Часть I

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Отделение механики (V семестр)

Фёдоров Владимир Михайлович

1. Мера множеств. Продолжение меры на кольцо.

Напомним основные свойства операций с множествами.

Коммутативность объединения и пересечения множеств

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Ассоциативность объединения и пересечения множеств

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Дистрибутивность объединения и пересечения множеств

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$
$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup B).$$

Дистрибутивность разности множеств

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus B),$$
$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \setminus B = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \setminus B).$$

Двойственность разности множеств

$$A \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \setminus B_i),$$
$$A \setminus (\bigcap_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i).$$

В этих формулах число n может быть не только конечным, но и любым бесконечным $n = \infty$, например, счетным или континуумом. Для сокращения записи формул удобно ввести операцию *суммы* множеств $A \sqcup B \doteqdot A \cup B$, которая совпадает с объединением этих множеств при условии, что множества не пересекаются $A \cap B = \emptyset$ (их пересечение является пустым множеством).

Пусть X обозначает пространство и $\mathbf{2}^X$ есть совокупность всех подмножеств в X, включая пустое множество $\emptyset$. Произвольное непустое подмножество $\mathfrak{S} \subset \mathbf{2}^X$ будем называть *системой множеств* пространства X, а само X — *единицей* этой системы множеств.

Определение. Система множеств $\mathfrak{S}$ называется *кольцом*, если $A \cup B \in \mathfrak{S}$ и $A \setminus B \in \mathfrak{S}$ для любых множеств $A, B \in \mathfrak{S}$.

Пустое множество $\emptyset = A \setminus A$ принадлежит кольцу. Так как $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, то из определения кольца следует, что $A \cap B \in \mathfrak{S}$, если $A, B \in \mathfrak{S}$. По индукции нетрудно доказать, что объединение и пересечение любого конечного числа множеств из кольца принадлежит этому кольцу, т.е. если $A_i \in \mathfrak{S}$, то

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{S}, \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{S}.$$

В этом случае говорят, что кольцо $\mathfrak{S}$ замкнуто относительно операций конечного объединения и конечного пересечения.

Кольцо множеств $\mathfrak{S}$ называется *алгеброй*, если единица $X \in \mathfrak{S}$. Алгебра множеств называется σ*-алгеброй*, если $\mathfrak{S}$ замкнута относительно операции объединения счетного числа множеств, т.е. если любое множество вида $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \in \mathfrak{S}$, принадлежит этой алгебре $A \in \mathfrak{S}$.

Определение. Система множеств $\mathfrak{S}$ называется *полукольцом*, если для любых множеств $A, B \in \mathfrak{S}$ пересечение $A \cap B \in \mathfrak{S}$ и разность $A \setminus B$ допускает конечное разложение в виде суммы $A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$, где $C_i \in \mathfrak{S}$.

Пустое множество $\emptyset = A \setminus A$ принадлежит полукольцу, а также пересечение конечного числа множеств полукольца принадлежит полукольцу. По индукции нетрудно доказать следующее свойство полукольца: если $A \in \mathfrak{S}$ и $B_i \in \mathfrak{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$A \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigsqcup_{j=1}^{k} C_j\,, \quad C_j \in \mathfrak{S}\,.$$

Полукольцо, содержащее единицу $X \in \mathfrak{S}$, называется *полуалгеброй*. Наименьшее кольцо, содержащее систему множеств $\mathfrak{S}$ называется *минимальным кольцом* этой системы и обозначается через $R(\mathfrak{S})$.

Лемма. Минимальное кольцо $R(\mathfrak{S})$ полукольца $\mathfrak{S}$ состоит из таких множеств A, которые допускают разложение в виде конечной суммы $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ элементов полукольца $A_i \in \mathfrak{S}$.

Доказательство. Система множеств R, допускающих указанное разложение, очевидно принадлежит любому кольцу, содержащему полукольцо $\mathfrak{S}$. Поэтому нам достаточно показать, что система R есть кольцо. Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ и $B = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j$, где $A_i, B_j \in \mathfrak{S}$. По условию полукольца

$$A_i \setminus B = \bigsqcup_{j=1}^{n_i} C_{ij}\,,$$

где $C_{ij} \in \mathfrak{S}$, откуда следует равенство

$$A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{n_i} C_{ij}\,.$$

Поэтому $A \setminus B \in R$. Так как $A \cup B = (A \setminus B) \sqcup B$, то $A \cup B \in R$. Следовательно, R есть кольцо. $\square$

Пусть $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ — функция множества, определенная на системе множеств $\mathfrak{S}$. Функция φ называется *аддитивной*, если $\varphi(A \sqcup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ для любых $A, B \in \mathfrak{S}$. Функция φ называется *конечно аддитивной*, если $\varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i)$ для всех конечных разложений $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A, A_i \in \mathfrak{S}$. Конечно аддитивная функция называется *счетно аддитивной*, если указанное условие выполняется также при счетном $n = \infty$.

Определение. Функция множества $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}_+$ называется *мерой*, если выполняются следующие условия:

- $\mathfrak{S}$ является полукольцом;
- функция $m(A) \geqslant 0$ неотрицательна;
- функция $m(A)$ конечно аддитивна.

Теорема. Каждая мера, заданная на полукольце $\mathfrak{S}$, имеет единственное продолжение на минимальное кольцо $R(\mathfrak{S})$. Если мера счетно аддитивна, то ее продолжение на $R(\mathfrak{S})$ будет также счетно аддитивной мерой.

Доказательство. По лемме каждое множество $A \in R(\mathfrak{S})$ допускает разложение $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in \mathfrak{S}$. Продолжение меры m мы определим по формуле $m'(A) \doteqdot \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$. Тогда, если $A \in \mathfrak{S}$, то $m'(A) = m(A)$, так что функция m' является продолжением функции m.

Покажем, что указанное определение функции m' корректно. Пусть множество $A \in R(\mathfrak{S})$ имеет два различных разложения $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j$, где $A_i, B_j \in \mathfrak{S}$. Докажем равенство

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{j=1}^k m(B_j)\,.$$

Так как $A_i = A_i \cap A = \bigsqcup_{j=1}^k A_i \cap B_j$ и $B_j = A \cap B_j = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \cap B_j$, то, меняя порядок суммирования, получим

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^k m(B_j)\,.$$

Итак, значения функции m' определяются однозначно.

Докажем конечную аддитивность функции m'. Пусть множество $A = \bigsqcup_{\nu=1}^n B_\nu$, где $A\,, B_\nu \in R(\mathfrak{S})$. Тогда по лемме $A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$ и $B_\nu = \bigsqcup_{j=1}^{n_\nu} B_{j\nu}$, где $A_i \in \mathfrak{S}$ и $B_{j\nu} \in \mathfrak{S}$. Поэтому мы имеем два следующих разложения множества

$$A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i = \bigsqcup_{\nu=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{n_\nu} B_{j\nu}\,.$$

Далее заметим, что справедливы равенства

$$A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i = \bigsqcup_{i=1}^k A_i \cap A = \bigsqcup_{i=1}^k \bigsqcup_{\nu=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{n_\nu} A_i \cap B_{j\nu}\,,$$

$$B_\nu = \bigsqcup_{j=1}^{n_\nu} B_{j\nu} = \bigsqcup_{j=1}^{n_\nu} A \cap B_{j\nu} = \bigsqcup_{j=1}^{n_\nu} \bigsqcup_{i=1}^k A_i \cap B_{j\nu}\,.$$

Отсюда, меняя порядок суммирования, получим

$$m'(A) = \sum_{i=1}^k \sum_{\nu=1}^n \sum_{j=1}^{n_\nu} m(A_i \cap B_{j\nu}) = \sum_{\nu=1}^n m'(B_\nu)\,.$$

Доказательство счетной аддитивности меры m' при условии счетной аддитивности меры m проводится аналогично. Для этого, в изложенном выше доказательстве, нужно считать $n = \infty$ счетным и использовать тот факт, что сумма ряда неотрицательных чисел не зависит от порядка его членов. $\square$

Эта теорема показывает, что меру m, без ограничения общности, всегда можно считать определенной на минимальном кольце. Единственное продолжение меры m на минимальное кольцо мы будем обозначать той же буквой m. Теперь, используя доказанную теорему, установим некоторые свойства меры.

(1). Мера пустого множества $\emptyset$ *равна нулю* $m(\emptyset) = 0$.

Из аддитивности меры $m(\emptyset) = m(\emptyset \sqcup \emptyset) = 2m(\emptyset)$, откуда следует $m(\emptyset) = 0$.

(2). Монотонность. Если $\bigsqcup_{i=1}^n B_i \subseteq A$, *где* $A\,, B_i \in \mathfrak{S}$, *то* $\sum_{i=1}^n m(B_i) \leqslant m(A)$.

Так как множество $C = A \setminus \bigsqcup_{i=1}^n B_i \in R(\mathfrak{S})$, то из условия конечной аддитивности меры m получим

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(B_i) + m(C) \geqslant \sum_{i=1}^n m(B_i)\,.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в этом неравенстве, можно доказать это свойство также при счетном $n = \infty$.

(3). Полуаддитивность. Если $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$, *где* $A\,, B_i \in \mathfrak{S}$, *то* $m(A) \leqslant \sum_{i=1}^n m(B_i)$.

Для доказательства определим множества $C_i = B_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j$. Тогда $C_i \in R(\mathfrak{S})$ и мы имеем равенство

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A \cap C_i\,, \quad A \cap C_i \subseteq B_i\,.$$

Откуда в силу конечной аддитивности и монотонности меры

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(A \cap C_i) \leqslant \sum_{i=1}^n m(B_i)\,.$$

Если мера m счетно аддитивна, то это свойство верно также при счетном $n = \infty$. Доказательство в этом случае использует счетную аддитивность меры m, а в остальном полностью аналогично.

Пример (1). Линейная мера в $\mathbb{R}$. Пусть $\mathfrak{S}$ есть полукольцо полуинтервалов вида $[a, b) \subset \mathbb{R}$ и мера $m([a, b)) \doteqdot b - a$. Если $[a, b) = \bigsqcup_{i=1}^{n} [c_{i-1}, c_i)$, где числа c_i удовлетворяют условиям $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$, то

$$m([a, b)) = b - a = \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m([c_{i-1}, c_i)) .$$

Поэтому линейная мера конечно аддитивна. Доказательство ее счетной аддитивности вытекает из теоремы, доказанной ниже.

Пример (2). Мера Стилтьеса в $\mathbb{R}$. Пусть $\mathfrak{S}$ есть полукольцо полуинтервалов вида $[a, b) \subset \mathbb{R}$ и мера определяется по формуле $m_\alpha([a, b)) \doteqdot \alpha(b) - \alpha(a)$, где $\alpha(x)$ заданная неубывающая функция в $\mathbb{R}$. Если $[a, b) = \bigsqcup_{i=1}^{n} [c_{i-1}, c_i)$, где числа c_i удовлетворяют условиям $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$, то

$$m_\alpha([a, b)) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha(c_i) - \alpha(c_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} m([c_{i-1}, c_i)) .$$

Поэтому мера Стилтьеса конечно аддитивна.

Теорема. Мера Стилтьеса m_α счетно аддитивна тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x)$ непрерывна слева.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_n \nearrow x$ ($n \to \infty$). Тогда, используя счетную аддитивность меры m_α, получим

$$m_\alpha([x_1, x)) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})) = \lim \alpha(x_n) - \alpha(x_1) .$$

Так как $m_\alpha([x_1, x)) = \alpha(x) - \alpha(x_1)$, то отсюда вытекает равенство $\lim \alpha(x_n) = \alpha(x)$. Следовательно, функция $\alpha(x)$ непрерывна слева во всех точках $x \in \mathbb{R}$.

Достаточность. Пусть $[a, b) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i)$, тогда при любом n имеет место неравенство

$$m_\alpha([a, b)) \geqslant m_\alpha(\bigsqcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{n} m_\alpha([a_i, b_i)) .$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство $m_\alpha([a, b)) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_\alpha([a_i, b_i))$. Докажем обратное неравенство. Так как функция $\alpha(x)$ непрерывна слева, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $c_i < a_i$ и $c < b$, что

$$\alpha(a_i) - \alpha(c_i) < \varepsilon / 2^{i+1} , \quad \alpha(b) - \alpha(c) < \varepsilon / 2 .$$

По теореме о конечном покрытии $[a, c] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (c_i, b_i)$. Из свойства полуаддитивности меры и указанных неравенств, вытекает

$$m_\alpha([a, c)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_\alpha([c_i, b_i)) < \sum_{i=1}^{\infty} m_\alpha([a_i, b_i)) + \varepsilon / 2 .$$

Таким образом, $m_\alpha([a, b)) < \sum_{i=1}^{\infty} m_\alpha([a_i, b_i)) + \varepsilon$. Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ обратное неравенство также верно. □

2. Теорема Каратеодори. Продолжение меры по Лебегу.

Пусть X — пространство и 2^X есть совокупность всех множеств пространства X, включая пустое множество $\emptyset$. Через $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \sqcup \infty$ обозначается расширенное множество неотрицательных действительных чисел, включая бесконечно удаленную точку ∞. По определению при всех $a \in \mathbb{R}$ имеют место $a + \infty = \infty$ и $a < \infty$, а также $\infty + \infty = \infty$. Однако выражение вида $\infty - \infty$ считается неопределенным. Далее мы будем рассматривать меры, принимающие бесконечные значения.

Определение. Функция $\mu : \mathbf{2}^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется *внешней мерой* в X, если выполняются следующие условия:

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- $\mu(A) \geqslant 0$ для всех $A \subseteq X$;
- $\mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$ для всех $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Последнее условие *счетной полуаддитивности* в ряде случаев может не выполняться (например, для конечно аддитивных мер). Поэтому его заменяют более простым условием *конечной полуаддитивности.* Каждое из этих условий влечет свойство *монотонности* внешней меры: если $A \subseteq B$, то $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Определение. Множество E называется μ*-измеримым* в X, если для всех множеств $A \subseteq X$ выполняется равенство

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E).$$

Так как по свойству полуаддитивности внешней меры имеет место неравенство $\mu(A) \leqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$, то для проверки μ-измеримости множества E достаточно установить только обратное неравенство $\mu(A) \geqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$. Последнее неравенство нуждается в проверке только в случае $\mu(A) < \infty$.

Очевидно, что $\emptyset$ и X являются μ-измеримыми. Если множество E имеет внешнюю меру нуль $\mu(E) = 0$, то оно μ-измеримо. В самом деле, по свойствам монотонности и полуаддитивности внешней меры $\mu(A \cap E) = 0$, а $\mu(A \setminus E) = \mu(A)$.

Систему всех μ-измеримых множеств будем обозначать Σ_μ. Если обозначить через $A' \doteqdot X \setminus A$ и $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)$, то условие μ-измеримости E запишется в виде $\mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$. Поэтому дополнение E' μ-измеримо вместе с E.

Теорема (Каратеодори). *Пусть μ — внешняя мера в X. Тогда система Σ_μ всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй, а функция μ будет счетно аддитивной мерой на этой σ-алгебре.*

Доказательство. Обозначим $AB \doteqdot A \cap B$. Пусть $E = E_1E_2$, где $E_1, E_2 \in \Sigma_\mu$. Из условий μ-измеримости, получим

$$\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1') = \mu_A(E_1E_2) + \mu_A(E_1E_2') + \mu_A(E_1'),$$
$$\mu_A(E) + \mu_A(E') = \mu_A(E) + \mu_A(E'E_1) + \mu_A(E'E_1').$$

Но $E' = E_1' \cup E_2'$, а значит $E'E_1 = E_1E_2'$ и $E'E_1' = E_1'$. Отсюда левые части равенств совпадают, так что $E \in \Sigma_\mu$. Далее, поскольку $E_1 \cup E_2 = (E_1'E_2')'$ и $E_1 \setminus E_2 = E_1E_2'$, то $E_1 \cup E_2 \in \Sigma_\mu$ и $E_1 \setminus E_1 \in \Sigma_\mu$. Следовательно, система Σ_μ есть алгебра.

Пусть $E = E_1 \sqcup E_2$, где $E_1, E_2 \in \Sigma_\mu$. Заменим A на AE в условии μ-измеримости $\mu_A(X) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_1')$, тогда получим $\mu_A(E) = \mu_A(E_1) + \mu_A(E_2)$. Итак, функция

μ_A аддитивна. Отсюда по индукции при всех n имеем $\mu_A(E) = \sum_{i=1}^n \mu_A(E_i)$, если $E = \bigsqcup_{i=1}^n E_i$ и $E_i \in \Sigma_\mu$. Значит функция μ_A конечно аддитивна на системе Σ_μ.

Пусть теперь $E = \bigsqcup_{i=1}^\infty E_i$ и $F_n = \bigsqcup_{i=1}^n E_i$, где $E_i \in \Sigma_\mu$. Тогда по доказанному множества F_n будут μ-измеримы. Следовательно, применяя конечную аддитивность и монотонность функции μ_A, мы имеем

$$\mu_A(X) = \mu_A(F_n) + \mu_A(F_n') \geqslant \textstyle\sum_{i=1}^n \mu_A(E_i) + \mu_A(E')\,.$$

Переходя здесь к пределу $n \to \infty$ и применяя свойство счетной полуаддитивности, мы получим неравенства

$$\mu_A(X) \geqslant \textstyle\sum_{i=1}^\infty \mu_A(E_i) + \mu_A(E') \geqslant \mu_A(E) + \mu_A(E') \geqslant \mu_A(X)\,.$$

Поэтому справедливо равенство $\mu_A(X) = \mu_A(E) + \mu_A(E')$. Но тогда $E \in \Sigma_\mu$. Заменяя в указанных выше неравенствах A на AE, мы получим $\mu_A(E) = \sum_{n=1}^\infty \mu_A(E_n)$. Таким образом, функция μ_A счетно аддитивна на σ-алгебре Σ_μ. □

Замечание. Если внешняя мера μ не удовлетворяет условию счетной полуаддитивности, т.е. μ — конечно полуаддитивная внешняя мера, то из доказательства теоремы видно, что система μ-измеримых множеств Σ_μ является алгеброй, а функция μ — конечно аддитивной мерой на этой алгебре.

Рассмотрим метод построения внешней меры, который может применяться в конкретных ситуациях. Пусть m — счетно аддитивная мера, определенная на полукольце $\mathfrak{S}$ множеств пространства X. Ее продолжение на минимальное кольцо $R(\mathfrak{S})$ обозначается также через m.

Внешней мерой Лебега называется функция m^*, определенная на совокупности множеств $A \subseteq X$ по формуле

$$\mu(A) = m^*(A) \doteqdot \inf_{A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty B_i} \textstyle\sum_{i=1}^\infty m(B_i)\,.$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty B_i$, состоящим из счетного числа элементов $B_i \in \mathfrak{S}$. Если множество A не допускает такого покрытия, то мы полагаем $\mu(A) = \infty$. Ясно, что функция μ неотрицательна и $\mu(\emptyset) = 0$. Покажем, что функция $\mu = m^*$ удовлетворяет условию счетной полуаддитивности.

(1). Если $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty B_i$, *то* $m^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^\infty m^*(B_i)$.

Если одно из множеств A_i имеет внешнюю меру $m^*(A_i) = \infty$, то утверждение очевидно. Если все $m^*(A_i) < \infty$, то для доказательства возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем счетные покрытия множеств $B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty B_{ij}$ так, что

$$\textstyle\sum_{j=1}^\infty m(B_{ij}) \leqslant m^*(B_i) + \varepsilon/2^i\,, \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{i=1}^\infty B_{ij}\,.$$

где $B_{ij} \in \mathfrak{S}$. Тогда по определению функции m^* получим

$$m^*(A) \leqslant \textstyle\sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty m(B_{ij}) \leqslant \sum_{i=1}^\infty m^*(B_i) + \varepsilon\,.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то свойство (1) доказано.

(2). Если $A \in R(\mathfrak{S})$, *то* $m^*(A) = m(A)$.

Так как множество $A \in R(\mathfrak{S})$ является конечной суммой элементов полукольца $\mathfrak{S}$, то $m^*(A) \leqslant m(A)$. С другой стороны, если $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty B_i$, где $B_i \in \mathfrak{S}$, то из свойства счетной полуаддитивности меры m вытекает неравенство $m(A) \leqslant \sum_{i=1}^\infty m(B_i)$. Таким образом, $m^*(A) = m(A)$.

Теорема. Пусть m — счетно аддитивная мера, определенная на полукольце $\mathfrak{S}$, и $\mu = m^*$. Тогда система Σ_μ всех μ-измеримых множеств является σ-алгеброй, а счетно аддитивная мера μ, определенная на этой σ-алгебре, будет продолжением меры m.

Доказательство. По свойству (1) функция $\mu = m^*$ является внешней мерой. Поэтому по теореме Каратеодори система Σ_μ есть σ-алгебра, а функция μ является счетно аддитивной мерой на этой σ-алгебре. Докажем включение $R(\mathfrak{S}) \subseteq \Sigma_\mu$. Пусть $\mu(A) < \infty$ и $E \in \mathfrak{S}$. По определению внешней меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $B_i \in \mathfrak{S}$, что

$$\sum_{j=1}^\infty m(B_i) \leqslant \mu(A) + \varepsilon\,, \quad A \subseteq B \doteqdot \bigcup_{j=1}^\infty B_i\,.$$

Применяя полуаддитивность и монотонность μ, получим

$$\mu(A) \leqslant \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E) \leqslant \mu(B \cap E) + \mu(B \setminus E) \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^\infty m(B_i \cap E) + \sum_{i=1}^\infty m(B_i \setminus E) = \sum_{i=1}^\infty m(B_i) < \mu(A) + \varepsilon\,.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то справедливо равенство $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E)$. Таким образом, множество E является μ-измеримым. Отсюда следует включение $R(\mathfrak{S}) \subseteq \Sigma_\mu$. Поскольку по свойству (2) $\mu(A) = m(A)$ для всех $A \in R(\mathfrak{S})$, то мера μ, определенная в Σ_μ, является продолжением меры m. $\square$

(3). Если $A \subseteq X$, то существует μ-измеримое множество $B \in \Sigma_\mu$ такое, что $A \subseteq B$ и $\mu(A) = \mu(B)$.

Множество B называется *μ-измеримой оболочкой* A. Если $\mu(A) = \infty$, то μ-измеримой оболочкой A будет X. Иначе по определению внешней меры найдутся такие $B_{ij} \in \mathfrak{S}$, что

$$\sum_{j=1}^\infty m(B_{ij}) \leqslant \mu(A) + 1/i\,, \quad A \subseteq B_i \doteqdot \bigcup_{j=1}^\infty B_{ij}\,.$$

Тогда множество $B \doteqdot \bigcap_{i=1}^\infty B_i$ μ-измеримо. Из свойства монотонности и определения внешней меры вытекает

$$\mu(B) \leqslant \mu(B_i) \leqslant \sum_{j=1}^\infty m(B_{ij}) \leqslant \mu(A) + 1/i\,.$$

при всех $i = 1, 2, \ldots$. Переходя к пределу $i \to \infty$, получим неравенство $\mu(B) \leqslant \mu(A)$. Так как $A \subseteq B$, то справедливо равенство $\mu(A) = \mu(B)$. В частности, если множество A является μ-измеримым, то $A = B \setminus F$, где $\mu(F) = 0$.

Рассмотрим случай, когда полукольцо $\mathfrak{S}$ содержит единицу $X \in \mathfrak{S}$, т.е. является полуалгеброй. В этом случае определение μ-измеримого множества можно заменить более простым. Для этого введем еще *внутреннюю меру* Лебега

$$m_*(A) \doteqdot m(X) - m^*(A')\,.$$

Множество E называется *измеримым* по Лебегу, если внешняя мера совпадает с внутренней $m^*(E) = m_*(E)$, что равносильно равенству $m(X) = m^*(E) + m^*(E')$.

Лемма. Пусть счетно аддитивная мера m определена на полуалгебре $\mathfrak{S}$ и $\mu = m^*$. Множество измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда оно является μ-измеримым.

Доказательство. Достаточно доказать, что каждое множество, измеримое по Лебегу, является μ-измеримым, поскольку обратное очевидно. Пусть множество E измеримо по Лебегу и $B, C \in \Sigma_\mu$ есть μ-измеримые оболочки множеств E и E' соответственно. Тогда $E \subseteq B$, $E' \subseteq C$, $B \cup C = X$ и в силу аддитивности μ на системе Σ_μ получим

$$\mu(B \cap C) = \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cup C) = m^*(E) - m_*(E) = 0\,.$$

Так как $B \setminus E \subseteq B \cap C$, то $\mu(B \setminus E) = 0$. Отсюда множество $B \setminus E$ μ-измеримо. Поэтому множество $E = B \setminus (B \setminus E)$ также будет μ-измеримым. □

Пример. Мера Лебега в $\mathbb{R}$. Пусть полукольцо $\mathfrak{S}$ состоит из всех промежутков в $\mathbb{R}$ (отрезки, интервалы, полуинтервалы), а счетно аддитивная мера равна $m(\langle a, b\rangle) = b - a$ длине промежутка $\langle a, b\rangle$. Тогда внешнюю меру Лебега m^* удобно определять, используя только интервалы

$$\mu(A) = m^*(A) \doteqdot \inf_{A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i)} \sum_{i=1}^\infty (b_i - a_i)\,.$$

Мера μ, заданная на σ-алгебре Σ_μ, называется *мерой Лебега.* Поскольку каждое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением не более, чем счетного числа интервалов, то оно будет μ-измеримым. Так как замкнутые множества являются дополнениями к открытым, то они также μ-измеримы.

Аналогично построению измеримой оболочки, каждое множество $A \subseteq \mathbb{R}$ конечной меры $\mu(A) < \infty$ допускает представление в виде $A = B \setminus F$, где

$$A \subseteq B = \bigcap_{i=1}^\infty B_i\,, \quad B_i = \bigcup_{j=1}^\infty (a_{ij}, b_{ij})\,,$$

B_i — открытые множества и $m^*(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(B_i)$. Поэтому справедлива следующая формула для внешней меры Лебега

$$m^*(A) \doteqdot \inf_{B \supseteq A} \mu(B)\,,$$

где нижняя грань берется по всем открытым множествам $B \supseteq A$. Полагая далее $X = [a, b]$, для всех $A \subseteq X$ получим равенства

$$m(X) - m^*(A') = \inf_{B \supseteq A'} (\mu(X) - \mu(B)) = \sup_{B' \subseteq A} \mu(B')\,.$$

Откуда следует формула для внутренней меры Лебега

$$m_*(A) \doteqdot \sup_{C \subseteq A} \mu(C)\,,$$

где верхняя грань берется по всем замкнутым множествам $C \subseteq A$. Так как для измеримых множеств $m^*(E) = m_*(E)$, то из указанных формул вытекает следующий критерий измеримости: множество E измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие множества $C \subseteq E \subseteq B$, что $\mu(B \setminus C) < \varepsilon$, где B — открыто и C — замкнуто.

3. Продолжение меры по Жордану. Интеграл по мере.

Рассмотрим метод продолжения мер по Жордану. Пусть мера m определена на полуалгебре $\mathfrak{S}$ множеств пространства X. Ее продолжение на минимальное кольцо $R(\mathfrak{S})$ мы будем обозначать также через m.

Внешней и *внутренней* мерой Жордана называются соответственно функции m_e и m_i, определенные на совокупности всех множеств $A \subseteq X$ формулами

$$\nu(A) = m_e(A) \doteqdot \inf_{B \supseteq A} m(B)\,, \quad m_i(A) \doteqdot \sup_{B \subseteq A} m(B)\,.$$

Здесь нижняя и верхняя грань берется по множествам $B \in R(\mathfrak{S})$. Множество E называется *измеримым* по Жордану, если имеет место равенство $m_e(E) = m_i(E)$. Отметим следующие простые свойства внешней меры Жордана.

(1). Если $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$, то $m_e(A) \leqslant \sum_{i=1}^n m_e(B_i)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $B_i \subseteq C_i$, где $C_i \in R(\mathfrak{S})$ такие множества, что $m(C_i) < m_e(B_i) + \varepsilon/2^i$. Тогда множество $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ будет принадлежать кольцу $R(\mathfrak{S})$. Поэтому, применяя свойство полуаддитивности меры m, получим

$$m_e(A) \leqslant m(C) \leqslant \sum_{i=1}^n m(C_i) < \sum_{i=1}^n m_e(B_i) + \varepsilon\,.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то указанное неравенство верно.

(2). Если $A \in R(\mathfrak{S})$, то $m_e(A) = m_i(A) = m(A)$.

Это следует из определения функций m_e и m_i. Таким образом, любое множество из $R(\mathfrak{S})$ измеримо по Жордану. Для того чтобы применить теорему Каратеодори, нужно проверить, что свойство измеримости по Жордану равносильно свойству ν-измеримости по внешней мере $\nu = m_e$.

Лемма. *Пусть мера m определена на полуалгебре $\mathfrak{S}$ и $\nu = m_e$. Тогда множество E измеримо по Жордану в том и только в том случае, когда оно ν-измеримо.*

Доказательство. Необходимость. Если множество E измеримо по Жордану, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $B, C \in R(\mathfrak{S})$, что $C \subseteq E \subseteq B$ и $m(B \setminus C) < \varepsilon/2$. Для любого A выберем множество $D \in R(\mathfrak{S})$ так, что $A \subseteq D$ и $m(D) < m_e(A) + \varepsilon/2$. Тогда, применяя полуаддитивность m_e, мы имеем

$$m_e(A) \leqslant m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E) \leqslant m(D \cap B) + m(D \setminus C) =$$
$$m(D \cap B) + m(D \setminus B) + m(B \setminus C) < m(D) + \varepsilon/2 < m_e(A) + \varepsilon\,.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то справедливо равенство $m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E)$ и, следовательно, множество E ν-измеримо.

Достаточность. Из ν-измеримости множества E вытекает, что $m(X) = m_e(E) + m_e(E')$. Отсюда, поскольку имеет место равенство

$$m_e(E) = m(X) - m_e(E') = m(X) - \inf_{B \supseteq E'} m(B) = \sup_{B' \subseteq E} m(B')\,,$$

то $m_e(E) = m_i(E)$. Поэтому множество E измеримо по Жордану. □

Теорема. *Пусть m — мера, определенная на полуалгебре $\mathfrak{S}$, и $\nu = m_e$. Тогда система Σ_ν, состоящая из всех измеримых множеств по Жордану, является алгеброй, а мера ν, определенная на этой алгебре, будет продолжением меры m.*

Доказательство. В силу теоремы Каратеодори (см. замечание) система Σ_ν всех ν-измеримых множеств будет алгеброй, а функция ν мерой на этой алгебре. По лемме Σ_ν состоит из всех измеримых множеств по Жордану. Из свойства (2) имеет место включение $R(\mathfrak{S}) \subseteq \Sigma_\mu$ и равенство $\nu(A) = m(A)$ для всех $A \in R(\mathfrak{S})$. Поэтому мера ν, определенная на алгебре Σ_ν, является продолжением меры m. □

Замечание. Если мера m счетно аддитивна, то ее можно продолжить по Лебегу и по Жордану. При этом нетрудно проверить, что имеют место неравенства

$$m_i(A) \leqslant m_*(A) \leqslant m^*(A) \leqslant m_e(A)\,,$$

На жордановых множествах $A \in \Sigma_\nu$ они становятся равенствами. Следовательно, каждое множество A, измеримое по Жордану, будет измеримым по Лебегу. Отсюда $\Sigma_\nu \subseteq \Sigma_\mu$. В частности, поскольку на жордановой алгебре Σ_ν внешние меры Лебега $\mu = m^*$ и Жордана $\nu = m_e$ совпадают, то мера Жордана будет счетно аддитивной мерой в Σ_ν.

Интеграл Лебега, при сравнении с интегралом Римана, имеет ряд преимуществ, связанных с вопросами существования и предельного перехода. Рассмотрим общую концепцию интеграла по мере. Вначале мы определим его для ограниченных функции по мере, заданной на некоторой алгебре. В дальнейшем мы распространим его на класс неограниченных функций, интегрируя по счетно аддитивной мере, заданной на некоторой σ-алгебре.

Пусть мера μ задана на алгебре множеств Σ пространства X. Тогда (X, Σ, μ) называется *измеримым пространством* конечно аддитивной меры μ. Множества, принадлежащие данной алгебре Σ, называются *измеримыми* в этом пространстве. Для каждого числа $c \in \mathbb{R}$ и для каждой функции $f : E \to \mathbb{R}$, заданной на множестве $E \in \Sigma$, введем следующие множества:

$$E(f < c) \doteqdot \{x \in E \mid f(x) < c\}\,.$$

Они носят название *лебеговых множеств* функции f.

Определение. Функция f называется *измеримой* на множестве E, если все ее лебеговы множества измеримы, т.е. принадлежат $E(f < c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$.

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной* на множестве E, если существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что $|f(x)| < c$ при всех $x \in E$.

Далее будем предполагать, что функция f ограничена на E и множество $E \in \Sigma$ имеет конечную меру $\mu(E) < \infty$. Пусть заданы два некоторых разбиения $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$ и $\beta = \{B_j\}_{j=1}^k$ множества E множествами $A_i \in \Sigma$ и $B_j \in \Sigma$ так, что

$$E = \bigsqcup\nolimits_{i=1}^n A_i = \bigsqcup\nolimits_{j=1}^k B_j\,.$$

Нижние и верхние *суммы Дарбу* для функции f, отвечающие разбиениям α и β, определяются формулами

$$\underline{S}\,(f, \alpha) \doteqdot \sum\nolimits_{i=1}^n a_i \mu(A_i)\,, \quad \overline{S}(f, \beta) \doteqdot \sum\nolimits_{j=1}^k b_j \mu(B_j)\,,$$

где $a_i = \inf_{x \in A_i} f(x)$ и $b_j = \sup_{x \in B_j} f(x)$. Далее разбиение $\tau = \alpha \cap \beta$ множества E,

$$\tau = \alpha \cap \beta = \{C_{ij}\}_{i,j=1}^{n,k}\,, \quad C_{ij} = A_i \cap B_j\,,$$

будет называться *произведением разбиений* α и β.

Лемма. Пусть разбиение $\tau = \alpha \cap \beta$ получено произведением разбиений α и β. Тогда имеют место неравенства

$$\underline{S}(f,\alpha) \leqslant \underline{S}(f,\tau) \leqslant \overline{S}(f,\tau) \leqslant \overline{S}(f,\beta)\,.$$

Доказательство. Обозначим через c_{ij} и d_{ij} величины

$$c_{ij} \doteqdot \inf_{x\in C_{ij}} f(x)\,, \quad d_{ij} \doteqdot \sup_{x\in C_{ij}} f(x)\,.$$

Так как $a_i \leqslant c_{ij}$ и $d_{ij} \leqslant b_j$ при всех i и j, то, используя конечную аддитивность меры m, получим неравенства

$$\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i) = \sum_{i,j=1}^{n,k} a_i\mu(C_{ij}) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n,k} c_{ij}\mu(C_{ij}) \leqslant$$
$$\sum_{i,j=1}^{n,k} d_{ij}\mu(C_{ij}) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n,k} b_j\mu(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{k} b_j\mu(B_j)\,,$$

что соответствует указанным неравенствам для сумм Дарбу. □

Нижним и верхним интегралом функции f на множестве E называются соответственно следующие величины:

$$\underline{\int}_E f\,d\mu = \sup_\alpha \underline{S}(f,\alpha)\,, \quad \overline{\int}_E f\,d\mu = \inf_\beta \overline{S}(f,\beta)\,,$$

где верхняя и нижняя грань берутся по всевозможным разбиениям α и β множества E. По лемме любая нижняя сумма Дарбу не превосходит верхнюю. Поэтому нижний интеграл не превосходит верхний.

Определение. Ограниченная функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *интегрируемой* на множестве E конечной меры, если ее нижний и верхний интегралы совпадают. Их общее значение называется *интегралом* f на E и обозначается через

$$\int_E f\,d\mu = \underline{\int}_E f\,d\mu = \overline{\int}_E f\,d\mu\,.$$

Условие интегрируемости функции f состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие два разбиения α и β, для которых $\overline{S}(f,\beta) - \underline{S}(f,\alpha) < \varepsilon$. Если $\tau = \alpha\cap\beta$ есть произведение этих разбиений, то по лемме мы получим $\overline{S}(f,\tau) - \underline{S}(f,\tau) < \varepsilon$. Это условие является необходимым и достаточным. Пусть $\omega(f,A) \doteqdot \sup_{x,y\in A} |f(x) - f(y)|$ обозначает колебание функции f на множестве A. Тогда имеем равенство

$$\overline{S}(f,\alpha) - \underline{S}(f,\alpha) = \sum_{i=1}^n \omega(f,A_i)\,\mu(A_i)\,.$$

Таким образом, достаточным условием интегрируемости функции является существование таких разбиений, на которых она имеет сколь угодно малое колебание.

Теорема. Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима и ограничена на множестве $E \in \Sigma$ конечной меры, то f интегрируема.

Доказательство. Пусть $|f(x)| < c$ при всех $x \in E$ и $-c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = c$ разбиение интервала $(-c,c)$ точками $y_i = (2i-n)c/n$, где $i = 0,1,\ldots,n$. Определим множества, соответствующие данному разбиению

$$A_i \doteqdot E(y_{i-1} \leqslant f < y_i) = E(f < y_i) \setminus E(f < y_{i-1})\,.$$

Пусть $a_i = \inf_{x\in A_i} f(x)$ и $b_i = \sup_{x\in A_i} f(x)$. Величина разности $\omega(f,A_i) \doteqdot b_i - a_i$ есть колебание f на A_i. Так как функция f измерима, то множества $A_i \in \Sigma$ измеримы, при этом имеет место неравенство $\omega(f,A_i) \leqslant y_i - y_{i-1} = 2c/n$. Следовательно, для разбиения $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$ мы получим $\overline{S}(f,\alpha) - \underline{S}(f,\alpha) \leqslant 2c\,\mu(E)/n$. Поскольку это неравенство выполняется при любом n, то f интегрируема. □

Если мера μ счетно аддитивна и определена на σ-алгебре Σ, то данный интеграл от измеримой функции называется *интегралом Лебега.* Позднее мы определим его для неограниченных функций и для множеств бесконечной меры. Рассмотрим основные свойства интегрируемых функций.

(1). Монотонность. Если функции f и g интегрируемы на E и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in E$, то $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.

Это следует из неравенств для верхних сумм Дарбу $\overline{S}(f,\alpha) \leqslant \overline{S}(g,\alpha)$.

(2). Модуль. Если функция f интегрируема на множестве E, то ее модуль $|f|$ интегрируем и $|\int_E f\,d\mu| \leqslant \int_E |f|\,d\mu$.

Так как имеет место неравенство $||f(x)|-|f(y)|| \leqslant |f(x)-f(y)|$, то колебание модуля $\omega(|f|,A) \leqslant \omega(f,A)$. Поэтому

$$\overline{S}(|f|,\alpha) - \underline{S}\,(|f|,\alpha) \leqslant \overline{S}(f,\alpha) - \underline{S}\,(f,\alpha).$$

Следовательно, интегрируемость $|f|$ вытекает из интегрируемости f, а неравенство для интегралов следует из свойства (1), поскольку $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.

(3). Аддитивность. Если функция f интегрируема на $E_1 \in \Sigma$ и $E_2 \in \Sigma$, а $E = E_1 \sqcup E_2$, то f интегрируема на E и

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu.$$

Пусть α — разбиение множества E, а $\alpha_1 = \alpha \cap E_1$ и $\alpha_2 = \alpha \cap E_2$ — соответствующие разбиения множеств E_1 и E_2. Тогда $\alpha = \alpha_1 \sqcup \alpha_2$ является суммой этих разбиений и мы, очевидно, получим

$$\underline{S}\,(f,\alpha) = \underline{S}\,(f,\alpha_1) + \underline{S}\,(f,\alpha_2) \leqslant \overline{S}(f,\alpha_1) + \overline{S}(f,\alpha_2) = \overline{S}(f,\alpha).$$

Отсюда следует, что функция f интегрируема на множестве E, а ее интеграл равен сумме интегралов по E_1 и E_2.

(4). Линейность. Пусть функции f и g интегрируемы на множестве E и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функции $f+g$ и λf интегрируемы на E и

$$\int_E \lambda f\,d\mu = \lambda \int_E f\,d\mu, \quad \int_E (f+g)\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

Если $\lambda > 0$, то $\overline{S}(\lambda f,\alpha) = \lambda\,\overline{S}(f,\alpha)$ и $\underline{S}\,(\lambda f,\alpha) = \lambda\,\underline{S}\,(f,\alpha)$. Если же $\lambda < 0$, то $\overline{S}(\lambda f,\alpha) = \lambda\,\underline{S}\,(f,\alpha)$ и $\underline{S}\,(\lambda f,\alpha) = \lambda\,\overline{S}(f,\alpha)$. Отсюда следует утверждение для λf. Утверждение для суммы $f+g$ получается из следующих неравенств

$$\underline{S}\,(f,\alpha) + \underline{S}\,(g,\alpha) \leqslant \underline{S}\,(f+g,\alpha) \leqslant \overline{S}(f+g,\alpha) \leqslant \overline{S}(f,\alpha) + \overline{S}(g,\alpha).$$

Поскольку крайние члены этих неравенств сколь угодно близки друг к другу, то средние тоже обладают этим свойством. Отсюда вытекает интегрируемость $f+g$ и равенство интеграла от $f+g$ сумме интегралов от f и g.

4. Измеримые функции. Сходимость почти всюду.

В классическом анализе применяются главным образом непрерывные или кусочно непрерывные функции. Однако при переходе к пределу возникают функции более сложной природы. В современной теории функций используются измеримые функции, которые удовлетворяют всем потребностям анализа.

Рассмотрим счетно аддитивную меру μ, определенную на некоторой σ-алгебре множеств Σ пространства X. Тогда (X, Σ, μ) называется *измеримым пространством* счетно аддитивной меры μ, а множества, принадлежащие данной σ-алгебре Σ, называются *измеримыми*. Мера называется *полной*, если любое подмножество множества меры нуль является измеримым.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *измеримой* на множестве $E \in \Sigma$, если все ее лебеговы множества

$$E(f < c) \doteqdot \{x \in E |\, f(x) < c\}$$

измеримы, т.е. $E(f < c) \in \Sigma$ при всех $c \in \mathbb{R}$.

Так как система множеств Σ является σ-алгеброй, то из измеримости лебеговых множеств вытекает измеримость следующих множеств:

$$E(f \geqslant c) = E \setminus E(f < c)\,;$$

$$E(f \leqslant c) = \textstyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < c + 1/n)\,;$$

$$E(f > c) = E \setminus E(f \leqslant c)\,;$$

$$E(a \leqslant f < b) = E(f < b) \setminus E(f < a)\,;$$

$$E(a < f < b) = E(f < b) \setminus E(f \leqslant a)\,;$$

$$E(a < f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f \leqslant a)\,;$$

$$E(a \leqslant f \leqslant b) = E(f \leqslant b) \setminus E(f < a)\,.$$

Обозначим через $\mathcal{T}$ систему всех открытых множеств в $\mathbb{R}$ и рассмотрим наименьшую σ-алгебру $R_\sigma(\mathcal{T})$, содержащую все открытые множества в $\mathbb{R}$. Множества, принадлежащие этой σ-алгебре, называются *борелевыми*. Так как дополнение открытого множества в $\mathbb{R}$ является замкнутым, то $R_\sigma(\mathcal{T})$ содержит все замкнутые множества в $\mathbb{R}$. Легко видеть, что все промежутки из $\mathbb{R}$ (отрезки, интервалы и полуинтервалы) являются борелевыми множествами.

Теорема. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда прообраз любого борелевого множества является измеримым, т.е. имеет место включение $f^{-1}(B) \in \Sigma$ для всех $B \in R_\sigma(\mathcal{T})$.

Доказательство. Достаточность теоремы очевидна, поскольку $(-\infty, c) \in R_\sigma(\mathcal{T})$. Докажем необходимость. Рассмотрим систему $\mathfrak{S}$ всех множеств $A \subseteq \mathbb{R}$, у которых прообраз $f^{-1}(A)$ измерим. Так как система множеств Σ является σ-алгеброй и

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)\,, \quad f^{-1}\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)\,,$$

то $\mathfrak{S}$ есть σ-алгебра. Так как по предположению (см. выше) все множества вида $E(a < f < b) = f^{-1}((a,b))$ измеримы, то $\mathfrak{S}$ содержит все интервалы (a,b). Поскольку каждое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением не более чем счетного числа интервалов, то $\mathfrak{S}$ содержит все открытые множества. Поэтому в силу минимальности борелевской σ-алгебры $R_\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \mathfrak{S}$. □

Рассмотрим свойства измеримых функций. Вначале заметим, что измеримость функции f на множестве E влечет измеримость f на каждом измеримом подмножестве $A \subseteq E$. Для доказательства измеримости функции f, заданной на сумме конечного или счетного числа измеримых множеств, достаточно проверить ее измеримость на каждом из этих множеств.

Лемма. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E и задана непрерывная функция $F(u,v)$ двух переменных, определенная на открытом множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Предположим, что $(f(x), g(x)) \in D$ при всех $x \in E$. Тогда функция $h(x) = F(f(x), g(x))$ измерима.*

Доказательство. В силу непрерывности F множество $D(F < c)$ является открытым в $\mathbb{R}^2$. Поэтому его можно представить в виде счетного объединения открытых прямоугольников, у которых вершины имеют рациональные координаты

$$D(F < c) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,, \quad A_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)\,.$$

Так как множество $E((f,g) \in A_i) = E(a_i < f < b_i) \cap E(c_i < g < d_i)$ измеримо, то

$$E(h < c) = \bigcup_{i=1}^{\infty} E((f,g) \in A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} E(a_i < f < b_i) \cap E(c_i < g < d_i)$$

также измеримо, поскольку Σ является σ-алгеброй. □

Из этой леммы легко получаем следующие свойства измеримых функций.

(1). Пусть функции f и g измеримы на E. Тогда их сумма $f+g$ и произведение fg будут измеримы на E, а частное f/g измеримо, если $g(x) \neq 0$ на E. Степень $|f|^p$ является измеримой при всех $p > 0$.

(2). Пусть последовательность $\{f_n\}$ состоит из измеримых функций на множестве E. Тогда, если функции $\inf f_n(x)$, $\sup f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ принимают конечные значения на E, то они измеримы. Если предел $f(x) = \lim f_n(x)$ существует при всех $x \in E$, то f является измеримой функцией.

Измеримость $\inf f_n(x)$ и $\sup f_n(x)$ выводится из соотношений

$$E(\inf f_n < c) = \bigcup_{i=1}^{\infty} E(f_i < c)\,, \quad \sup f_n(x) = -\inf(-f_n(x))\,.$$

Так как при всех $x \in E$ справедливы равенства

$$\overline{\lim} f_n(x) = \inf_{k \geqslant 1} \sup_{i \geqslant k} f_i(x)\,, \quad \underline{\lim} f_n(x) = \sup_{k \geqslant 1} \inf_{i \geqslant k} f_i(x)\,,$$

то верхний и нижний пределы измеримых функций будут измеримы. Отсюда следует, что предел $f = \lim f_n$ будет также измеримым.

Далее мы пишем, что $f \leqslant g$ на множестве E, если выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in E$. Последовательность функций $\{f_n\}$ *сходится* к f на множестве E, если $f(x) = \lim f_n(x)$ для всех $x \in E$. Последовательность функций $\{f_n\}$ *монотонно сходится* $f_n \nearrow f$ на множестве E, если $f = \lim f_n$ на E и последовательность не убывает $f_i \leqslant f_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, на множестве E. Аналогично определяется монотонная сходимость вида $f_n \searrow f$ на множестве E.

Функция $h : E \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она имеет конечное множество значений. Пусть h принимает значения c_j на множествах C_j, $j = 1, 2 \ldots, k$. Тогда множества C_j попарно не пересекаются и образуют разбиение множества E.

$$h(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j\, \chi_{C_j}(x)\,, \qquad \chi_{C_j}(x) \doteqdot \begin{cases} 1\,, & \text{если } x \in C_j\,; \\ 0\,, & \text{если } x \notin C_j\,, \end{cases}$$

где χ_{C_j} — характеристическая функция множества C_j. Простая функция h будет измеримой, если все множества C_j измеримы.

(3). Для каждой неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ существует последовательность $\{f_n\}$ простых неотрицательных измеримых функций на множестве E такая, что $f_n \nearrow f$ на E.

Для доказательства рассмотрим следующую последовательность функций

$$f_n(x) \doteqdot \sum_{i=1}^{2^{2n}} \tfrac{i-1}{2^n}\, \chi_{A_n^i}(x) + 2^n\, \chi_{B_n}(x)\,,$$

где множества $A_n^i = E(\frac{i-1}{2^n} \leqslant f < \frac{i}{2^n})$ и $B_n = E(f \geqslant 2^n)$. Эти функции простые, неотрицательные и измеримые на множестве E. Покажем, что последовательность функций $\{f_n\}$ является неубывающей. Поскольку $A_n^i = A_{n+1}^{2i-1} \sqcup A_{n+1}^{2i}$, то мы имеем $f_n(x) = \frac{i-1}{2^n} = \frac{2i-2}{2^{n+1}} \leqslant f_{n+1}(x)$ при всех $x \in A_n^i$. Далее, так как $f(x) - f_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$ при всех $x \in E(f < 2^n)$, то эта последовательность сходится к f на множестве E.

Определение. Последовательность функций $\{f_n\}$ *сходится почти всюду* (п.в.) к функции f на множестве E, если существует такое множество $A \in \Sigma$ меры нуль $\mu(A) = 0$, что равенство $f(x) = \lim f_n(x)$ выполняется для всех $x \in E \setminus A$.

Обозначим через $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(E, \Sigma, \mu)$ пространство всех измеримых функций на множестве E. В этом пространстве функции f и g называются *эквивалентными* $f \sim g$, если $f(x) = g(x)$ при всех $x \in E \setminus A$ кроме некоторого множества $A \in \Sigma$ меры нуль $\mu(A) = 0$. Обычно в $\boldsymbol{M}$ эквивалентные функции отождествляются и предел $f = \lim f_n$ п.в. определяется с точностью до эквивалентности.

Предел сходящейся п.в. последовательности измеримых функций, вообще говоря, не является измеримой функцией. Однако, если мера полна, то предел измерим. В общем случае, изменяя его на множестве меры нуль мы получим эквивалентную измеримую функцию. Таким образом, пространство $\boldsymbol{M}$ является замкнутым относительно операции предельного перехода п.в. на множестве E.

Рассмотрим *множество точек сходимости* последовательности функций $\{f_n\}$ к функции f. При помощи счетного числа операций объединения и пересечения это множество может быть представлено в следующем виде

$$E(f = \lim f_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} E(|f_i - f| < 1/k)\,.$$

В подобном виде можно представить *множество точек существования предела* последовательности функций $\{f_n\}$

$$E(\exists \lim f_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i,j=n}^{\infty} E\{|f_i - f_j| < 1/k\}\,.$$

Если последовательность состоит из измеримых функций, то множество существования предела является измеримым. Если, кроме того, предел измерим, то множество точек сходимости является измеримым.

Определение. Последовательность функций $\{f_n\}$ сходится *почти равномерно* к функции f на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое измеримое множество $A_\varepsilon \in \Sigma$ меры $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, что на дополнении $E \setminus A_\varepsilon$ последовательность сходится равномерно к f.

Легко видеть, что почти равномерная сходимость влечет сходимость п.в. так, что предел определяется однозначно с точностью до эквивалентности. Действительно, возьмем в определении величину $\varepsilon = 1/n$ и соответствующие множества A_n меры $\mu(A_n) < 1/n$. Полагая $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_n$, мы получим $\mu(A) = 0$. Отсюда предел равен $f(x) = \lim f_n(x)$ при всех $x \in E \setminus A$. На множествах конечной меры справедливо следующее обратное утверждение.

Т е о р е м а (Егоров). *Если последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится п.в. к функции f на множестве E конечной меры $\mu(E) < \infty$, то она сходится почти равномерно к f на множестве E.*

Доказательство. Прежде всего мы можем исключить из E некоторое множество меры нуль так, что доказательство теоремы сведется к случаю, когда последовательность сходится всюду к функции f на множестве E. При этом предположении докажем вспомогательное утверждение.

(а). *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс $n = n(k, \varepsilon)$ и измеримое множество A_n с мерой $\mu(A_n) < \varepsilon$, что для всех $i \geqslant n$ и $x \in B_n = E \setminus A_n$ справедливо неравенство $|f_i(x) - f(x)| < 1/k$.*

Для доказательства рассмотрим последовательность измеримых множеств

$$B_0 \doteqdot \emptyset, \quad B_n \doteqdot \bigcap\nolimits_{i=n}^{\infty} E(|f_i - f| < 1/k), \quad E = \bigcup\nolimits_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Так как $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ и $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus B_{n-1}$, то из счетной аддитивности μ следует

$$\mu(E) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n) - \mu(B_{n-1})) = \lim \mu(B_n).$$

Пусть $A_n = E \setminus B_n$, тогда $\lim \mu(A_n) = 0$. Следовательно, существует такой индекс $n = n(k, \varepsilon)$, что $\mu(A_n) < \varepsilon$ и данное утверждение доказано.

Теперь выберем числа $n_k = n(k, \varepsilon/2^k)$ и измеримые множества A_{n_k} в соответствии с этим утверждением. Тогда, взяв в качестве $A_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k}$, мы получим

$$\mu(A_\varepsilon) \leqslant \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n_k}) < \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon.$$

Так как $E \setminus A_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{n_k}$, то из определения множеств B_{n_k} вытекает справедливость неравенства $|f_i(x) - f(x)| < 1/k$ для всех $i \geqslant n_k$ и $x \in E \setminus A_\varepsilon$. Значит последовательность сходится равномерно на множестве $E \setminus A_\varepsilon$. □

П р и м е р. Рассмотрим измеримое пространство Лебега в $\mathbb{R}$. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, заданная на измеримом множестве $E \subseteq \mathbb{R}$. Тогда множество $E(f < c)$ открыто в E и, следовательно, найдется такое открытое множество $G \subseteq \mathbb{R}$, что $E(f < c) = E \cap G$. Так как открытые множества измеримы, то функция f также измерима. Отсюда вытекает, если множество E можно представить в виде суммы счетного числа измеримых множеств, при этом на каждом из этих множеств f непрерывна, то функция f будет измеримой на всем множестве E.

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *почти непрерывной* на E, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое измеримое множество A_ε меры $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, что на дополнении $E \setminus A$ функция f непрерывна. *Теорема Лузина* (здесь она приводится без доказательства) утверждает: функция f почти непрерывна на E тогда и только тогда, когда f измерима на E.

5. Интеграл Лебега. Предельный переход под интегралом.

Пусть задана счетно аддитивная мера μ, определенная на некоторой σ-алгебре множеств Σ пространства X. Далее (X, Σ, μ) является *измеримым пространством*, так что множества из Σ называются измеримыми.

Нижний интеграл неотрицательной функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ равен верхней грани нижних сумм Дарбу по всем разбиениям $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$, $A_i \in \Sigma$, множества E

$$\underline{\int}_E f\,d\mu \doteqdot \sup_\alpha \underline{S}\,(f,\alpha) = \sup_\alpha \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)\,, \quad a_i = \inf_{x\in A_i} f(x)\,,$$

При этом по определению полагаем $0 \cdot \infty = 0$, а если $a \neq 0$, то $a \cdot \infty = \infty$.

Определение (1). Интегралом Лебега неотрицательной функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ на множестве $E \in \Sigma$ называется нижний интеграл

$$\int_E f\,d\mu \doteqdot \underline{\int}_E f\,d\mu\,.$$

Неотрицательная функция называется *интегрируемой* по Лебегу на множестве E, если она измерима на E и имеет конечный интеграл.

В случае, если функция f измерима и ограничена, а множество E имеет конечную меру, то интеграл Лебега совпадает с интегралом по мере μ, определенным ранее.

Определение интеграла можно распространить на функции, принимающие бесконечные значения из $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \sqcup \infty$. Для интегрируемой функции f мера множества $E(f=\infty)$ должна быть равна нулю. Поэтому она эквивалентна измеримой функции, принимающей только конечные значения.

Если функция эквивалентна нулю, то интеграл, очевидно, равен нулю. Обратно, предположим, что интеграл неотрицательной измеримой функции f равен нулю. Тогда множество $E(f > 1/n)$ имеет меру нуль. Следовательно, в силу счетной аддитивности меры, множество $E(f > 0) = \bigcup_{n=1}^\infty E(f > 1/n)$ также имеет меру нуль. Таким образом, функция f будет эквивалентна нулю.

Лемма. Интеграл простой неотрицательной измеримой функции h равен

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{j=1}^k c_j\,\mu(E \cap C_j)\,.$$

где $h(x) = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{C_j}(x)$ принимает значение $c_j \geqslant 0$ на множестве $C_j \in \Sigma$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$ множества E и обозначим $a_i \doteqdot \inf_{x\in A_i} h(x)$. Так как $a_i \leqslant c_j$, если множество $B_{ij} = A_i \cap C_j \neq \emptyset$ непусто, то из аддитивности меры μ мы получим

$$\underline{S}\,(h,\alpha) = \sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i) = \sum_{i,j=1}^{n,k} a_i\mu(B_{ij}) \leqslant \sum_{i,j=1}^{n,k} c_j\mu(B_{ij}) = \sum_{j=1}^k c_j\mu(E \cap C_j)\,.$$

В том случае, когда разбиение α совпадает с разбиением $\beta = \{E \cap C_j\}_{j=1}^k$ в этих неравенствах имеет место равенство. $\square$

Из этой леммы вытекает другое эквивалентное определение интеграла Лебега.

Определение (1′). Интеграл Лебега неотрицательной функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ на множестве $E \in \Sigma$ равен верхней грани интегралов простых неотрицательных измеримых функций, таких, что $h(x) \leqslant f(x)$ при всех $x \in E$, т.е.

$$\int_E f\,d\mu = \sup_{0\leqslant h\leqslant f} \int_E h\,d\mu\,.$$

В самом деле, если $h \leqslant f$ на множестве E, то из определения (1) вытекает неравенство $\int_E h\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$. С другой стороны, в силу леммы каждая нижняя сумма Дарбу является интегралом от некоторой простой функции $h \leqslant f$. Значит верхняя грань интегралов простых функций совпадает с интегралом функции f.

Определение (2). Интегралом Лебега функции $f : E \to \mathbb{R}$ на множестве $E \in \Sigma$ называется разность интегралов от неотрицательных функций

$$\int_E f\,d\mu \doteqdot \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu\,, \quad f_\pm(x) \doteqdot \max\{\pm f(x),\,0\}\,.$$

При этом предполагается, что один из интегралов от f_+ или f_- является конечным, иначе интеграл не имеет смысла. Функция f называется *интегрируемой* по Лебегу, если f измерима и неотрицательные функции $f_\pm$ имеют конечные интегралы.

Рассмотрим основные свойства интеграла Лебега, доказанные ранее для ограниченных функций $f : E \to \mathbb{R}$ на множестве E конечной меры.

(1). Монотонность. Если функции f и g интегрируемы на E и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in E$, то $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.

Если функции f и g неотрицательны и $f \leqslant g$ на E, то утверждение вытекает из неравенств $\underline{S}\,(f,\alpha) \leqslant \underline{S}\,(g,\alpha)$. Заметим, что в этом случае предполагать интегрируемость не нужно. В общем случае, поскольку $f_+ \leqslant g_+$ и $f_- \geqslant g_-$ на E, то

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu \leqslant \int_E g_+\,d\mu - \int_E g_-\,d\mu = \int_E g\,d\mu\,.$$

(2). Модуль. Если функция f интегрируема на множестве E, то ее модуль $|f|$ интегрируем на E и $|\int_E f\,d\mu| \leqslant \int_E |f|\,d\mu$.

Интегрируемость модуля $|f| = f_+ + f_-$ вытекает из определения (2), а неравенство следует из свойства (1), так как $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ для всех $x \in E$.

(3). Аддитивность. Если функция f интегрируема на множествах $E_1\,, E_2 \in \Sigma$ и множество $E = E_1 \sqcup E_2$, то f интегрируема на E и

$$\int_E f\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E_2} f\,d\mu\,.$$

Это свойство является следствием более общей теоремы, доказанной ниже, о счетной аддитивности интеграла Лебега. В частности, если функции $f(x) = g(x)$ п.в. равны на множестве E, то их интегралы равны. Таким образом, эквивалентные измеримые функции имеют равные интегралы Лебега.

Центральным свойством интеграла Лебега является его *счетная аддитивность*. Доказательство существенно опирается на счетную аддитивность меры μ.

Теорема *(о счетной аддитивности). Пусть функция f неотрицательна и измерима на множестве E. Тогда, если $E = \bigsqcup_{i=1}^\infty E_i$, где $E_i \in \Sigma$, то*

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f\,d\mu\,.$$

Доказательство. Если функция f является простой, то утверждение теоремы вытекает из леммы и счетной аддитивности меры μ. В общем случае, для каждой простой неотрицательной измеримой функции h такой, что $h \leqslant f$ на E, получим

$$\int_E h\,d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} h\,d\mu \leqslant \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f\,d\mu\,.$$

В силу определения $(1')$ имеем неравенство $\int_E f\,d\mu \leqslant \sum_{i=1}^\infty \int_{E_i} f\,d\mu$. Для доказательства обратного неравенства возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем, согласно определению $(1')$, простые неотрицательные измеримые функции h_i на множестве E_i (равные нулю вне E_i) так, что $h_i(x) \leqslant f(x)$ для всех $x \in E_i$ и

$$\int_{E_i} h_i\, d\mu > \int_{E_i} f\, d\mu - \varepsilon/2^i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Далее, полагая $F_n = \bigsqcup_{i=1}^n E_i$ и $h(x) = \sum_{i=1}^n h_i(x)$ на множестве F_n, мы получим

$$\int_E f\, d\mu \geqslant \int_{F_n} h\, d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{E_i} h_i\, d\mu > \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f\, d\mu - \varepsilon\,.$$

Здесь неявно предполагается, что функция $h_i(x)$ равна нулю вне множества E_i. Устремляя теперь $\varepsilon \to 0$ и $n \to \infty$, имеем обратное неравенство. □

В частности, если функция f интегрируема на множестве E, то, применяя эту теорему к функциям f_+ и f_- мы получим, что неопределенный интеграл Лебега $\varphi(A) = \int_A f\, d\mu$ является счетно аддитивной функцией множества $A \subseteq E$.

Теорема *(о монотонной сходимости). Пусть последовательность $\{f_i\}$ неотрицательных измеримых функций монотонно сходится $f_i \nearrow f$ к функции f на множестве E. Тогда предел их интегралов (конечный или бесконечный) равен*

$$\int_E f\, d\mu = \lim \int_E f_i\, d\mu\,.$$

Доказательство. В силу монотонности интегралов существует конечный или бесконечный предел $I = \lim \int_E f_i\, d\mu$. Поэтому из неравенства $f_i \leqslant f$ на множестве E вытекает неравенство $I \leqslant \int_E f\, d\mu$. Докажем обратное неравенство.

Пусть простая неотрицательная измеримая функция h выбрана так, что $h \leqslant f$ на множестве E. Возьмем произвольное число $0 < \lambda < 1$ и определим множества $E_i \doteqdot E(\lambda h \leqslant f_i)$. Тогда $E_i \subseteq E_{i+1}$ и $E = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$. Отсюда следует неравенство

$$\lambda \int_{E_i} h\, d\mu = \int_{E_i} \lambda h\, d\mu \leqslant \int_{E_i} f_i\, d\mu \leqslant \int_E f_i\, d\mu \leqslant I\,.$$

Обозначим через $\varphi(A) = \int_A h\, d\mu$ и покажем, что $\lim \varphi(E_i) = \varphi(E)$. Пусть $E_0 = \emptyset$, тогда имеет место равенство $E = \bigsqcup_{i=1}^\infty E_i \setminus E_{i-1}$. Поэтому из счетной аддитивности неопределенного интеграла от простой функции вытекает

$$\varphi(E) = \sum_{i=1}^\infty \varphi(E_i \setminus E_{i-1}) = \sum_{i=1}^\infty (\varphi(E_i) - \varphi(E_{i-1})) = \lim \varphi(E_i)\,.$$

Отсюда, переходя к пределу (в неравенстве выше) при $i \to \infty$, а затем при $\lambda \to 1$, мы получим $\int_E h\, d\mu \leqslant I$. Таким образом, по определению $(1')$ справедливо неравенство $\int_E f\, d\mu \leqslant I$ и значит имеет место равенство. □

Замечание. Теорема остается верной и в том случае, когда предел $f(x) = \lim f_i(x)$ принимает бесконечные значения. При этом интеграл от f может быть равным бесконечности. Однако, если интегралы от f_i ограничены сверху, то интеграл от f принимает конечное значение. В этом случае функция f будет конечной п.в. на множестве E. В самом деле, из измеримости функций f_i следует, что множество $E(f = \infty)$ измеримо. Так как интеграл от f конечный, то согласно определению (1) мера множества $E(f = \infty)$ должна быть равна нулю.

(4). Линейность. Пусть функции f и g интегрируемы на множестве E и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда функции $f + g$ и λf интегрируемы на E и

$$\int_E \lambda f\, d\mu = \lambda \int_E f\, d\mu\,, \quad \int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu\,.$$

Первое равенство можно вывести прямо из определений (1) и (2). Докажем второе равенство. Если f и g простые неотрицательные измеримые функции, то доказательство просто вытекает из леммы (достаточно взять произведение разбиений, на которых f и g принимают постоянные значения). Если функции f и g измеримы и неотрицательны, то существуют монотонные последовательности простых неотрицательных измеримых функций $f_n \nearrow f$ и $g_n \nearrow g$, сходящиеся к функциям f и g на множестве E. Отсюда, замечая, что $f_n + g_n \nearrow f + g$ на множестве E, и применяя теорему о монотонной сходимости, мы получим равенство

$$\int_E (f+g)\,d\mu = \lim \int_E (f_n + g_n)\,d\mu = \lim \int_E f_n\,d\mu + \lim \int_E g_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu\,.$$

В общем случае, пусть функции $f = f_+ - f_-$ и $g = g_+ - g_-$ имеют произвольный знак. Тогда из соотношения $f+g = (f+g)_+ - (f+g)_-$ вытекает равенство $(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$. Интегрируя это равенство, состоящее из неотрицательных функций, а затем группируя его слагаемые, получим требуемый результат.

Лемма (Фату). Пусть последовательность $\{f_i\}$ неотрицацельных измеримых функций на множестве E имеет нижний предел $f(x) = \underline{\lim}\, f_i(x)$. Тогда

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_i\,d\mu\,.$$

Доказательство. Положим $g_k(x) \doteqdot \inf_{i \geqslant k} f_i(x)$ при $x \in E$. Эти функции неотрицательны и измеримы на E. Кроме того, $g_k \nearrow f$ на E. По теореме о монотонной сходимости $\int_E f\,d\mu = \lim \int_E g_k\,d\mu$. Из неравенства $g_k \leqslant f_i$ вытекает неравенство $\int_E g_k\,d\mu \leqslant \int_E f_i\,d\mu$ при всех $i \geqslant k$. Отсюда, взяв нижнюю грань по всем $i \geqslant k$ и переходя к пределу $k \to \infty$, мы получим

$$\int_E g_k\,d\mu \leqslant \inf_{i \geqslant k} \int_E f_i\,d\mu\,, \quad \int_E f\,d\mu = \lim \int_E g_k\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_i\,d\mu\,.$$

Таким образом, неравенство доказано. □

Теорема (Лебег). Пусть последовательность $\{f_i\}$ интегрируемых функций на множестве E имеет предел $f(x) = \lim f_i(x)$ и удовлетворяет неравенству $|f_i(x)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in E$, где функция g интегрируема на множестве E. Тогда f интегрируема на E и ее интеграл равен пределу интегралов

$$\int_E f\,d\mu = \lim \int_E f_i\,d\mu\,.$$

Доказательство. Функция f является измеримой и $f_\pm \leqslant g$ на множестве E. Поэтому по свойству (1) функция f интегрируема на E. Так как $g(x) \pm f_i(x) \geqslant 0$, то, применяя лемму Фату, получим

$$\int_E (g+f)\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E (g+f_i)\,d\mu = \int_E g\,d\mu + \underline{\lim} \int_E f_i\,d\mu\,,$$

$$\int_E (g-f)\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E (g-f_i)\,d\mu = \int_E g\,d\mu - \overline{\lim} \int_E f_i\,d\mu\,.$$

Таким образом, из свойства (4) линейности интеграла следует, что

$$\overline{\lim} \int_E f_i\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant \underline{\lim} \int_E f_i\,d\mu\,.$$

Значит, предел интегралов существует и равен интегралу от f. □

6. Произведение мер. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим прямое произведение $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ пространств X_i . Каждая точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ есть упорядоченный набор точек $x_i \in X_i$. Если в пространстве X_i задана некоторая система множеств $\mathfrak{S}_i$, то через $\mathfrak{S} \doteqdot \mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n$ будем обозначать следующую систему множеств пространства X :

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \doteqdot \textstyle\prod_{i=1}^n A_i\,, \quad A_i \in \mathfrak{S}_i\,.$$

Лемма. Пусть заданы меры m_i на полукольце $\mathfrak{S}_i$ множеств пространства X_i , $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда функция $m \doteqdot m_1 \times \ldots \times m_n$, определенная на полукольце $\mathfrak{S} \doteqdot \mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n$ множеств пространства X по формуле

$$m(A) \doteqdot \textstyle\prod_{i=1}^n m_i(A_i)\,, \quad A = \prod_{i=1}^n A_i\,, \quad A_i \in \mathfrak{S}_i\,,$$

является мерой. Если меры m_i счетно аддитивны, то мера m счетно аддитивна.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. При этом достаточно рассмотреть только случай $n = 2$. Докажем, что произведение полуколец $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ является полукольцом в пространстве $X = X_1 \times X_2$. Для этого имеем

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)\,,$$

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = ((A_1 \setminus B_1) \times A_2) \sqcup ((A_1 \cap B_1) \times (A_2 \setminus B_2))\,.$$

Так как $A_1 \setminus B_1 = \bigsqcup_{i=1}^k C_i$, где $C_i \in \mathfrak{S}_1$, и $A_2 \setminus B_2 = \bigsqcup_{j=1}^l D_j$, где $D_j \in \mathfrak{S}_2$, то

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = (\textstyle\bigsqcup_{i=1}^k C_i \times A_2) \sqcup (\bigsqcup_{j=1}^l (A_1 \cap B_1) \times D_j)\,.$$

Таким образом, $\mathfrak{S}$ является полукольцом в пространстве X .

Докажем конечную (счетную) аддитивность меры $m = m_1 \times m_2$, предполагая, что меры m_1 и m_2 продолжены соответствующим образом. В случае счетно аддитивных мер берем продолжение по Лебегу, а иначе продолжение по Жордану. Рассмотрим конечную (счетную $k = \infty$) сумму множеств

$$A \times B = \textstyle\bigsqcup_{i=1}^k A_i \times B_i\,, \quad A\,,\, A_i \in \mathfrak{S}_1\,, \quad B\,,\, B_i \in \mathfrak{S}_2\,,$$

и определим функции $f_i(x_1) \doteqdot m_2(B_i)\chi_{A_i}(x_1)$. Применяя конечную (счетную) аддитивность меры m_2 , получим равенство $m_2(B) = \sum_{i=1}^k f_i(x_1)$ при всех $x_1 \in A$. Поэтому в силу линейности интеграла (теоремы о монотонной сходимости)

$$m_1(A)\, m_2(B) = \textstyle\int_A m_2(B)\, dm_1 = \sum_{i=1}^k \int_A f_i\, dm_1 = \sum_{i=1}^k \mu_1(A_i)\mu_2(B_i)\,.$$

Следовательно, m — конечно (счетно) аддитивная мера на полукольце $\mathfrak{S}$. $\square$

Определение. Мера μ , полученная продолжением по Жордану (Лебегу) меры $m = m_1 \times \ldots \times m_n$ с полукольца $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n$ на алгебру (σ -алгебру) Σ всех измеримых множеств пространства X , называется *произведением мер.*

Рассмотрим два измеримых пространства (X_1, Σ_1, μ_1) и (X_2, Σ_2, μ_2) , где Σ_i есть σ -алгебра измеримых множеств счетно аддитивной меры μ_i . Обозначим через μ продолжение по Лебегу меры $m = \mu_1 \times \mu_2$ с полукольца $\mathfrak{S} = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ на σ -алгебру Σ всех измеримых множеств пространства $X = X_1 \times X_2$.

Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ определена на множестве $E \subseteq X$, то множество $E_{x_1} \doteqdot \{x_2 \in X_2 | (x_1, x_2) \in E\}$ в пространстве X_2 называется *сечением множества* E по переменной x_1 , а функция $f_{x_1}(x_2) \doteqdot f(x_1, x_2)$, определенная на множестве E_{x_1} , называется *сечением функции* f по переменной x_1 . Аналогичным образом определяются сечения E_{x_2} и f_{x_2} по переменной x_2 .

Теорема (Фубини). Пусть неотрицательная измеримая функция $f : E \to \mathbb{R}_+$ задана на измеримом множестве $E \subseteq X$ конечной меры $\mu(E) < \infty$. Тогда при п.в. $x_1 \in X_1$ функция f_{x_1} измерима на множестве E_{x_1}, ее интеграл $g(x_1) = \int_{E_{x_1}} f_{x_1}\, d\mu_2$, как функция от $x_1 \in X_1$, эквивалентен измеримой функции и

$$\int_E f\, d\mu = \int_{X_1} (\int_{E_{x_1}} f_{x_1}\, d\mu_2)\, d\mu_1 .$$

Доказательство. Предположим вначале, что для всех простых функций теорема уже доказана. Построим монотонную последовательность простых неотрицательных измеримых функций $f_n \nearrow f$, сходящаяся к функции f на множестве E. Так как $f_{nx_1} \nearrow f_{x_1}$ на E_{x_1}, то по теореме о монотонной сходимости при п.в. $x_1 \in X_1$

$$\lim \int_{E_{x_1}} f_{nx_1}\, d\mu_2 = \int_{E_{x_1}} f_{x_1}\, d\mu_2 .$$

Так как интегралы от f_{nx_1} неубывают и эквивалентны измеримым функциям на X_1, то можно еще раз применить теорему о монотонной сходимости

$$\int_E f\, d\mu = \lim \int_E f_n\, d\mu = \lim \int_{X_1} (\int_{E_{x_1}} f_{nx_1}\, d\mu_2)\, d\mu_1 = \int_{X_1} (\int_{E_{x_1}} f_{x_1}\, d\mu_2)\, d\mu_1 .$$

Теперь в силу линейности интеграла достаточно доказать утверждение теоремы для любой характеристической функции $f = \chi_E$ измеримого множества E конечной меры. В этом случае теорема Фубини принимает вид

$$\text{(a)} \qquad \mu(E) = \int_{X_1} (\int_{E_{x_1}} d\mu_2)\, d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1 .$$

При этом утверждается, что сечение $E_{x_1} \in \Sigma_2$ измеримо при п.в. $x_1 \in X_1$ и функция $g(x_1) \doteqdot \mu_2(E_{x_1})$ эквивалентна измеримой функции. Нетрудно заметить, что все множества $E = A_1 \times A_2$ из полукольца $\mathfrak{S}$ удовлетворяют утверждению (a). В самом деле, в этом случае $g(x_1) = \mu_2(A_2)\chi_{A_1}(x_1)$ и

$$\mu(E) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2) = \int_{X_1} g\, d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2(E_{x_1})\, d\mu_1 .$$

Отсюда сразу следует, что (a) справедливо для всех конечных сумм элементов полукольца $\mathfrak{S}$, т.е. для $E \in R(\mathfrak{S})$. Если $E \in \Sigma$, то возьмем его измеримую оболочку B. Тогда по построению измеримой оболочки $E = B \setminus F$, где $\mu(F) = 0$ и

$$E \subseteq B \doteqdot \bigcap_{i=1}^\infty B_i , \quad B_i \doteqdot \bigcup_{j=1}^\infty B_{ij} , \quad B_{ij} \in \mathfrak{S} .$$

Пусть $C_n = \bigcap_{i=1}^n B_i$, $C_{ik} = \bigcup_{j=1}^k B_{ij}$ и $D_{nk} = \bigcap_{i=1}^n C_{ik}$, тогда имеем

$$B = \bigcap_{n=1}^\infty C_n , \quad C_n = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{k=1}^\infty C_{ik} = \bigcup_{k=1}^\infty D_{nk} , \quad D_{nk} = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^k B_{ij} ,$$

где $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ убывают, а $D_{n1} \subseteq D_{n2} \subseteq \ldots$ возрастают и $D_{nk} \in R(\mathfrak{S})$. Так как $\chi_{D_{nk}} \nearrow \chi_{C_n}$ при $k \to \infty$, то по теореме о монотонной сходимости заключаем, что утверждение теоремы верно для функции $f = \chi_{C_n}$. Аналогично, так как $\chi_{C_n} \searrow \chi_B$ при $n \to \infty$, то утверждение теоремы верно для функции $f = \chi_B$.

Осталось проверить утверждение теоремы для функций $f = \chi_F$, где множество F имеет меру нуль $\mu(F) = 0$. Пусть C есть измеримая оболочка множества F, тогда по доказанному мы имеем равенство

$$\mu(F) = \mu(C) = \int_{X_1} \mu_2(C_{x_1})\, d\mu_1 = 0 .$$

Отсюда вытекает, что $\mu_2(C_{x_1}) = 0$ п.в. относительно меры μ_1. Так как $F \subseteq C$, то тем более $\mu_2(F_{x_1}) = 0$ п.в. относительно меры μ_1. Таким образом, утверждение теоремы доказано полностью. $\square$

Замечание. Говорят, что множество E имеет *σ-конечную меру*, если его можно представить в виде счетной суммы $E = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} E_i$ множеств E_i конечной меры. Поскольку для множеств конечной меры теорема доказана, то, применяя счетную аддитивность интеграла и теорему о монотонной сходимости, легко получить утверждение теоремы для множеств σ-конечной меры. Используя определение (2) интеграла, теорему можно распространить также на все интегрируемые функции, без предположения неотрицательности.

Пусть $\mathbb{R}^n$ обозначает *евклидово пространство*, в котором между точками (или векторами) $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ определено расстояние

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}\,.$$

Пусть $U(x,r) \doteqdot \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(x,y) < r\}$ обозначает открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x. Множество $G \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если для любой точки $x \in G$ найдется открытый шар $U(x,r)$, содержащийся в G. Дополнение $H = \mathbb{R}^n \setminus G$ к открытому множеству G называется *замкнутым.*

Рассмотрим полукольцо $\mathfrak{S}_i$ всех одномерных промежутков $\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}$ (отрезки, интервалы и полуинтервалы). В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим полукольцо $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \ldots \times \mathfrak{S}_n$, как n-мерное произведение полуколец $\mathfrak{S}_i$. Элементы полукольца $\mathfrak{S}$ называются *n-мерными промежутками* и обозначаются через I . Мера $\mu(I)$ n-мерного промежутка $I \in \mathfrak{S}$ равна произведению мер одномерных промежутков

$$m(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\,, \quad I = \prod_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i\rangle\,,$$

т.е. совпадает с его объемом. Внешняя мера Лебега определяется по формуле

$$\mu(A) = m^*(A) \doteqdot \inf_{A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)\,.$$

Пусть Σ обозначает σ-алгебру всех измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$. Мера μ, определенная на этой σ-алгебре, называется *мерой Лебега* в $\mathbb{R}^n$. Так как каждое открытое множество является объединением не более чем счетного числа промежутков, то оно измеримо. Отсюда замкнутые множества также измеримы.

Теорема (критерий измеримости). Множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $H \subseteq E \subseteq G$, где G — открыто, а H — замкнуто, что $\mu(G \setminus H) < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Вначале рассмотрим случай, когда множество E находится в некотором промежутке I . По построению измеримой оболочки, каждое измеримое множество допускает представление $E = B \setminus F$, где $\mu(F) = 0$,

$$E \subseteq B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\,, \quad B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{ij}\,,$$

I_{ij} — открытые промежутки и $m^*(E) = \lim \mu(B_i)$. Тогда множества B_i открыты и содержат E . Следовательно, внешняя мера множества E равна

$$\mu(E) = m^*(E) \doteqdot \inf_{G \supseteq E} \mu(G)\,,$$

где нижняя грань берется по всем открытым множествам $G \supseteq E$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество $G \supseteq E$, что $\mu(G \setminus E) < \varepsilon/2$. Аналогично, для множества $E' = I \setminus E$ найдется такое открытое множество $D \supseteq E'$, что $\mu(D \setminus E') < \varepsilon/2$. При этом можно считать, что граница промежутка $\partial I \subseteq D$. Тогда $H = I \setminus D$ есть замкнутое множество и $\mu(G \setminus H) < \varepsilon$.

В общем случае, достаточно разбить $\mathbb{R}^n$ на промежутки I_k и применить доказанное к каждому I_k, полагая ε равным $\varepsilon/2^k$. Объединив открытые и замкнутые множества, получим требуемый результат.

Достаточность. Выберем открытые множества $G_i \supseteq E$ так, что $\mu(G_i \setminus E) < 1/i$. Тогда множество $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ измеримо и $\mu(B \setminus E) = 0$. Так как $F = B \setminus E$ имеет меру нуль, то оно измеримо. Поэтому множество $E = B \setminus F$ также измеримо. □

Пусть функция $f : I \to \mathbb{R}$ задана на некотором промежутке $I \subseteq \mathbb{R}^n$. Функции

$$\overline{f}(x) = \lim_{r\to 0} \sup_{y \in I \cap U(x,r)} f(y)\,, \quad \underline{f}(x) = \lim_{r\to 0} \inf_{y \in I \cap U(x,r)} f(y)$$

называются соответственно верхней и нижней *функциями Бэра.* Очевидно имеют место неравенства $\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x)$. Величина разности этих функций $\omega(f,x) = \overline{f}(x) - \underline{f}(x)$ называется *колебанием* функции f в точке x. Нетрудно проверить, что функция f непрерывна в точке $x \in I$ тогда и только тогда, когда колебание в этой точке равно $\omega(f,x) = 0$ нулю.

Т е о р е м а (критерий Лебега). *Функция $f : I \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда она ограничена и множество ее точек разрыва имеет меру (Лебега) нуль. При этом функция f интегрируема по Лебегу и интегралы Римана и Лебега совпадают.*

Доказательство. Вначале для каждой ограниченной функции $f : I \to \mathbb{R}$ докажем следующие формулы для нижнего и верхнего интегралов Дарбу

$$\underline{\int}_I f\, dm = \int_I \underline{f}\, d\mu\,, \quad \overline{\int}_I f\, dm = \int_I \overline{f}\, d\mu\,,$$

где справа стоят интегралы Лебега. По определению нижнего интеграла Дарбу существует такая последовательность разбиений $\tau_k = \{I_{ik}\}_{i=1}^{n_k}$ промежутка I, что

$$\underline{\int}_I f\, dm = \lim \underline{S}\,(f, \tau_k) = \lim \sum_{i=1}^{n_k} a_{ik} m(I_{ik})\,, \quad a_{ik} = \inf_{x \in I_{ik}} f(x)\,.$$

При этом в силу монотонности сумм Дарбу, доказанных ранее, можно считать, что каждое следующее разбиение τ_{k+1} является продолжением предыдущего τ_k и диаметры этих разбиений стремятся к нулю $\operatorname{diam}(\tau_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Определим последовательность простых функций $h_k(x) = a_{ik}$, если $x \in I_{ik}$. Эта последовательность не убывает $h_k \leqslant h_{k+1}$. Если x не является граничной точкой для промежутков всех разбиений τ_k, то $\lim h_k(x) = \underline{f}(x)$. Так как граница любого промежутка имеет меру нуль и число их счетно, то последовательность $h_k \nearrow \underline{f}$ монотонно сходится п.в. на I. По теореме о монотонной сходимости

$$\underline{\int}_I f\, dm = \lim \sum_{i=1}^{n_k} a_{ik} m(I_{ik}) = \lim \int_I h_k\, d\mu = \int_I \underline{f}\, d\mu\,.$$

Для доказательства аналогичной формулы для верхнего интеграла Дарбу достаточно взять $-f$ вместо f и применить к ней полученный результат.

Функция f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают. Так как их величина конечна, то функция f должна быть ограниченой на I и выполняется равенство

$$\int_I \omega(f,x)\, d\mu = \int_I \overline{f}\, d\mu - \int_I \underline{f}\, d\mu = \overline{\int}_I f\, dm - \underline{\int}_I f\, dm = 0\,.$$

Поскольку колебание $\omega(f,x) \geqslant 0$ неотрицательно, то последнее равносильно равенству $\omega(f,x) = 0$ п.в. на I. Таким образом, функция f п.в. непрерывна и равна $f(x) = \underline{f}(x)$ п.в. на промежутке I. Из измеримости $\underline{f}$ следует, что f измерима. Поэтому она интегрируема по Лебегу и интегралы Римана и Лебега совпадает. □

7. Банаховы пространства. Пространство операторов.

Пусть $\boldsymbol{X}$ — линейное (или векторное) пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел, в котором введены алгебраические операции сложения элементов $x+y$ и умножения их на число λx, где $x,y\in\boldsymbol{X}$, $\lambda\in\mathbb{F}$.

Нормой в пространстве $\boldsymbol{X}$ называется неотрицательная функция $p:\boldsymbol{X}\to\mathbb{R}_+$, обозначаемая через $p(x)=\|x\|$ и удовлетворяющая следующим аксиомам:

- *однородности*: $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$ для всех $\lambda\in\mathbb{F}$ и $x\in\boldsymbol{X}$;
- *треугольника*: $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ для всех $x,y\in\boldsymbol{X}$.
- *тождества*: $\|x\|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

Неотрицательная функция $p(x)=\|x\|$, удовлетворяющая только первым двум аксиомам, называется *полунормой*. Линейное пространство вместе с заданной в нем нормой (полунормой) называется *нормированным* (*полунормированным*).

Топологические понятия в нормированном пространстве $\boldsymbol{X}$ определяются метрикой $\rho(x,y)=\|x-y\|$. Последовательность $\{x_i\}$ *сходится* в $\boldsymbol{X}$, если у неё существует предел $\lim x_i=x\in\boldsymbol{X}$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдется n такое, что $\rho(x,x_i)<\varepsilon$ при всех $i\geqslant n$. Последовательность $\{x_i\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется n такое, что $\rho(x_i,x_j)<\varepsilon$ при всех $i,j\geqslant n$.

Определение. Нормированное пространство $\boldsymbol{X}$ называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится. Полное нормированное пространство называется *банаховым* пространством.

Открытым и *замкнутым шаром* с центром x и радиусом $r>0$ называются соответственно следующие множества

$$U(x,r)\doteqdot\{y\in\boldsymbol{X}\,|\,\rho(x,y)<r\}\,,\quad S(x,r)\doteqdot\{y\in\boldsymbol{X}\,|\,\rho(x,y)\leqslant r\}$$

Единичный шар с центром в нуле 0 обозначается через $S=S(0,1)$. Множество $G\subseteq\boldsymbol{X}$ называется *открытым*, если для каждой точки $x\in G$ существует открытый шар $U(x,r)\subseteq G$. Дополнение $H=\boldsymbol{X}\setminus G$ открытого множества G называется *замкнутым*. Замыкание $[M]$ множества $M\subset\boldsymbol{X}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее M. Множество $M\subset\boldsymbol{X}$ называется *всюду плотным*, если его замыкание $[M]=\boldsymbol{X}$, т.е. для каждого $x\in\boldsymbol{X}$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется $y\in M$ такой, что $\rho(x,y)<\varepsilon$. Пространство $\boldsymbol{X}$ называется *сепарабельным*, если существует счетное и всюду плотное множество $M\subseteq\boldsymbol{X}$.

Подпространством нормированного пространства $\boldsymbol{X}$ называется любое линейное подпространство в $\boldsymbol{X}$ с той же нормой. Из определений следует, что каждое замкнутое подпространство банахова пространства само является банаховым пространством. Рассмотрим примеры банаховых пространств.

Пример (1). Пространство $\mathbb{F}^n$ с *евклидовой нормой* $\|x\|=(\sum_{i=1}^n|x_i|^2)^{\frac12}$, где $x=(x_1,\ldots,x_n)$, является банаховым пространством. В случае $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ это известно из курса анализа. Комплексный случай $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ сводится к действительному.

Пример (2). Пространство $\boldsymbol{B}(X)$ всех ограниченных функций $f:X\to\mathbb{F}$ на множестве X с *чебышевской нормой*, определяемой по формуле

$$\|f\|\doteqdot\sup\nolimits_{x\in X}|f(x)|\,.$$

Сходимость относительно этой нормы совпадает с равномерной сходимостью. Докажем, что пространство $\boldsymbol{B}(X)$ полное. Пусть $\{f_i\}$ — фундаментальная последовательность. Тогда последовательность чисел $\{f_i(x)\}$ фундаментальна в $\mathbb{F}$ и значит имеет предел $f(x) = \lim f_i(x)$. При этом сходимость к функции f будет равномерной (критерий Коши для равномерной сходимости) и при достаточно больших i

$$\|f\| \leqslant \|f - f_i\| + \|f_i\| \leqslant 1 + \|f_i\|,$$

Значит функция f имеет конечную норму, т.е. ограничена на множестве X.

Пример (3). Пространство $\boldsymbol{C}(X)$ всех непрерывных и ограниченных функций $f : X \to \mathbb{F}$, определенных на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Оно является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{B}(X)$ с чебышевской нормой и, значит, банаховым пространством. Его замкнутость есть следствие того факта, что равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции.

Пример (4). Пространство $\boldsymbol{C}^1(X)$ всех непрерывных и ограниченных функций $f : X \to \mathbb{F}$, определенных на открытом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и имеющих непрерывные и ограниченные производные первого порядка. Норма определяется по формуле

$$\|f\| \doteqdot \sup_{x\in X} |f(x)| + \textstyle\sum_{i=1}^n \sup_{x\in X} \left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|.$$

Сходимость в $\boldsymbol{C}^1(X)$ является равномерной сходимостью функций и их производных первого порядка. Полнота этого пространства устанавливается при помощи известной теоремы из анализа: если последовательность функций, имеющих непрерывные производные, равномерно сходится вместе со своими производными, то предельная функция непрерывна и имеет непрерывные производные.

Пример (5). Пространство $\boldsymbol{A}(X)$ всех ограниченных аналитических (голоморфных) функций $f : X \to \mathbb{C}$ в некоторой области $X \subseteq \mathbb{C}$ комплексной плоскости. Оно является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{C}(X)$ с чебышевской нормой и, значит, банаховым пространством. Его замкнутость можно доказать, применяя известную теорему Вейерштрасса, согласно которой равномерно сходящаяся последовательность аналитических функций сходится к аналитической функции.

Пусть $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ — нормированные пространства над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Любое отображение этих пространств $A : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ называется *оператором*, действующим из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$. Оператор A называется *линейным*, если он обладает следующими двумя свойствами:

- *аддитивность*: $A(x + y) = Ax + Ay$ при всех $x, y \in \boldsymbol{X}$;
- *однородность*: $A(\lambda x) = \lambda Ax$ при всех $x \in \boldsymbol{X}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$.

Нормой оператора называется величина верхней грани в единичном шаре $S \subset \boldsymbol{X}$

$$\|A\| \doteqdot \sup_{x\in S} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \tfrac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Второе равенство следует из однородности нормы и оператора. Поэтому при всех $x \in \boldsymbol{X}$ имеет место неравенство $\|Ax\| \leqslant \|A\|\,\|x\|$.

Линейный оператор A называется *ограниченным*, если его норма $\|A\| < \infty$ конечна. Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ пространство всех ограниченных операторов, действующих из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$. В этом пространстве вводятся операции суммы операторов $A + B$ и умножения на число λA по следующим формулам:

$$(A + B)x \doteqdot Ax + Bx\,, \quad (\lambda A)x \doteqdot \lambda(Ax)\,.$$

Сходимость по норме в $\boldsymbol{\mathcal{L}}(X,Y)$ называется *равномерной сходимостью* операторов.

(1). Пространство $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ является нормированным пространством.

Проверим аксиомы нормы. Очевидно, что $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$. Так как при всех $x\in S$

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leqslant \|Ax\|+\|Bx\| \leqslant \|A\|+\|B\|,$$

то $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$. Если $\|A\|=0$, то $\|Ax\|=0$ при всех $x\in S$. Поэтому для любого $y\notin S$, полагая $\lambda=\|y\|$ и $x=\lambda^{-1}y\in S$, получим $Ay=A(\lambda x)=\lambda Ax=0$. Следовательно, оператор равен $A=0$ нулю.

(2). Если $\boldsymbol{Y}$ — банахово, то пространство $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ является банаховым.

Пусть $\{A_i\}$ — фундаментальная последовательность и $\varepsilon>0$. Поскольку

$$\|A_ix-A_jx\| = \|(A_i-A_j)x\| \leqslant \|A_i-A_j\|\,\|x\| < \varepsilon\|x\|,$$

при всех $i,j\geqslant n$, то $\{A_ix\}$ фундаментальна в Y при любом $x\in X$. Поэтому существует предел $Ax=\lim A_ix$, который является линейным оператором. Применяя непрерывность нормы и переходя к пределу при $i\to\infty$ в неравенстве выше, получим, что этот предел будет равномерным. Из неравенства треугольника $|\,\|A_i\|-\|A_j\|\,|\leqslant\|A_i-A_j\|$ следует, что последовательность норм $\{\|A_i\|\}$ также фундаментальна и значит имеет предел. При этом для всех $x\in S$

$$\|Ax\| \leqslant \|Ax-A_ix\|+\|A_ix\| \leqslant \|A-A_i\|+\|A_i\|.$$

Переходя здесь к пределу при $i\to\infty$, получим $\|A\|\leqslant\lim\|A_i\|$. Таким образом, A является ограниченным оператором.

Л е м м а. *Линейный оператор $A:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ ограничен в том и только в том случае, когда он является непрерывным.*

Из определения нормы оператора при всех $x,y\in\boldsymbol{X}$ мы имеем неравенство

$$\|Ax-Ay\| = \|A(x-y)\| \leqslant \|A\|\,\|x-y\|,$$

Поэтому, взяв $\varepsilon>0$ и полагая $\delta=\varepsilon/\|A\|$, мы получим $\|Ax-Ay\|<\varepsilon$ при всех $\|x-y\|<\delta$. Следовательно, каждый ограниченный оператор непрерывен. Обратно, по определению непрерывности оператора в точке $x_0=0$ нуль для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\|Ax\|<\varepsilon$ при всех $\|x\|<\delta$. Поэтому из однородности нормы и оператора следует, что $\|A\|\leqslant\varepsilon/\delta$ и значит оператор A ограничен.

Т е о р е м а (продолжение по непрерывности). *Пусть $\boldsymbol{Y}$ — банахово и $M\subseteq\boldsymbol{X}$ всюду плотное подпространство в $\boldsymbol{X}$. Тогда для каждого ограниченного оператора $A:M\to\boldsymbol{Y}$ существует единственный ограниченный оператор $B:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ такой, что $\|B\|=\|A\|$ и $Bx=Ax$ при всех $x\in M$.*

Доказательство. По условию плотности для каждого $x\in\boldsymbol{X}$ найдется такая последовательность $\{x_i\}\subset M$, что $\lim x_i=x$. Так как по определению нормы

$$\|Ax_i-Ax_j\| = \|A(x_i-x_j)\| \leqslant \|A\|\,\|x_i-x_j\|,$$

то последовательность $\{Ax_i\}$ будет фундаментальной в $\boldsymbol{Y}$ и значит в силу полноты $\boldsymbol{Y}$ имеет предел $Bx \doteqdot \lim Ax_i$. Возьмем еще элемент $y\in\boldsymbol{X}$ и построим последовательность $\{y_i\}\subset M$, сходящуюся к $y=\lim y_i$. Поскольку $\lim(x_i+y_i)=x+y$, то из линейности оператора A вытекает

$$B(x+y) = \lim A(x_i + y_i) = \lim(Ax_i + Ay_i) = \lim Ax_i + \lim Ay_i = Bx + By\,.$$

В частности, полагая $y = -x$, мы получим, что значение Bx не зависит от выбора последовательности, сходящейся к x. Аналогично проверяется, что $B(\lambda x) = \lambda Bx$. Таким образом, оператор B линейный. Так как $Bx = Ax$ при всех $x \in M$, то мы имеем $\|B\| \geqslant \|A\|$. С другой стороны, в силу непрерывности нормы

$$\|Bx\| = \lim \|Ax_i\| \leqslant \|A\| \,\lim \|x_i\| = \|A\|\,\|x\|\,.$$

при всех $x \in \boldsymbol{X}$. Следовательно, $\|B\| \leqslant \|A\|$ и значит справедливо равенство $\|B\| = \|A\|$. Единственность оператора B вытекает из его определения. □

Пример. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{C}[0,1]$ и его подпространство M всех многочленов $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. По теореме Вейерштрасса M всюду плотно в $\boldsymbol{C}[0,1]$. Определим оператор дифференцирования, действующий по формуле $AP(x) \doteqdot P'(x)$. Так $\|Ax^i\| = i$, то этот оператор неограничен $\|A\| = \infty$. Он не имеет ограниченного продолжения на все пространство $\boldsymbol{C}[0,1]$. Однако, если сузить его на подпространство M_k полиномов степени не выше k, то получим ограниченный оператор, который уже можно продолжить в $\boldsymbol{C}[0,1]$ с сохранением нормы. Для этого достаточно определить $Ax^i = 0$ для всех $i > k$, а затем применить теорему.

Определение. Нормированные пространства $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ называются *изоморфными*, если существует непрерывный линейный оператор $A : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, взаимно однозначно отображающий $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{Y}$, у которого обратный оператор $A^{-1} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ также является непрерывным.

Если два пространства изоморфны и одно из них банахово, то другое также является банаховым. Это вытекает из того факта, что непрерывный линейный оператор отображает сходящиеся последовательности в сходящиеся, а фундаментальные последовательности в фундаментальные.

Теорема. *Любое конечномерное нормированное пространство $\boldsymbol{X}$ над полем $\mathbb{F}$ и размерности $\dim_{\mathbb{F}} X = n$ изоморфно евклидову пространству $\mathbb{F}^n$.*

Доказательство. Пусть система векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$ образует базис пространства $\boldsymbol{X}$. Тогда каждый вектор $x \in \boldsymbol{X}$ допускает единственное представление через базис. Определим оператор $Ax \doteqdot \lambda$, где $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{F}^n$. Очевидно, что оператор A линейный и отображает взаимно однозначно пространство X на $\mathbb{F}^n$. Докажем, что оператор A и его обратный A^{-1} являются ограниченными.

Пусть $y = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ и $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Рассмотрим функцию $f(\lambda) = \|x\| = \|A^{-1}\lambda\|$. Тогда из неравенства треугольника вытекает неравенство

$$|f(\lambda) - f(\mu)| \leqslant \|x - y\| \leqslant \textstyle\sum_{i=1}^n |\lambda_i - \mu_i|\,\|e_i\|\,.$$

Поэтому функция $f(\lambda)$ непрерывна в $\mathbb{F}^n$. В силу компактности единичной сферы $\{\lambda \in \mathbb{F}^n \,|\, \|\lambda\| = 1\}$ в пространстве $\mathbb{F}^n$ величина ее верхней грани $K = \sup_{\|\lambda\|=1} f(\lambda)$ конечна, а величина нижней грани $k = \inf_{\|\lambda\|=1} f(\lambda)$ положительна. Из однородности нормы вытекает неравенство $k\,\|\lambda\| \leqslant f(\lambda) \leqslant K\,\|\lambda\|$ при всех $\lambda \in \mathbb{F}^n$. Отсюда $\|Ax\| \leqslant k^{-1}\|x\|$ и $\|A^{-1}\lambda\| \leqslant K\|\lambda\|$. Таким образом, операторы A и A^{-1} ограничены и, следовательно, по лемме будут непрерывны. □

8. Теорема Хана-Банаха. Сопряженные пространства.

Пусть $\boldsymbol{X}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел. Функцию $f:\boldsymbol{X}\to\mathbb{F}$ называют *линейным функционалом* на пространстве $\boldsymbol{X}$, если выполняются следующие два условия:

- *аддитивность*: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ для всех $x,y\in\boldsymbol{X}$.
- *однородность*: $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ для всех $x\in\boldsymbol{X}$ и $\lambda\in\mathbb{F}$;

Пусть задан линейный функционал $f:M\to\mathbb{F}$ на подпространстве $M\subset\boldsymbol{X}$. Линейный функционал $g:\boldsymbol{X}\to\mathbb{F}$ называется его *продолжением* на пространство $\boldsymbol{X}$, если $g(x)=f(x)$ при всех $x\in M$.

Теорема (Хан-Банах). *Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{X}$ задана полунорма $p(x)$ и подпространство $M\subset\boldsymbol{X}$. Тогда каждый линейный функционал $f:M\to\mathbb{F}$, определенный на подпространстве M и удовлетворяющий условию $|f(x)|\leqslant p(x)$ при всех $x\in M$, имеет такое продолжение $g:\boldsymbol{X}\to\mathbb{F}$ на все пространство $\boldsymbol{X}$, что $|g(x)|\leqslant p(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{X}$.*

Доказательство. Вначале рассмотрим действительный случай $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. Допустим, что $e_1\notin M$, и пусть $M_1\doteqdot\operatorname{span}\{M,e_1\}$ есть линейная оболочка подпространства M и вектора e_1. Так как для всех $x,y\in M$

$$f(x)+f(y)=f(x+y)\leqslant p(x+y)\leqslant p(x-e_1)+p(y+e_1)\,,$$

то $f(x)-p(x-e_1)\leqslant p(y+e_1)-f(y)$. Поэтому существует (аксиома Дедекинда) такое число $c_1\in\mathbb{R}$, что $f(x)-p(x-e_1)\leqslant c_1\leqslant p(y+e_1)-f(y)$ при всех $x,y\in M$. Подставляя сюда x/λ вместо x и y, а затем умножая на λ, получим $f(x)\pm\lambda c_1\leqslant p(x\pm\lambda e_1)$ при всех $\lambda>0$ и $x\in M$. Определим функционал f_1 на подпространстве M_1

$$f_1(z)\doteqdot f(x)+\lambda c_1\,,\quad z=x+\lambda e_1\in M_1\,,\quad x\in M\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Тогда получим $f_1(x)=f(x)$ для всех $x\in M$ и $f_1(z)\leqslant p(z)$ для всех $z\in M_1$. Так как $p(-z)=p(z)$, то справедливо неравенство $|f_1(z)|\leqslant p(z)$ при всех $z\in M_1$. Аналогично можно доказать существование продолжения f_2 на линейную оболочку $M_2\doteqdot\operatorname{span}\{M_1,e_2\}$, где $e_2\notin M_1$, и т.д. Поэтому, если $\boldsymbol{X}$ имеет конечную или счетную размерность, то доказательство завершается по индукции.

В общем случае рассмотрим совокупность всех продолженииий h функционала f на некоторые подпространства $H\subseteq\boldsymbol{X}$, удовлетворяющие условию $|h(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in H$. Введем отношение порядка $h_1\leqslant h_2$, если h_2 является продолжением h_1. Тогда получится частично упорядоченное множество линейных функционалов. По *лемме Цорна*[1] в этом множестве существует максимальный элемент. Поскольку, как показано выше, каждый линейный функционал можно продолжить на более широкое подпространство, то этот максимальный элемент есть искомый функционал, удовлетворяющий условиям теоремы.

Переход от действительного к комплексному случаю производится следующим образом. Пусть $u(x)=\Re f(x)$ действительная часть и $v(x)=\Im f(x)$ мнимая часть функционала f. Поскольку $f(\boldsymbol{i}\,x)=\boldsymbol{i}\,f(x)=\boldsymbol{i}\,u(x)-v(x)$, то $v(x)=-u(\boldsymbol{i}\,x)$ при всех $x\in M$. Поэтому справедливо равенство $f(x)=u(x)-\boldsymbol{i}\,u(\boldsymbol{i}\,x)$ при всех $x\in M$. Так как функционал u удовлетворяет условию теоремы в действительном случае, то существует такое действительное продолжение h на $\boldsymbol{X}$, что $|h(x)|\leqslant p(x)$ при всех $x\in\boldsymbol{X}$. Положим $g(x)=h(x)-\boldsymbol{i}\,h(\boldsymbol{i}\,x)$ и покажем, что g является линейным

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. "Элементы теории функций и функционального анализа"

функционалом над полем комплексных чисел. Для этого достаточно заметить, что $g(\boldsymbol{i}\,x) = h(\boldsymbol{i}\,x) - \boldsymbol{i}\,h(-x) = \boldsymbol{i}(h(x) - \boldsymbol{i}\,h(\boldsymbol{i}\,x)) = \boldsymbol{i}\,g(x)$. Отсюда $g(x) = f(x)$ при всех $x \in M$. Далее пусть $x \in \boldsymbol{X}$ и $g(x) = e^{\boldsymbol{i}\theta}|g(x)|$, тогда

$$|g(x)| = e^{-\boldsymbol{i}\theta}g(x) = g(e^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = h(e^{-\boldsymbol{i}\theta}x) \leqslant p(e^{-\boldsymbol{i}\theta}x) = p(x)\,.$$

Таким образом, функционал g удовлетворяет условиям теоремы. □

Пусть $\boldsymbol{X}$ — нормированное пространство. Обозначим через $S \doteqdot S(0,1)$ замкнутый единичный шар в $\boldsymbol{X}$. Величина верхней грани

$$\|f\| \doteqdot \sup_{x\in S}|f(x)| = \sup_{x\neq 0}\tfrac{|f(x)|}{\|x\|}$$

называется *нормой* линейного функционала $f : \boldsymbol{X} \to \mathbb{F}$. Линейный функционал f называется *ограниченным*, если его норма $\|f\| < \infty$ конечна. Совокупность всех ограниченных функционалов обозначается через $\boldsymbol{X}^*$ и называется *сопряженным пространством* к $\boldsymbol{X}$. Относительно операций

$$(f+g)(x) \doteqdot f(x) + g(x)\,, \quad (\lambda f)(x) \doteqdot \lambda f(x)\,,$$

$\boldsymbol{X}^*$ является линейным пространством. Каждый линейный функционал $f : \boldsymbol{X} \to \mathbb{F}$ можно рассматривать как линейный оператор, действующий из $\boldsymbol{X}$ в $\mathbb{F}$. Поэтому сопряженное пространство $\boldsymbol{X}^*$ совпадает с пространством ограниченных операторов $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\boldsymbol{X},\mathbb{F})$. По доказанному ранее $\boldsymbol{X}^*$ — банахово пространство.

Следствие. *Пусть M — подпространство нормированного пространства $\boldsymbol{X}$. Тогда каждый ограниченный функционал $f : M \to \mathbb{F}$, определенный на подпространстве M, имеет такое продолжение $g : \boldsymbol{X} \to \mathbb{F}$ на все пространство $\boldsymbol{X}$, что $\|g\| = \|f\|_M \doteqdot \sup_{x\in S\cap M}|f(x)|$.*

В самом деле, по теореме Хана-Банаха, взяв в качестве полунормы $p(x) = \|f\|_M\|x\|$, мы получим $|g(x)| \leqslant \|f\|_M\|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{X}$. Следовательно, имеем неравенство $\|g\| \leqslant \|f\|_M$. Так как $g(x) = f(x)$ при всех $x \in M$, то $\|g\| = \|f\|_M$.

Так как сопряженное пространство $\boldsymbol{X}^*$ является нормированным, то мы можем рассматривать *второе сопряженное пространство* $\boldsymbol{X}^{**} = (\boldsymbol{X}^*)^*$. Будем обозначать через S^* замкнутый единичный шар в $\boldsymbol{X}^*$.

Теорема (двойственности). *Естественное отображение $J : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}^{**}$ нормированного пространства $\boldsymbol{X}$ во второе сопряженное пространство $\boldsymbol{X}^{**}$, определенное по формуле $J(x) = F_x$, где функционал F_x равен $F_x(f) = f(x)$ для всех $f \in \boldsymbol{X}^*$, является изометричным линейным оператором.*

Доказательство. По определению отображения J каждому вектору $x \in \boldsymbol{X}$ соответствует функционал F_x, определенный на сопряженном пространстве $\boldsymbol{X}^*$ по формуле $F_x(f) = f(x)$ при всех $f \in \boldsymbol{X}^*$. Функционал F_x является линейным

$$F_x(f+g) = f(x) + g(x) = F_x(f) + F_x(g)\,, \quad F_x(\lambda f) = \lambda f(x) = \lambda F_x(f)\,.$$

Для того чтобы найти норму F_x, рассмотрим линейную оболочку $M = \operatorname{span}\{x\}$ и определим линейный функионал $l(\lambda x) = \lambda\|x\|$ на M при всех $\lambda \in \mathbb{F}$. По следствию из теоремы Хана-Банаха этот функционал имеет продолжение $g \in \boldsymbol{X}^*$ с нормой $\|g\| = \|l\|_M = 1$. Так как $F_x(g) = g(x) = \|x\|$ и $|F_x(f)| \leqslant \|x\|$ для всех $f \in S^*$, то $\|F_x\| = \|x\|$. Таким образом, отображение $J : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}^{**}$ линейно и изометрично, т.е. имеет место равенство $\|J(x)\| = \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{X}$. □

Отображение J называется *естественным вложением* во второе сопряженное пространство. В результате любой элемент $x \in \boldsymbol{X}$ можно отождествить с ограниченным функционалом $J(x) = F_x \in \boldsymbol{X}^{**}$. Поэтому удобно ввести симметричное обозначение для значений линейного функционала $f(x) = \langle f, x \rangle$, где $x \in \boldsymbol{X}$ и $f \in \boldsymbol{X}^*$. Тогда $\langle f, x \rangle$ является билинейной формой на прямом произведении $\boldsymbol{X}^* \times \boldsymbol{X}$ двух линейных пространств $\boldsymbol{X}^*$ и $\boldsymbol{X}$. Эта двойственность между векторами и функционалами проявляется в следующих равенствах:

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |\langle f, x \rangle|, \quad \|x\| = \sup_{f \in S^*} |\langle f, x \rangle|.$$

Образ $\operatorname{Im} J$ вложения $J : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}^{**}$ во втором сопряженном пространстве $\boldsymbol{X}^{**}$ называется *двойственным пространством* к пространству $\boldsymbol{X}$. Если этот образ равен $\operatorname{Im} J = \boldsymbol{X}^{**}$, то нормированное пространство $\boldsymbol{X}$ называется *рефлексивным*.

Пример (1). Покажем, что сопряженное к евклидовому пространству $\mathbb{F}^n$ изометрично самому этому пространству. Рассмотрим стандартный базис $\{e_j\}$ пространства $\mathbb{F}^n$, т.е. $e_j = \{e_{ij}\}$, где $e_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $e_{ij} = 1$, если $i = j$. Тогда для произвольного вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ и функционала $f \in \mathbb{F}^{n*}$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

Полагая $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = f(e_i)$, и применяя неравенство Коши, получим

$$|f(x)| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2} = \|x\| \, \|y\|.$$

Если взять вектор x, имеющий координаты $x_i = \overline{y_i}/\|y\|$ и норму $\|x\| = 1$, то это неравенство превращается в равенство $|f(x)| = \|y\|$. Следовательно, $\|f\| = \|y\|$. Таким образом отображение, при котором каждому функционалу $f \in \mathbb{F}^{n*}$ соответствует вектор $y \in \mathbb{F}^n$ с координатами $y_i = f(e_i)$, является изометричным.

Пример (2). Сопряженное пространство $\boldsymbol{c}_0^*$. Пространство $\boldsymbol{c}_0$ состоит из всех последовательностей $x = \{x_i\}$, где $x_i \in \mathbb{F}$, сходящихся к $\lim x_i = 0$ нулю, и имеет норму $\|x\| = \sup |x_i|$. Покажем, что каждый функционал $f \in \boldsymbol{c}_0^*$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty y_i x_i, \quad \|f\| = \sum_{i=1}^\infty |y_i|.$$

Поэтому сопряженное пространство $\boldsymbol{c}_0^*$ изометрично пространству $\boldsymbol{\ell}_1$ абсолютно суммируемых последовательностей $y = \{y_i\}$, где $y_i \in \mathbb{F}$, с нормой $\|y\| = \sum_{i=1}^\infty |y_i|$.

Пусть $e_j = \{e_{ij}\}$, где $e_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и $e_{ij} = 1$, если $i = j$. Тогда, взяв произвольный вектор $x = \{x_i\} \in \boldsymbol{c}_0$, мы имеем

$$x = \sum_{i=1}^\infty x_i \, e_i, \quad \|x - \sum_{i=1}^n x_i e_i\| = \sup_{i > n} |x_i|,$$

и значит ряд сходится по норме пространства $\boldsymbol{c}_0$. В силу свойства линейности и непрерывности функционала $f \in \boldsymbol{c}_0^*$ имеет место формула

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^\infty x_i y_i, \quad y_i = f(e_i),$$

Отсюда вытекает неравенство $\|f\| \leqslant \sum_{i=1}^\infty |y_i| = \|y\|$. Если в указанной формуле положить $x_i = \operatorname{sign} y_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ и $x_i = 0$ при $i > n$, то норма $\|x\| \leqslant 1$ и, следовательно, при всех n справедливо неравенство

$$f(x) = \sum_{i=1}^n |y_i| \leqslant \|f\|$$

Устремляя здесь $n \to \infty$, заключаем, что $\|f\| = \sum_{i=1}^\infty |y_i| = \|y\|$.

Пример (3). Сопряженное пространство $\boldsymbol{C}^*[a, b]$. Пространство $\boldsymbol{C}[a, b]$ состоит из всех непрерывных функций $f : [a, b] \to \mathbb{F}$ с чебышевской нормой

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| .$$

Рассмотрим пространство $\boldsymbol{V}[a,b]$ функций $g:[a,b]\to\mathbb{F}$ ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ и определим в нем полунорму, равную вариации функции g

$$\|g\| \doteqdot V_a^b(g) = \sup_\tau \sum_{j=1}^n |g(t_j)-g(t_{j-1})| ,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ отрезка $[a,b]$. Будем считать функции из $\boldsymbol{V}[a,b]$ эквивалентными, если их разность является константой. Тогда получим нормированное пространство. Мы докажем, что каждый функционал $\alpha\in\boldsymbol{C}^*[a,b]$ представляется интегралом Стилтьеса

$$\alpha(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x) , \quad \|\alpha\| = V_a^b(g) .$$

При этом сопряженное пространство $\boldsymbol{C}^*[a,b]$ изометрично подпространству функций $g\in\boldsymbol{V}[a,b]$ непрерывных слева в точках интервала (a,b).

Вначале, применяя теорему Хана-Банаха, найдем общий вид ограниченного функционала. Рассмотрим пространство $\boldsymbol{B}([a,b])$ ограниченных функций на отрезке $[a,b]$ с чебышевской нормой. Тогда $\boldsymbol{C}([a,b])$ есть замкнутое подпространство в $\boldsymbol{B}([a,b])$. По доказанному следствию каждый ограниченный функционал α, определенный в $\boldsymbol{C}([a,b])$, имеет продолжение на пространство $\boldsymbol{B}([a,b])$ с сохранением нормы. Это продолжение мы будем обозначать также через α.

Пусть $u_t(x) = \chi_{[a,t)}(x)$ — характеристическая функция полуинтервала $[a,t)$ и $g(t)\doteqdot\alpha(u_t)$. Покажем, что функция $g(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$. Действительно, для произвольного разбиения τ отрезка $[a,b]$ мы имеем

$$\sum_{j=1}^n |g(t_j)-g(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^n e^{-\boldsymbol{i}\,\theta_j}(\alpha(u_{t_j})-\alpha(u_{t_{j-1}})) = \alpha(\sum_{j=1}^n e^{-\boldsymbol{i}\,\theta_j}(u_{t_j}-u_{t_{j-1}})) .$$

Поскольку $\|\sum_{j=1}^n e^{-\boldsymbol{i}\,\theta_j}(u_{t_j}-u_{t_{j-1}})\| = 1$, то вариация $V_a^b(g)\leqslant\|\alpha\|$. Возьмем теперь произвольную функцию $f\in\boldsymbol{C}[a,b]$ и построим ступенчатую функцию

$$f_\tau(x) \doteqdot \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(u_{t_j}(x)-u_{t_{j-1}}(x)) , \quad \xi_j\in[t_{j-1},t_j] .$$

Обозначим через $d_\tau = \max(t_j - t_{j-1})$ диаметр разбиения τ. Так как $f_\tau\to f$ сходится равномерно при $d_\tau\to 0$, то

$$\alpha(f) = \lim\alpha(f_\tau) = \lim\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(t_j)-g(t_{j-1})) = \int_a^b f(x)\,dg(x) ,$$

где справа стоит интеграл Стилтьеса. Таким образом, каждому ограниченному функционалу $\alpha\in\boldsymbol{C}^*[a,b]$ соответствует функция $g(t)=\alpha(u_t)$ ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$. Ясно, что это соответствие линейно.

С другой стороны, по каждой функции g ограниченной вариации однозначно восстанавливается линейный функционал по формуле $\alpha(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$. Поскольку каждая функция ограниченной вариации является разностью двух неубывающих функций, то она может иметь не более, чем счетное множество точек разрыва первого рода. Интеграл Стилтьеса не зависит от изменения функции g на счетном множестве точек интервала (a,b). Поэтому, чтобы установить взаимную однозначность указанного соответствия, мы исправим функцию $g(t)=\alpha(u_t)$ на непрерывную слева во всех точках интервала (a,b). При этом вариация $V_a^b(g)$ не увеличится. Так как из определения интеграла Стилтьеса вытекает, что $\|\alpha\|\leqslant V_a^b(g)$, то $\|\alpha\| = V_a^b(g)$.

9. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространство $\boldsymbol{L}_p$.

Пусть (X,Σ,μ) — измеримое пространство счетно аддитивной меры μ и $E\in\Sigma$. Распространим естественным образом понятия измеримости и интегрируемости на комплекснозначные функции. Функция $f:E\to\mathbb{C}$ называется *измеримой* (*интегрируемой*) на множестве E, если измеримы (интегрируемы) ее действительная часть $u=\Re f$ и мнимая часть $v=\Im f$ на множестве E. Интеграл комплекснозначной функции по определению равен

$$\int_E f\,d\mu \doteqdot \int_E u\,d\mu+\boldsymbol{i}\int_E v\,d\mu\,.$$

Доказанные ранее свойства интегрируемых действительных функций остаются справедливыми для комплекснозначных функций. Нетрудно проверить, что выполняются свойства линейности интеграла и счетной аддитивности. А также имеет место теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Доказательства этих утверждений совсем просты и легко выводятся из соответствующих утверждений для действительных функций. Докажем, например, свойство модуля.

(1). Модуль. Если функция $f:E\to\mathbb{C}$ интегрируема на множестве E, то ее модуль $|f(x)|$ интегрируем на E и $|\int_E f\,d\mu|\leqslant\int_E|f|\,d\mu$.

Так как $|f|=\sqrt{u^2+v^2}\leqslant|u|+|v|$, то модуль $|f|$ интегрируем на E. Пусть

$$\int_E f\,d\mu=e^{\boldsymbol{i}\theta}|\int_E f\,d\mu|\,,\quad g(x)=\Re e^{\boldsymbol{i}\theta}f(x)\,.$$

Тогда $g(x)\leqslant|f(x)|$ и, применяя свойства интеграла, мы получим

$$|\int_E f\,d\mu|=e^{-\boldsymbol{i}\theta}\int_E f\,d\mu=\int_E e^{-\boldsymbol{i}\theta}f\,d\mu=\int_E g\,d\mu\leqslant\int_E|f|\,d\mu\,.$$

Далее мы будем рассматривать измеримые функции $f:E\to\mathbb{F}$, определенные на измеримом множестве $E\in\Sigma$ и принимающие значения в поле $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел.

(2). Неравенство Гельдера. Если функции f и g измеримы на множестве E и $1/p+1/q=1$, $p,q>1$, то справедливо неравенство

$$\int_E|fg|\,d\mu\leqslant(\int_E|f|^p\,d\mu)^{1/p}(\int_E|g|^q\,d\mu)^{1/q}\,.$$

Равенство имеет место только тогда, когда $|f(x)|^p=C\,|g(x)|^q$ п.в. на множестве E при некотором $C\geqslant 0$.

Вначале покажем, что для любых неотрицательных чисел $a,b\geqslant 0$ выполняется неравенство Юнга $ab\leqslant a^p/p+b^q/q$, в котором знак равенства имеет место только тогда, когда $a^p=b^q$. Для этого заметим, что функции t^{p-1} и t^{q-1} являются взаимно обратными на полуоси $\mathbb{R}_+$, поскольку $1/(p-1)=q-1$. Поэтому

$$ab\leqslant\int_0^a t^{p-1}\,dt+\int_0^b t^{q-1}\,dt=a^p/p+b^q/q\,.$$

Если $a^p=b^q$, то в этом неравенстве имеет место равенство.

Пусть теперь $A=\int_E|f|\,d\mu$ и $B=\int_E|g|^q\,d\mu$. Если один из этих интегралов равен нулю или бесконечности, то утверждение очевидно выполнено. Поэтому можно считать, что A и B конечны и положительны. Полагая в доказанном неравенстве $a=|f(x)|/A^{1/p}$ и $b=|g(x)|/B^{1/q}$, а затем интегрируя его, мы получим неравенство $\int_E ab\,d\mu\leqslant 1/p+1/q=1$. Отсюда вытекает неравенство Гельдера $\int_E|fg|\,d\mu\leqslant A^{1/p}B^{1/q}$. При этом знак равенства имеет место только тогда, когда $|f(x)|^p=C\,|g(x)|^q$ п.в. на E, где $C=A/B$.

(3). Неравенство Минковского. Если функции f и g являются измеримыми на множестве E и $p \geqslant 1$, то справедливо неравенство

$$(\int_E |f+g|^p\,d\mu)^{1/p} \leqslant (\int_E |f|^p\,d\mu)^{1/p} + (\int_E |g|^p\,d\mu)^{1/p}$$

В случае $p>1$ равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = C\,g(x)$ п.в. на множестве E при некотором $C \geqslant 0$.

В случае $p=1$ для доказательства следует проинтегрировать неравенство $|f+g| \leqslant |f|+|g|$. Пусть $p>1$ и $A = \int_E |f|^p\,d\mu$, $B = \int_E |g|^p\,d\mu$, $D = \int_E |f+g|^p\,d\mu$. Применяя неравенства Гельдера и учитывая равенство $(p-1)q = p$, мы имеем

$$D = \int_E |f+g|^p\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_E |g|\,|f+g|^{p-1}\,d\mu \leqslant A^{1/p}D^{1/q} + B^{1/p}D^{1/q}$$

Поделив на величину $D^{1/q}$, мы получим неравенство Минковского. При этом знак равенства имеет место только тогда, когда равенства

$$|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|\,, \quad |f(x)|^p/A = |g(x)|^p/B = |f(x)+g(x)|^p/D$$

выполняются п.в. на множестве E. Из первого равенства следует, что $f(x) = h(x)g(x)$ п.в. на E, где функция $h(x) \geqslant 0$ неотрицательна на E. Тогда как из второго равенства следует, что $(B/A)^{1/p} = h(x)$ п.в. на множестве $E(f \neq 0) = E(g \neq 0)$. Отсюда получаем $f(x) = C\,g(x)$ п.в. на E.

(4). Обобщенное неравенство Минковского. Пусть заданы измеримые пространства (X_1, Σ_1, μ_1) и (X_2, Σ_2, μ_2), а мера μ есть произведение мер μ_1 и μ_2. Предположим, что множества $E_1 \in \Sigma_1$ и $E_2 \in \Sigma_2$ имеют σ-конечную меру, а функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ неотрицательна и измерима на множестве $E = E_1 \times E_2$. Тогда при всех $p \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$(\int_{E_1}(\int_{E_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2)^p\,d\mu_1)^{1/p} \leqslant \int_{E_2}(\int_{E_1} f^p(x_1,x_2)\,d\mu_1)^{1/p}\,d\mu_2\,.$$

В случае $p=1$ это неравенство (по теореме Фубини) обращается в равенство. Так как функция $g(x_1) = \int_{E_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2$ эквивалентна измеримой функции на E_1, то применяя теорему Фубини и неравенство Гельдера, мы имеем

$$\int_{E_1} g^p(x_1)\,d\mu_1 = \int_{E_1} g(x_1)\,g^{p-1}(x_1)\,d\mu_1 = \int_{E_1}(\int_{E_2} f(x_1,x_2)\,g^{p-1}(x_1)\,d\mu_2)d\mu_1$$

$$= \int_{E_2}(\int_{E_1} f(x_1,x_2)\,g^{p-1}(x_1)\,d\mu_1)d\mu_2 \leqslant \int_{E_2}(\int_{E_1} f^p(x_1,x_2)\,d\mu_1)^{1/p}\,d\mu_2\,(\int_{E_1} g^p(x_1)\,d\mu_1)^{1/q}\,,$$

поскольку $(p-1)q = p$. Поделив обе части этого неравенства на последнюю скобку, получим указанное неравенство.

(5). Верхняя грань. Пусть заданы измеримая функция g на множестве E и числа $p, q > 1$ такие, что $1/p + /q = 1$, а множество S состоит из всех измеримых функций f на E, удовлетворяющих условию $\int_E |f|^p\,d\mu \leqslant 1$. Тогда

$$\sup_{f\in S} |\int_E fg\,d\mu| = (\int_E |g|^q\,d\mu)^{1/q}\,.$$

При доказательстве можно считать, что функция g принимает отличные от нуля конечные значения и величина интеграла $B = \int_E |g|^q\,d\mu$ конечна. Из неравенства Гельдера вытекает, что верхняя грань не превосходит $B^{1/q}$. Далее выберем измеримую функцию f так, чтобы $f(x) \doteqdot |g(x)|^q/g(x)B^{1/p}$. Тогда получим

$$\int_E |f|^p\,d\mu = 1\,, \quad \int_E fg\,d\mu = \int_E |g|^q\,d\mu/B^{1/p} = B^{1/q}\,.$$

Пусть $p > 0$. Множество всех измеримых функций $f : E \to \mathbb{F}$, у которых степень $|f|^p$ интегрируема на множестве E, обозначается через $\boldsymbol{L}_p = \boldsymbol{L}_p(E, \Sigma, \mu)$ и называется *пространством Лебега* интегрируемых функций в степени p. Функции в этих пространствах рассматриваются с точностью до эквивалентности (п.в. на E), а классы эквивалентных функций называются *суммируемыми функциями* в степени p. Пространство $\boldsymbol{L}_p$ будет линейным пространством над полем $\mathbb{F}$. *Лебегова норма* в $\boldsymbol{L}_p$ определяется по формуле

$$\|f\| \doteqdot (\textstyle\int_E |f|^p \, d\mu)^{1/p} .$$

Т е о р е м а. *Пространство* $\boldsymbol{L}_p(E, \Sigma, \mu)$ *при* $1 \leqslant p < \infty$ *является банаховым.*

Доказательство. Свойство однородности нормы $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$ очевидно выполнено. Из неравенства Минковского следует аксиома треугольника $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$. Если $\|f\| = 0$, то $f(x) = 0$ п.в. на E и значит функция f эквивалентна нулю. Таким образом, все аксиомы нормы выполнены.

Докажем полноту пространства $\boldsymbol{L}_p$. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность. Выберем последовательность индексов $n_1 < n_2 < \ldots$ так, чтобы при всех $i, j \geqslant n_k$ выполнялось неравенство $\|f_i - f_j\| < 2^{-k}$. Теперь заметим, что функция

$$g(x) \doteqdot \lim g_n(x) , \quad g_n(x) \doteqdot |f_{n_1}(x)| + \textstyle\sum_{i=1}^n |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| ,$$

суммируема в степени p. В самом деле, функции g_n образуют неубывающую последовательность и $\|g_n\| \leqslant \|f_{n_1}\| + 1$. Следовательно, по теореме о монотонной сходимости функция $g(x)$ будет суммируемой в степени p и значит конечной п.в. на множестве E. Отсюда ряд

$$f(x) \doteqdot f_{n_1}(x) + \textstyle\sum_{i=1}^\infty (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$$

сходится абсолютно п.в. и $|f(x)| \leqslant g(x)$ на множестве E. По теореме Лебега функция f будет также суммируемой в степени p. Применяя еще раз теорему о монотонной сходимости и неравенство треугольника, мы получим

$$\|f - f_{n_k}\| \leqslant \textstyle\sum_{i=k}^\infty \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| < 2^{1-k} .$$

Таким образом, $\lim \|f - f_{n_k}\| = 0$. Так как последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна и содержит сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, то эта последовательность сходится в $\boldsymbol{L}_p$ и ее предел равен $\lim f_n = f$. □

З а м е ч а н и е. В случае $0 < p < 1$ аксиома треугольника не выполняется. Поэтому $\boldsymbol{L}_p$ при $0 < p < 1$ называют квазинормированным пространством.

Через $\boldsymbol{L}_\infty = \boldsymbol{L}_\infty(E, \Sigma, \mu)$ обозначается пространство ограниченных и измеримых функций $f : E \to \mathbb{F}$ на множестве E. Функции в этом пространстве рассматриваются с точностью до эквивалентности (п.в. на E) и называется *существенно ограниченными.* Норма в $\boldsymbol{L}_\infty$ равна *существенной верхней грани*

$$\|f\| \doteqdot \operatorname{vrai}\sup_{x \in E} |f(x)| = \inf_{A \in \Sigma, \mu(A) = 0} \sup_{x \in E \setminus A} |f(x)| .$$

Т е о р е м а. *Пространство* $\boldsymbol{L}_\infty(E, \Sigma, \mu)$ *является банаховым.*

Доказательство. Вначале покажем, что нижняя грань в определении нормы достигается на некотором множестве $A_f \in \Sigma$ меры нуль. Для этого выберем множества $A_n \in \Sigma$ меры нуль так, чтобы $\sup_{x \in E \setminus A_n} |f(x)| < \|f\| + 1/n$, и положим

$A(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. В силу счетной полуаддитивности меры множество A_f имеет меру нуль и значит $\sup_{x\in E\setminus A(f)}|f(x)| = \|f\|$. В частности, отсюда вытекает, что сходимость в пространстве $\boldsymbol{L}_\infty$ совпадает с равномерной сходимостью на дополнении $E\setminus A$ некоторого множества $A\in\Sigma$ меры нуль.

Аксиома однородности нормы очевидно выполнена. Если $\|f\| = 0$, то из сказанного выше вытекает, что $f(x) = 0$ п.в. на E и значит функция f эквивалентна нулю. Проверим неравенство треугольника. Пусть $f, g\in\boldsymbol{L}_\infty$ и $A = A(f)\cup A(g)$, тогда

$$\|f+g\| \leqslant \sup_{x\in E\setminus A}|f(x)+g(x)| \leqslant \sup_{x\in E\setminus A(f)}|f(x)| + \sup_{x\in E\setminus A(g)}|g(x)| = \|f\| + \|g\|.$$

Докажем полноту пространства $\boldsymbol{L}_\infty$. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{f_n\}$ и множество $A = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A(f_i - f_j)$ меры нуль. Поскольку

$$\sup_{x\in E\setminus A}|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \sup_{x\in E\setminus A(f_i-f_j)}|f_i(x) - f_j(x)| = \|f_i - f_j\|.$$

то на множестве $E\setminus A$ данная последовательность ограничена и фундаментальна относительно равномерной сходимости. В силу полноты пространства ограниченных функций $\boldsymbol{B}(E\setminus A)$ существует равномерный предел $f = \lim f_n$ на множестве $E\setminus A$. Положим $f = 0$ на A, тогда f ограничена и измерима на E. При этом в силу равномерной сходимости $\lim\|f - f_n\| = 0$. □

Пример. Пусть $1\leqslant p<\infty$ и $\boldsymbol{\ell}_p$ обозначает пространство всех последовательностей $x = \{x_i\}$, $x_i\in\mathbb{F}$, таких, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p < \infty$ сходится и норма равна

$$\|x\| \doteqdot \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Это пространство является частным случаем пространства $\boldsymbol{L}_p(E,\Sigma,\mu)$, где $E = \mathbb{N}$ есть множество натуральных чисел, а Σ совокупность всех подмножеств $A\subseteq\mathbb{N}$ и мера $\mu(A)$ равна количеству точек множества A. Пространство $\boldsymbol{\ell}_\infty$ состоит из всех ограниченных последовательностей $x = \{x_i\}$, $x_i\in\mathbb{F}$, и имеет норму

$$\|x\| \doteqdot \sup|x_i|.$$

По доказанному выше $\boldsymbol{\ell}_p$ является банаховым пространством. В случае $1\leqslant p<\infty$ мы докажем, что сопряженное пространство ${\boldsymbol{\ell}_p}^*$ изометрично $\boldsymbol{\ell}_q$, где $q = p/(p-1)$, если $1<p<\infty$, и $q=\infty$, если $p=1$.

Пусть $e_i = \{e_{ij}\}$ стандартный базис в $\boldsymbol{\ell}_p$, где $e_{ij} = 0$, если $i\neq j$, и $e_{ij} = 1$, если $i = j$. Тогда, взяв произвольный вектор $x = \{x_i\}\in\boldsymbol{\ell}_p$, мы имеем

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, e_i, \quad \left\|x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p},$$

и значит ряд сходится по норме пространства $\boldsymbol{\ell}_p$. Используя свойство линейности и непрерывности функционала $f\in{\boldsymbol{\ell}_p}^*$, получим формулу

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i, \quad y_i = f(e_i),$$

В силу неравенства Гельдера $\|f\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{1/q} = \|y\|$. Если в указанной формуле положить $x_i \doteqdot |y_i|^q/y_i\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/p}$ если $y_i\neq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, и $x_i = 0$ в остальных случаях, то норма $\|x\| = 1$ и, следовательно, при всех n справедливо неравенство

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q} \leqslant \|f\|.$$

Устремляя $n\to\infty$, заключаем, что имеет место $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^q\right)^{1/q} = \|y\|$ равенство. Доказательство изометричности пространств ${\boldsymbol{\ell}_1}^*$ и $\boldsymbol{\ell}_\infty$ в случае $p = 1$ вытекает из аналогичных соображений.

10. Задача наилучшего приближения. Теорема Чебышева.

Пусть $\boldsymbol{X}$ — нормированное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ чисел и $Y\subset\boldsymbol{X}$ его подпространство. Обозначим через $\rho(x,Y)\doteqdot\inf_{y\in Y}\|x-y\|$ расстояние от вектора $x\in\boldsymbol{X}$ до подпространства Y. Величина $\rho(x,Y)$ называется *наилучшим приближением* вектора x. Если существует такой элемент $y\in Y$, что $\rho(x,Y)=\|x-y\|$, то он называется *элементом наилучшего приближения* подпространством Y.

Задача наилучшего приближения состоит в том, чтобы найти величину $\rho(x,Y)$ наилучшего приближения и определить элемент y наилучшего приближения для некоторого вектора x. В ряде случаев эта задача оказывается неопределенной, если элемент наилучшего приближения не существует или является не единственным.

Теорема (существования). *Предположим, что подпространство $Y\subset\boldsymbol{X}$ имеет конечную размерность. Тогда для каждого вектора $x\in\boldsymbol{X}$ существует такой элемент $y\in Y$, что $\rho(x,Y)=\|x-y\|$.*

Доказательство. Выберем базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$ подпространства Y, где $n=\dim M$ есть размерность Y. Тогда каждый элемент $y\in Y$ представляется в виде полинома $y=\sum_{i=1}^n p_ie_i$. Величина уклонения $M_p(x)\doteqdot\|x-y\|$ вектора x от полинома y является функцией коэффициентов $p=(p_1,p_2,\ldots,p_n)\in\mathbb{F}^n$. Покажем, что функция $M_p(x)$ (при фиксированном x) достигает своей нижней грани.

Множество точек $p\in\mathbb{F}^n$ минимума функции $M_p(x)$ удовлетворяет неравенству $M_p(x)\leqslant M_0(x)=\|x\|$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$|M_p(x)-M_q(x)|\leqslant\|y-z\|\leqslant\textstyle\sum_{i=1}^n|p_i-q_i|\|e_i\|\leqslant C\sum_{i=1}^n|p_i-q_i|,$$

где $C=\max\|e_i\|$ не зависит от p и q. Поэтому функция $M_p(x)$ непрерывна по переменной $p\in\mathbb{F}^n$. В частности, функция $M_p(0)=\|y\|$ также непрерывна. Обозначим через $m>0$ нижнюю грань функции $M_p(0)$ на единичной сфере $\|p\|=1$ пространства $\mathbb{F}^n$. Отсюда для любого полинома y, имеющего коэффициенты p, мы имеем $\|\lambda y\|\geqslant m$, где $\lambda=1/\|p\|$. Следовательно, если $\|p\|>2\|x\|/m$, то

$$M_p(x)\geqslant\|y\|-\|x\|=\|\lambda y\|\,\|p\|-\|x\|>2\|x\|-\|x\|=\|x\|.$$

Таким образом, множество точек минимума функции $M_p(x)$ содержится в замкнутом шаре $S(r,0)$ радиуса $r=2\|x\|/m$. Так как шар $S(r,0)$ является компактом, то в силу известной теоремы непрерывная функция $M_p(x)$ достигает своей нижней грани. $\square$

Нормированное пространство $\boldsymbol{X}$ называется *строго нормированным*, если в неравенстве треугольника $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ знак равенства имеет место только тогда, когда $y=\lambda x$ при некотором $\lambda\geqslant 0$. Например, пространство $\boldsymbol{L}_p$ при $1<p<\infty$ является строго нормированным.

Теорема (единственности). *В строго нормированном пространстве $\boldsymbol{X}$ может быть только один элемент наилучшего приближения подпространством Y.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $x\in\boldsymbol{X}$ существуют два элемента $y_1,y_2\in Y$ наилучшего приближения, т.е. $\|x-y_1\|=\|x-y_2\|=\rho(x,Y)>0$. Так как элементы $z_1=x-y_1$ и $z_2=x-y_2$ различны и имеют норму, равную $\rho(x,Y)$, то $z_1\neq\lambda z_2$ при $\lambda>0$. Пусть $y=(y_1+y_2)/2\in Y$, тогда в силу строгой нормируемости получим $\|x-y\|=\|z_1+z_2\|/2<(\|z_1\|+\|z_2\|)/2=\rho(x,Y)$. Это противоречие доказывает единственность элемента наилучшего приближения. $\square$

П.Л. Чебышев поставил задачу о приближении непрерывной функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ полиномами $P(x) = p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \ldots + p_0$ степени меньше n. Требуется найти такой полином $P(x)$, чтобы величина уклонения $M_p(f)$ на отрезке $[a,b]$

$$M_p(f) \doteqdot \|f - P\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$$

была минимальной. По терминологии Чебышева здесь ищется функция вида $\Delta_p(x) = f(x) - P(x)$ наименее уклоняющаяся от нуля на отрезке $[a,b]$. В соответствии с современной терминологией речь идет о наилучшем приближении в пространстве $\boldsymbol{C}[a,b]$ функции $f(x)$ полиномами $P(x)$ степени меньше n.

Величина наилучшего приближения $\rho(f, \boldsymbol{P}_n) = \inf M_p(f)$ равна расстоянию до подпространства $\boldsymbol{P}_n$ полиномов степени меньше n. Если $\rho(f, \boldsymbol{P}_n) = \|f - P\|$, то $P(x)$ называется *полиномом наилучшего приближения.* Существование такого полинома вытекает из доказанной теоремы. В частности, если $\rho(f, \boldsymbol{P}_n) = 0$, то $M_p(f) = 0$ при некотором $p \in \mathbb{R}^n$ и, значит, функция $f(x)$ есть полином степени меньше n. Этот тривиальный случай обычно исключается из рассмотрений.

Т е о р е м а (Чебышев). *Полином $P(x) = p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \ldots + p_0$ является наилучшим приближением непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует $n+1$ точка $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$ и $\epsilon = \pm 1$, для которых выполнены следующие условия (альтернанса):*

$$f(x_i) - P(x_i) = \epsilon(-1)^i M_p\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,,$$

где $M_p = \|f - P\|$. Полином $P(x)$, обладающий этими свойствами, единственный.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что величина $M_p > 0$ и альтернанс разности $\Delta_p(x) = f(x) - P(x)$ имеет не более, чем $k \leqslant n$ точек. Рассмотрим совокупность точек $A_p \doteqdot A_p^+ \cup A_p^-$ отрезка $[a,b]$, где множества

$$A_p^{\pm} \doteqdot \{x \in [a,b] \,|\, \Delta_p(x) = \pm M_p\}$$

состоят из всех экстремальных точек функции $\Delta_p(x)$, для которых достигается величина максимума $+M_p$, либо величина минимума $-M_p$. Далее выберем точки $a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{k-1} < \xi_k = b$ так, чтобы были выполнены три условия:

- разность $\Delta_p(\xi_j) = 0$ равна нулю при всех $j = 1, 2, \ldots, k-1$;
- интервалы (ξ_{j-1}, ξ_j) могут содержать, либо только точки множества A_p^+, либо только точки множества A_p^-;
- точки множества A_p, лежащие на соседних интервалах (ξ_{j-1}, ξ_j), принадлежат различным множествам A_p^+ и A_p^-.

В силу непрерывности функции $\Delta_p(x)$ такая последовательность точек всегда существует. Кроме того, найдется такое положительное число $0 < \varepsilon < M_p$, что попеременно на этих интервалах (ξ_{j-1}, ξ_j) выполняется одно из следующих неравенств

$$-M_p \leqslant \Delta_p(x) < M_p - \varepsilon\,, \ -M_p + \varepsilon < \Delta_p(x) \leqslant M_p\,.$$

Теперь определим полином $Q(x) = P(x) + \lambda\, D(x)$, где $D(x) \doteqdot (x - \xi_1) \ldots (x - \xi_{k-1})$. Величину и знак λ выберем так, чтобы $\|\lambda\, D\| < \varepsilon$ и $\operatorname{sign} \Delta_p(x) = \operatorname{sign} \lambda\, D(x)$ для всех $x \in A_p$. Тогда нетрудно проверить, что при всех $x \in [a,b]$ имеет место строгое неравенство $|f(x) - Q(x)| < M_p$, и, следовательно, $P(x)$ не является полиномом наилучшего приближения.

Достаточность. Предположим, что полином $Q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_0$ приближает функцию $f(x)$ лучше, чем $P(x)$, т.е. $M_q < M_p$. В этом случае полином $Q(x) - P(x) = \Delta_p(x) - \Delta_q(x)$ степени меньше n принимает в точках альтернанса значения с чередующимися знаками. Так как альтернанс состоит из $n+1$ точки, то полином $Q(x) - P(x)$ имеет, по крайней мере, n нулей. Однако это невозможно. Поэтому $M_p = \rho(f, \boldsymbol{P}_n)$ и, значит, $P(x)$ — полином наилучшего приближения.

Единственность. Допустим, что существуют два полинома $P(x)$ и $Q(x)$ степени меньше n, удовлетворяющие условиям альтернанса. Тогда по доказанному выше $\rho(f, \boldsymbol{P}_n) = M_p = M_q > 0$. Рассмотрим полином $R(x) = (P(x) + Q(x))/2$, имеющий коэффициенты $r = (p+q)/2$. Так как при всех $x \in A_r$ в неравенствах

$$\rho(f, \boldsymbol{P}_n) \leqslant M_r = |\Delta_r(x)| \leqslant (|\Delta_p(x)| + |\Delta_q(x)|)/2 \leqslant \rho(f, \boldsymbol{P}_n)$$

должны быть равенства, то полином $R(x)$ является наилучшим приближением для функции f. Кроме того, $\Delta_p(x) = \Delta_q(x)$ для всех $x \in A_r$. Отсюда $P(x) = Q(x)$ для всех $x \in A_r$. По доказанному выше $R(x)$ имеет альтернанс, состоящий не менее, чем из $n+1$ точки. Таким образом, полином $P(x) - Q(x)$ степени меньше n имеет не менее, чем $n+1$ нулей, что невозможно. $\square$

Теорема Чебышева устанавливает критерий полинома наилучшего приближения для произвольной непрерывной функции, но эта терема не дает никакого способа для нахождения этого полинома. В настоящее время решение этой задачи представляет значительные трудности и в общем случае не решена до сих пор. Остановимся на ней в простейших случаях $n = 1$ и $n = 2$.

Пример (1). В случае $n = 1$ требуется найти константу p_0 наилучшего приближения. Пусть $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$ есть наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда очевидно, что из всех постоянных величин наименьшее уклонение от $f(x)$ имеет средняя величина $p_0 = (y_0 + y_1)/2$. Здесь альтернанс состоит из двух точек x_0 и x_1, взятых в определенном порядке.

Пример (2). В случае $n = 2$ требуется найти линейную функцию $P(x) = p_1 x + p_0$ наилучшего приближения. Эту задачу можно решить, если дополнительно предположить, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и ее вторая производная $f''(x) > 0$ положительна. Точки альтернанса $x_0 < x_1 < x_2$ являются точками экстремума разности $\Delta_p(x) = f(x) - p_1 x - p_0$. Значит $f'(x_1) = p_1$. Так как производная $f'(x)$ строго возрастает, то значение p_1 она может принимать только один раз. Поэтому внутри интервала (a, b) нет других точек экстремума. Следовательно, $x_0 = a$, $x_2 = b$ и $\Delta_p(a) = -\Delta_p(x_1) = \Delta_p(b)$. Отсюда легко получим

$$p_1 = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad p_0 = \tfrac{f(x_1)+f(a)}{2} - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\tfrac{(x_1+a)}{2},$$

где точка x_1 находится из уравнения $f'(x_1) = p_1$.

Пример (3). Задача Чебышева. Предположим, что в пространстве $\boldsymbol{P}$ всех полиномов определена некоторая норма. Задача Чебышева о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля, состоит в том, чтобы определить такой полином $P(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \ldots + p_0$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, для которого достигается нижняя грань

$$\mu_n \doteqdot \inf_{p \in \mathbb{R}^n} \|P(x)\|, \quad p = (p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}).$$

Другими словами, требуется найти полином наилучшего приближения функции x^n в данном нормированном пространстве, имеющий степень меньше n. Коэффициенты

p_i этого полинома и величина μ_n будут зависить от n. Приведем решение задачи Чебышева для нормы $\|P\| = \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|$ пространства $\boldsymbol{C}[-1,1]$.

Лемма. Найдутся такие целые числа $t_0(n), t_1(n), \dots, t_n(n) = 2^{n-1}$, что

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} t_k(n)\cos^k\theta\,.$$

Доказательство. Докажем по индукции. Лемма тривиальна при $n=1$. В случае $n=2$ лемма вытекает из тождества $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$. Допустим, что она верна до какого-нибудь n включительно. Тогда по предположению индукции

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta =$$
$$= 2^n\cos^{n+1}\theta + 2\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} t_k(n)\cos^{k+1}\theta - \sum_{k=0}^{n-1} t_k(n-1)\cos^k\theta\,.$$

Поскольку $t_k(n)$ и $t_k(n-1)$ целые числа, то утверждение верно при всех n. □

Полиномами Чебышева первого рода называются следующие полиномы

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x) = 2^{n-1}x^n + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} t_k(n)x^k\,.$$

Это равенство определяет полином $T_n(x)$ только для $x\in[-1,1]$, однако, как и всякий полином, он определен для всех x.

Теорема (Чебышев). *Из всех полиномов степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, наименее уклоняются от нуля в метрике $\boldsymbol{C}[-1,1]$ полиномы $P(x) = 2^{1-n}T_n(x)$, где $T_n(x)$ — полиномы Чебышева первого рода.*

Доказательство. Полагая $x=\cos\theta$, где $\theta\in[0,\pi]$, получим $P(x) = 2^{1-n}\cos n\theta$. Следовательно, полином имеет альтернанс, состоящий из точек $x_k = \cos\pi(\frac{n-k}{n})$, $k=0,1,\dots,n$. По теореме Чебышева полином $P(x)$ наименее уклоняется от нуля и величина наименьшего уклонения равна $\mu_n = \|P\| = \max_{x\in[-1,1]}|P(x)| = 2^{1-n}$. □

В заключении приведем без доказательства решение задачи Чебышева в случае нормы $\|P\| = \int_{-1}^1 |P(x)|\,dx$ пространства $\boldsymbol{L_1}[-1,1]$. *Полиномами Чебышева второго рода* называются следующие полиномы

$$U_n(x) = \tfrac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) = \tfrac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = 2^n x^n + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k(n)x^k$$

где $T_{n+1}(x)$ — полиномы Чебышева первого рода степени $n+1$. По индукции нетрудно доказать, что $u_k(n)$ целые числа.

Теорема (Коркин-Золотарев). *Из всех полиномов степени n с коэффициентом при x^n, равным единице, наименее уклоняются от нуля в метрике $\boldsymbol{L_1}[-1,1]$ полиномы $P(x) = 2^{-n}U_n(x)$, где $U_n(x)$ — полиномы Чебышева второго рода.*

Здесь величина наименьшего уклонения равна $\mu_n = \|P\| = \int_{-1}^1 |P(x)|\,dx = 2^{1-n}$.

11. Гильбертовы пространства. Теорема Рисса.

Пусть $\boldsymbol{X}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Рассмотрим определение скалярного произведения векторов.

Определение. Скалярным произведением в пространстве $\boldsymbol{X}$ называется функция $\langle x, y\rangle$ двух переменных $x, y \in \boldsymbol{X}$ со значениями в поле $\mathbb{F}$, обладающая следующими тремя свойствами:

- *линейность* $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$ при всех $x, y, z \in \boldsymbol{X}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$;
- *симметричность* $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ при всех $x, y \in \boldsymbol{X}$;
- *положительность* $\langle x, x\rangle > 0$ для всех $x \in \boldsymbol{X}$ не равных нулю $x \neq 0$.

Линейное пространство $\boldsymbol{X}$, в котором задано скалярное произведение векторов, называется *евклидовым*. Величина $\|x\| \doteqdot \sqrt{\langle x, x\rangle}$ называется *евклидовой нормой* вектора x, а функция $\rho(x, y) \doteqdot \|x-y\|$ — *евклидовой метрикой*. Аксиомы симметричности и тождества метрики $\rho(x, y)$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{X}$ очевидно выполнены. Далее мы докажем неравенство треугольника.

(1). Неравенство Коши-Буняковского $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.

Пусть $\theta = \langle x, y\rangle / |\langle x, y\rangle|$ и $z = tx + \theta y$. Тогда, в силу свойства неотрицательности скалярного квадрата $\langle z, z\rangle \geqslant 0$, при всех $t \in \mathbb{R}$ мы получим неравенство

$$\langle z, z\rangle = t^2\langle x, x\rangle + t\overline{\theta}\langle x, y\rangle + t\theta\langle y, x\rangle + \theta\overline{\theta}\langle y, y\rangle = t^2\langle x, x\rangle + 2t|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \geqslant 0 .$$

Так как дискриминант $|\langle x, y\rangle|^2 - \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ этой квадратичной формы по переменной t должен быть неположительным, то это равносильно неравенству Коши-Буняковского. Равенство, очевидно, достигается только тогда, когда $z = tx + \theta y = 0$ при некотором $t \in \mathbb{R}$, т.е. когда вектора x и y линейно зависимы.

(2). Неравенство треугольника $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Для доказательства достаточно применить неравенство Коши-Буняковского

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle =$$
$$\langle x, y\rangle + 2\Re\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle = (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Отсюда легко заметить, что равенство имеет место только тогда, когда $\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\|$, и значит как мы знаем $x = \lambda y$, где $\lambda = \|x\|/\|y\|$. Следовательно, евклидово пространство строго нормировано.

(3). Скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ и норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ являются непрерывными функциями в евклидовом пространстве $\boldsymbol{X}$.

Непрерывность скалярного произведения вытекает из следующего неравенства

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \leqslant |\langle x, y\rangle - \langle x_0, y\rangle| + |\langle x_0, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| =$$
$$|\langle x - x_0, y\rangle| + |\langle x_0, y - y_0\rangle| \leqslant \|x - x_0\|\,\|y\| + \|x_0\|\,\|y - y_0\| .$$

Полагая здесь $x = y$ и $x_0 = y_0$, получим аналогичное неравенство, из которого следует непрерывность скалярного квадрата и нормы.

Лемма (Беппо Леви). *Пусть Y — подпространство евклидова пространства $\boldsymbol{X}$ и $d = \rho(x, Y)$ есть величина наилучшего приближения вектора $x \in \boldsymbol{X}$. Тогда при всех $y_1, y_2 \in Y$ выполняется неравенство*

$$\|y_1 - y_2\| \leqslant \sqrt{\|x-y_1\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x-y_2\|^2 - d^2}\,.$$

Доказательство. Пусть $y = (ty_1 + y_2)/(t+1) \in Y$, тогда, поскольку $\|x-y\| \geqslant d$, то $\|t(x-y_1) + (x-y_2)\|^2 = \|(t+1)(x-y)\|^2 \geqslant (t+1)^2 d^2$ или при всех $t \in \mathbb{R}$

$$t^2(\|x-y_1\|^2 - d^2) + 2t(\Re\langle x-y_1, x-y_2\rangle - d^2) + (\|x-y_1\|^2 - d^2) \geqslant 0\,.$$

Откуда $(\Re\langle x-y_1, x-y_2\rangle - d^2)^2 \leqslant (\|x-y_1\|^2 - d^2)(\|x-y_2\|^2 - d^2)$. Поэтому величина

$$\|y_1 - y_2\|^2 = \|(x-y_1) - (x-y_2) = \|x-y_1\|^2 - 2\Re\langle x-y_1, x-y_2\rangle + \|x-y_2\|^2 =$$
$$= (\|x-y_1\|^2 - d^2) - 2(\Re\langle x-y_1, x-y_2\rangle - d^2) + (\|x-y_2\|^2 - d^2)$$

не превосходит $(\sqrt{\|x-y_1\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x-y_2\|^2 - d^2})^2$ и неравенство доказано. □

Евклидово пространство является метрическим пространством, поэтому в нем вводятся понятия сходимости и полноты, а также другие понятия, зависящие только от евклидовой метрики. Если евклидово пространство полно, то оно называется *гильбертовым пространством.* В случае $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ гильбертово пространство называется *действительным*, а в случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ — *комплексным.*

В гильбертовом пространстве $\boldsymbol{X}$ определяется понятие ортогональности. Вектор $x \in \boldsymbol{X}$ называется *ортогональным* подпространству Y и обозначается через $x \perp Y$, если $\langle x, y\rangle = 0$ при всех $y \in Y$. Множество всех векторов, ортогональных подпространству Y, называется *ортогональным дополнением* к Y и обозначается через $Y^\perp$. Легко видеть, что $Y^\perp$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{X}$.

Пример (1). Конечномерное евклидово пространство $\mathbb{F}^n$ является гильбертовым пространством. Скалярным произведением и нормой в $\mathbb{F}^n$ будут

$$\langle x, y\rangle \doteqdot \textstyle\sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}\,, \quad \|x\| \doteqdot (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}\,,$$

где вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n$.

Пример (2). Пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ состоит из всех последовательностей $x = \{x_i\}$, где $x_i \in \mathbb{F}$, для которых сходится ряд $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty$. Скалярное произведение векторов $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\} \in \boldsymbol{\ell}_2$ и норма определяются по формулам

$$\langle x, y\rangle \doteqdot \textstyle\sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}\,, \quad \|x\| \doteqdot (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2)^{1/2}\,.$$

Пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ полно и значит является гильбертовым пространством.

Пример (3). Пространство $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_2(E, \Sigma, \mu)$ состоит из всех измеримых функций $f(x)$, для которых интеграл $\int_E |f|^2\, d\mu < \infty$ конечный. Скалярное произведение функций $f, g \in \boldsymbol{L}_2$ и норма определяются по формулам

$$\langle f, g\rangle \doteqdot \textstyle\int_E f\overline{g}\, d\mu\,, \quad \|f\| \doteqdot (\int_E |f|^2\, d\mu)^{1/2}\,.$$

Пространство $\boldsymbol{L}_2$ полно и поэтому является гильбертовым пространством.

Теорема (о наилучшем приближении). *Пусть Y — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\boldsymbol{X}$. Элемент $y \in Y$ является наилучшим приближением вектора $x \in \boldsymbol{X}$ тогда и только тогда, когда $x - y \perp Y$. При этом элемент наилучшего приближения существует и единственный.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $y \in Y$ и $\rho(x, Y) = \|x-y\|$. Предположим, что существует такой элемент $z \in Y$, что $\langle x-y, z\rangle \neq 0$. Пусть $w = y + \theta z \in Y$, где $\theta = \langle x-y, z\rangle / \langle z, z\rangle$. Тогда

$$\|x-w\|^2 = \|x-y-\theta z\|^2 = \langle x-y-\theta z, x-y-\theta z\rangle =$$
$$\langle x-y, x-y\rangle - \overline{\theta}\langle x-y, z\rangle - \theta\langle z, x-y\rangle + \theta\overline{\theta}\langle z,z\rangle = \|x-y\|^2 - |\theta|^2\langle z,z\rangle\,.$$

и значит $\|x-w\|^2 < \|x-y\|^2$, что противоречит наилучшему приближению.

Достаточность. Если условие $x-y \perp Y$ выполнено, то для любого $z\in Y$ мы имеем

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x-z\rangle \leqslant \|x-y\|\,\|x-z\|\,,$$

Откуда $\|x-y\| \leqslant \|x-z\|$ и значит y есть наилучшее приближение.

Существование и единственность. По определению нижней грани найдется такая последовательность элементов $\{y_n\}$ в подпространстве Y, что $\lim\|x-y_n\| = \rho(x,Y)$. Учитывая неравенство Беппо Леви, эта последовательность фундаментальна. Поэтому в силу полноты пространства $\boldsymbol{X}$ существует предел $y=\lim y_n$, а в силу замкнутости подпространства $y\in Y$. Далее, используя непрерывность нормы, получим равенство $\|x-y\| = \rho(x,Y)$. Таким образом, элемент y является наилучшим приближением, а так как гильбертово пространство $\boldsymbol{X}$ строго нормировано, то элемент наилучшего приближения единственный. $\square$

Следствие (о разложении). Пусть Y — замкнутое подпространство гильбертова пространства $\boldsymbol{X}$ и $Y^\perp$ — ортогональное дополнение. Тогда каждый вектор $z\in\boldsymbol{X}$ имеет единственное разложение $z=x+y$, где $x\in Y$ и $y\in Y^\perp$.

Доказательство. По теореме для каждого вектора $z\in\boldsymbol{X}$ существует такой вектор $x\in Y$, что $y=z-x\perp Y$. Для доказательства единственности предположим, что имеются два разложения $z=x+y=x'+y'$. Тогда ненулевой вектор $w=x-x'=y'-y$ принадлежит пересечению $Y\cap Y^\perp$ и, следовательно, он будет ортогонален самому себе. Однако это невозможно в силу положительности скалярного квадрата. $\square$

Следствие (о плотности). Подпространство Y является всюду плотным множеством в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{X}$ тогда и только тогда, когда его ортогональное дополнение $Y^\perp=0$ равно нулю.

Если замыкание $[Y]=\boldsymbol{X}$, то из свойства непрерывности скалярного произведения вытекает, что $Y^\perp=[Y]^\perp=0$. Для доказательства достаточности допустим $[Y]\neq\boldsymbol{X}$. Тогда найдется ненулевой вектор $z\notin[Y]$. По предыдущему следствию $z=x+y$, где $x\in[Y]$ и $y\in Y^\perp$. Так как $z\notin[Y]$, то $y\neq 0$ и мы пришли к противоречию.

Пример. Рассмотрим гильбертово пространство $\boldsymbol{L}_2[-1,1]$, в котором норма определяется по формуле $\|f\| = (\int_{-1}^1 |f|^2\,dx)^{1/2}$. Докажем, что полиномами наименее уклоняющимися от нуля в метрике $\boldsymbol{L}_2[-1,1]$, являются полиномы Лежандра

$$L_n(x) = \tfrac{n!}{(2n)!}\tfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = x^n + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} l_k(n)\,x^k\,.$$

Вначале покажем, что полиномы $L_n(x)$ ортогональны всем полиномам степени меньше n. Действительно, интегрируя по частям, при $k<n$ получим

$$\textstyle\int_{-1}^1 x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = k!(-1)^k \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2-1)^n dx = 0\,.$$

Аналогично, вычисляя квадрат нормы полинома $L_n(x)$, получим равенство

$$\textstyle\int_{-1}^1 L_n^2(x)\,dx = \int_{-1}^1 x^n L_n(x)\,dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n\int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx = \frac{(n!)^2}{(2n)!}2^{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

Условие ортогональности всем полиномам степени меньше n является необходимым и достаточным, чтобы полиномы Лежандра $L_n(x)$ наименее уклонялись от нуля. Величина уклонения равна $\mu_n = \|L_n\| = \frac{(n!)^2}{(2n)!}2^n\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$.

Пусть $\boldsymbol{X}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Обозначим через $\boldsymbol{X}^*$ сопряженное пространство, т.е. пространство всех ограниченных линейных функционалов, определенных в $\boldsymbol{X}$.

Теорема (Рисс). Каждый ограниченный функционал $f \in \boldsymbol{X}^*$, определенный в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{X}$, допускает представление в виде скалярного произведения $f(x) = \langle x, z\rangle$, где $z \in \boldsymbol{X}$. Отображение $J : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}^*$, определенное по формуле $J(z) \doteqdot f$, является изометричным $\|J(x)\| = \|x\|$ и сопряженно-линейным оператором, действующим из $\boldsymbol{X}$ на все $\boldsymbol{X}^*$, т.е.

$$J(x+y) = J(x) + J(y)\,, \quad J(\lambda x) = \overline{\lambda} J(x)\,,$$

для всех векторов $x, y \in \boldsymbol{X}$ и чисел $\lambda \in \mathbb{F}$.

Доказательство. Рассмотрим ядро $\ker f \doteqdot \{x \in \boldsymbol{X} | f(x) = 0\}$ ограниченного функционала $f \in \boldsymbol{X}^*$. Так как функционал f непрерывен, то его ядро $Y = \ker f$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{X}$. Если ортогональное дополнение $Y^\perp = 0$ равно нулю, то в силу замкнутости подпространства получим равенство $Y = \boldsymbol{X}$ и, следовательно, функционал f будет нулевым.

Пусть $f \neq 0$, тогда $Y^\perp \neq 0$. Выберем вектор $y \in Y^\perp$ так, чтобы $\|y\| = 1$. Так как вектор $w = f(x)y - f(y)x$ принадлежит ядру Y, то $\langle w, y\rangle = f(x) - f(y)\langle x, y\rangle = 0$ при всех $x \in \boldsymbol{X}$. Полагая здесь $z = \overline{f(y)}y$, получим $f(x) = \langle x, z\rangle$.

В силу неравенства Коши-Буняковского $|f(x)| = |\langle x, z\rangle| \leqslant \|x\|\,\|z\|$, причем знак равенства достигается при $x = z/\|z\|$. Поэтому норма $\|f\| = \|z\|$ и значит отображение J является изометричным. Образ J совпадает с $\boldsymbol{X}^*$. Наконец, поскольку скалярное произведение $\langle x, z\rangle$ по второму аргументу z является сопряженно-линейным, то J будет сопряженно-линейным оператором. $\square$

Замечание. В силу изометричности отображения J сопряженное пространство $\boldsymbol{X}^*$ к гильбертову пространству отождествляется с самим пространством $\boldsymbol{X}$. Это обстоятельство часто используется в приложениях.

Пример. Рассмотрим гильбертово пространство $\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{L}_2(E, \Sigma, \mu)$. По теореме Рисса каждый ограниченный функционал $\alpha \in \boldsymbol{L}_2{}^*$ имеет вид

$$\alpha(f) = \langle f, g\rangle \doteqdot \textstyle\int_E f\overline{g}\, d\mu\,,$$

и норма этого функционала равна $\|\alpha\| = \|g\|$ норме функции $g \in \boldsymbol{L}_2$. Рассмотрим его ядро $Y = \ker\alpha$ и найдем наилучшее приближение подпространством Y некоторой функции $h \notin Y$. Так как ортогональное дополнение $Y^\perp$ состоит из функций λg, где $\lambda \in \mathbb{F}$, то элемент наилучшего приближения равен $f = h - \lambda g$. При этом число λ определяется из условия $\alpha(f) = \alpha(h) - \lambda\alpha(g) = 0$. Таким образом, мы получим $\lambda = \langle h, g\rangle/\langle g, g\rangle$ и величина наилучшего приближения вычисляется по формуле

$$\rho(h, Y) = \|h - f\| = |\lambda|\|g\| = |\langle h, g\rangle|/\sqrt{\langle g, g\rangle}\,.$$

12. Ортонормированные системы. Всюду плотные множества в $\boldsymbol{L}_p$.

Пусть $\boldsymbol{X}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных или комплексных чисел. Понятие ортогональной системы векторов имеет важное значение для всей теории гильбертовых пространств. Определение дается также, как в обычном конечномерном евклидовом пространстве: система $\{e_i\}$ называется *ортогональной*, если скалярное произведение $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ при всех $i \neq j$. Если, кроме того, $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ для всех i , то эта система называется *ортонормированной*.

Бесконечная система векторов линейного пространства называется *линейно независимой*, если каждая ее конечная подсистема линейно независима. Ортонормированная система очевидно линейно независима. Любую систему линейно независимых векторов $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно (линейно) преобразовать в ортонормированную с помощью следующего *процесса ортогонализации Шмидта.*

Пусть $e_1 \doteqdot x_1/\|x_1\|$ и $y_2 \doteqdot x_2 - \lambda_{21}e_1$, где $\lambda_{21} \doteqdot \langle x_2, e_1\rangle$. Тогда y_2 ортогонален e_1 . Полагая $e_2 \doteqdot y_2/\|y_2\|$, заметим, что $\|y_2\| \neq 0$, так как иначе вектора x_1 и x_2 будут линейно зависимы. Далее пусть $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ уже построены, тогда вектор

$$y_n \doteqdot x_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{ni}e_i\,, \quad \lambda_{ni} \doteqdot \langle x_n, e_i\rangle\,,$$

ортогонален e_i при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Полагаем $e_n \doteqdot y_n/\|y_n\|$, где $\|y_n\| \neq 0$, и т.д. Таким образом, по индукции система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ будет ортонормированной.

Ортонормированные системы чаще всего применяются в приложениях для ортогональных разложений (рядов Фурье) произвольного вектора $x \in \boldsymbol{X}$. Числа $c_i = \langle x, e_i\rangle$ называются *коэффициентами Фурье* вектора x относительно данной ортонормированной системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, а выражение $\sum_{i=1}^{\infty} c_ie_i$ называется *рядом Фурье* вектора x . Говорят, что ряд Фурье *сходится* в пространстве $\boldsymbol{X}$, если его частные суммы $s_n \doteqdot \sum_{i=1}^{n} c_ie_i$ имеют предел $s = \lim s_n$ в пространстве $\boldsymbol{X}$, т.е. $\lim \|s - s_n\| = 0$. Вектор $s \in \boldsymbol{X}$ называется *суммой ряда Фурье.*

Рассмотрим частные суммы s_n ряда Фурье вектора x . Используя ортонормированность векторов e_i , мы получим равенство

$$\|x - s_n\|^2 = \langle x - s_n, x - s_n\rangle = \langle x - s_n, x\rangle = \langle x, x\rangle - \textstyle\sum_{k=1}^{n} |c_i|^2\,.$$

Так как левая часть неотрицательна при всех n , то выполняется так называемое *неравенство Бесселя* $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leqslant \|x\|^2$. Знак равенства возможен только тогда, когда предел $\lim \|x - s_n\| = 0$, иначе говоря, когда ряд Фурье сходится к x .

Лемма. *Среди всех полиномов $p = \sum_{i=1}^{n} p_ie_i$ порядка n частные суммы ряда Фурье $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_ie_i$ являются наилучшим приближением вектора x .*

Доказательство. В самом деле, в силу ортонормированности векторов e_i , имеем

$$\begin{aligned}\|x - p\|^2 = \langle x - p, x - p\rangle = \|x\|^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \overline{p_i}c_i - \sum_{i=1}^{n} p_i\overline{c_i} + \sum_{i=1} |p_i|^2 = \\ = \|x\|^2 - \textstyle\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i - p_i|^2 = \|x - s_n\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i - p_i|^2\,.\end{aligned}$$

Таким образом, $\|x - s_n\| \leqslant \|x - p\|$ и значит s_n есть наилучшее приближение вектора x . Величина наилучшего приближения равна

$$\rho(x, E_n) = \inf\nolimits_{p_i} \|x - \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_ie_i\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2}\,.$$

где E_n — подпространство, порожденное ортонормированной системой $\{e_i\}_{i=1}^{n}$. $\square$

Для каждой системы векторов $\{x_i\}$ нормированного пространства X существует наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство Y . В этом случае говорят, что подпространство Y *порождается* данной системой векторов. Если справедливо равенство $Y = X$, то система векторов называется *полной* в X . Иначе говоря, данная система векторов $\{x_i\}$ называется полной в X , если множество всех конечных линейных комбиныций $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ этой системы является всюду плотным в X .

Теорема (Стеклов). *Пусть в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{X}$ задано подпространство $Y \subseteq \boldsymbol{X}$ и некоторая ортонормированная система векторов $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *ортонормированная система полна в подпространстве Y ;*
- *для любого $x \in Y$ ряд Фурье сходится к $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$;*
- *для любого $x \in Y$ выполняется равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$.*

Доказательство. Пусть ортонормированная система $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в Y и $x \in Y$. Вначале покажем, что частные суммы s_n ряда Фурье вектора x сходятся в $\boldsymbol{X}$. Из условия полноты следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой полином $p = \sum_{i=1}^{n} p_i e_i$, для которого $\|x - p\| < \varepsilon$. Применяя лемму, получим $\|x - s_n\| < \varepsilon$ и тем более $\|x - s_k\| < \varepsilon$ при всех $k > n$. Таким образом, ряд Фурье сходится и его сумма равна $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$. Поэтому, как показано выше, будет выполнено равенство Парсеваля. Обратно, из равенства Парсеваля для любого $x \in Y$ вытекает сходимость ряда Фурье к вектору x и значит система полна в Y . □

Пример. Гильбертово пространство $\boldsymbol{\ell}_2$ состоит из всех последовательностей $x = \{x_i\}$, $x_i \in \mathbb{F}$, у которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ сходится. Скалярное произведение и норма в $\boldsymbol{\ell}_2$ определяются формулами

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} , \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2} .$$

Система векторов $e_i = \{\delta_{ij}\}$, где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$, составляющая базис пространства $\boldsymbol{\ell}_2$, является ортонормированной и полной в $\boldsymbol{\ell}_2$.

Теорема (об изоморфизме). *Каждое сепарабельное гильбертово пространство $\boldsymbol{X}$ над полем $\mathbb{F}$ изометрично либо конечномерному евклидову пространству $\mathbb{F}^n$, либо гильбертову пространству $\boldsymbol{\ell}_2$ над полем $\mathbb{F}$.*

Доказательство. Построим в сепарабельном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{X}$ полную ортонормированную систему векторов. Пусть $\{x_i\} \subset \boldsymbol{X}$ — счетное и всюду плотное множество в $\boldsymbol{X}$. Удалив те вектора, которые линейно выражаются через предыдущие, мы можем считать, что система $\{x_i\}$ линейно независима. Применяя затем процесс ортогонализации Шмидта, мы получим ортонормированную систему $\{e_i\}$. Поскольку вектора x_i линейно выражаются через e_i , то из полноты системы $\{x_i\}$ вытекает полнота системы $\{e_i\}$. Возможны два случая: либо ортонормированная система содержит конечное число $n < \infty$ векторов, либо бесконечное $n = \infty$.

Поскольку система $\{e_i\}$ полна в $\boldsymbol{X}$, то по теореме Стеклова каждый вектор $x \in \boldsymbol{X}$ представляется суммой его ряда Фурье $x = \sum c_i e_i$, где $c_i = \langle x, e_i \rangle$. Определим отображение $F(x) \doteqdot c = \{c_i\}$ в пространство $\mathbb{F}^n$ или в $\boldsymbol{\ell}_2$. Так как для каждаго $x \in \boldsymbol{X}$ выполнено равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum |c_i|^2 = \|F(x)\|^2$, то это отображение изометрично. Покажем, что в случае $n = \infty$ образ этого отображения совпадает с $\boldsymbol{\ell}_2$. В случае $n < \infty$ аналогичное утверждение очевидно.

Пусть $c = \{c_i\} \in \boldsymbol{\ell}_2$. Докажем, что суммы $s_k = \sum_{i=1}^k c_i e_i$ сходятся в пространстве $\boldsymbol{X}$. В самом деле, из ортонормированности системы вытекает равенство $\|s_k - s_j\|^2 = \sum_{i=j+1}^k |c_i|^2$ при всех $j < k$. Так как по условию ряд $\sum_{i=1}^\infty |c_i|^2 < \infty$ сходится, то последовательность $\{s_k\}$ фундаментальна и в силу полноты $\boldsymbol{X}$ существует предел $\lim s_k = s \in \boldsymbol{X}$. Используя непрерывность скалярного произведения, получим, что коэффициенты Фурье вектора s равны $\langle s, e_i\rangle = \lim\langle s_k, e_i\rangle = c_i$. □

Для того чтобы уметь доказывать полноту ортонормированных систем в $\boldsymbol{L}_2(X)$, необходимо знать всюду плотные множества функций в этом пространстве. Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство счетно аддитивной меры μ. Предположим, что X является метрическим пространством с метрикой $\rho(x, y)$. Мера μ в пространстве (X, Σ, μ) называется *регулярной*, если для каждого измеримого множества $E \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$ найдутся такие открытые G и замкнутые F множества, что $F \subset E \subset G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Например, мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ является регулярной.

Теорема (1). *Если мера μ регулярна, то множество непрерывных функций $\boldsymbol{C}(X)$ всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X) = \boldsymbol{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ при $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Вначале покажем, что множество простых функций всюду плотно в $\boldsymbol{L}_p(X)$. Каждая функция $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ представляется в виде линейной комбинации неотрицательных функций из $\boldsymbol{L}_p(X)$. Поэтому необходимо доказать, что каждая неотрицательная функция $f \in \boldsymbol{L}_p(X)$ аппроксимируется простыми функциями. Построим монотонно возрастающую последовательность измеримых и неотрицательных простых функций $h_n \nearrow f$, сходящуюся на множестве E. Так как $h_n^p \leqslant f^p$, то функции $h_n \in \boldsymbol{L}_p(X)$. По теореме о монотонной сходимости получим $\lim \|f - h_n\| = 0$.

Каждая простая функция $h \in \boldsymbol{L}_p(X)$ представляется в виде линейной комбинации характеристических функций из $\boldsymbol{L}_p(X)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что каждая характеристическая функция $\chi_E \in \boldsymbol{L}_p(X)$ аппроксимируется непрерывными функциями. Выберем открытое G и замкнутое F множества так, чтобы $F \subseteq E \subseteq G$ и $\mu(G \setminus F) < \varepsilon^p$. Рассмотрим функцию

$$g(x) \doteq \rho(x, X \setminus G)/(\rho(x, X \setminus G) + \rho(x, F)),$$

где $\rho(x, M)$ есть расстояние от точки x до множества M. Применяя неравенство треугольника, получим, что $|\rho(x, M) - \rho(y, M)| \leqslant \rho(x, y)$ при всех $x, y \in X$. Поэтому функция $\rho(x, M)$ непрерывна в метрическом пространстве X. Отсюда функция $g(x)$ также непрерывна. При этом $g(x) = 1$, если $x \in F$, и $g(x) = 0$, если $x \notin G$. В остальных точках значение функции $g(x)$ заключено между 0 и 1. Следовательно, выполняется неравенство $\|\chi_E - g\| \leqslant \mu^{1/p}(G \setminus F) < \varepsilon$ и значит множество непрерывных функций $\boldsymbol{C}(X)$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_p(X)$. □

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. *Носителем* функции $f : X \to \mathbb{F}$ называется замыкание множества точек $x \in X$, в которых $f(x) \neq 0$. Если носитель является компактом в $\mathbb{R}^n$, то функция называется *финитной*. Если у функции существуют и непрерывны частные производные (любого порядка), то она называется *бесконечно дифференцируемой* или просто *гладкой*. Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{D}}(X)$ пространство всех гладких финитных функций на множестве X. Примером гладкой финитной функции служит *шапочка*

$$\varphi_\delta(x) \doteq \begin{cases} C_\delta\, e^{\frac{\delta^2}{\|x\|^2 - \delta^2}}, & \text{если} \quad \|x\| < \delta; \\ 0, & \text{если} \quad \|x\| \geqslant \delta; \end{cases} \qquad C_\delta^{-1} = \int_{\|x\| < \delta} e^{\frac{\delta^2}{\|x\|^2 - \delta^2}}\, dx.$$

где $\delta > 0$ и $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Совокупность функций $\{\varphi_\delta\}$ будем называть *аппроксимативной единицей.* Каждая функция φ_δ неотрицательна, имеет носитель в замкнутом шаре $S(\delta, 0)$ радиуса $\delta > 0$ и ее интеграл равен единице.

Теорема (2). *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Тогда множество гладких финитных функций $\boldsymbol{\mathcal{D}}(X)$ всюду плотно в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X)$ при $1 \leqslant p < \infty$.*

Доказательство. Также как при доказательстве теоремы (1) достаточно показать, что каждая характеристическая функция χ_E измеримого множества $E \subseteq X$ конечной меры аппроксимируется в $\boldsymbol{L}_p(X)$ гладкими финитными функциями. В силу регулярности меры Лебега для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое замкнутое и ограниченное подмножество $F \subset E$, что $\mu(E \setminus F) < (\varepsilon/2)^p$.

Обозначим через B_δ δ-окрестность множества F , то есть объединение открытых шаров $U(\delta, x)$ радиуса δ с центрами в точках $x \in F$. Так как F компактно, то число $\delta > 0$ можно считать настолько малым, чтобы $B_{2\delta} \subset X$. Рассмотрим функцию

$$g_\delta(x) \doteqdot \int_{B_\delta} \varphi_\delta(x - y)\, dy\, .$$

Если $x \in F$, то интеграл берется по шару $U(\delta, x)$ и в результате дает 1 . Если $x \notin B_{2\delta}$, то подынтегральная функция равна нулю на множестве B_δ и ее интеграл равен 0 . В остальных точках значение $g_\delta(x)$ заключено между нулем 0 и единицей 1 . Наконец, она финитна и значит принадлежит $\boldsymbol{\mathcal{D}}(X)$. Из свойства регулярности меры Лебега вытекает, что найдется такое $\delta > 0$, для которого $\mu(B_{2\delta} \setminus F) < (\varepsilon/2)^p$, и значит

$$\|\chi_E - g_\delta\| \leqslant \|\chi_E - \chi_F\| + \|\chi_F - g_\delta\| \leqslant \mu^{1/p}(E \setminus F) + \mu^{1/p}(B_{2\delta} \setminus F) < \varepsilon\, .$$

Таким образом, любая характеристическая функция χ_E аппроксимируется в $\boldsymbol{L}_p(X)$ гладкими финитными функциями. □

Пример. Пусть факторпространство $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ обозначает 1-мерный тор, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Функции $f(x)$, заданные на торе $\mathbb{T}$, мы будем рассматривать как 2π-периодические функции на всей прямой $\mathbb{R}$. При этом основной областью их определения можно считать полуинтервал $I = [0, 2\pi)$.

Обозначим через $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$ пространство 2π-периодических квадратично суммируемых функций в полуинтервале I относительно меры Лебега. В этом пространстве вводится скалярное произведение и норма по следующим формулам:

$$\langle f, g\rangle \doteqdot \int_I f(x)\overline{g(x)}\, dx\, , \quad \|f\| \doteqdot \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_I |f(x)|^2\, dx}\, .$$

Пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$ является гильбертовым пространством. Рассмотрим тригонометрическую систему функций $\{\varpi e^{\boldsymbol{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где $\varpi = 1/\sqrt{2\pi}$. Эта система ортонормирована и каждую функцию $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$ можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \varpi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{\boldsymbol{i}kx}\, , \quad c_k = \varpi \int_I f(x)\, e^{-\boldsymbol{i}kx}\, dx\, .$$

Пусть $\boldsymbol{C}(\mathbb{T})$ обозначает подпространство всех непрерывных 2π-периодических функций. По теореме Вейерштрасса каждую функцию из $\boldsymbol{C}(\mathbb{T})$ можно аппроксимировать (равномерно, а значит и в метрике $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$) тригонометрическим полиномом $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\, e^{\boldsymbol{i}kx}$. Поэтому совокупность всех тригонометрических полиномов образует всюду плотное множество в $\boldsymbol{C}(\mathbb{T})$. Так как по теореме 1 множество $\boldsymbol{C}(\mathbb{T})$ всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$, то тригонометрические полиномы всюду плотны в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$ и, следовательно, тригонометрическая система $\{\varpi e^{\boldsymbol{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ полна в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$. Таким образом, по теореме Стеклова ряд Фурье любой функции из $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$ сходится в метрике $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$.

13. Ряды Фурье и преобразование Фурье.

Ряды Фурье и преобразование Фурье представляет собой эффективный метод исследования в функциональном анализе. Особенно успешно этот метод применяется при решении дифференциальных уравнений с частными производными.

Рассмотрим вначале тригонометрические ряды Фурье функций многих переменных. Факторпространство $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ называется n-мерным тором. Далее функции $f(x)$, заданные на торе $\mathbb{T}^n$, будут рассматриваться как 2π-периодические функции на пространстве $\mathbb{R}^n$ по каждой переменной $x = (x_1, \ldots, x_n)$. При этом основной областью их определения можно считать n-мерный куб $I^n = [0, 2\pi)^n$.

Обозначим через $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$ пространство всех комплекснозначных 2π-периодических квадратично суммируемых функций в n-мерном кубе T^n относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$. Скалярное произведение и норма в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$ вводятся по формулам:

$$\langle f, g\rangle \doteqdot \int_{I^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx\,, \quad \|f\| \doteqdot \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_{I^n} |f(x)|^2\, dx}\,.$$

Пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$ является гильбертовым пространством. Рассмотрим в этом пространстве тригонометрическую систему функций $\{\varpi^n e^{\boldsymbol{i}\langle k,x\rangle}\}$, где $\varpi = 1/\sqrt{2\pi}$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $\langle k, x\rangle = \sum_{i=1}^n k_i x_i$. Эта система ортонормирована.

Т е о р е м а. *Каждую функцию $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$ можно разложить в ряд Фурье*

$$f(x) = \varpi^n \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\, e^{\boldsymbol{i}\langle k,x\rangle}\,, \quad c_k = \varpi^n \int_{I^n} f(x)\, e^{-\boldsymbol{i}\langle k,x\rangle}\, dx\,,$$

который сходится к функции f в метрике $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$.

Доказательство. Вначале докажем полноту тригонометрической системы в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Как нам известно из ортогонального разложения гильбертова пространства условие полноты равносильно тому, что ортогональное дополнение подпространства тригонометрических полиномов в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$ равно нулю.

Обозначим через $\boldsymbol{C}(\mathbb{T}^n)$ подпространство в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$ непрерывных 2π-периодических функций. Покажем по индукции, что если все коэффициенты Фурье некоторой функции $g \in \boldsymbol{C}(\mathbb{T}^n)$ равны нулю, то функция также равна нулю. Этим самым мы докажем полноту тригонометрической системы в подпространстве $\boldsymbol{C}(\mathbb{T}^n)$. При $n = 1$ это доказанно на предыдущей лекции. Предположим, что это утверждение уже доказано для всех размерностей меньше n. Для произвольных целых $k = (k', k_n) \in \mathbb{Z}^n$, где $k' = (k_1, \ldots, k_{n-1})$, рассмотрим функцию

$$g_{k'}(x_n) \doteqdot \int_I \ldots \int_I g(x_1, \ldots x_{n-1}, x_n)\, e^{-\boldsymbol{i}(k_1x_1+\ldots+k_{n-1}x_{n-1})}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\,.$$

одной переменной x_n. Это непрерывная 2π-периодическая функция и по условию все ее коэффициенты Фурье равны нулю

$$c_k = \varpi^n \int_{I^n} g(x)\, e^{-\boldsymbol{i}\langle k,x\rangle}\, dx = \varpi^n \int_I g_{k'}(x_n)\, e^{-\boldsymbol{i}\, k_n, x_n}\, dx_n = 0\,.$$

Поэтому в силу полноты тригонометрической системы при $n = 1$ она равна нулю. Отсюда по предположению индукции $g(x) \equiv 0$. Следовательно, тригонометрическая система полна в подпространстве $\boldsymbol{C}(\mathbb{T}^n)$, а так как это подпространство всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$, то тригонометрическая система полна в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$. Таким образом, по теореме Стеклова ряд Фурье функции $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$ сходится к f в метрике $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T}^n)$. □

Пусть $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ — пространство комплекснозначных функций, интегрируемых по Лебегу (суммируемых) в пространстве $\mathbb{R}^n$, и $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ обозначает скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение. Преобразованием Фурье суммируемой функции $f(x) \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ называются следующие функции:

- $\widehat{f}(x) \doteqdot \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} f(y)\,dy$;
- $\widetilde{f}(x) \doteqdot \widehat{f}(-x) = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} f(y)\,dy$.

где $\varpi \doteqdot 1/\sqrt{2\pi}$. Соответствующие операторы $\boldsymbol{\mathcal{F}} f \doteqdot \widehat{f}$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1} f \doteqdot \widetilde{f}$ называются *прямым* и *обратным* преобразованием Фурье.

Пусть $\boldsymbol{C}_0(\mathbb{R}^n)$ обозначает пространство равномерно непрерывных комплекснозначных функций $f(x)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющих предел на бесконечности равный нулю $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ и норму $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.

(1). Преобразование Фурье функции $f \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ является равномерно непрерывной функцией $\widehat{f} \in \boldsymbol{C}_0(\mathbb{R}^n)$, у которой предел на бесконечности равен нулю.

В самом деле, доказательство равномерной непрерывности функции $\widehat{f}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ вытекает из того, что $|e^{-\boldsymbol{i}\langle x+h,y\rangle} - e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}| = 2|\sin(\langle h,y\rangle/2)|$ и

$$|\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)| \leqslant 2\varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} |\sin(\langle h,y\rangle/2)\, f(y)|\,dy.$$

Применяя теорему Лебега о предельном переходе при $h \to 0$, мы получим, что функция $\widehat{f}(x)$ является равномерно непрерывной в $\mathbb{R}^n$.

Пусть функция $g \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ гладкая и имеет компактный носитель. Тогда, интегрируя по частям, мы получим равенство $(\boldsymbol{i}\,x_j)^k \widehat{g}(x) = \widehat{D_j^k g}(x)$. Отсюда следует, что функция $\widehat{g}(x)$ стремится к нулю на бесконечности быстрее любой степени $1/\|x\|^r$. Поскольку каждую функцию $f \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ можно аппроксимировать гладкой функцией $g \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ в метрике пространства $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ и

$$|\widehat{f}(x)| \leqslant |\widehat{f-g}(x)| + |\widehat{g}(x)| \leqslant \varpi^n \|f-g\| + |\widehat{g}(x)|,$$

то предел $\lim_{x\to\infty} \widehat{f}(x) = 0$ будет равен нулю.

(2). Формула сдвига и растяжения. Рассмотрим оператор сдвига $\tau_h f(x) \doteqdot f(x+h)$ на вектор $h \in \mathbb{R}^n$ и оператор растяжения $\rho_\lambda f(x) \doteqdot f(\lambda x)$ на число $\lambda \neq 0$ функции $f \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедливы формулы

$$\widehat{\tau_h f}(x) = e^{\boldsymbol{i}\langle h,x\rangle} \widehat{f}(x), \quad \widehat{\rho_\lambda f}(x) = |\lambda|^{-n} \widehat{f}(x/\lambda).$$

Эти формулы получаются при помощи замены переменных $z = y + h$ и $z = \lambda y$ в кратном интеграле Лебега и свойства линейности интеграла Лебега.

(3). Формула умножения. Если функции $f, g \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ суммируемы, то имеет место равенство $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx$.

Действительно, применяя теорему Фубини, получим следующие равенства

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x)\,dx = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} \{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} f(y)\,dt\} g(x)\,dx =$$

$$= \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} \{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} g(x)\,dx\} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)\,dy.$$

(4). Формула свертки. Пусть $f * g(x) \doteqdot \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z) g(z)\,dz$ есть свертка двух функций $f, g \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f * g \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ и при всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $\varpi^n \widehat{f * g}(x) = \widehat{f}(x)\,\widehat{g}(x)$.

Пользуясь теоремой Фубини и инвариантностью интеграла Лебега по всему пространству $\mathbb{R}^n$ при сдвиге функции $f(x) \to f(x-y)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z)|\, dx\, |g(z)|\, dz = \|f\|\,\|g\| .$$

Следовательно, $f * g \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$. Аналогично доказывается второе утверждение. Для этого достаточно сделать перестановку интегралов и воспользоваться инвариантностью интеграла Лебега относительно сдвига

$$\varpi^n \widehat{f * g}(x) = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \{\varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z) g(z)\, dz\}\, dy =$$
$$= \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} \{\varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y-z\rangle} f(y-z)\, dy\} e^{-\boldsymbol{i}\langle x,z\rangle} g(z)\, dz = \widehat{f}(x) \cdot \widehat{g}(x) .$$

Далее через $\boldsymbol{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ обозначается класс функций, у которых существуют и непрерывны все частные производные $D^\alpha f(x)$ порядка не выше $|\alpha| \leqslant k$ и имеющие предел на бесконечности $\lim_{x\to\infty} D^\alpha f(x) = 0$ равный нулю, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ есть мультииндекс порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ и

$$D^\alpha f(x) \doteqdot \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x) , \quad D^\alpha \doteqdot D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} , \quad D_j \doteqdot \frac{\partial}{\partial x_j} .$$

Сходимость в пространстве $\boldsymbol{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ определяется следующей нормой

$$\|f\| \doteqdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| + \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)| .$$

Заметим, что если функция $(1+\|x\|) f(x) \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$, то существуют и непрерывны первые производные преобразования Фурье

$$D_j \widehat{f}(x) = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} (-\boldsymbol{i}\, y_j) e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} f(y)\, dy = \widehat{-\boldsymbol{i}\, y_j f}(x) ,$$

поскольку функция $y_j f(y) \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ при всех $j = 1, \ldots, n$. Отсюда по свойству (1) $\widehat{f} \in \boldsymbol{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$. Аналогично, если при некотором k функция $(1+\|x\|)^k f(x) \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$, то преобразование Фурье $\widehat{f}$ принадлежит классу $\boldsymbol{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ и его производные вычисляются по формуле $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-\boldsymbol{i}\, y)^\alpha f}$ при всех $|\alpha| \leqslant k$, где $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n}$.

Пример. Найдем преобразование Фурье функции $\mu(x) = e^{-\|x\|^2/2}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, где $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Вначале рассмотрим случай $n = 1$, тогда функция $y = e^{-x^2/2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' + xy = 0$ и $y(0) = 1$. Вычисляя производную преобразования Фурье $z = \widehat{y}(x)$ и интегрируя затем по частям, мы получим равенство

$$z' = -\boldsymbol{i}\, \varpi \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{-\boldsymbol{i}\, xy} e^{-y^2/2}\, dy = -x\varpi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\boldsymbol{i}\, xy} e^{-y^2/2} dy = -xz .$$

Следовательно, функция z также удовлетворяет дифференциальному уравнению $z' + xz = 0$ и $z(0) = \varpi \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = 1$. В силу единственности решения задачи Коши имеет место равенство $z(x) = y(x) = e^{-x^2/2}$. В общем случае, $\mu(x) = \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, поэтому по теореме Фубини

$$\widehat{\mu}(x) = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \mu(y)\, dy = \prod_{j=1}^n \varpi \int_{\mathbb{R}} e^{-\boldsymbol{i}\, x_j y_j - y_j^2/2}\, dy_j = \prod_{j=1}^n e^{-x_j^2/2} = \mu(x) .$$

Таким образом, преобразование Фурье функции $\mu(x)$ совпадает с ней самой.

Ранее определение прямого и обратного преобразования Фурье было чисто формальным. В связи с этим обсудим проблему обращения преобразования Фурье. Рассмотрим следующий вопрос: дано преобразование Фурье $\widehat{f}$ некоторой функции $f \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$, тогда как восстановить функцию f по функции $\widehat{f}$? Решение этой задачи сводится к вопросу существования *интеграла Фурье*

$$F(x) \doteqdot \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\, \boldsymbol{\mathcal{F}}\, f(x) = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \widehat{f}(y)\, dy$$

и его равенства исходной функции $f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^n$. Для существования интеграла Фурье очевидно достаточно потребовать, чтобы функции $f\,, \widehat{f} \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$.

Т е о р е м а (формула обращения). *Пусть функция $f \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ и ее преобразование Фурье $\widehat{f} \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ суммируемы по Лебегу в $\mathbb{R}^n$. Тогда интеграл Фурье $F(x) \doteqdot \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\, \boldsymbol{\mathcal{F}}\, f(x)$ равен функции $F(x) = f(x)$ при п.в. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть функция $K_\lambda(x) \doteqdot (\varpi/\lambda)^n \mu(x/\lambda) = (\varpi/\lambda)^n e^{-\|x\|^2/2\lambda^2}$. Она называется *ядром Вейерштрасса.* Применяя далее формулы умножения, растяжения и свертки преобразования Фурье, при всех $\lambda > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$ мы получим

$$\varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} \mu(\lambda y)\, e^{\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle} \widehat{f}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x-z)\, f(z)\, dz = K_\lambda * f(x)\,.$$

По теореме Лебега левая часть этого равенства для всех $x \in \mathbb{R}^n$ сходится при $\lambda \to 0$ к интегралу Фурье $F(x) = \boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}\, \boldsymbol{\mathcal{F}}\, f(x)$. Докажем, что правая часть сходится к функции f в метрике $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$. Для этого заметим, что интеграл ядра равен единице

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} K_1(x)\, dx = \prod_{j=1}^n \varpi \int_{\mathbb{R}} e^{-\boldsymbol{i}\, x_j^2/2}\, dx_j = 1$$

и, кроме того, имеет место следующее тождество

$$K_\lambda * f(x) - f(x) = K_\lambda * (f-g)(x) + K_\lambda * g(x) - g(x) + g(x) - f(x)\,.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $g \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$, что $\|f-g\| < \varepsilon/3$. Переставляя далее интегралы при помощи теоремы Фубини, получим, что

$$\|K_\lambda * (f-g)\| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(z) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z) - g(x-z)|\, dx\, dz < \varepsilon/3\,.$$

Так как функция $g(x)$ гладкая, то по формуле Тейлора с интегральным остатком

$$g(x-z) - g(x) = \int_0^1 \tfrac{d}{dt} g(x-tz)\, dt = -\sum_{j=1}^n z_j \int_0^1 D_j g(x-tz) dt = O(\|z\|)\,.$$

Эта оценка получается применением к сумме неравенства Коши-Буняковского, при этом учитывается, что функция $g(x)$ имеет компактный носитель и, следовательно, ее частные производные первого порядка равномерно ограничены. Отсюда найдется такое $C > 0$, что справедливо неравенство

$$\|g(x-z) - g(x)\| = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-z) - g(x)|\, dx \leqslant C\|z\|\,.$$

Далее переставляя интегралы при помощи теоремы Фубини и производя замену переменных $z = \lambda t$ по переменной z, мы имеем

$$\|K_\lambda * g - g\| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t) \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-\lambda t) - g(x)|\, dx\, dt \leqslant \lambda\, C \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t) \|t\|\, dt\,.$$

Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\delta\, C \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t)\|t\|\, dt < \varepsilon/3$. Тогда при всех $0 < \lambda < \delta$ мы получим неравенство

$$\|K_\lambda * f - f\| \leqslant \|K_\lambda * (f-g)\| + \|K_\lambda * g - g\| + \|g - f\| < \varepsilon\,.$$

Таким образом, $K_\lambda * f \to f$ сходится при $\lambda \to 0$ в метрике $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$. Как нам известно (см. доказательство полноты пространства $\boldsymbol{L}_p$), для каждой сходящейся в $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ последовательности функций существует подпоследовательность, которая сходится при п.в. $x \in \mathbb{R}^n$. Значит имеет место равенство $F(x) = f(x)$ для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$. □

14. Преобразование Фурье в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$.

Ранее мы определили преобразование Фурье для функций из пространства $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$. Интеграл, определяющий преобразование Фурье

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}\, f(x) = \widehat{f}(x) = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}\, dx\,,$$

где $\varpi = 1/\sqrt{2\pi}$, в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ в общем случае не существует. Поэтому неудивительно, что для нахождения преобразования Фурье применяют какой-нибудь метод определения этого несобственного интеграла. Например, в смысле главного значения по Коши. Однако имеется естественное определение и особенно элегантная теория для преобразований Фурье в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$.

Ясно, что преобразование Фурье определено на подпространстве $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Так как это подпространство содержит $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$, то оно всюду плотно в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому для того чтобы определить преобразование Фурье, достаточно применить теорему продолжения по непрерывности, согласно которой оператор Фурье имеет единственное продолжение на все пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Для обоснования этого пути далее будут доказаны несколько утверждений.

Лемма. Если функция $f \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ непрерывна в нуле и ее преобразование Фурье неотрицательно $\widehat{f}(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $f(0) = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\, dx$.

Доказательство. Применяя теорему Лебега, формулы умножения и растяжения преобразования Фурье, а также известное нам свойство $\widehat{\mu}(x) = \mu(x)$ преобразования Фурье функции $\mu(x) = e^{-\|x\|^2/2}$, мы получим равенство

$$\varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\, dx = \lim\nolimits_{\lambda\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varpi^n \mu(\lambda x)\widehat{f}(x)\, dx = \lim\nolimits_{\lambda\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x) f(x)\, dx\,.$$

где $K_\lambda(x) \doteqdot (\varpi/\lambda)^n \mu(x/\lambda)$ есть ядро Вейерштрасса. Покажем, что правая часть этого равенства имеет предел $f(0)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем величину $\delta > 0$ так, чтобы при всех $\|x\| < \delta$ выполнялось неравенство $|f(x) - f(0)| < \varepsilon/3$. Тогда

$$\int_{\|x\|<\delta} K_\lambda(x)|f(x) - f(0)|\, dx < \varepsilon/3 \int_{\|x\|<\delta} K_\lambda(x)\, dx < \varepsilon/3\,,$$

поскольку интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x)\, dx = 1$. Учитывая, что предел равен $\lim_{\lambda\to 0} K_\lambda(x) = 0$, определим величину $r > 0$ настолько малой, чтобы выполнялись неравенства

$$K_r(\delta) \int_{\|x\|\geqslant\delta} |f(x)|\, dx < \varepsilon/3\,, \quad |f(0)| \int_{\|x\|\geqslant\delta} K_r(x)\, dx < \varepsilon/3\,.$$

Отсюда, так как функция $K_\lambda(\delta)$ возрастает по $\lambda > 0$, то при всех $0 < \lambda < r$

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x) f(x)\, dx - f(0)\Big| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x)|f(x) - f(0)|\, dx = \\
&\qquad = \int_{\|x\|<\delta} K_\lambda(x)|f(x) - f(0)|\, dx + \int_{\|x\|\geqslant\delta} K_\lambda(x)|f(x) - f(0)|\, dx < \\
&\qquad\qquad < \varepsilon/3 + K_r(\delta) \int_{\|x\|\geqslant\delta} |f(x)|\, dx + |f(0)| \int_{\|x\|\geqslant\delta} K_r(x)\, dx < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, предел будет равен $\lim_{\lambda\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(x) f(x)\, dx = f(0)$. □

Теорема (равенство Парсеваля). Для всех $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx\,.$$

Доказательство. Пусть вначале функция $f \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Определим функцию $f_1(x) \doteqdot \overline{f(-x)}$ и найдем ее преобразование Фурье $\widehat{f}_1(x) = \overline{\widehat{f}}(x)$. Отсюда преобразование Фурье свертки $h = f * f_1$ будет равно $\widehat{h}(x) = \varpi^{-n}|\widehat{f}(x)|^2$.

Покажем, что функция h непрерывна в нуле. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем гладкую функцию $g \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $\|f - g\| < \varepsilon$. Так как функция g равномерно непрерывна и имеет компактный носитель, то найдется такое $\delta > 0$, что при всех $\|x\| < \delta$ выполняется неравенство $\|g(.+x) - g(.)\| < \varepsilon$. Применяя неравенство треугольника и используя инвариантность нормы относительно сдвига, мы имеем

$$\|f(.+x) - f(.)\| \leqslant \|f(.+x) - g(.+x)\| + \|g(.+x) - g(.)\| + \|g(.) - g(.)\| < 3\varepsilon\,.$$

при всех $\|x\| < \delta$. Следовательно, в силу неравенства Коши-Буняковского, при всех $\|x\| < \delta$ выполняется неравенство

$$|h(x) - h(0)| = |\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,\{\overline{f(t-x)} - \overline{f(t)}\}\,dt| \leqslant \|f\|\,\|f(.+x) - f(.)\| < 3\varepsilon\|f\|\,.$$

Отсюда следует непрерывность функции h в нуле. Таким образом, по лемме

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2\,dx = \varpi^n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x)\,dx = h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx\,.$$

Чтобы доказать эту формулу для всех функций $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$, достаточно подобрать такую последовательность функций $\{f_n\}$ из подпространства $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n) \cap \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ (в силу его плотности в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$), которая сходится к $\lim f_n = f$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда, используя непрерывность нормы, получим $\lim\|f_n\| = \|f\|$. Осталось перейти к пределу в уже доказанном равенстве $\|\widehat{f}_n\|^2 = \|f_n\|^2$. □

Заметим, что можно определить преобразование Фурье для функций $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$, рассматривая несобственный интеграл Лебега в $\mathbb{R}^n$ в смысле главного значения по Коши. Для этого определим срезки функций $f_r = \chi_{S_r} f \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$, где χ_{S_r} — характеристическая функция шара $S_r \subset \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в нуле. По теореме Лебега эти срезки сходятся к функции f при $r \to \infty$ в метрике пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому преобразование Фурье $\widehat{f}$ в силу равенства Парсеваля является пределом в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ последовательности функций (преобразований Фурье срезок)

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}\,f_r = \widehat{f}_r(x) = \varpi^n \int_{\|y\| \leqslant r} f(y)\,e^{-\boldsymbol{i}\langle x,y\rangle}\,dy\,.$$

Таким образом, по норме пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ мы имеем $\lim_{r\to\infty}\|\widehat{f} - \widehat{f}_r\| = 0$.

Т е о р е м а (формула умножения). *Если $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$, то имеет место равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\,g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\widehat{g}\,dx\,.$$

Доказательство. Если функции $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ суммируемы, то их срезки будут также суммируемы $f_r\,, g_r \in \boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$. Применяя формулу умножения в $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$ и непрерывность скалярного произведения, для всех функций $f, g \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ мы получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\,g\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}_r\,g_r\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_r\,\widehat{g}_r\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\widehat{g}\,dx\,.$$

Таким образом, формула умножения в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ доказана. □

Пусть $A : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ — есть линейный оператор в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{X}$. Оператор A называется *изометричным*, если $\|Ax\| = \|x\|$ при всех $x \in \boldsymbol{X}$. Каждый изометричный оператор удовлетворяет равенству $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ при всех $x, y \in \boldsymbol{X}$. Для доказательства достаточно использовать следующее тождество

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \boldsymbol{i}(\|x+\boldsymbol{i}\,y\|^2 - \|x-\boldsymbol{i}\,y\|^2) = 4\langle f,g\rangle$$

в произвольном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{X}$. Если положить здесь Ax и Ay вместо x и y соответственно, а затем использовать изометричность оператора A, то мы получим равенство $4\langle Ax,Ay\rangle = 4\langle x,y\rangle$ для всех $x,y\in\boldsymbol{X}$.

Определение. Линейный оператор $A:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{X}$ называется *унитарным*, если он изометричен и его образ

$$\operatorname{Im}A \doteqdot \{y\in\boldsymbol{X}\,|\,y = Ax, x\in\boldsymbol{X}\} = \boldsymbol{X}$$

совпадает с гильбертовым пространством $\boldsymbol{X}$.

Теорема (Планшерель). Оператор Фурье $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, определенный на подпространстве $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)\cap\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ гильбертова пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$, продолжается (единственным образом) до унитарного оператора в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $\langle f,g\rangle \doteqdot \int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g}\,dx$. Доказанное выше равенство Парсеваля показывает, что преобразование Фурье есть изометричный оператор, определенный на всюду плотном подпространстве $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)\cap\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. По теореме о продолжении ограниченного оператора по непрерывности существует единственное изометричное продолжение оператора Фурье $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ на все пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ (см. конец доказательства равенства Парсеваля). Это продолжение мы также обозначаем через $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Докажем, что образ $\operatorname{Im}\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. В силу изометричности оператора Фурье образ $\operatorname{Im}\boldsymbol{\mathcal{F}}$ является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому, если $\operatorname{Im}\boldsymbol{\mathcal{F}}\neq\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$, то существует такая функция $g\in\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$, что $\langle\widehat{f},g\rangle = 0$ для всех $f\in\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. По формуле умножения $\langle\widehat{f},g\rangle = \langle f,\widehat{g}\rangle = 0$ при всех $f\in\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Отсюда получим $\|\widehat{g}\| = \|g\| = 0$ и, следовательно, $g = 0$. Таким образом, образ оператора Фурье совпадает с $\operatorname{Im}\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ и теорема доказана. $\square$

Замечание. Преобразование Фурье можно легко распространить на класс функций $f\in\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)+\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$, полагая $\boldsymbol{\mathcal{F}}f \doteqdot \boldsymbol{\mathcal{F}}f_1 + \boldsymbol{\mathcal{F}}f_2$, если $f = f_1+f_2$, $f_1\in\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$, $f_2\in\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. В частности, это позволяет нам определить преобразование Фурье для всех функций из пространства $f\in\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^n)$ в случае $1<p<2$, взяв в качестве функций $f_1\doteqdot\chi_{E_1}f$ и $f_2\doteqdot\chi_{E_2}f$, где

$$E_1 = \{x\in\mathbb{R}^n \,|\, |f(x)|>1\}\,, \quad E_2 = \{x\in\mathbb{R}^n \,|\, |f(x)|\leqslant 1\}\,.$$

Поскольку имеют место неравенства

$$\int_{E_1}|f(x)|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx < \infty\,, \quad \int_{E_2}|f(x)|^2\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx < \infty\,,$$

то функция $f_1\in\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R}^n)$, а функция $f_2\in\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$.

Пример. Полиномы Эрмита. Теорема Планшереля устанавливает, что оператор Фурье изометричен и отображает пространство $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ на себя. Если в этом пространстве выбрать какую-нибудь полную ортонормированную систему (т.е. ортонормированный базис), то оператор Фурье можно записать с помощью бесконечной ортогональной матрицы. Вид этой матрицы зависит, конечно, от выбора базиса. Оказывается, существует такой ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, который состоит из собственных функций оператора Фурье. Рассмотрим функции

$$h_n(x) \doteqdot c_n e^{x^2/2}\tfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = H_n(x)\,e^{-x^2/2}\,, \quad H_n(x) = c_n(-2x)^n + \ldots,$$

которые образуют *систему функций Эрмита*, а полиномы $H_n(x)$ — *систему полиномов Эрмита.* Интегрируя по частям, имеем при $m > n$

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\, h_m(x)\, dx = c_n \int_{\mathbb{R}} H_n(x) \tfrac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}\, dx = (-1)^n c_n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \tfrac{d^m}{dx^m} H_n(x)\, dx = 0\,.$$

В случае $n = m$, используя известный интеграл $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, мы получим

$$\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x)\, dx = c_n (-1)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \tfrac{d^n}{dx^n} H_n(x)\, dx = c_n^2 2^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = c_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}\,.$$

Таким образом, если $c_n = 1/\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}$, то система функций Эрмита является ортонормированной. Докажем полноту. Предположим, что существует функция $f \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ ортогональная всем функциям системы Эрмита. Рассмотрим следующую целую функцию в комплексной плоскости

$$F(z) \doteqdot \varpi \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} f(x)\, e^{-\boldsymbol{i} xz}\, dx\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Так как линейная оболочка системы функций Эрмита совпадает с линейной оболочкой функций $x^n e^{-x^2/2}$, то все производные в нуле функции $F(z)$ равны нулю

$$F^{(k)}(0) = \varpi \int_{\mathbb{R}} (-\boldsymbol{i}\, x)^k e^{-x^2/2} f(x)\, dx = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Поэтому функция $F(z) \equiv 0$ равна нулю. Поскольку F является преобразованием Фурье функции $e^{-x^2/2} f(x) \in \boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$, то в силу равенства Парсеваля $f(x) = 0$ п.в. в $\mathbb{R}$. Таким образом, система функций Эрмита полна в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$.

Теорема. *Ортонормированная система $\{h_n\}$ функций Эрмита образует полную систему собственных функций преобразования Фурье $\boldsymbol{\mathcal{F}} h_n = \lambda_n h_n$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$ с собственными значениями $\lambda_n = \pm 1, \pm \boldsymbol{i}$.*

Доказательство. Простыми вычислениями нетрудно доказать, что функция $y = h_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - x^2 y = -(2n+1)y$. Если сюда подставить функцию $y = P(x)\, e^{-x^2/2}$, где $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-} + \ldots + a_0$ есть полином степени n, то, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим $-2na_n = -2na_n$ и $-2(n-1)a_{n-1} = -2na_{n-1}$, а при всех $k = 0, 1, \ldots n-2$ будет справедливо равенство $(k+2)(k+1)a_{k+2} = (2k-2)a_k$. Таким образом, если задан ненулевой коэффициент $a_n \in \mathbb{R}$ и $a_{n-1} = 0$, то все остальные коэффициенты полинома $P(x)$ определяются однозначно. Поэтому дифференциальное уравнение с точностью до множителя имеет единственное решение указанного вида. Обозначим это решение через y_n. Так как $e^{-x^2/2} = \widehat{e^{-x^2/2}}$, то $(\boldsymbol{i}\, \frac{d}{dx})^n e^{-x^2/2} = \widehat{x^n e^{-x^2/2}}$. Поэтому преобразование Фурье $\widehat{y_n}$ имеет тот же вид и удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению $\widehat{y_n}'' - x^2 \widehat{y_n} = -(2n+1)\widehat{y_n}$. Следовательно, функция $\widehat{y_n}$ с точностью до множителя совпадает с функцией y_n.

Покажем, что система функций $\{y_n\}$ является ортогональной. В самом деле, домножив уравнение для y_n на y_m и уравнение для y_m на y_n, а затем вычитая из одного равенства другое, мы получим, что $y_n'' y_m - y_m'' y_n = -2(n-m) y_n y_m$. Отсюда $(y_n' y_m - y_m' y_n)' = -2(n-m) y_n y_m$. Теперь проинтегрировав по $\mathbb{R}$ последее равенство, мы найдем, что $\int_{\mathbb{R}} y_n y_m\, dx = 0$ при $n \neq m$. Как нам известно из процесса ортогонализации Шмидта существует только одна ортонормированная система функций, получающаяся из системы функций $\{x^n e^{-x^2/2}\}$. Поэтому функции Эрмита с указанным выше старшим коэффициентом являются единственным решением дифференциального уравнения. Так как $\boldsymbol{\mathcal{F}} h_n = \lambda_n h_n$ и $\boldsymbol{\mathcal{F}}^4$ есть тождественный оператор, то $\lambda_n^4 = 1$. Решением последнего уравнения являются числа $\lambda_n = \pm 1, \pm \boldsymbol{i}$. □

15. Список вопросов к экзамену.

1. Мера множеств. Продолжение меры на минимальное кольцо.
2. Свойства меры. Счетная аддитивность меры Стилтьеса в $\mathbb{R}$.
3. Теорема Каратеодори о внешней мере.
4. Продолжение меры по Лебегу.
5. Продолжение меры по Жордану.
6. Интеграл по мере (от ограниченных функций по множеству конечной меры).
7. Критерий измеримости функции. Свойства измеримых функций.
8. Сходимость почти всюду и почти равномерно. Теорема Егорова.
9. Эквивалентность двух определений интеграла Лебега. Теорема о счетной аддитивности интеграла Лебега.
10. Теорема монотонной сходимости. Свойство линейности интеграла Лебега.
11. Лемма Фату. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
12. Произведение мер.
13. Теорема Фубини.
14. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Критерий измеримости множеств в $\mathbb{R}^n$.
15. Критерий интегрируемости функций по Риману в $\mathbb{R}^n$.
16. Банаховы пространства. Примеры. Изоморфизм конечномерных пространств.
17. Пространство ограниченных операторов. Теорема о полноте.
18. Принцип продолжения по непрерывности ограниченного оператора.
19. Теорема Хана-Банаха (действительный и комплексный случай).
20. Теорема двойственности. Примеры сопряженных пространств.
21. Неравенства Гельдера и Минковского. Обобщенное неравенство Минковского.
22. Пространство $\boldsymbol{L}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Теорема о полноте.
23. Теоремы существования и единственности наилучшего приближения.
24. Теорема Чебышева. Полиномы Чебышева наименее уклоняющиеся от нуля.
25. Гильбертовы пространства. Примеры. Неравенства Коши-Буняковского и Беппо-Леви.
26. Теорема о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве и ее следствия.
27. Теорема Рисса о представлении функционалов в гильбертовом пространстве.
28. Полные ортонормированные системы. Примеры. Теорема Стеклова.
29. Теорема об изометричности сепарабельных гильбертовых пространств.
30. Плотность множества $\boldsymbol{\mathcal{D}}(X)$ гладких функций с компактным носителем в пространстве $\boldsymbol{L}_p(X)$, $1 \leqslant p < \infty$, где $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество.
31. Преобразование Фурье в $\boldsymbol{L}_\mathbf{1}(\mathbb{R}^n)$. Формулы сдвига, растяжения, умножения и свертки.
32. Преобразование Фурье функции $e^{-\|x\|^2/2}$. Формула обращения преобразования Фурье в $\boldsymbol{L}_\mathbf{1}(\mathbb{R}^n)$.
33. Преобразование Фурье в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Равенство Парсеваля.
34. Формула умножения преобразования Фурье в $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Теорема Планшереля.

Дополнительная литература.

[1]. Колмогоров А.Н. и Фомин С.В. "Элементы теории функций и функционального анализа". [2]. Дьяченко М.И. и Ульянов П.Л. "Действительный анализ". [3]. Люстерник Л.А. и Соболев В.И. "Элементы функционального анализа". [4]. Рид М. и Саймон Б. "Методы современной математической физики" т.1. [5] Федоров В.М. "Теория функций и функциональный анализ" т.I,II.

16. Контрольные работы.

(1). Контрольная работа I.

1. Пусть $\mathbb{Q} = \{q_n\}$ — множество рациональных чисел и заданы интервалы $A_n = (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)$. Найти меру множества точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_n.

2. Найти меру множества чисел $x \in [0,1]$, у которых в десятичном разложении цифра 2 встречается раньше, чем цифра 3.

3. Найти меру множества точек $(x,y) \in [0,1]^2$, удовлетворяющих следующим двум условиям: 1) $\sin(x-y) < 1/2$; 2) $\cos(x+y)$ иррационально.

4. Пусть функция $f(x)$ измерима на отрезке $[-1,1]$. Доказать, что функция $g(x) = f(\sin x)$ будет также измеримой.

5. Доказать, что функция $f(x) = \frac{\operatorname{sign}\sin \pi x}{x^2}$ интегрируема по Лебегу на интервале $[1,\infty)$ и найти ее интеграл.

6. Доказать, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{|1-nx|}}$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0,1]$.

(2). Контрольная работа II.

7. Вычислить норму линейного функционала $\alpha(f)$ в пространстве $\boldsymbol{C}([0,\pi]$,

$$\alpha(f) = \int_0^\pi f(x)\,dg(x)\,, \quad g(x) = \begin{cases} \sin x\,, & \text{если} \quad 0 \leqslant x < \pi/2 \\ 0\,, & \text{если} \quad x = \pi/2\,; \\ \cos x\,, & \text{если} \quad \pi/2 < x \leqslant \pi\,. \end{cases}$$

8. Продолжить линейный функционал $\alpha(P)$ с сохранением нормы в пространстве $\boldsymbol{C}([-1,1])$, заданный следующей формулой

$$\alpha(P) = P'(-1) + P(0)\,, \quad P(x) = ax^2 + bx + c\,.$$

9. Вычислить полином $P(x) = ax+b$ наилучшего приближения для функции $f(x) = \sqrt{x}$ в метрике пространства $\boldsymbol{C}([0,1])$.

10. Найти наилучшее приближение функции $f(x) = \sin x$ элементами подпространства M в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2([0,2\pi])$,

$$M = \{g \in \boldsymbol{L}_2([0,2\pi]) |\ \int_0^\pi g(x)\,dx = 0\}\,.$$

11. Найти норму линейного функционала $\alpha(f)$ в пространстве $\boldsymbol{L_1}(\mathbb{R})$,

$$\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} f(x)\,dx\,.$$

12. Вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

17. Упражнения и задачи.

1. Доказать, что система всех ограниченных множеств в $\mathbb{R}$ является кольцом, но не является алгеброй и σ-кольцом.

2. Пусть $\mathcal{T}$ — система всех открытых множеств в $\mathbb{R}$, а $\mathfrak{S}$ — система всех промежутков в $\mathbb{R}$ (отрезки, интервалы, полуинтервалы). Доказать, что наименьшие σ-алгебры $R_\sigma(\mathcal{T})$ и $R_\sigma(\mathfrak{S})$, содержащие эти системы множеств, совпадают.

3. Пусть $A_n = \{k/n |\, k \in \mathbb{Z}\}$ — множество всех рациональных чисел со знаменателем i. Найти *верхний и нижний пределы* последовательности множеств A_n, т.е.

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{i=k}^\infty A_i\,, \quad \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{i=k}^\infty A_i\,.$$

4. Пусть полуалгебра $\mathfrak{S}$ состоит из трех непересекающихся множеств A, B, C, пространства $X = A \sqcup B \sqcup C$ и пустого множества $\emptyset$. Функция φ равна

$$\varphi(A) = \varphi(B) = \varphi(C) = \varphi(X) = 1\,, \quad \varphi(\emptyset) = 0\,.$$

Доказать, что φ аддитивна на $\mathfrak{S}$, но не является конечно аддитивной.

5. Доказать, что линейная мера $m(\langle a,b\rangle) = b - a$, определенная на полукольце $\mathfrak{S}$ всех промежутков $\langle a,b\rangle$ в $\mathbb{R}$ (отрезки, интервалы, полуинтервалы), является счетно аддитивной.

6. Доказать, что множество $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, состоящее из всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$, измеримо по Лебегу, но неизмеримо по Жордану.

7. Доказать, что открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}$ измеримы.

8. Наименьшая σ-алгебра $R_\sigma(\mathcal{T})$, содержащая систему $\mathcal{T}$ всех открытых множеств в $\mathbb{R}$, называется *борелевской*. Доказать, что борелевские множества в $\mathbb{R}$ измеримы.

9. Доказать, что наименьшая σ-алгебра в $\mathbb{R}$, содержащая все интервалы и множества меры нуль, совпадает с σ-алгеброй всех измеримых множеств по Лебегу.

10. Доказать, что множество точек отрезка $[0,1]$, у которых в десятичном разложении отсутствует цифра 7, измеримо и имеет меру нуль.

11. Пусть $x \in [0,1)$ и $x = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i/3^i$ есть троичное представление числа x, где $\alpha_i = 0,1,2$. Множество C чисел $x \in [0,1]$, у которых все $\alpha_i \neq 1$, называется *канторовым множеством.* Доказать, что C замкнуто, нигде не плотно, имеет мощность континуума и меру нуль.

Обозначим через $n(x)$ наименьший индекс i, для которого $\alpha_i = 1$. Если такого индекса нет, то полагаем $n(x) = \infty$. Тогда функция $c(x)$ на отрезке $[0,1]$, определенная по формуле

$$c(x) \doteqdot \sum_{i=1}^{n(x)-1} \alpha_i/2^{i+1} + 1/2^{n(x)}\,, \quad c(1) = 1\,,$$

называется *канторовой функцией.* Доказать, что $c(x)$ непрерывна, имеет производную п.в. равную нулю, но не является неопределенным интегралом.

12. Разобъем отрезок $[0,1]$ на непересекающиеся множества следующим отношением эквивалентности: $x \sim y$, если число $x - y \in \mathbb{Q}$ рационально. Выберем из каждого такого множества по одной точке и обозначим полученное множество через E. Доказать, что E неизмеримо по Лебегу.

13. Доказать, что на отрезке $[0,1]$ существует такое множество E меры нуль, что образ $f(E)$, где $f(x) = x + c(x)$, является неизмеримым. Вывести отсюда, что E измеримо, но не является борелевым множеством.

14. Доказать, что при линейном преобразовании $\mathbb{R}^2$ измеримые множества отображаются в измеримые.

15. Построить на плоскости такое измеримое множество, проекции которого на обе координатные оси неизмеримы.

16. Показать, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима, если при п.в. $c \in \mathbb{R}$ множество $E(f < c)$ измеримо.

17. Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ определена на измеримом множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и непрерывна. Доказать, что функция f измерима.

18. Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет множество точек разрыва меры нуль, то она измерима.

19. Пусть функции f и g измеримы, причем $f(x) > 0$. Доказать, что степень $h(x) = f(x)^{g(x)}$ измерима.

20. Пусть функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ определена на множестве точек сходимости этого ряда. Доказать, что она измерима.

21. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Доказать измеримость множества тех точек x, в которых существует производная $f'(x)$.

22. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной* сверху (снизу), если

$$\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,, \quad (\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) = f(x_0))\,,$$

при всех $x_0 \in [a,b]$. Доказать, что полунепрерывные функции измеримы.

23. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима. Доказать, что функция двух переменных $g(x,y) = f(x+y)$ измерима в $\mathbb{R}^2$.

24. Наименьшая σ-алгебра $R_\sigma(\mathcal{T}_n)$, содержащая систему $\mathcal{T}_n$ всех открытых множеств в $\mathbb{R}^n$, называется *борелевской*. Доказать, что борелевские множества в $\mathbb{R}^n$ измеримы.

25. Применяя теорему Фубини показать, что у каждого измеримого множества в $\mathbb{R}^2$ п.в. сечения прямыми, параллельными координатным осям, измеримы.

26. Доказать, что неотрицательная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ измерима тогда и только тогда, когда *ординатное множество* $A(f) \doteqdot \{(x,y) |\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ измеримо в $\mathbb{R}^2$. Показать, что интеграл Лебега функции f равен мере множества $A(f)$ в $\mathbb{R}^2$.

27. Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу на множестве E, то она интегрируема на каждом измеримом подмножестве $A \subseteq E$.

28. Если измеримые функции $f(x) = g(x)$ равны при п.в. $x \in E$, то их интегралы Лебега $\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu$ совпадают.

29. Если интеграл Лебега неотрицательной измеримой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ равен $\int_E f\,d\mu = 0$ нулю, то $f(x) = 0$ п.в. на множестве E.

30. Найти интеграл Лебега функции $f(x) = \sin x$, если $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, и $f(x) = 0$, если $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, на отрезке $[0,1]$.

31. При каких α функция $\frac{\sin x}{x^\alpha}$ интегрируема по Лебегу на промежутке $[1,\infty)$? При каких α функция $x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0,1]$?

32. Доказать, что каждая измеримая и ограниченная функция $f : E \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу на множестве E конечной меры.

33. Если функция $f : E \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу на множестве E конечной меры, то $|f|^p$ также интегрируема при всех $0 < p < 1$.

34. Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ измерима на множестве E конечной меры. Для того чтобы она была интегрируема по Лебегу на E, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E(|f| \geqslant n)) < \infty$.

35. Доказать полноту следующих нормированных пространств:

- пространство $\boldsymbol{B}([0,1])$ ограниченных функций $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$;

- пространство $\boldsymbol{C}([0,1])$ непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$;
- пространство $\boldsymbol{C}^1([0,1])$ непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ с нормой $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$;
- пространство $\boldsymbol{\ell}_\infty$ ограниченных последовательностей $x = \{x_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup |x_n|$;
- пространство $\boldsymbol{c}$ сходящихся последовательностей $x = \{x_n\}$ с нормой $\|x\| = \sup |x_n|$;
- пространство $\boldsymbol{c}_0$ последовательностей $x = \{x_n\}$, сходящихся к нулю, с нормой $\|x\| = \sup |x_n|$;
- пространство $\boldsymbol{\ell}_p$ последовательностей $x = \{x_n\}$, у которых сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$, с нормой $\|x\| = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$;

36. Доказать, что пространства $\boldsymbol{C}([0,1])$ и $\boldsymbol{L}_2([0,1])$ сепарабельны, а пространство $\boldsymbol{B}([0,1])$ не является сепарабельным.

37. Показать, что $\boldsymbol{L}_2([0,1]) \subset \boldsymbol{L}_\mathbf{1}([0,1])$, однако $\boldsymbol{L}_2([1,\infty)) \not\subseteq \boldsymbol{L}_\mathbf{1}([1,\infty))$.

38. Найти норму функционала $\alpha(f)$ в нормированном пространстве:

- $\alpha(f) = \int_0^1 f(x)(2x-1)\,dx$, $f \in \boldsymbol{C}([0,1])$;
- $\alpha(f) = \int_0^1 xf(x)\,dx - f(0)$, $f \in \boldsymbol{C}([0,1])$;
- $\alpha(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2^n} x_n$, $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$;
- $\alpha(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{n^3+1} x_n$, $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_1$;
- $\alpha(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{2/3}}{2^n} x_n$, $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_p$, $p = 3$;
- $\alpha(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{3^n} x_n$, $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_\infty$;
- $\alpha(f) = \int_0^1 x^{-1/3} f(x)\,dx$, $f \in \boldsymbol{L}_2([0,1])$;
- $\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^2+1} f(x)\,dx$, $f \in \boldsymbol{L}_\mathbf{1}(\mathbb{R})$.

39. При каких $r \in \mathbb{R}$ функционал $\alpha(f) = \int_0^1 x^r f(x)\,dx$ является ограниченным в пространстве $\boldsymbol{L}_2([0,1])$?

40. Пусть $K(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[0,1]$. Доказать, что норма линейного функционала $\alpha(f) = \int_0^1 f(x)\,K(x)\,dx$ в пространстве $\boldsymbol{C}([0,1])$ равна величине интеграла $\|\alpha\| = \int_0^1 |K(x)|\,dx$.

41. Найти норму функционала $\alpha(f) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{1+x}\,dx$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p([0,\infty))$ при всех $1 \leqslant p < \infty$.

42. Доказать, что множество функций $f \in \boldsymbol{L}_2([0,\infty))$, удовлетворяющих условию $\int_0^\infty \frac{f(x)}{1+x}\,dx = 0$, является замкнутым подпространством в $\boldsymbol{L}_2([0,\infty))$.

43. Вычислить полином $P(x) = ax + b$ наилучшего приближения для функций: 1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в метрике $\boldsymbol{C}[0,1]$; 2) $f(x) = \log_2 x$ в метрике $\boldsymbol{C}([1,2])$.

44. Вычислить полиномы $P(x) = x^2 + ax + b$ наименее уклоняющиеся от нуля в метрике $\boldsymbol{C}([-1,1])$, $\boldsymbol{L}_2([-1,1])$, $\boldsymbol{L}_\mathbf{1}([-1.1])$ и найти величину наименьшего уклонения $\rho = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \|x^2 + ax + b\|$.

45. Найти норму линейного функционала $\alpha(P) = P'(1) - P'(0)$, заданного на подпространстве полиномов $P(x) = ax^2 + bx + c$ с метрикой $\boldsymbol{C}([-1,1])$.

46. Продолжить функционал $\alpha(P) = P'(1)$ с сохранением нормы, заданный на подпространстве полиномов $P(x) = ax^2 + bx + c$ нормированого пространства $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}([-1,1])$, $\boldsymbol{L}_2([-1,1])$, $\boldsymbol{L}_1([-1,1])$.

47. Доказать, что продолжение любого ограниченного функционала, заданного на подпространстве $M \subset \boldsymbol{\ell}_2$, с сохранением его нормы на всем пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$ является единственным.

48. Вычислить для функции $f(x) = x^2$ величину и элемент наилучшего приближения следующими подпространствами в пространстве $\boldsymbol{L}_2([0,1])$:

- $M_1 = \{g \in \boldsymbol{L}_2([0,1]) \mid \int_0^1 g(x)\,dx = 0\}$;
- $M_2 = \{g \in \boldsymbol{L}_2([0,1]) \mid \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 xg(x)\,dx = 0\}$.

49. Вычислить для последовательности $x = \{1/2^n\}$ величину и элемент наилучшего приближения следующими подпространствами в пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$:

- $M_1 = \{x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2 \mid \sum_{n=1}^{10} x_n = 0\}$;
- $M_2 = \{x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2 \mid \sum_{n=1}^{10} x_n = \sum_{n=1}^{10} 2^n x_n = 0\}$.

50. Доказать полноту тригонометрической системы $\{\varpi e^{\boldsymbol{i}kx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{T})$, где $\varpi = 1/\sqrt{2\pi}$ и $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — 1-мерный тор.

51. Разложить в ряд Фурье функции $\sin^2 x$, x, $|\cos x|$, заданные на полуинтервале $[0, 2\pi)$ и продолженные 2π-периодически на всю прямую $\mathbb{R}$.

52. Доказать полноту системы полиномов Лежандра $L_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2([-1,1])$,

53. Доказать полноту ситемы полиномов Чебышева $T_n(x) = c_n \cos(n \arccos x)$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{L}_2([-1,1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$.

54. Найти норму оператора $Af(x) = xf(x) - f(0)$ в пространстве $\boldsymbol{C}([0,1])$.

55. Найти норму оператора $A\{x_n\} = \{\frac{n}{n+1}x_n\}$ в пространстве $\boldsymbol{\ell}_p$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

56. Найти норму оператора $Af(x) = (2x-1)f(x)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p([-1,1])$ при всех $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

57. Пусть $a(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[0,1]$. Доказать, что норма линейного оператора $Af(x) = a(x)f(x)$ в пространстве $\boldsymbol{L}_p([0,1])$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ равна $\|A\| = \sup_{x\in[0,1]} |a(x)|$.

58. Доказать, что оператор $(Ax)_n = x_n + x_{n+1}$, $x = \{x_n\} \in \boldsymbol{\ell}_2$, ограничен в пространстве $\boldsymbol{\ell}_2$.

59. Доказать, что оператор $Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $f \in \boldsymbol{L}_2([0,1])$, ограничен в пространстве $\boldsymbol{L}_2([0,1])$.

60. Найти преобразование Фурье следующих функций: e^{-x^2}, $x\,e^{-x^2}$, $\frac{1}{(x+\boldsymbol{i})^2}$, $\frac{1}{x^2+1}$, $e^{-|x|}$, $\frac{\sin x}{x}$.

61. Доказать, что норма оператора Фурье $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ в пространстве $\boldsymbol{L}_2(\mathbb{R})$ равна единице.

62. Пусть функция $f \in \boldsymbol{L}_1(\mathbb{R})$ и ее преобразование Фурье $\boldsymbol{\mathcal{F}} f = 0$ равно нулю. Доказать, что функция равна $f(x) = 0$ нулю почти всюду.