последовательных приближений (название говорит само за себя!). Положим $Y_0 = 0$, $Y_{n+1} = \frac{1}{2}(B + Y_n^2)$. Докажем, что в некотором смысле $\lim Y_n = Y$ из (*). В каком смысле? Оказывается, что в равномерной (что было бы просто замечательно) операторной топологии не удается построить приближение, поэтому строится сильный предел.

Заметим, что Y_n - многочлен от B степени $2n-2$ при $n\ge 2$. Очевидно, что Y_n и Y_{n+1}, как очевидно и то, что Y_n - многочлен с неотрицательными коэффициентами, а значит, $Y_n \ge 0$. Покажем теперь, что $Y_{n+1} - Y_n$ - тоже многочлен с неотрицательными коэффициентами:

<u>база:</u> $n=0$ $Y_1 - Y_0 = \frac{1}{2}B$ - с положительными коэффициентами

<u>шаг:</u> пусть для $n-1$ верно, докажем для n: $Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}(Y_n^2 - Y_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(Y_n - Y_{n-1})(Y_n + Y_{n-1})$, но в последнем произведении первый множитель – многочлен с положительными коэффициентами по предположению индукции, а второй – как сумма двух многочленов с вышеобозначенным свойством.

Итак, доказали. Теперь т.к. приращения неотрицательны (т.е. последовательность Y_n не убывает), а $0\le Y_n \le 1$ (т.к. $Y_n = \frac{1}{2}(B + Y_{n-1}^2)$), то последовательность Y_n удовлетворяет условиям теоремы о монотонной последовательности. Следовательно, существует сильный предел $s - \lim Y_n = Y$. Теперь осталось перейти в (*) к пределу, получим, что $Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$, а значит, $X = 1 - Y$ удовлетворяет $X^2 = A$. Итак, оператор нашли, осталось показать его единственность и свойство сформулированное в формулировке теоремы.

Докажем коммутативное свойство. Ясно, что Y_n коммутирует с любым многочленом от B (а значит, и от A), следовательно, и Y (равно как и X) обладает тем же свойством. Пусть теперь $CA = AC$ и $AX = XA$ (т.к. $AX = X^3 = XA$). Значит, оператор C коммутирует с любым многочленом от A (а значит, и от B). Следовательно, C коммутирует с сильным пределом S многочленов от A ($S = s - \lim P_n(A)$). Но Y был получен как сильный предел многочленов от A. Значит, $CX = XC$.

Докажем теперь единственность. Пусть $\exists X_1$: $X_1^2 = A$. Положим $g = (X - X_1)f$ $f\in H$. По доказанному $\exists$ $Z = \sqrt{X}$ и $Z_1 = \sqrt{X_1}$. Тогда $\forall f\in H$ и $g = (X - X_1)f$

$\|Zg\|^2 + \|Z_1 g\|^2 = (Z^2 g,g) + (Z_1^2 g,g) = ((X + X_1)g,g) = ((X^2 - X_1^2)f,g) = 0$. Значит, $Zg = Z_1 g = 0$. Теперь $\|(X - X_1)f\| = ((X - X_1)f,(X - X_1)f) = ((X - X_1)^2 f,f) = ((X - X_1)g,f) = 0$ и все это чудо $\forall f\in H$, значит $X = X_1$. Единственность получена, что и завершает доказательство. **ЧТД**

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $A\ge 0$, $B\ge 0$, A и B коммутируют. Тогда $AB\ge 0$.

__**Доказательство:**__ $AB = A^{1/2}A^{1/2}B = A^{1/2}BA^{1/2}$. Напомним, что как и A и B корни из них являются неотрицательными операторами, а значит самосопряженными. Тогда $(ABf,f) = (BA^{1/2}f, A^{1/2}f) = (B^{1/2}A^{1/2}f, B^{1/2}A^{1/2}f) \ge 0$. Значит, $AB\ge 0$. **ЧТД**

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $A\ge B$, C коммутирует с A и B, $C\ge 0$. Тогда $CA \ge CB$.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Далее мы коснемся важного вопроса построения не только полиномов от ограниченных самосопряженных операторов, а более обширного класса функций. Жизнь заставляет уметь отыскивать синусы, косинусы, логарифмы, экспоненты и прочие функции от операторов. Рассмотрим, скажем уравнение:

$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t)$, где A - некоторый оператор, скажем, в $L_2[0,1]$ - интегральный или какой-либо еще.

Так вот если бы указанная задача решалась нами, то мы бы легко записали решение приведенного уравнения:

$$u(t) = -\sin A^{1/2}t$$

Приступим к построению должного фундамента под эти наши размышления. Введем на пространстве всех, скажем, гладких функций (т.е. бесконечно дифференцируемых) отображение φ в пространство всех ограниченных самосопряженных операторов. Для начала определим φ на полиномах:

пусть полином $p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + ... + c_n\lambda^n$, тогда $\varphi : p(\lambda) \to p(A)$, где $p(A) = c_0 I + c_1 A + ... + c_n A^n$.

Далее мы хотим по непрерывности продолжит отображение φ. Какими же свойствами оно будет обладать?

СВОЙСТВА:

1) Однородность: $\varphi(cp(\lambda)) = c\varphi(p(\lambda)) = cp(A)$
2) Аддитивность: $\varphi(p(\lambda) + q(\lambda)) = \varphi(p(\lambda)) + \varphi(q(\lambda)) = p(A) + q(A)$
3) Мультипликативность: $\varphi(p(\lambda)q(\lambda)) = \varphi(p(\lambda))\varphi(q(\lambda)) = p(A)q(A)$

Определение: Отображение φ называется ***положительного типа***, если из того, что $p(\lambda) \geq 0 \;\; \forall\lambda \in W(A)$, следует, что $p(A) \geq 0$.

Напомним, что $W(A)$ - это числовой образ оператора, вводился на одной из первых лекций. $W(A)$ является выпуклым множеством, содержащим спектр оператора, а для самосопряженных операторов еще и подмножеством R, причем приняты обозначения: $m = \inf_{\|A\|=1}(Af, f)$ и $M = \sup_{\|A\|=1}(Af, f)$.

ЛЕММА. *Отображение φ положительного типа.*

Доказательство: пусть $p(\lambda) = c\prod_i(\lambda - \alpha_i)\prod_j(\beta_i - \lambda)\prod_k((\lambda - \gamma_k)^2 + \delta_k)$, где $c > 0$, $\alpha_i \leq m$, $\beta_j \geq M$, $\gamma_k \in R$, $\delta_k \in R_+$. Это представление берется прямо из определения положительности типа φ. Теперь запишем образ отображения на A: $p(A) = c\prod_i(A - \alpha_i)\prod_j(\beta_i - A)\prod_k((A - \gamma_k)^2 + \delta_k)$, в качестве множителей выступают положительные операторы, значит, и весь результат – положительный. **ЧТД**

Утверждение о положительном типе отображения φ позволяет построить $f(A)$ для функций, которые можно приблизить полиномами $p_n(x)$, монотонно возрастающими или убывающими.

Определение: Будем говорить, что $f(x) \in M^-$, если $\exists$ неубывающая последовательность полиномов $p_n(x)$ ($p_n(x)\uparrow$) такая, что $p_n(x) \to f(x)$ поточечно всюду на $[m, M]$.

Замечание: функции, непрерывные слева $\in M^-$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. $C[m,M] \subset M^-$.

Доказательство: по теореме Вейерштрасса $\forall f(x) \in C[m,M] \;\; \forall n \;\; \exists p_n(x)$ такой, что $\left|(f(x) - \frac{2}{2^{2n}}) - p_n(x)\right| < \frac{1}{2^{2n}}$. Но тогда $\frac{1}{2^{2n}} < f(x) - p_n(x) < \frac{3}{2^{2n}} \;\; \forall x, n$, что и означает существование последовательности полиномов из определения класса M^-. **ЧТД**

ТЕОРЕМА. *Монотонная функция порождает σ-аддитивную меру $\Leftrightarrow$ функция непрерывна слева.*

Итак, $\forall f(x) \in M^- \;\; \exists p_n(x)$ такие, что $p_n(x)\uparrow f(x)$, значит, $p_n(A)\uparrow$, следовательно, $\exists$ $s - \lim p_n(A) =: f(A)$. Очевидно, что при таком определении все свойства отображения φ : однородность, аддитивность, мультипликативность и положительность типа – сохраняются.

ТЕОРЕМА(спектральная теорема в терминах функционального исчисления). $\forall f(x) \in M^- \;\; \exists f(A)$ *такой, что все четыре свойства сохраняются.*

Доказательство: теорема следует из приведенных выше рассуждений. **ЧТД**

Рассмотрим $\chi_\lambda(x) = \begin{cases} 0, x \le \lambda \\ 1, x > \lambda \end{cases}$. По предыдущей теореме $\exists \chi_\lambda(A) =: E_\lambda$, назовем такие операторы *ортопроекторами*, а множество $\{E_\lambda\}$ - *семейством ортопроекторов*. Это семейство задает оператор-значную меру на R, в этом смысле и понимается утверждение следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. $A = \int_m^M \lambda dE_\lambda$.

Здесь стилтьесовские суммы сходятся равномерно.

А вообще-то, Андрей Андреевич посоветовал найти в читальном зале книжку "Лекции по функциональному анализу" Рисс, Секефальви-Надь (стр. 280) и по ней прочитать последние два вопроса по теории.

Все. Свершилось. Всем спасибо и до свидания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа

2. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа

3. Рисс, Секефальви-Надь "Лекции по функциональному анализу"

4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу