Стохастические методы прогнозирования

(краткий конспект без доказательств)

Александр Михайлович Шурыгин,

МГУ, ВМиК,

a.shurygin@bk.ru

1. Аналитические основы

Проблема оценивания

Пусть $x \in X \subseteq \mathbf{R}^1$ имеет плотность распределения $f := f(x, \theta)$, зависящую от неизвестного параметра θ. Нам надо найти оценку $\hat{\theta}$ параметра θ по выборке независимых наблюдений $x_1, \ldots, x_n$.

Основы прикладной статистики

- Метод наименьших квадратов (**K.Gauss**, 1794-1795)
- **Оценки максимума правдоподобия** (ОМП) (**R.Fisher**, 1912) $\theta_0 : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x_i, \theta) |_{\theta=\theta_0} = 0$

Их **недостатки**: ►

- **А.Н.Колмогоров** (1950): «ОМП не универсальны»
- **J.W.Tukey** (1960): ► ОМП «катастрофически
- неустойчивы» к малым изменениям п.р.!

► Оценки минимума контраста (ОМК)

(V.P. Godambe 1960, J.Pfanzagle 1969)

- Функция контраста: $\rho(x,\theta),\ \hat{\theta}:\ \sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,\hat{\theta}) \to \min$
- Оценочная функция: $\psi(x,\theta) = c\dfrac{\partial}{\partial\theta}\rho(x,\theta), \quad c \neq 0,$
- ОМК

$$\boxed{\hat{\theta} : \Sigma\psi(x_i,\hat{\theta}) = 0.}$$

- Условие состоятельности: $\boxed{\mathrm{E}\,\psi(x,\theta) = 0.}$ (1)

- Асимптотическая дисперсия:

$$\boxed{V(f,\psi) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}n(\hat{\theta}-\theta)^2 = \mathrm{E}\,\psi^2/(\mathrm{E}\,\dot{\psi})^2.} \quad (2)$$

где $\psi := \psi(x,\theta)$ и $\dot{\psi} := \dfrac{\partial}{\partial\theta}\psi(x,\theta).$ ►

Пример Тьюки

П.р. $f(y) = (1-\varepsilon)\varphi(y) + \varepsilon\varphi(y/3)/3$, где $y = x - \mu$,
а $\varphi(y) = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-y^2/2}$ - п.р. $\mathrm{N}(0,1)$.
Для среднего оценочная функция $\psi(y) = y$, $\Rightarrow$

$\dot{\psi} = -1$, $\mathrm{E}\,\dot{\psi} = -1$, $(\mathrm{E}\,\dot{\psi})^2 = 1$ - это знаменатель в (2).

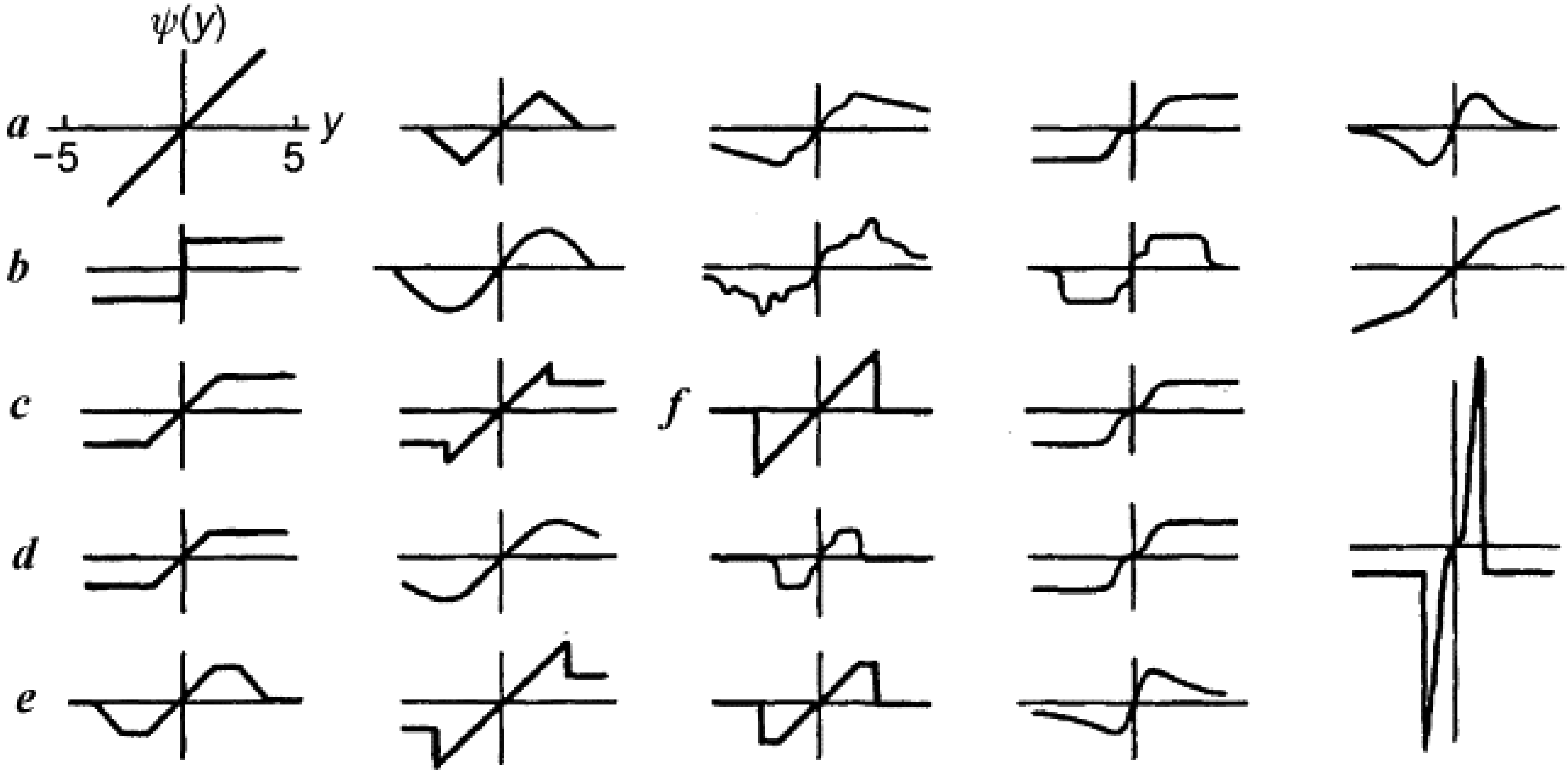
$$\mathrm{E}\,\psi^2(y) = (1-\varepsilon)\int_{\mathbf{R}^1} y^2\varphi(y)dy + \varepsilon\int_{\mathbf{R}^1} y^2\left[\frac{1}{3}\varphi\left(\frac{y}{3}\right)\right]dy =$$

$$= (1-\varepsilon) + 9\varepsilon\int_{\mathbf{R}^1}\left(\frac{y}{3}\right)^2\varphi\left(\frac{y}{3}\right)d\left(\frac{y}{3}\right) = 1-\varepsilon+9\varepsilon = 1+8\varepsilon.$$

Это числитель в (2). Получаем: $V(f,\psi) = 1+8\varepsilon$.

При $\varepsilon = 1/8$ дисперсия удваивается !

Теория робастности: поиск устойчивой оценки центра распределения *N(0,1)* моделированием точечного загрязнения в Принстонском университете. Оценочные функции:



► Много устойчивых ОМК было найдено теоретически и эмпирически в Принстонском эксперименте. **Их недостатки:**

- Все оценки зависят от неоцениваемых параметров (дисперсии, степени загрязнения), так что каждая из них является семейством оценок. Хьюбер и Хампель подбирали константы для распределения $N(0,1)$.
- Не только центр нормального распределения, но и другие параметры различных распределений следует устойчиво оценивать.
- Авторы ищут устойчивые оценки, не имея определения устойчивости.
- Надо искать устойчивость к неизбежному отклонению реальной п.р. от модельной. ►

Функциональная оптимизация

Для функции $y(x)$ величина $|dy/dx|$ - хорошая мера неустойчивости y по отношению к варациям x.

По аналогии используем производную Лагранжа

$$\boxed{W(f,\psi) = \frac{\partial}{\partial f} V(f,\psi) = \left(\int_X \psi^2 dx\right) \Big/ \left(\mathrm{E}\,\dot{\psi}\right)^2} \qquad (3)$$

как меру неустойчивости дисперсии оценки при вариациях п.р. f.

Функция ψ определена до умножения на ненулевую константу c, и если

$$c = \left(\mathrm{E}\,\dot{\psi}\right)^{-1} \qquad (4),$$

тогда

$$W(f,\psi) = \int_X \psi^2 dx.$$

Теорема. *При выполнении условий (1) и (4) для квадратичной по ψ функции Q(ψ, f) функционал*

$$G(\psi) = \int_X \left[Q(\psi, f) + \lambda_0 \psi f + \lambda_1^* \dot{\psi} f \right] dx$$

► достигает минимума на функции

$$\boxed{\psi(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial \psi} Q(\psi, f) + \lambda_0 f + \lambda_1 \dot{f} \, .}$$

Приложив теорему к функционалу (3), получим, что неустойчивость W достигает минимума W_* на оценочной функции

$$\boxed{\psi_*(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} f(x,\theta) + \beta f(x,\theta), \quad \beta : \mathrm{E}\, \psi_* = 0 .}$$

Соответствующую оценку θ_* назовём **оценкой максимальной устойчивости (ОМУ).**

► Эффективность | Устойчивость

$V(f,\psi)$ – **положительная мера неэффективности, достигающая минимума** V_0 **на ОМП.**

Эффективность $\operatorname{eff}\hat{\theta} = V_0 / V(f,\psi)$

$W(f,\psi)$ – **положительная мера неустойчивости, достигающая минимума** W_* **на ОМУ.**

Устойчивость $\boxed{\operatorname{stb}\hat{\theta} = W_* / W(f,\psi)}$

На квадрате $\left[\mathit{eff}\,\hat{\theta}, \mathit{stb}\,\hat{\theta}\right]$ интересны такие оценки.

Условно оптимальные θ_γ с оценочной функцией

$$\psi_\gamma = c\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f + \beta\right) / \left(1 + \gamma / f\right),\ \ \beta : \mathrm{E}\psi_\gamma = 0$$

где γ зависит от соотношений между $\operatorname{eff}\theta_\gamma$ и $\operatorname{stb}\theta_\gamma$

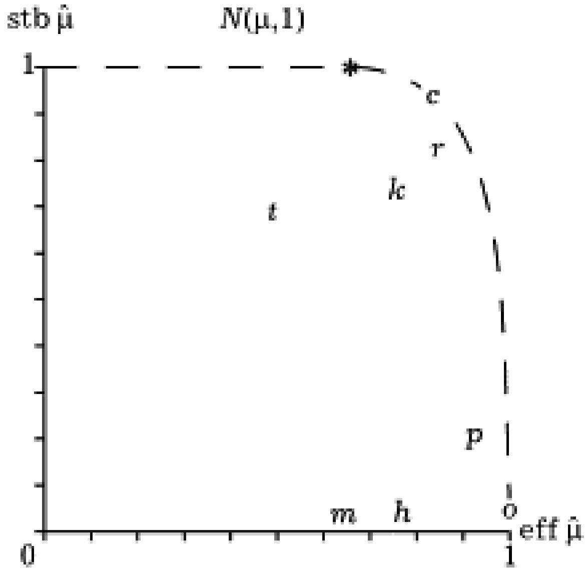
Компромиссные θ_c со свойствами:

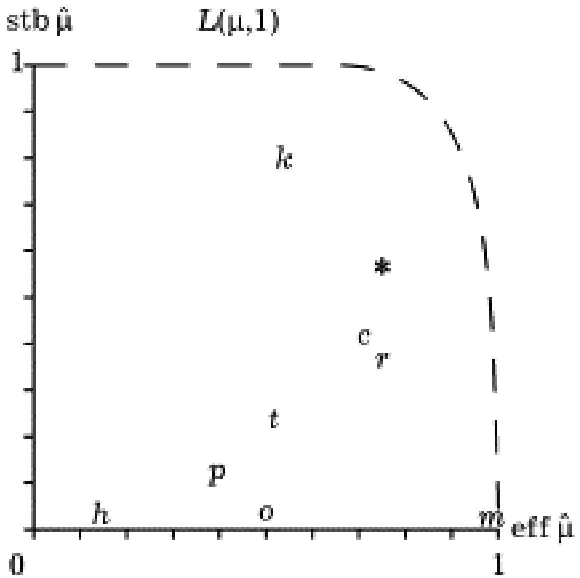
$$\gamma = V_0 / W_* : \ \left(\operatorname{eff}\hat{\theta}\right)^{-1} + \left(\operatorname{stb}\hat{\theta}\right)^{-1} \to \min$$

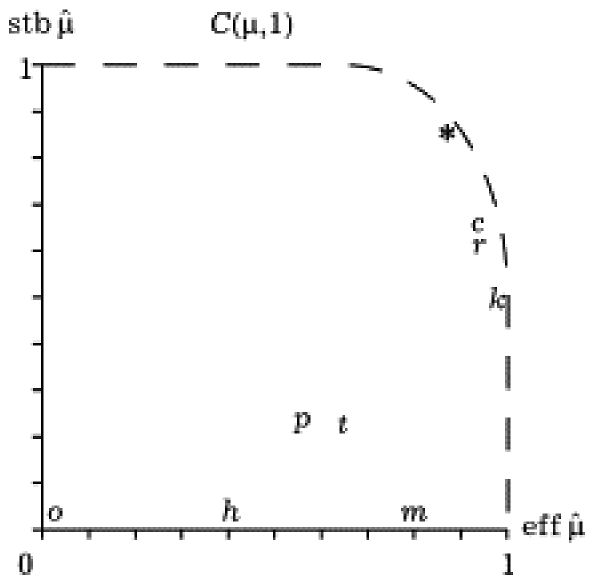
- **Радикальные** θ_r у которых $\operatorname{eff}\theta_r \simeq \operatorname{stb}\theta_r$, и

$$\boxed{\psi_r = c\left(\tfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f + \beta\right)\sqrt{f}}$$

►







Обозначение оценок

o – ОМП (среднее)

m – медиана

k – ОМП для распределения Коши

t – оценка Тьюки

h –оценка Хьюбера

p –оценка Хампеля

$*$ – ОМУ

c – компромиссная

r – радикальная

Прерывистая линия – условно оптимальные оценки

► Радикальность оценок

Функционал $R(f,\psi) = \left(\int_X \psi^2(x,\theta)\sqrt{f(x,\theta)}\,dx\right)^2 \Big/ \left(\mathrm{E}\,\dot\psi(x,\theta)\right)$ достигает минимума R_* на радикальной оценке.

Радикальность оценки $\boxed{\operatorname{rad}\hat\theta = R_*/R(f,\psi)}$ - удобная мера полезности в приложениях: ►

$\hat\mu$	μ_r	μ_c	μ_k	μ_*	μ_h	μ_p	μ_m	μ_0
$\operatorname{rad}\hat\mu$	1	.99	.97	.91	.88	.85	.83	.65

Можно видеть, что ОМП распределения Коши μ_k мажорирует робастные оценки μ_h и μ_p; а медиана μ_m лучше, чем ОМП.

Мультипликативные помехи

встречаются гораздо чаще, чем аддитивные. Все положительные величины их имеют.

Пусть $x_1,\ldots,x_{2n}$ $,y_i = x_{2i}\,|\,x_{2i+1}\,|\,/\,c,\ c:\ Ey^2 = 1.$

Оцениваем моделированием $Ey(=0)$ и асимптотическую дисперсию $V(\mu)$ для разных оценок μ:

μ:	μ_0	μ_m	μ_*	μ_r
$V(\mu)$:	**1,01**	**0,29**	0,37	0,45.

Видно явное преимущество медианы и отставание ОМП.

2. Многомерное нормальное распределение $N_p(\mathbf{m},\mathbf{C})$

Для $\mathbf{x}=(x^{(1)},\dots,x^{(p)})^{\mathrm{T}}\in N_p(\mathbf{m},\mathbf{C})$, $\mathbf{C}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, $|\mathbf{C}|>\mathbf{0}$,
вектор математических ожиданий $\mathbf{m}=\mathrm{E}\mathbf{x}$,
матрица ковариаций $\mathbf{C}=\{c_{ij}\}=\mathrm{E}[(\mathbf{x}-\mathbf{m})(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}]$,
корреляция $x^{(i)}$ и $x^{(j)}$ $r_{ij}=c_{ij}/\sqrt{c_{ii}c_{jj}}$, $-1<r<1$.
При $-1<r<0$ увеличение
одного признака ведёт к уменьшению другого,
при $0<r<1$ оба признака изменяются вместе.
Поверхности равных плотностей – эллипсоиды,
их оси называются главными компонентами

Устойчивые оценки многомерного распределения

- Все одномерные определения переносятся на многомерный случай автоматически.
- Оценки Мешалкина $\mathbf{m}_\lambda$ и $\mathbf{C}_\lambda$ единственные устойчивые из предложенных. Они могут быть получены из следующей системы уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} \Sigma\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_\lambda\right) e^{-\lambda q_i^2/2} = 0, \\ \Sigma\left[\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_\lambda\right)\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_\lambda\right)^{\mathrm{T}} - (1+\lambda)^{-1}\mathbf{C}_\lambda\right] e^{-\lambda q_i^2/2} = 0, \end{cases}}$$

где $q_i^2 = \left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_\lambda\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_\lambda^{-1} \left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_\lambda\right).$ (5)

Первое уравнение – вектор, второе – матрица.

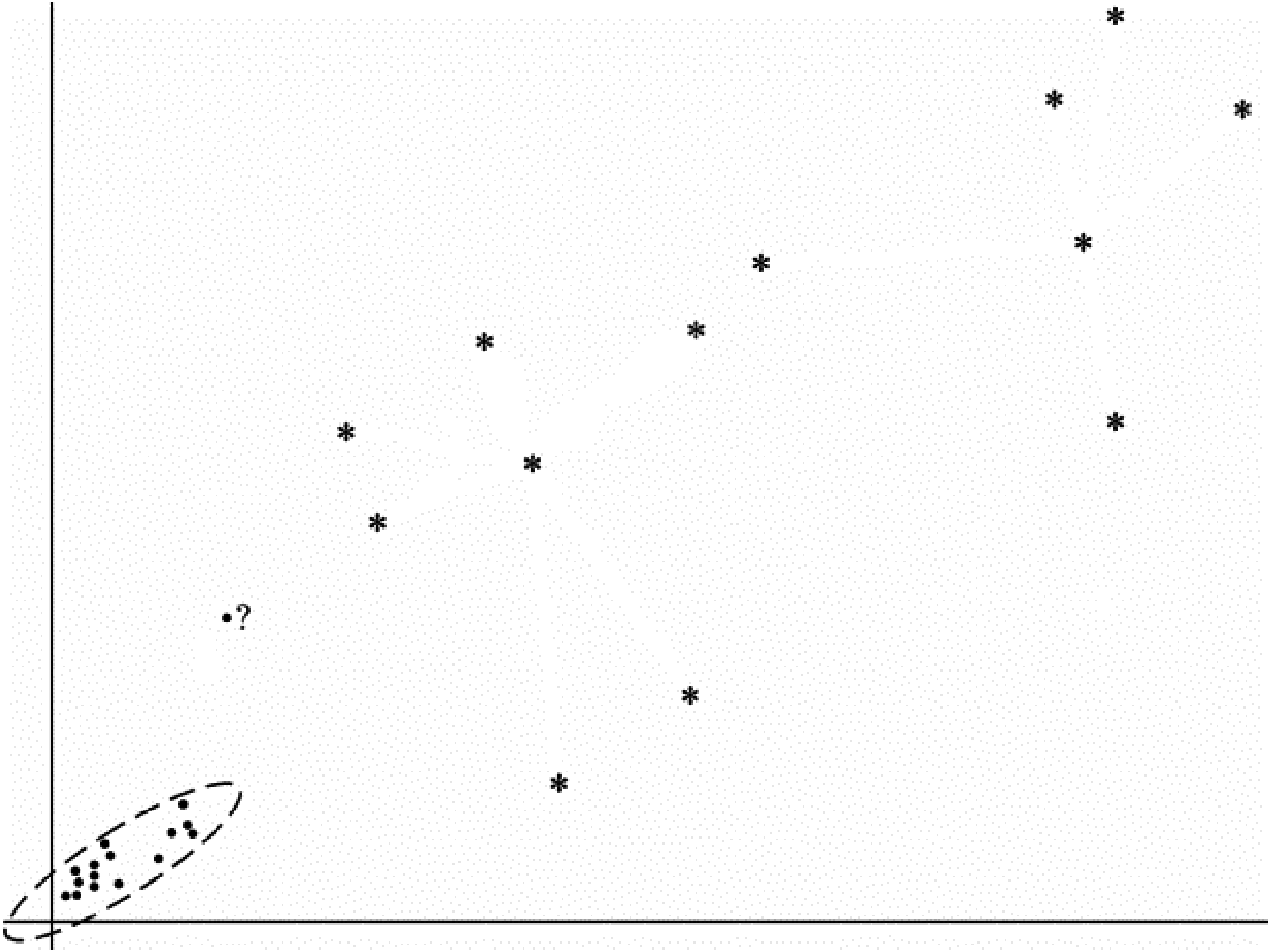
- При $\lambda = 1/2$ получаем **радикальные оценки** $\mathbf{m}_r, \mathbf{C}_r$.
- Если выборка содержит несколько кластеров, то в процессе итераций оценка $\mathbf{m}_r$ сходится к центру большего из них, а матрица $\mathbf{C}_r$ оценивает его ковариацию.

Для проверки однородности выборки предлагается следующий **кластер-тест:**

$$\boxed{K_\lambda = \frac{1}{np}\Sigma\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_\lambda\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_\lambda^{-1}\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}_\lambda\right).}$$

- Если элементы выборки имеют нормальное распределение (то есть выборка однородна), то

$$\sqrt{np}\ln K_\lambda \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\left(2+4\lambda+(p+2)\lambda^2\right)(1+\lambda)^{p+2}}{(1+2\lambda)^{p/2+2}} - 2\right).$$



Кластер-алгоритм

Количество кластеров? Уровень значимости α:

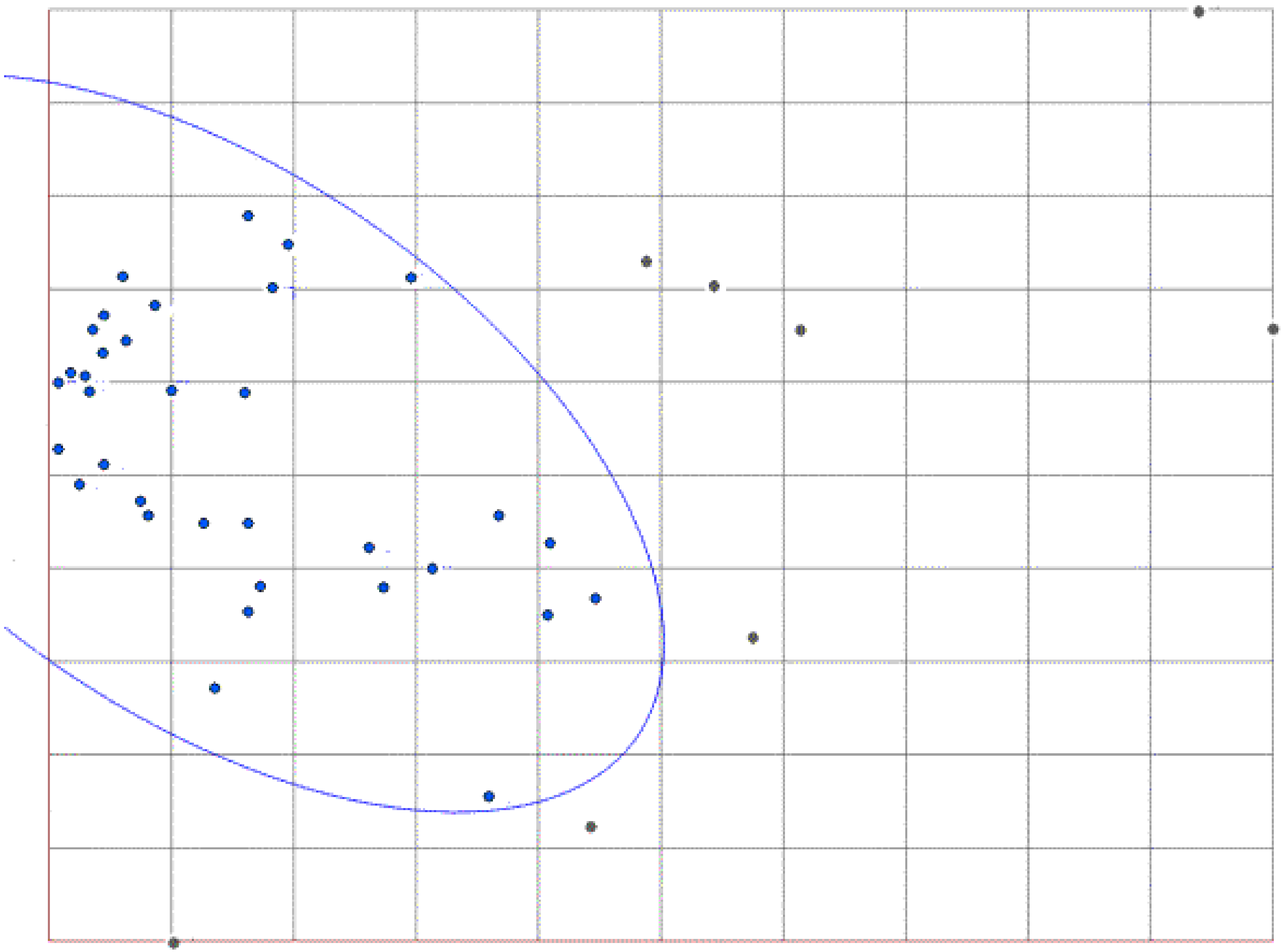
$\mathrm{P}\{\sqrt{(\mathbf{x}-\mu)^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)} < a_p\} = 1-\alpha.$ Для $\mathbf{y} \in N_p(0, I)$

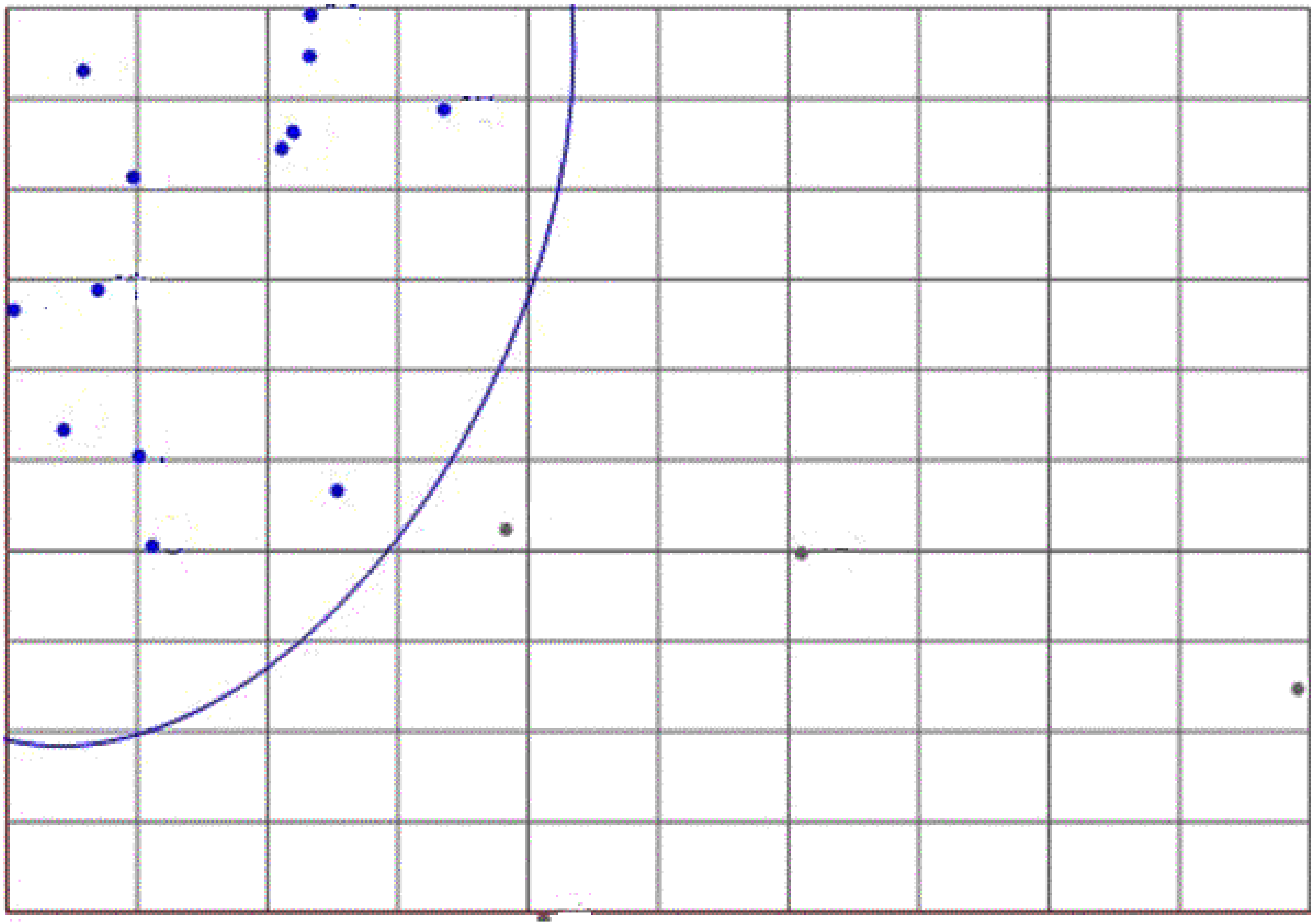
$$1-\alpha = (2\pi)^{-p/2} \int_0^{b_p} S_p(r) e^{-r^2/2} dr = (2\pi)^{-p/2} S_p(1) \int_0^{b_p} r^{p-1} e^{-r^2/2} dr.$$

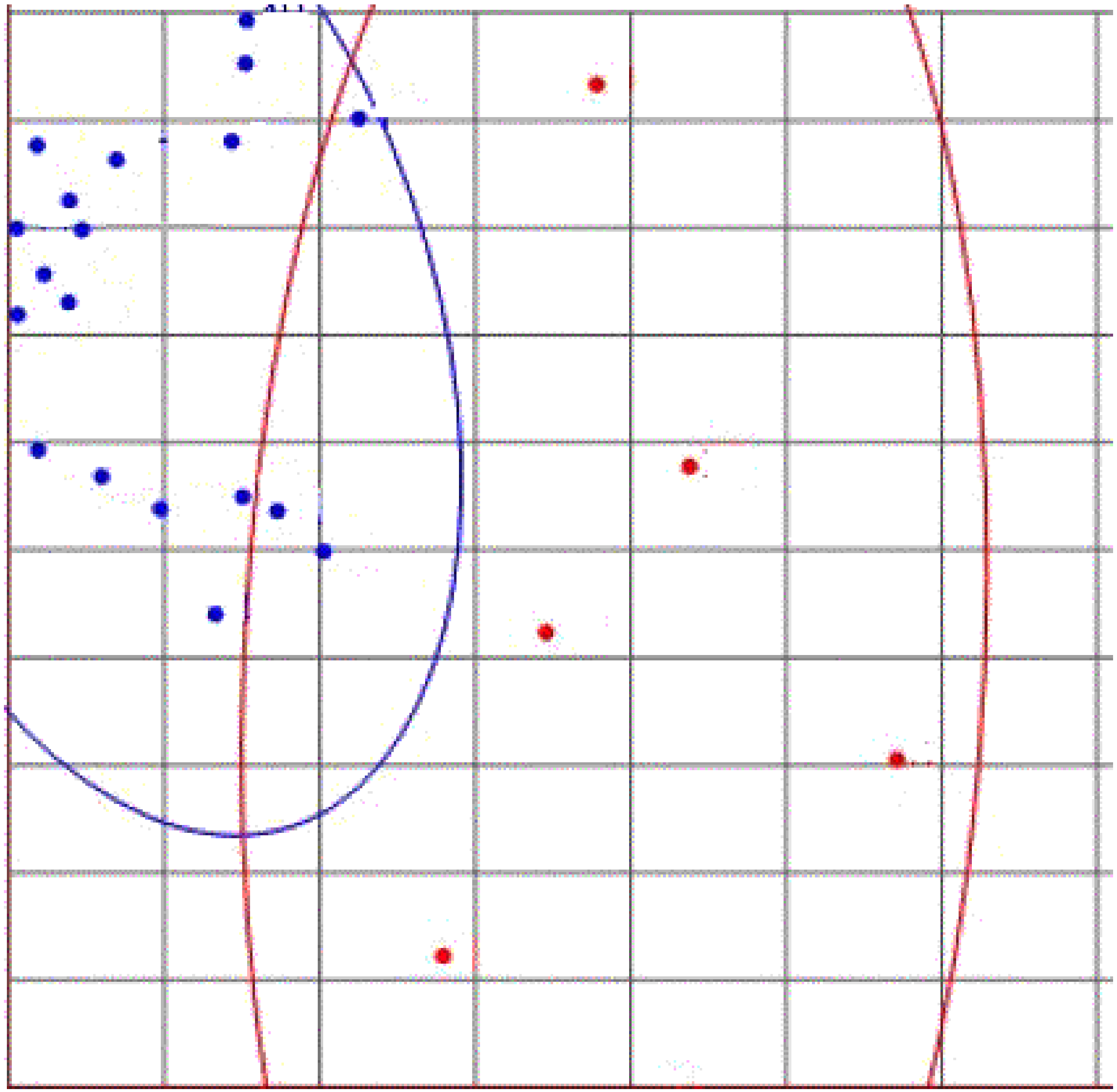
Известно: $S_p(1) = 2\pi^{p/2} / \Gamma(p/2)$

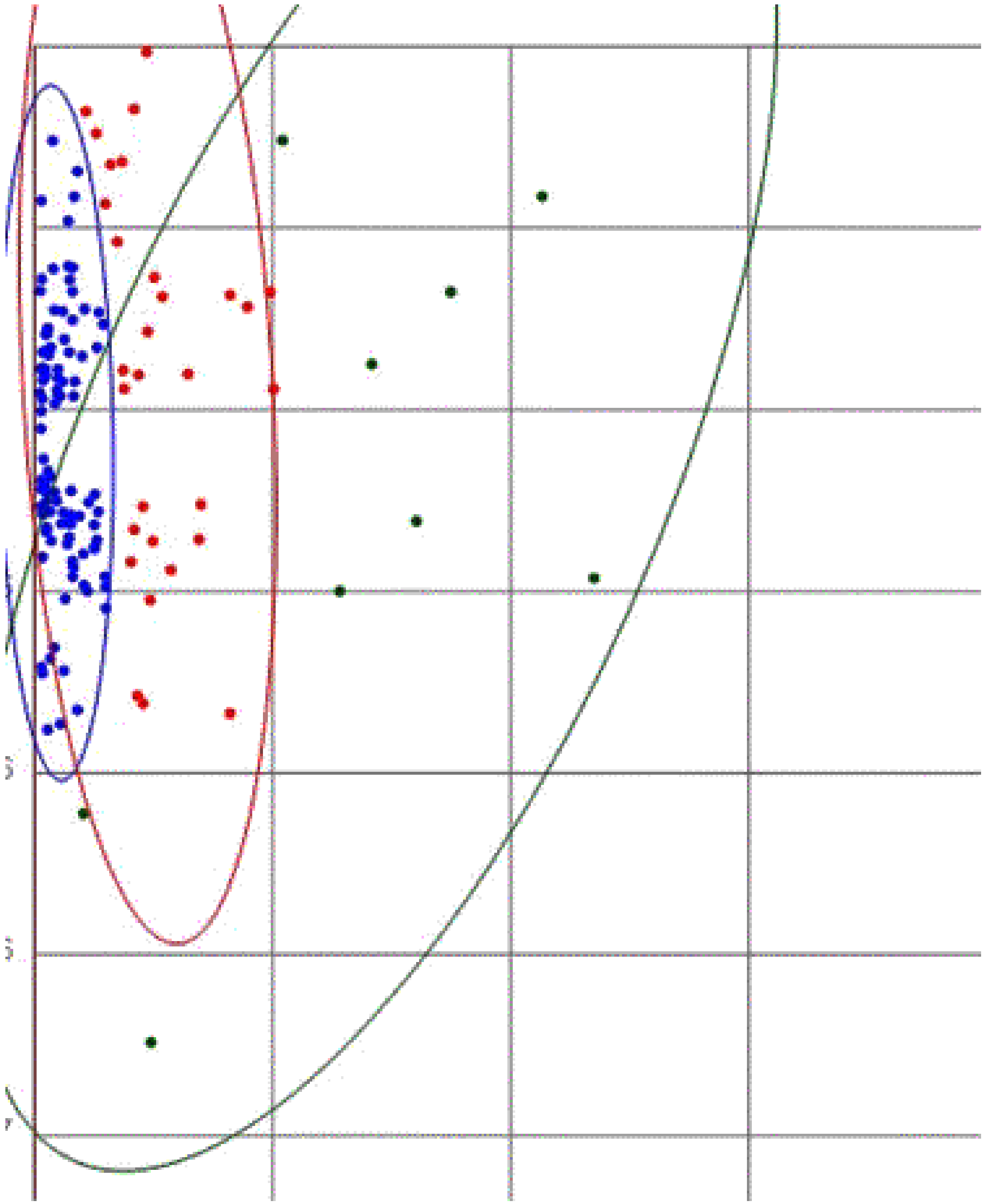
$$1-\alpha = \frac{1}{2^{p/2-1}} \int_0^{b_p} r^{p-1} e^{-r^2/2} dr / \Gamma(p/2).$$

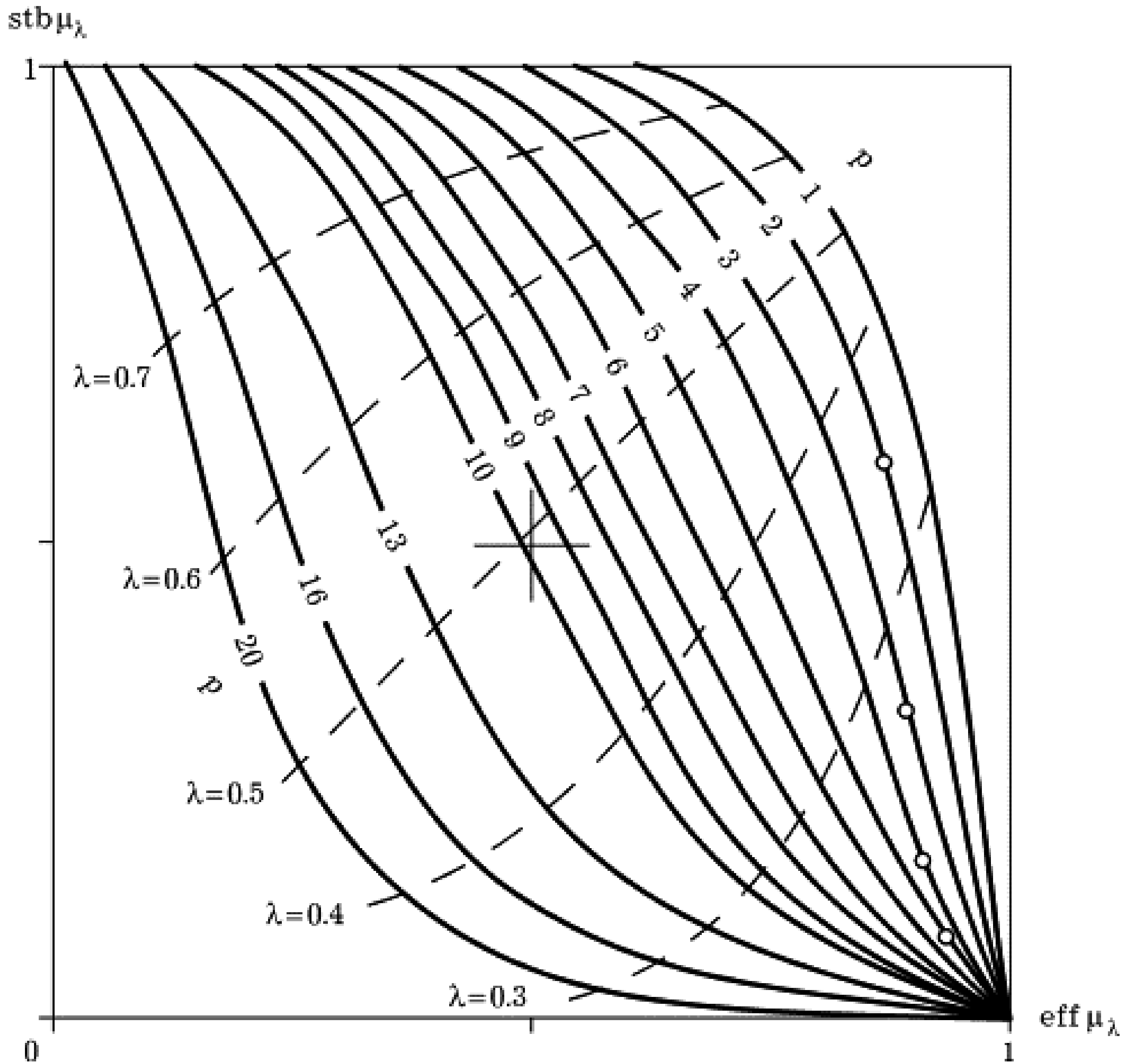
$$P\{\sqrt{\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}} < b_p\} = 1-\alpha \Rightarrow a_p \approx b_p.$$











stb μ_λ
1
0
1
eff μ_λ
λ=0.7
λ=0.6
λ=0.5
λ=0.4
λ=0.3
p
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
13
16
20
p

Многомерная выборочная медиана

- В одномерном случае выборочная медиана μ_m имеет оценочную функцию

$$\psi(x-\mu_m) = \operatorname{sgn}(x-\mu_m) = (x-\mu_m)/\,|\,x-\mu_m\,|$$

и является решением уравнения

$$\mu_m = (\Sigma x_i\,/\,|\,x_i-\mu_m\,|)/(\Sigma 1\,/\,|\,x_i-\mu_m\,|).$$

Решение не изменится, если модули заменить нормированными расстояниями от центра q_i (5). Получим уравнение для многомерного случая:

$$\boxed{\mathbf{m}_m = \frac{\Sigma \mathbf{x}_i\,/\,q_i}{\Sigma 1\,/\,q_i}.}$$

Условное многомерное распределение

Центрируем случайный нормальный вектор $\mathbf{x}$, введя $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathrm{E}\mathbf{x}$, разобьём его на два вектора и соответственно разобьём матрицу ковариаций $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix}.$$

Если компоненты вектора $\mathbf{y}_2$ фиксированы (известны), то известно и условное распределение компонент вектора $\mathbf{y}_1$ (**Андерсон**):

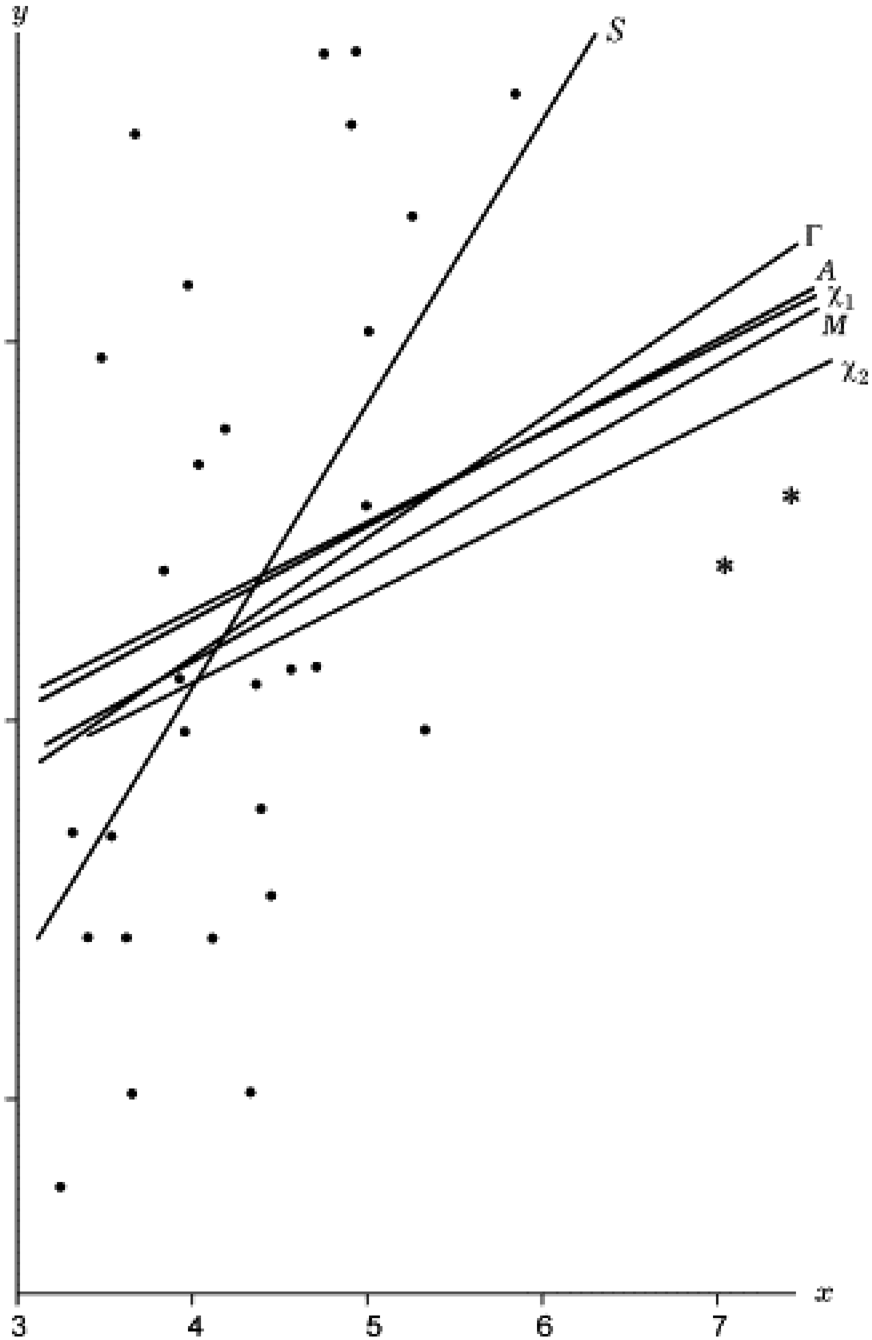
$$\boxed{\mathbf{y}_1 \mid \mathbf{y}_2 \in N(\mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{y}_2, \mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21}).} \qquad (6)$$

3. Регрессионный прогноз

- Отклик $y_i = r(\mathbf{x}_i, \Theta) + \varepsilon_i \in \mathbf{R}^1,\ i = 1, \ldots, n,$
  предикторы $\mathbf{x}_i = \left(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(p-1)}\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{p-1},$
  остатки $\varepsilon_i \in N(0, \sigma^2)$, функция регрессии $r(\cdot)$,
  её параметры $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_q)^{\mathrm{T}}, \quad \hat{\Theta} = ?$
- **Классика**: наименьшие квадраты $\Sigma \varepsilon_i^2 \to \min.$
- **Робастность**: оценки центра $\Sigma \rho\left(\mathbf{x}_i, \hat{\Theta}\right) \to \min$
- Все эти регрессии неустойчивы.
- **Радикальная** по оценочной вектор-функции

$$\boxed{\Psi_r(\mathbf{z}, \Theta) = \mathbf{C}\left[\frac{\partial}{\partial \Theta} \ln f(\mathbf{z}, \Theta)\right] \sqrt{f(\mathbf{z}, \Theta)},}$$

где $f(\cdot)$ - п.р. вектора $\mathbf{z} = \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}, y\right)^{\mathrm{T}}.$ ▶



• – observations

* – artificial contaminations

Regressions notation:

Γ – classic

A – Andrews'

χ_1, χ_2 – Huber's

M – Meshalkin's

S – radical

►**Квадратичная ошибка оценки параметров:**

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \lim nE\left[r\left(\mathbf{x}_0,\hat{\Theta}\right) - r\left(\mathbf{x}_0,\Theta\right)\right]^2 = \\ &= \mathrm{tr}\left[\left(E\dot{r}\dot{r}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{H}\left(E\Psi\Psi^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right] \end{aligned}} \qquad \mathbf{H}^{-1} = E\dot{\Psi},$$

- **Выбор модели** $r(\cdot)$ Квадратичная ошибка предсказания для нового наблюдения $\mathbf{x}_0$ является суммой «модельной» дисперсии σ^2 и квадратичной ошибки за счёт оценки параметров. Минимизируя их сумму

$$\boxed{s^2 = \sigma^2 + R/n \to \min}, \qquad (7)$$

мы найдём подходящую функцию регрессии. $r(\mathbf{x},\Theta)$. Как и в многомерной статистике, эффективность и устойчивость оценок снижается при росте размерности. Так что полезно уменьшать размерность.

Простейшие регрессии

Полиномиальная степени p на отрезке.

Функция регрессии $\boxed{r(\mathbf{x},\Theta)=\Sigma_{j=0}^{p}\theta_j x^j,}$ $j=0,\dots,p.$

Оценочная функция $\psi_j = x^j \varepsilon \exp(-\lambda\varepsilon^2/2\sigma^2),$

$\lambda=0 \to$ ОМП, $\lambda=1/2 \to$ радик., $\lambda=1 \to$ макс.устойч.

Линейная на куб с равном. распред. $\mathbf{x}=(x^{(1)},\dots,x^{(p)})^{\mathrm{T}}$

$$\boxed{r(\mathbf{x},\Theta)=\theta_0+\Sigma_{j=1}^{p}\theta_j x^{(j)},} \quad \begin{cases} \psi_0 = \varepsilon\exp(-\lambda\varepsilon^2/2\sigma^2), \\ \psi_{j>0} = x^{(j)}\varepsilon\exp(-\lambda\varepsilon^2/2\sigma^2), \end{cases}$$

Линейная на нормальное распределение $\mathrm{N_p}(\mathbf{m},\mathbf{C})$

$$\boxed{\begin{aligned} &r(\mathbf{x},\Theta)= \\ &=\theta_0+\Sigma_{j=1}^{p}\theta_j x^{(j)}, \end{aligned}} \quad \begin{cases} \psi_0 = \varepsilon\exp(-\lambda[\varepsilon^2/\sigma^2+q^2]/2), \\ \psi_{j>0} = x^{(j)}\varepsilon\exp(-\lambda[\varepsilon^2/\sigma^2+q^2]/2). \end{cases}$$

При больших размерностях всё ухудшается!

Редуцированная линейная регрессия

Решения ухудшаются, когда растёт размерность p. Потому что в многомерной статистике надо оценить $O(p^2)$ параметров, хотя для решения нам нужно только $O(p)$ параметров. Исключение признаков уменьшает информацию. Сведём задачу к последовательности двумерных задач.

- **Регрессия.** Пусть признаки $\mathbf{x} = (x^{(1)},\dots,x^{(p-1)})^{\mathrm{T}}$ упорядочены по «информативности». Рассмотрим последовательность двумерных задач, используя s^2 (7) для исключения неинформативных признаков:

$$\boxed{\begin{gathered} y = c_0 + c_1 x^{(1)} + \varepsilon^{(1)},\ \ \varepsilon^{(1)} = c_2 x^{(2)} + \varepsilon^{(2)}, \\ \dots, \varepsilon^{(p-2)} = c_{p-1} x^{(p-1)} + \varepsilon^{(p-1)} + c_p . \end{gathered}}$$

Редуцированная дискриминация

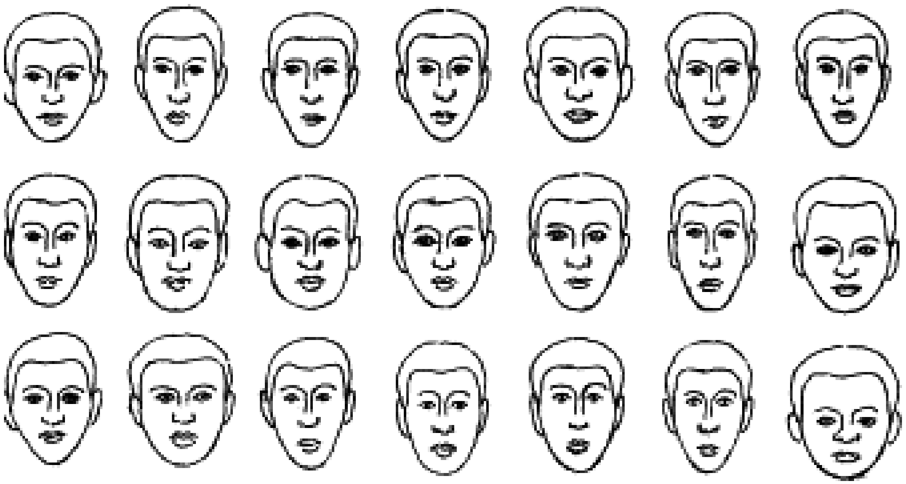
В $\mathbf{R}^2$ с признаками a и b есть два класса точек, разделяемых линейной дискриминантной функцией (ЛДФ), и $n(a,b)$ обозначение множества проекций точек на нормаль к ЛДФ. Упорядочим признаки $\mathbf{x}=(x^{(1)},\ldots,x^{(p)})^{\mathrm{T}}$ по информативности и составим последовательность двумерных задач:

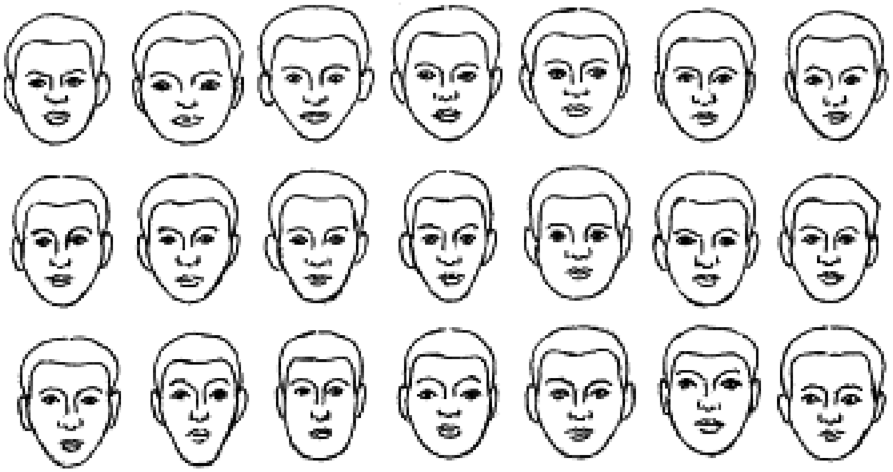
$$\boxed{z_2=n\left(x^{(1)},x^{(2)}\right),\ z_3=n\left(z_2,x^{(3)}\right),\ldots,z_p=n\left(z_{p-1},x^{(p)}\right).}$$

Признак считается неинформативным, если он не уменьшает ошибку классификации. В результате получаем хорошую ЛДФ. В этой последовательности нормаль к ЛДФ качается по очереди к осям координат. Решение можно улучшить, повторив последовательность в цикле (Колмогоров).

Классификация «по портретам»,

в которых параметры лица соответствуют признакам объектов.





Сравнение методов дискриминации

В реальной геохимической задаче два класса, размерность p=12, количество точек $n_1 = n_2$ = 21=15(для обучения)+6(для экзамена);

- ошибок в «типичных» объектах m_t , в случайных - m_r
- Метод дискриминации m_t m_r

Метод дискриминации	m_t	m_r
1. Редукция в цикле	2	2
2. Редукция	2	3
3. Специалист по таблицам	2	3
4. Распознавание образов по Бонгарду	1	4
5. Распознавание «портретов»	2.5	3
6. ЛДФ с отбором признаков	2	4
7. То же в «независимых» блоках	2	4
8. ЛДФ Фишера	3	3
9. Квадратичная ДФ	4	3
10. ЛДФ Андерсона-Бахадура	4	4

4. Прогноз случайных функций

Случайные функции

Будем различать следующие их разновидности.

Случайный процесс $x_t, \ \ t \subseteq \mathbf{R}^1$.

Случайное поле $x_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \subseteq \mathbf{R}^p, \quad p > 1.$

Аргументы функций (время, пространство) и ниже будут помещаться не в скобках, а в нижних индексах для компактности записей.

Рассмотрим два наиболее часто используемых типа таких процессов.

Стационарный случайный процесс (ССП)

определяется двумя равенствами:

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}x_t = \mu = \mathrm{const}, \\ \mathrm{E}(x_s - \mu)(x_t - \mu) = \mathrm{Cov}(x_s, x_t) = c_{|s-t|}. \end{cases}}$$

Первое показывает, что траектории ССП имеют средний **уровень** μ , около него происходят колебания. Второе равенство указывает на стационарность этих колебаний: **ковариация** значений процесса зависит от расстояния между абсциссами и не зависит от сдвига по оси t.

Ковариационная функция c_τ чётная, достигает максимума, равного дисперсии процесса, при $\tau = 0$. Из чётности следует вещественность преобразования Фурье, дающее **спектральную плотность** (с.п.)

$$\boxed{f(\omega) = \int_{\mathbf{R}^1} c_\tau \, \mathrm{e}^{-i\omega\tau} \, d\tau = \int_{\mathbf{R}^1} c_\tau \cos(\omega\tau) d\tau,}$$

здесь использовалась формула Эйлера:

$$\mathrm{e}^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

С.п. – неотрицательная функция, определённая на $\mathbf{R}_+$. Её интеграл ограничен дисперсией процесса:

$$\boxed{\int_{\mathbf{R}_+} f(\omega) d\omega = c_0 .}$$

Иногда с.п. называют «энергетической плотностью».

Случайный процесс со стационарными приращениями (СПСП)

Колмогоров (1940):

$$\boxed{\mathrm{Cov}(x_s, x_t) = (v_{|s|} + v_{|t|} - v_{|s-t|})/2.}$$

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}(x_s - x_t) = 0, \\ \mathrm{E}(x_s - x_t)^2 = v_{|s-t|}. \end{cases}}$$

За начальную точку может быть взята любая точка траектории. **Структурную функцию** v_τ удобно аппроксимировать степенной: $\boxed{v_\tau = \omega^2 \tau^\gamma},\ 0 \le \gamma \le 2$ (Яглом). Mandelbrot модель СПСП с такой аппроксимацией назвал **фрактальным броуновским движением,** величину $H = \gamma / 2$ назвал показателем Харста и привёл эффектные примеры.

Локальные свойства СПСП (и ССП)

$$\boxed{v_\tau = 2(c_0 - c_\tau),} \qquad \boxed{c_\tau = c_0 - v_\tau / 2}$$

Корреляция соседних приращений $\boxed{\rho = 2^{\gamma-1} - 1.}$

Непрерывен в среднеквадратичном:

$$\lim_{s\to t} \mathrm{E}(x_t - x_s)^2 = \lim_{s\to t} v_{|s-t|} = 0.$$

Дифференцируем в среднеквадратичном: $\rho_{s\to t} \to 1.$

Спрямляем в среднем: $\exists \lim_{m\to\infty} \Sigma_1^m \mathrm{E} l_i,$

где l_i - длины звеньев аппроксимирующей ломаной.

γ =0, ρ=-1/2 «белый шум» с дисперс $\omega^2/2$, всюду разрывный,

γ =1, ρ =0 винеровский: непрерыв., не диф., не спрямляема,

γ =2, ρ =1 случайная прямая: непрер., диф., спрямляема

(при $(d/d\tau)v(\tau)|_{\tau=0} = 0, \ \vee \ (d/d\tau)c(\tau)|_{\tau=0} = 0.$

Прогноз гауссовского ССП

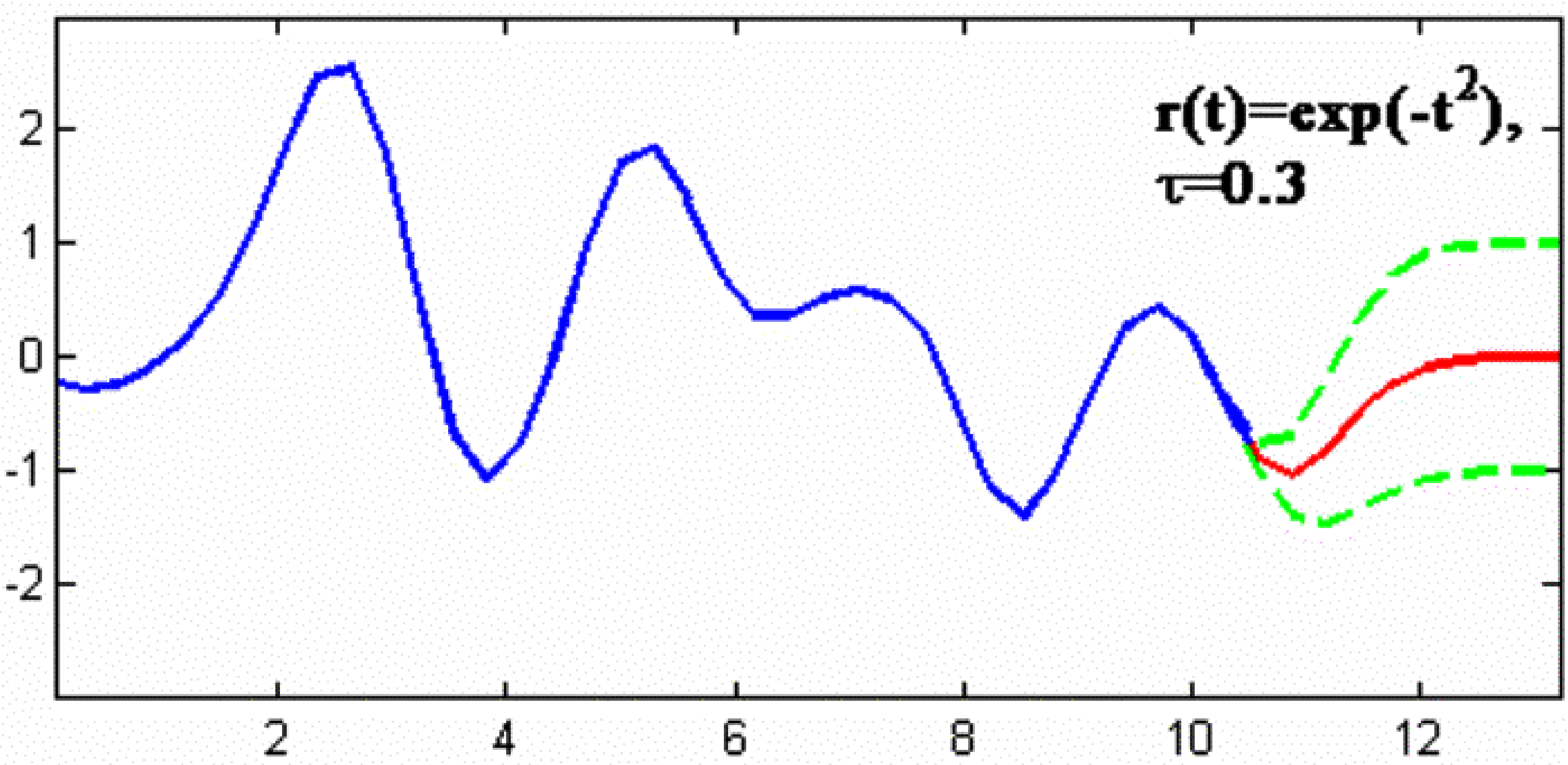
$y_t = x_t - \mu$, шаг h, знаем: $y := (y_{nh}, \dots, y_h, y_0)$, ковариационную функцию $c := (c_h, \dots, c_{nh}, c_{(n+1)h})$ следующего значения с известными предшествующими, матрицу ковариаций $C = \{c_{ij}\}_{i,j=0}^{n}$ известных значений.

Надо найти следующее значение $y_{(n+1)h} = ?$.

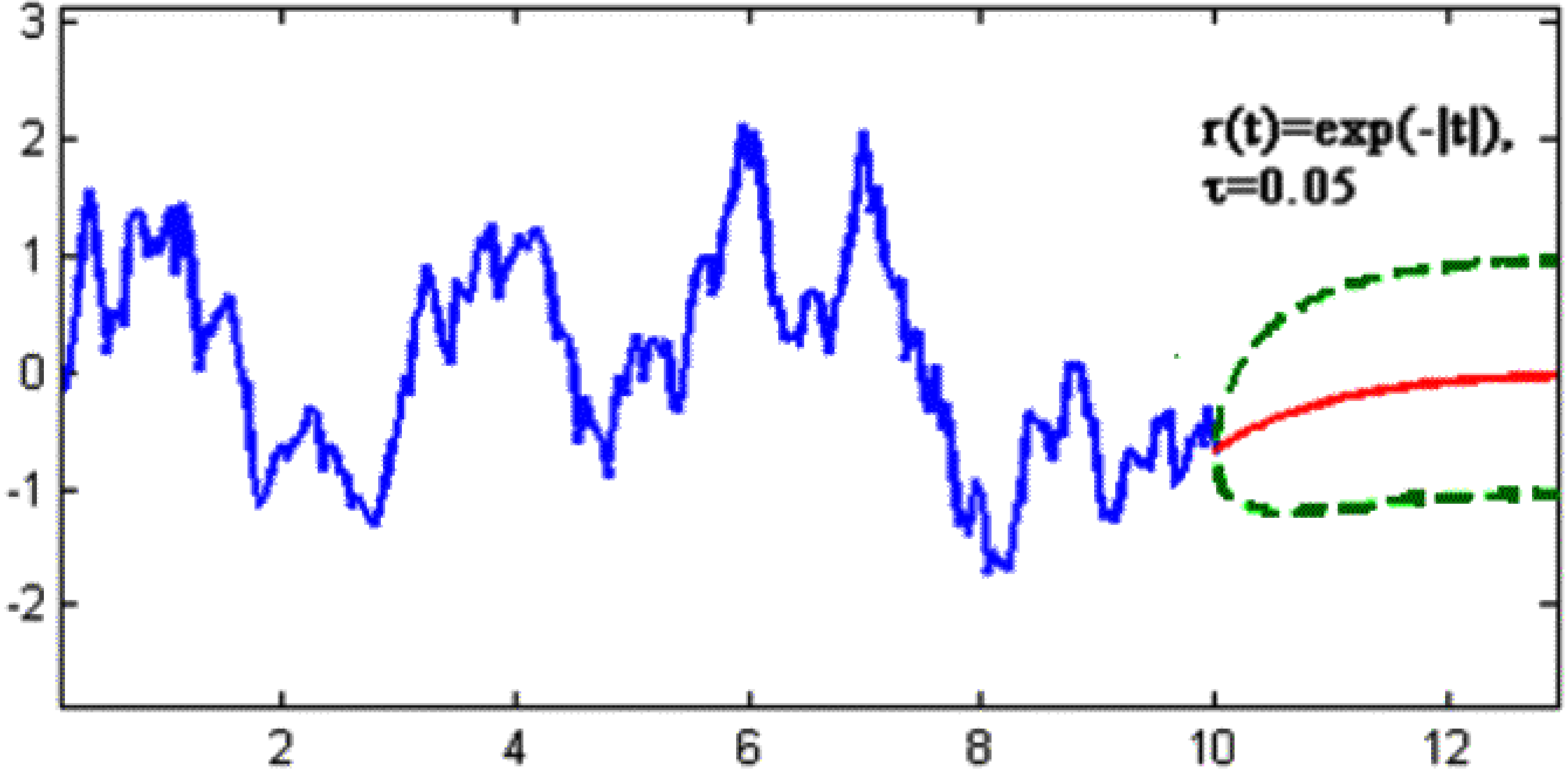
По Андерсону (6):

$$\boxed{\begin{aligned} E(y_{(n+1)h} \mid y) &= y C^{-1} c^T, \\ D(y_{(n+1)h} \mid y) &= c_0 - c C^{-1} c^T. \end{aligned}}$$

Прогноз ССП



Прогноз ССП



Прогноз гауссовского СПСП

Приращения $\Delta_k = x_{(k+1)h} - x_{kh}$, в результате

$$(x_{nh}, x_{(n-1)h}, \dots, x_h, x_0) \to (\Delta_n, \dots, \Delta_1) =: \Delta .$$

Ковариации приращений:

$$c_0 = v_h, \dots, c_k = v_{(k-1)h}/2 - v_{kh} + v_{(k+1)h}/2, \dots;$$

для фрактального броуновского движения

$$c_0 = \omega^2 h^\gamma, \dots, c_k = \omega^2 h^\gamma [(k-1)^\gamma/2 - k^\gamma + (k+1)^\gamma/2], \dots,$$

матрица $C = \{c_{ij}\}_{i,j=0}^{n-1}$,

ковариации с предыдущими $c := (c_1, \dots, c_n)$.

Прогноз по Андерсону (6):

$$\boxed{\begin{aligned} E(\Delta_{n+1} \mid \Delta) &= \Delta C^{-1} c^T, \\ D(\Delta_{n+1} \mid \Delta) &= c_0 - c\,C^{-1} c^T. \end{aligned}}$$

Авторегрессия (АР)

Последовательность $x_1, \ldots, x_n$, АР к-го порядка:
$\boxed{x_{n+1} = \sum_{n-k}^{n} h_{n-i} x_i + \varepsilon_{n+1},}$ h_i коэффициенты, $\varepsilon_i \in \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ независимы. Обратная задача: известен прогноз $\hat{x}_0$, его дисперсия σ^2, есть ли соответствующий СП? СПСП не может быть, т.к. его приращения зависимы. СПС не может быть по той же причине. Нужна АР с зависимыми приращениями!

Система уравнений:

$$x_{n+1} = \sum_i (a_{n-i} x_i + b_{n-i} y_i) + \varepsilon_{n+1},$$

$$y_{n+1} = \sum_i (c_{n-i} x_i + d_{n-i} y_i) + \varepsilon^*_{n+1},$$

Нобелевская премия 2004 года по экономике.

Изотропное случайное поле

Пусть в области $Q \subset \mathbf{R}^2$ имеется случайная функция x_{t}, вектор $\mathrm{t} \in Q$. В сечениях поля будут СП x_t. Если их вероятностные характеристики совпадают, **поле изотропно**. Для рассмотренных ССП и СПСП будут:

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{E}x_{\mathrm{t}} = \mu, \\ \mathrm{Cov}(x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{t}}) = c_{\|\mathrm{s}-\mathrm{t}\|}; \end{cases}} \qquad \begin{cases} \mathrm{E}(x_{\mathrm{s}} - x_{\mathrm{t}}) = 0, \\ \mathrm{E}(x_{\mathrm{s}} - x_{\mathrm{t}})^2 = v_{\|\mathrm{s}-\mathrm{t}\|}. \end{cases}$$

Поле, имеющее сечениями винеровские процессы, называется **полем Леви**. Мандельброт…

Условный случайный процесс (УСП) и подсчёт запасов (ПЗ) рудных месторождений

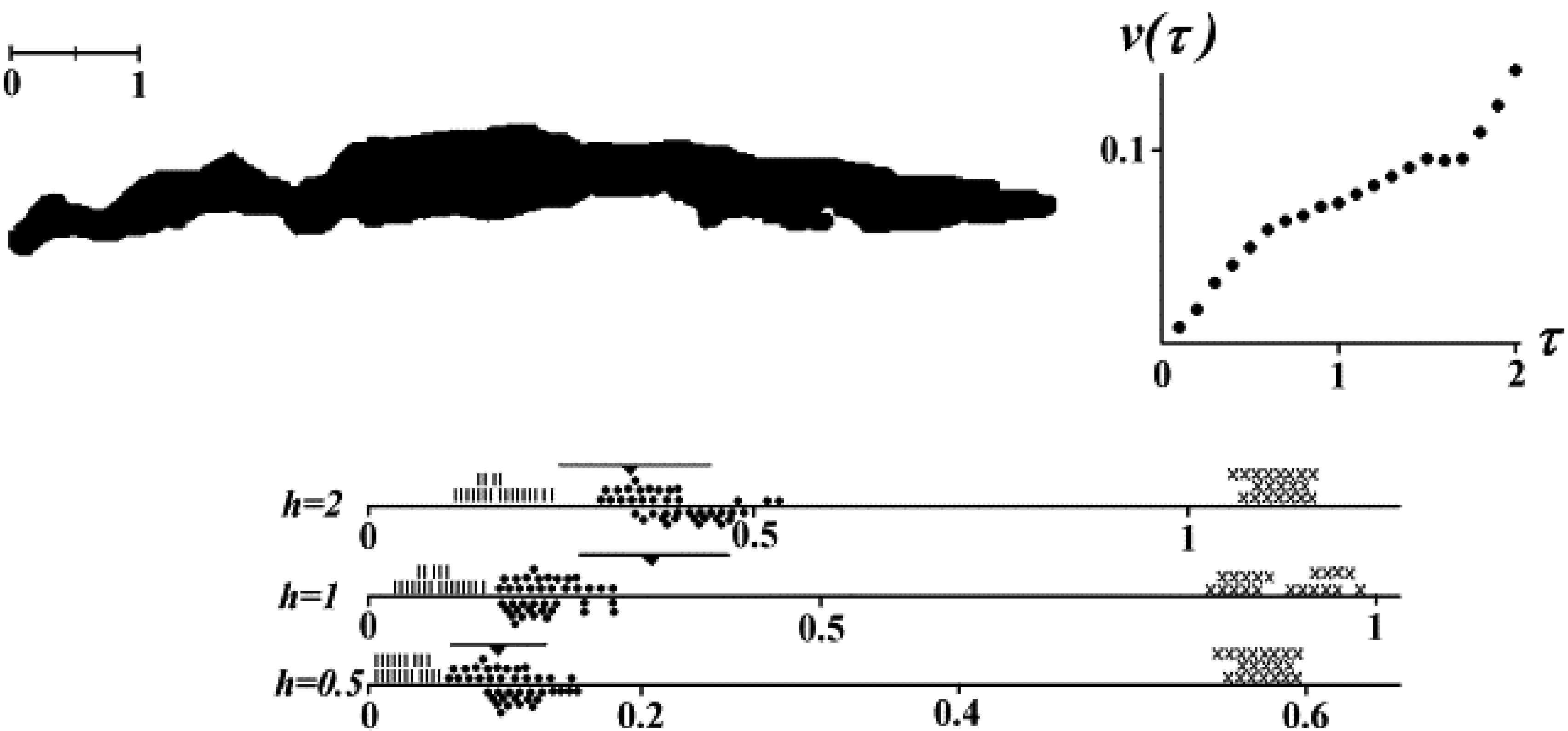
- На отрезке T концентрация x_t, линейные запасы $w = \int_T x_t dt$ надо оценить по пробам с ошибками u_i, $\mathrm{D}u_i \equiv \sigma_i^2$ известны.

Традиционный способ: линейная интерполяция, Погрешность по статистике: $\boxed{\mathrm{D}\overline{x} = \mathrm{D}x / n.}$

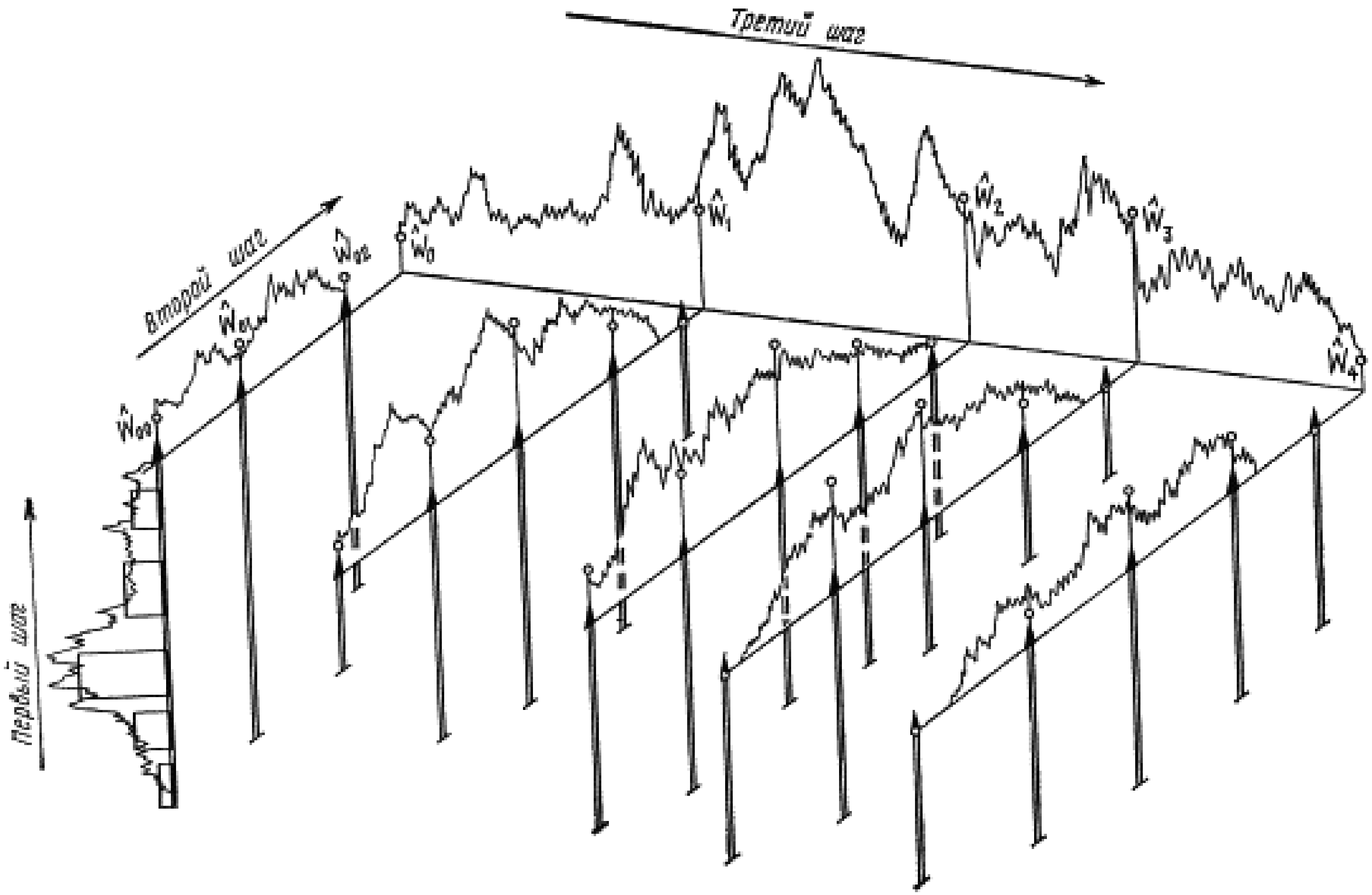
Численное интегрирование гладких функций…

УСП: в точках опробования СП имеет известные (фиксированные) значения (см. «Условное многомерное нормальное распределение»).

Оценки погрешности подсчёта площади рудной жилы по имитации разведки: | численного интегрирования, x-традиционные, точки внизу – условный винеровский процесс,точки вверху – условный СПСП. Над осями доверительные интервалы.

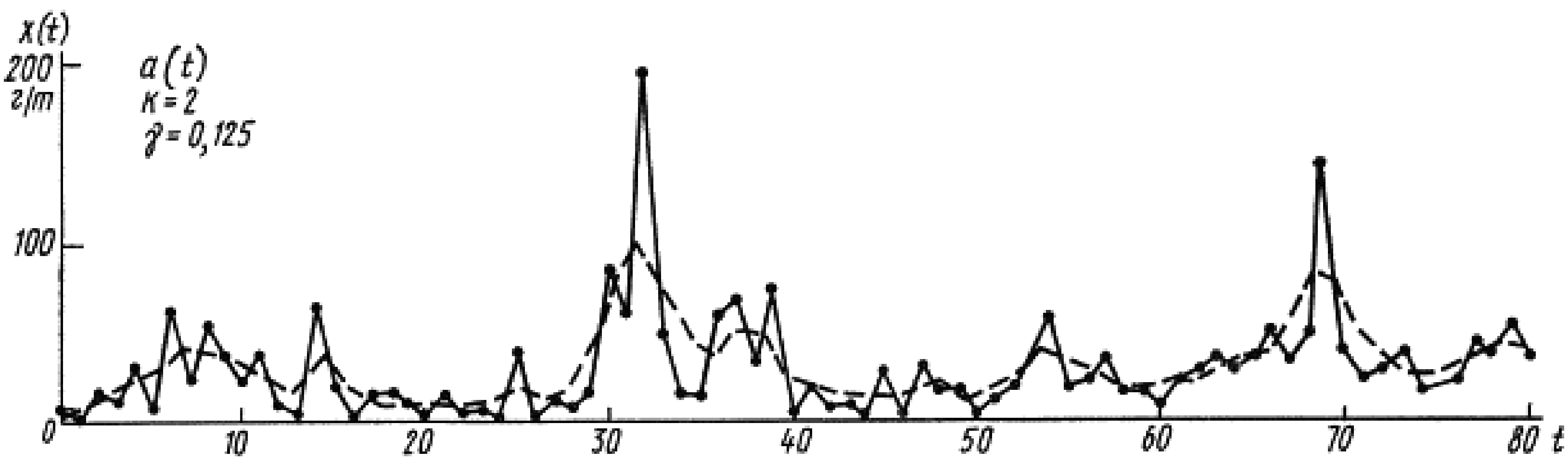


Подсчёт запасов в объёме месторождения, разведанного профилями скважин



Проблема ураганных проб. Концентрации x_t многих руд распределены резко асимметрично, и ПЗ по среднему даёт завышенные значения, хотя среднее является несмещённой оценкой мат. ожидания.

Пусть $x_t = \exp y_t$, а y_t - ССП и $\mathrm{E} y_t = \mu$ Тогда траектории УСП между фиксированными точками будут выгнуты вниз, если они выше e^{μ}, и вверх, если они ниже. В месторождении концентрации аномальны по по сравнение с фоновыми, поэтому интеграл по УСП будет меньше, чем даст линейная интерполяция.



Условное случайное поле и ПЗ нефте-газовых месторождений

Скважины располагаются не по профилям, надо рассматривать плоское поле $Q \ni t$, обычно x_t - поле Леви, параметр которого определяется по межскважинным разностям. Разбив Q на треугольники, по возможности изометричные, получаем мозаику условных полей, каждое из них определяется скважинами в вершинах треуголтника, одну из которых можно принять за начальную, и решать задачу при известных значениях в двух других численно по формулам условного многомерного распределения.

Газовое месторождение, разбитое на треугольники.

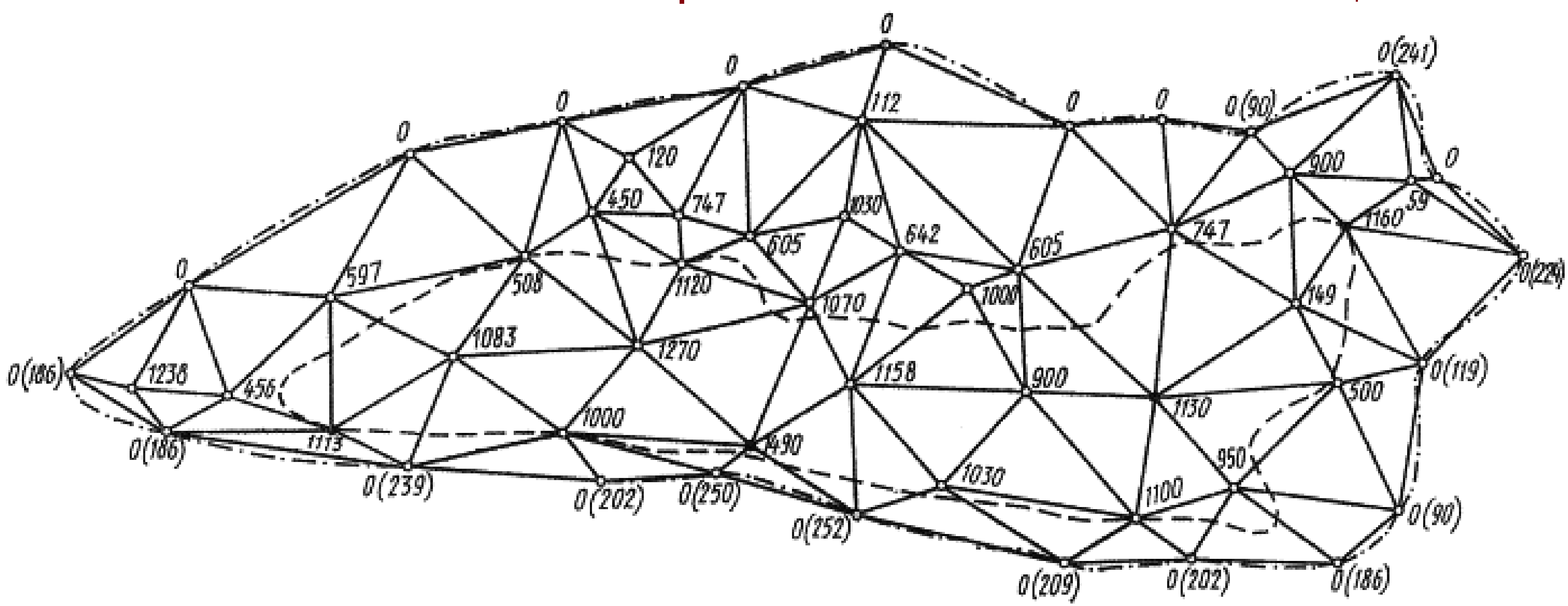
Подсчёт запасов (в млрд. кубометров):

традиционный метод 2,25,

метод УСП 2,52,

ср.кв. оценка погрешности 4%,

реальные запасы **2,54.**



Выбор шага наблюдений («дисперсия» Аллана)

Если в наблюдаемом процессе z_t на низкочастотный сигнал с амплитудой ν наложен «белый шум» с дисперсией $\omega^2/2$, то при шаге наблюдений τ

$$\mathrm{E}(\Delta z_\tau)^2 = \nu^2\tau^2/2 + \omega^2.$$

Разделив эту функцию на τ, получим функцию

$$\mathrm{E}(\Delta z_\tau)^2/\tau = \nu^2\tau/2 + \omega^2/\tau =: a_\tau.$$

Эта функция достигает минимума по τ при таком значении τ_*, при котором дисперсии приращений сигнала и «белого шума» равны.

Выбор количества слагаемых при разложении функции

Гладкая функция $f(x)$ наблюдается в точках $X=\{x_0,\dots,x_n\}$ с помехами: вместо $f_i := f(x_i)$ фиксируются $y_i = f_i + \varepsilon_i$, помехи ε_i одинаково распределены, нормальны и независимы. Ломаная $y(X)$ аппроксимируется суммой ортогональных полиномов $g_j(X)$: $\boxed{y(X)=\Sigma_{j=0}^{\infty} a_j g_j(X).}$ Остановиться, если

1) оценки дисперсии «остатков» d_i $s_1^2 = \Sigma(d_i-\overline{d})^2/n$ и $s_2^2=\Sigma_{i=0}^{n-1}(d_i-d_{i+1})^2/(2n)$ примерно равны,

2) корреляция соседних остатков равна -1/2.

5. Прогноз точечных полей

Поля зависимых точек

В приложениях часто ищут п.р. зависимых точек. Пусть x и x^* имеют п.р. $f(x) \equiv f(x^*)$ и между ними действует сила $\xi(x - x^*)$. В условии равновесия $g(x) = \int_{\mathbf{R}^1} \xi(x - x^*) f(x^*) dx^* = f * f \equiv 0$ - свёртка. Преобразование Фурье F превращает свёртку в произведение: $F(g(x)) = F(\xi(x)) F(f(x)) \equiv 0.$ Противоречие: либо $\xi(x) \equiv 0,$ либо $f(x) \equiv 0.$ n зависимых точек могут иметь п.р. в выборочном пространстве $\mathbf{R}^n$.

Распределение межточечных расстояний (МТР)

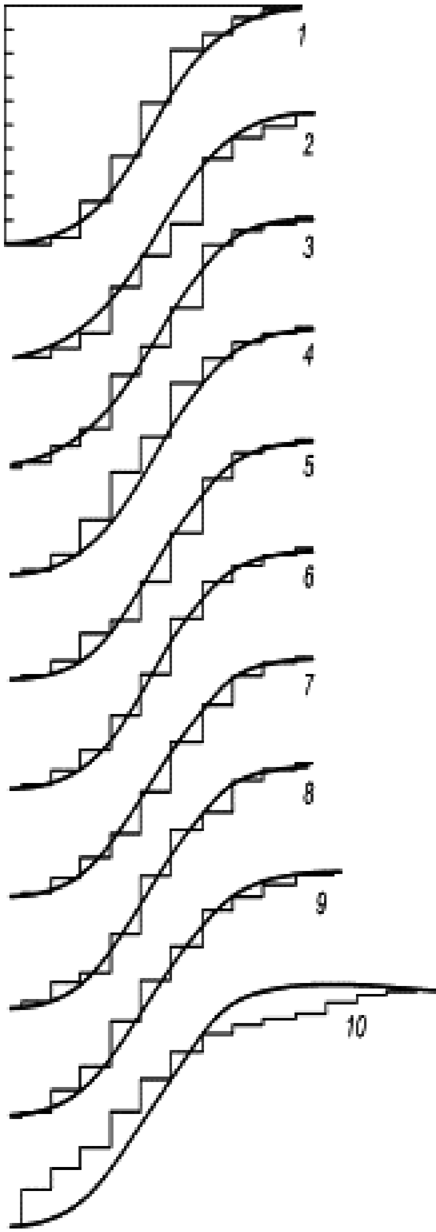
Выборка $\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{n} \in Q \subset \mathbf{R}^p$, $r_{\alpha\beta} = \| \mathrm{x}_\alpha - \mathrm{x}_\beta \| \in (0,\rho]$, их $m = C_n^2 = n(n-1)/2$. Разделим $[0,\rho]$ точками $\rho_0 = 0 < \rho_1 < \ldots < \rho_k = \rho$ на k интервалов. Пусть m_i - количество МТР, для которых $\rho_{i-1} < r < \rho_i$, а $\delta_i = \mathrm{P}\{\rho_{i-1} < r < \rho_i\}$ при равномерном распределении x в Q. Последовательность

$$\boxed{g_i := m_i/(\delta_i m),} \quad i = 1,\ldots,k$$

будет гистограммой МТР, нормированной равномерным распределением. Очевидно, $\mathrm{E}m_i = \delta_i m$. $\mathrm{D}m_i = ?$

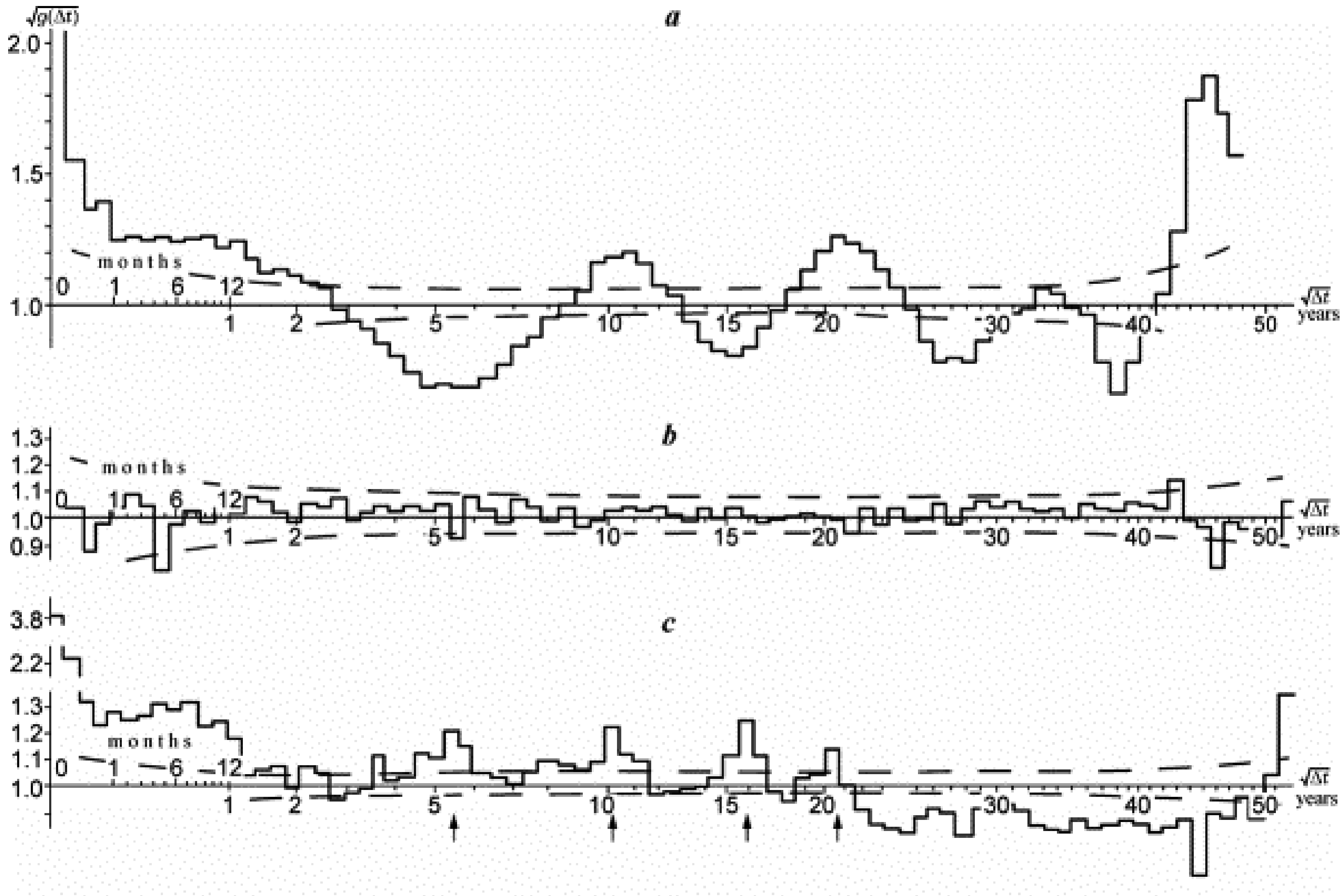
Теорема. Пусть $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n \in Q \subset \mathbf{R}^p$, $p \ge 1$, имеют в Q распределение, абсолютно непрерывное относительно меры Лебега. Тогда МТР между ними асимптотически ($n \to \infty$) попарно независимы (и при зависимых точках).

n =10 $\Rightarrow$



Следствие. Если для всех i $\delta_i = cn^{-1-\varsigma} \to 0,\ 0<\varsigma<1,$ то при равномерном распределении $\mathbf{x}$ в Q вектор из величин $\boxed{b_i := (m_i - \delta_i m)/\sqrt{\delta_i(1-\delta_i)m}}$ имеет предельным распределением $N_k(0,\mathrm{I})$.

Функции *g* (и доверительный интервал) для солнечных вспышек, глубокофокусных и нормальных землетрясений



Распределение со стационарными расстояниями (PCPc)

Выборка $\{\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\} =: \mathbf{X}_n$ при равномерном распределении $\mathbf{x}$ в Q имеет п.р. $u(\mathbf{X}_n)$, а МТР п.р. $\delta(r)$.

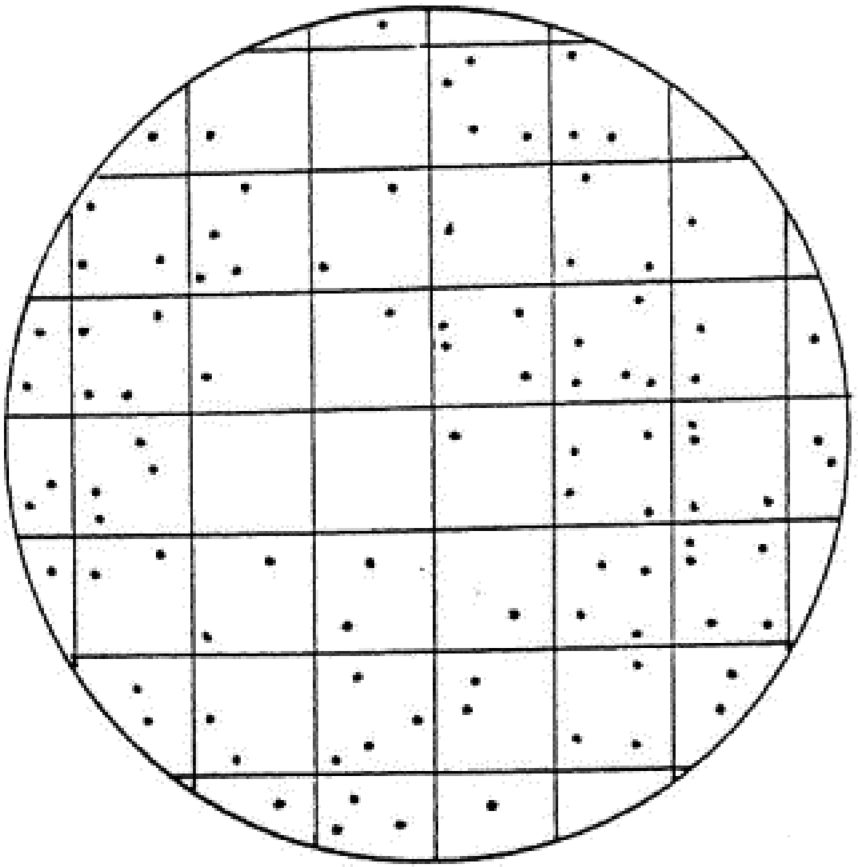
В **PCPc** п.р. $\mathbf{X}_n$ в Q^n равна

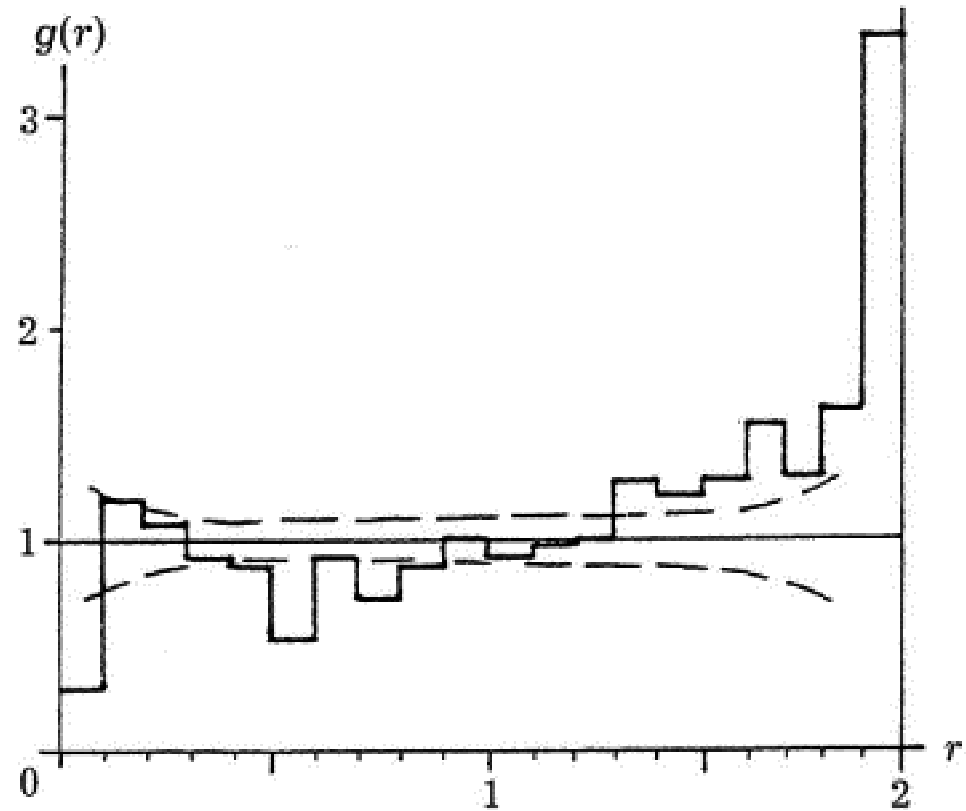
$$\boxed{w(\mathbf{X}_n) = u(\mathbf{X}_n)\Pi_{\alpha<\beta}\gamma(r_{\alpha\beta}),} \quad \gamma(r) \geq 0,\ \int_0^\rho \gamma(r)\delta(r)dr = 1.$$

Теорема. Если параметрическая функция $\gamma(r)$ кусочно-постоянная: $\gamma(r) = \gamma_i$ при $\rho_{i-1} < r < \rho_i$, и $\Sigma\gamma_i\delta_i = 1$, то нормированная гистограмма $g_1,\ldots,g_k$ является ОМП для величин $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$.

Изотропное поле точек со стационарными расстояниями

- Бактерии в чашечке Петри по Феллеру





Прогноз изотропных полей со стационарными расстояниями

- Выборка $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} = \mathbf{X}_n$ с п.р. $w(\mathbf{X}_n)$.

П.р. новой точки $\mathbf{x}_{n+1}$ при известных точках $\mathbf{X}_n$:

$$\boxed{h(\mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{X}_n) = \frac{w(\mathbf{X}_{n+1})}{w(\mathbf{X}_n)} = c_n \Pi_{\alpha=1}^{n} \gamma(r_{\alpha,n+1}).}$$

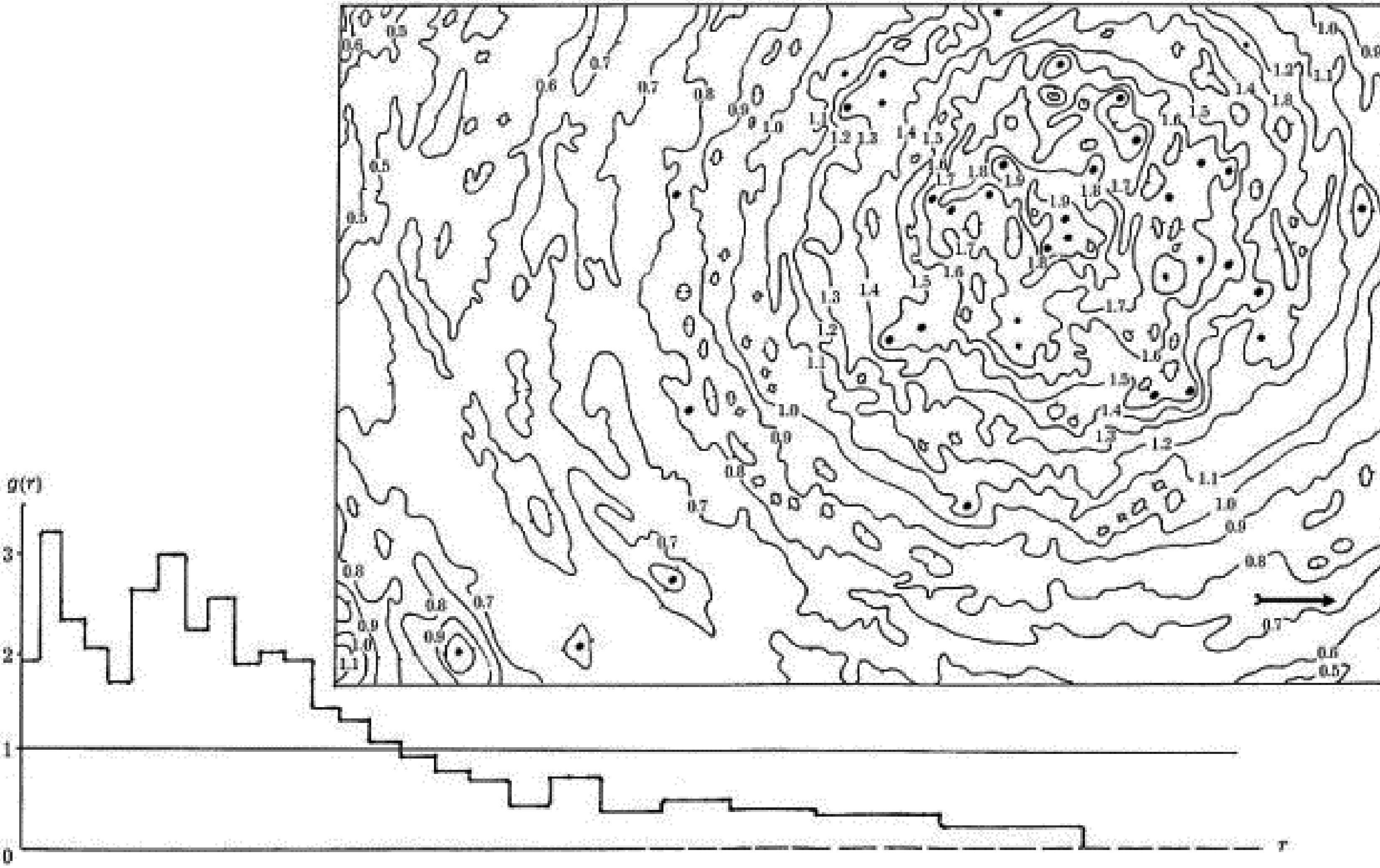
Она достигает максимума там же, где её логарифм

$$\log h(\mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{X}_n) = \log c_n + \Sigma \log \gamma(r_{\alpha,n+1}).$$

Константа $\log c_n$ не зависит от $\mathbf{x}_{n+1}$, её опустим. Чтобы не зависить от n, осредним логарифмы и получим прогнозную функцию

$$\boxed{f(\mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{X}_n) = \Pi_{\alpha=1}^{n} [\gamma(r_{\alpha,n+1})]^{1/n}.}$$

Прогноз кимберлитовых трубок
в алмазоносном поле



Анизотропное поле точек со стационарными разностями

- При $p \geq 2$ разности $\mathbf{h}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta \in \chi$.

Модель анизотропного поля точек со стационарными разностями строится аналогично. П.р, точек равна

$$\boxed{w(\mathbf{X}_n) = u(\mathbf{X}_n)\Pi_{\alpha<\beta}\gamma(\mathbf{h}_{\alpha\beta}),} \gamma(\mathbf{h}) \geq 0, \int_\chi \gamma(\mathbf{h})\delta(\mathbf{h})d\mathbf{h} = 1,$$

где $\delta(\mathbf{h})$ есть п.р. вектора $\mathbf{h}$ в χ.

Теорема об ОМП справедлива, как и условная п.р.

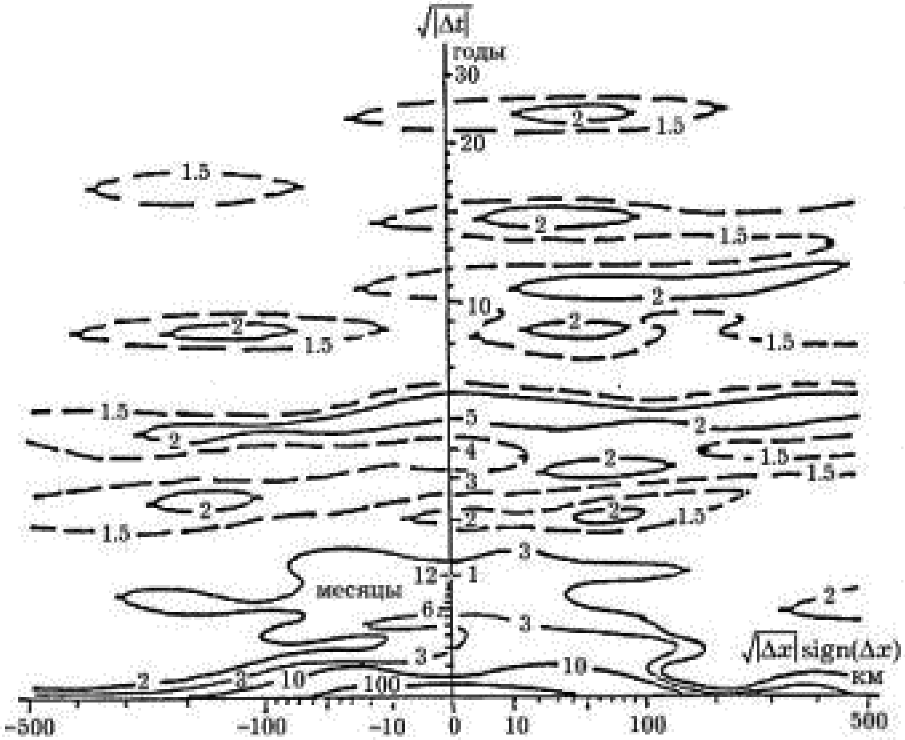
$$\boxed{h(\mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{X}_n) = w(\mathbf{X}_{n+1}) / w(\mathbf{X}_n) = c_n \Pi_{\alpha=1}^n \gamma(\mathbf{h}_{\alpha,n+1}).}$$

Из неё получаем прогнозную функцию

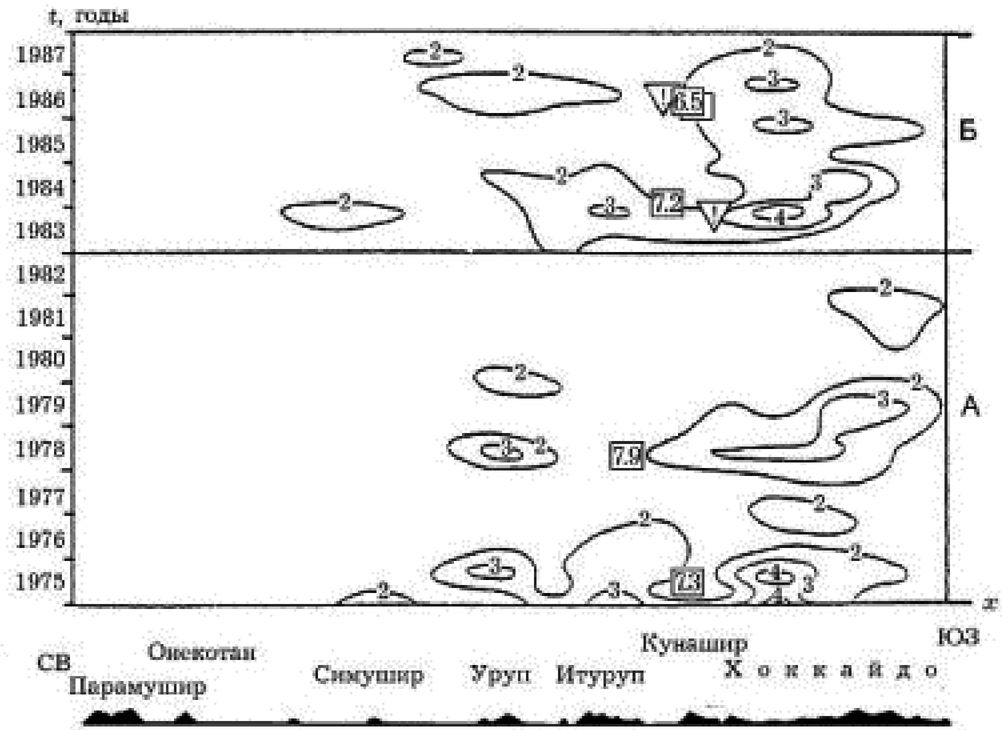
$$\boxed{f(\mathbf{x}_{n+1} \mid \mathbf{X}_n) = \Pi_{\alpha=1}^n [\gamma(\mathbf{h}_{\alpha,n+1})]^{1/n}.}$$

Курильские острова, 1982

g-функция

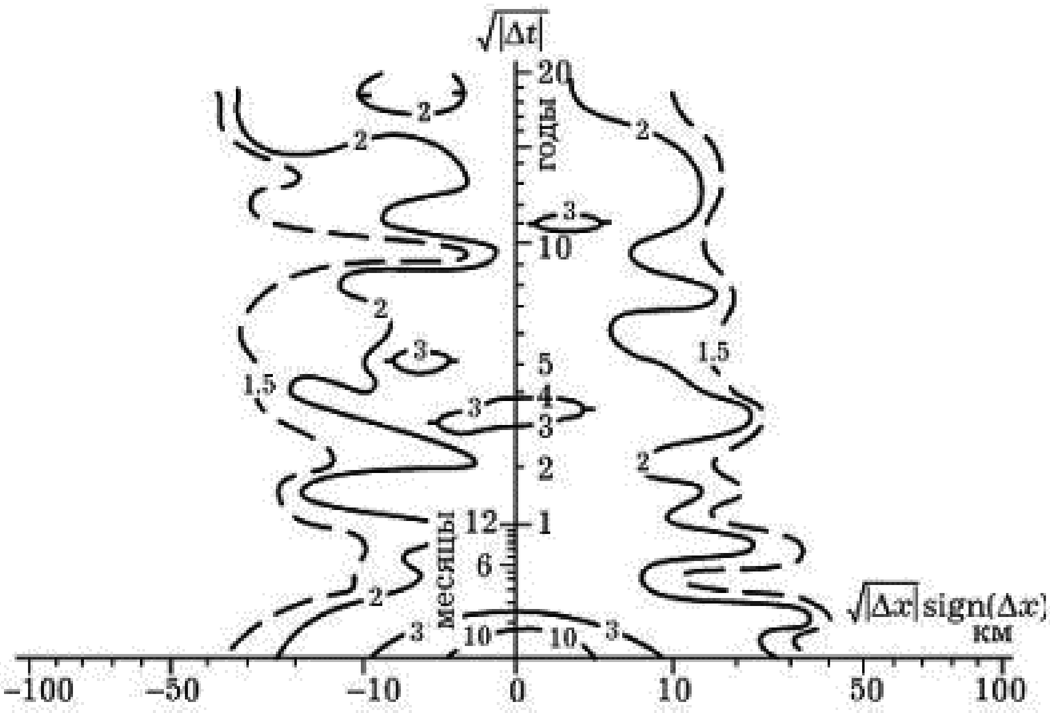


прогноз

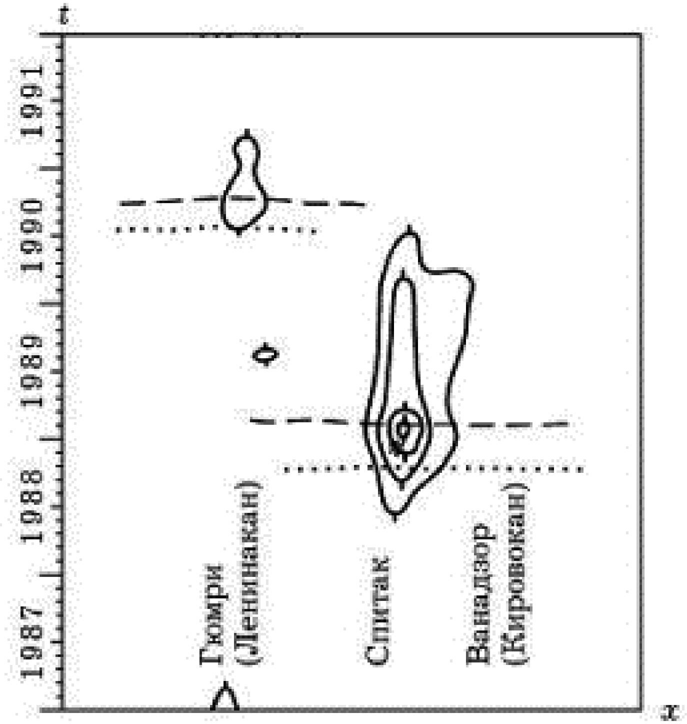


Спитак, 1988

g-функция



ретропрогноз



Личный рекорд

Директор Ин-та вулканологии акад. С.А.Федотов Ректору МГУ академику В.А.Садовничему.

«…10 декабря 1998 г. А.М.Шурыгин со студентами демонстрировали мне на дисплее компьютера зависящие от времени прогнозные функции для разных зон Камчатки на 1999 г. и обратили внимание на опасность для Петропавловска-Камчатского 8 марта 1999 г.. И именно в этот день там произошли два землетрясения с магнитудами 7,0 и 5,7. Они были сильнейшими землетрясения-ми на Камчатке за прошедший год. Такая точность сделанного прогноза --- указана дата за три месяца --- является высокой для мировой практики прогноза землетрясений… »

Примеч.: это землетрясение сильнейшее до сих пор!

Некоторые выводы

Сильные землетрясения предопределены последовательностью предшествовавших умеренных.

Никакие подкоровые движения не могут работать с такой точностью, но может небесная механика, что было ясно после работ Кельвина в XIX веке.

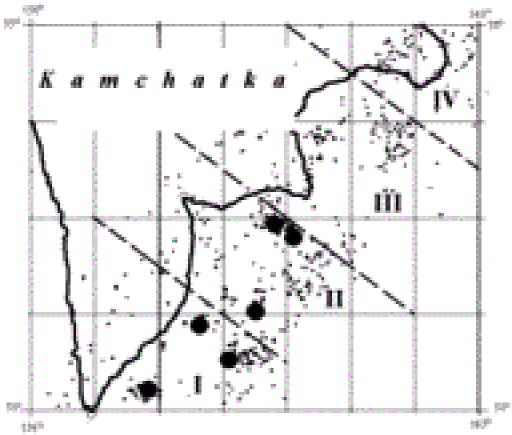
Классическая механика не объясняет механизм образования землетрясений, а Воронков может объяснить, что такое землетрясение.

Приливная теория Ньютона требует коррекции.

Можно искать лучшую линейную функцию землетрясений – предикторов.

Internet: www.ccas.ru/cito/eq.

Скользящий нейрон
и прогноз сильных землетрясений



Задача:

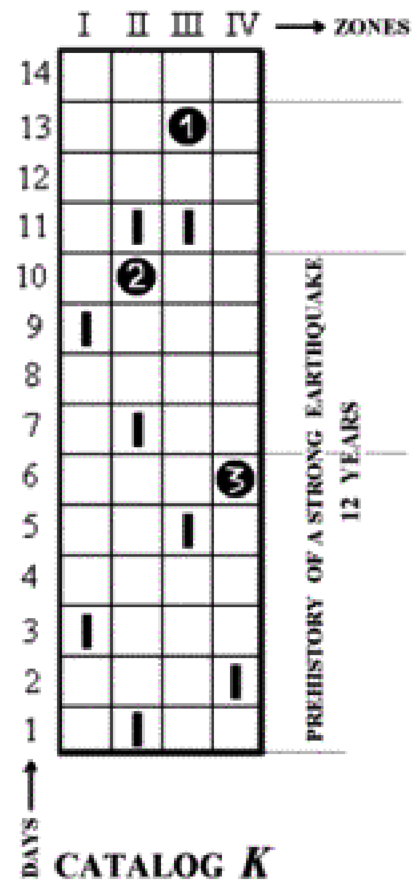
Линейный регион с сильными и умеренными землетрясениями (ЗТ). Предсказать сильные ЗТя по предшествовавшим умеренным.

Гипотеза:

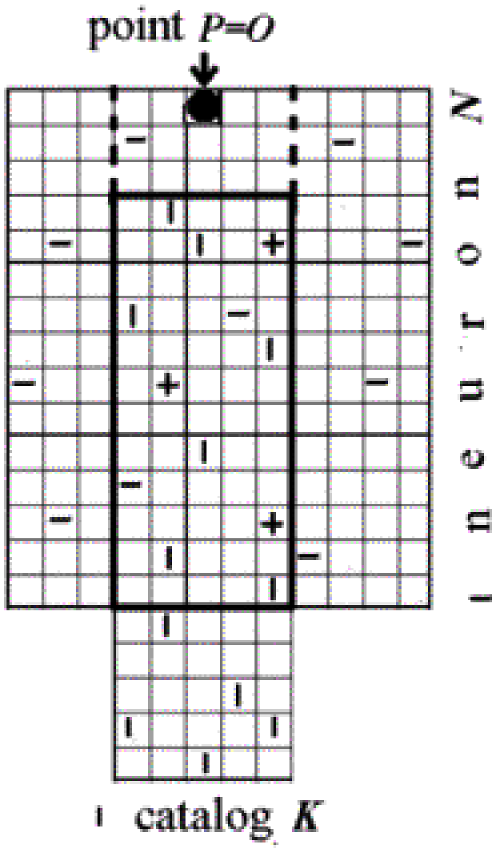
Сильные ЗТя имеют похожую предысторию

Простейшее решение.

Множество ЗТий (зона, день) образует булеву матрицу-каталог →



Прогноз в точке скользящим нейроном



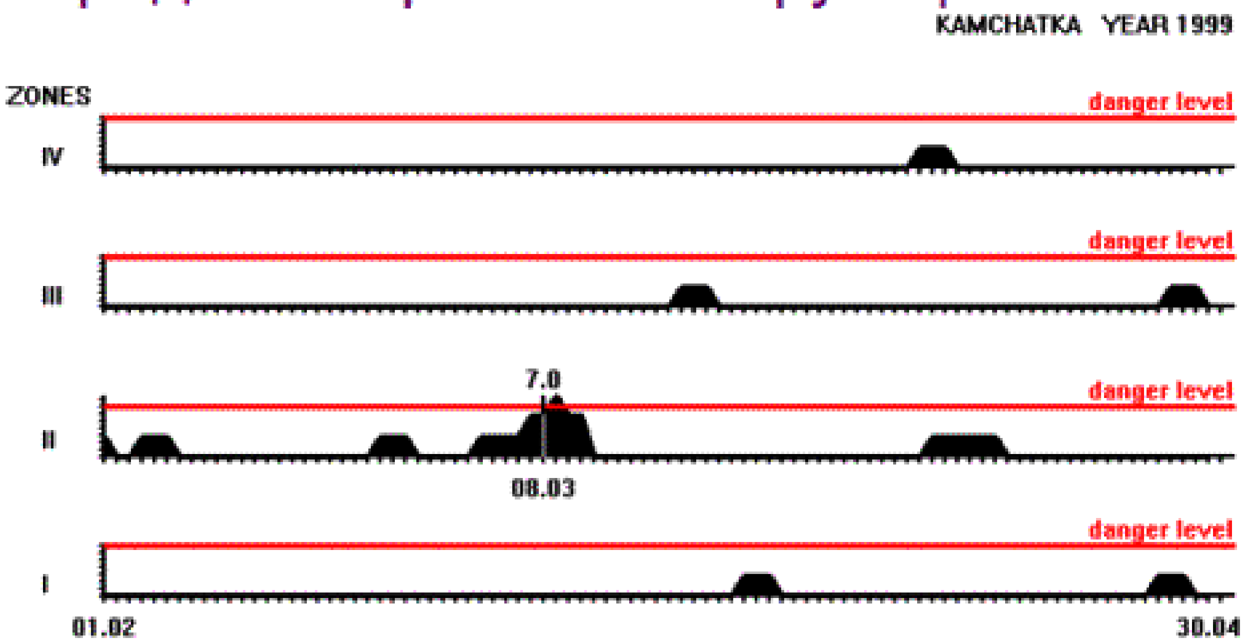
Прогнозная функция $d(P) = c \cdot K \underset{w}{\otimes} N$,

$\underset{w}{\otimes}$ знак скалярного умножения

со скользящим окном w,

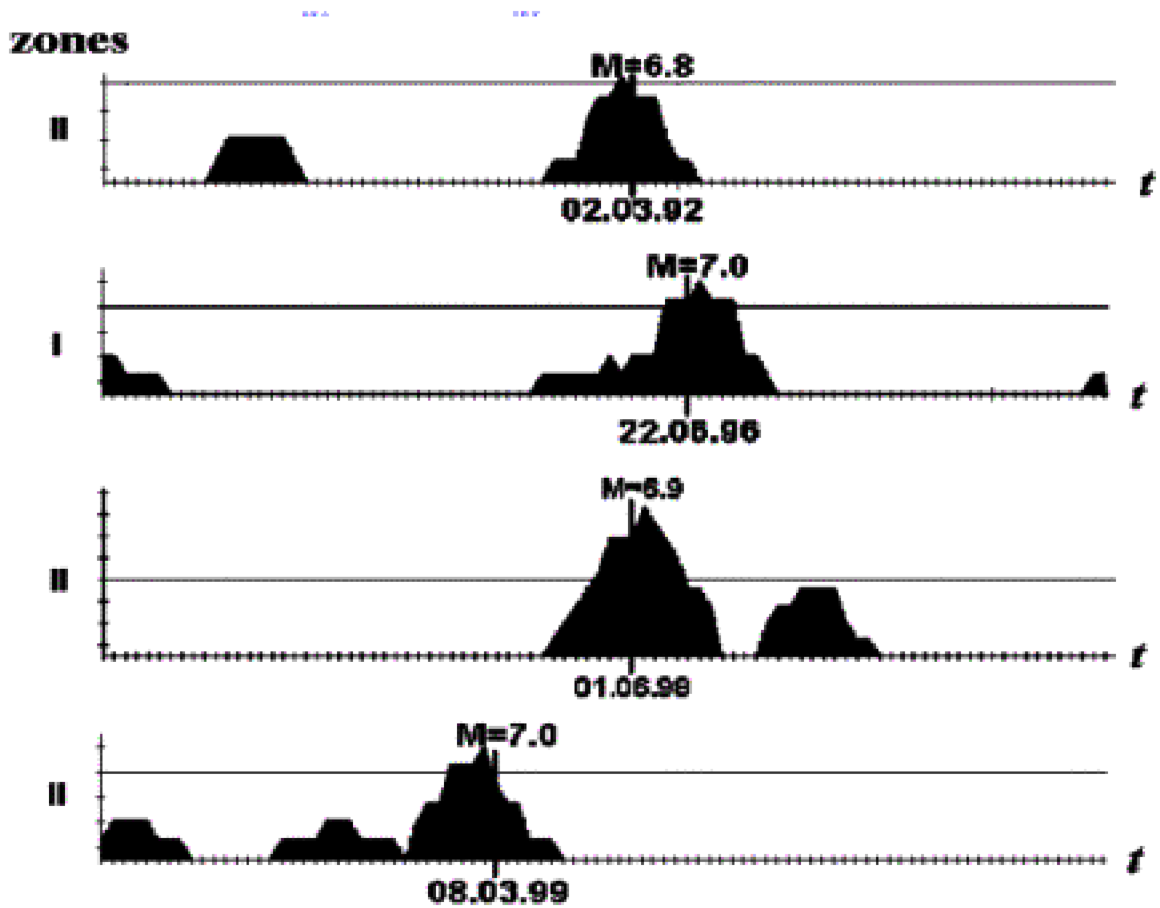
c определяет уровень опасности.

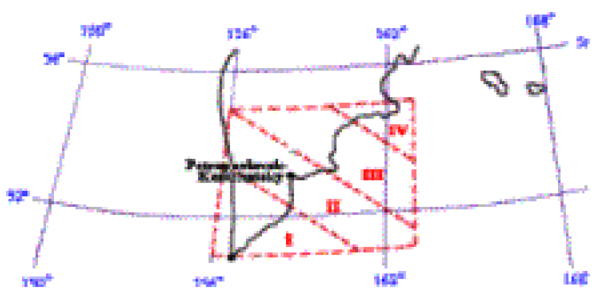
Нейрон скользит точкой O в будущем, определяя прогнозные функции зон:



Камчатка:

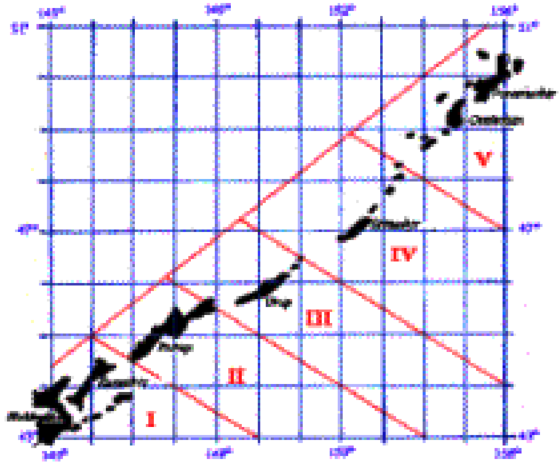
Прогнозные функции для предсказуемых землетрясений. Горизонтальные Оси *t* градуированы в сутках.

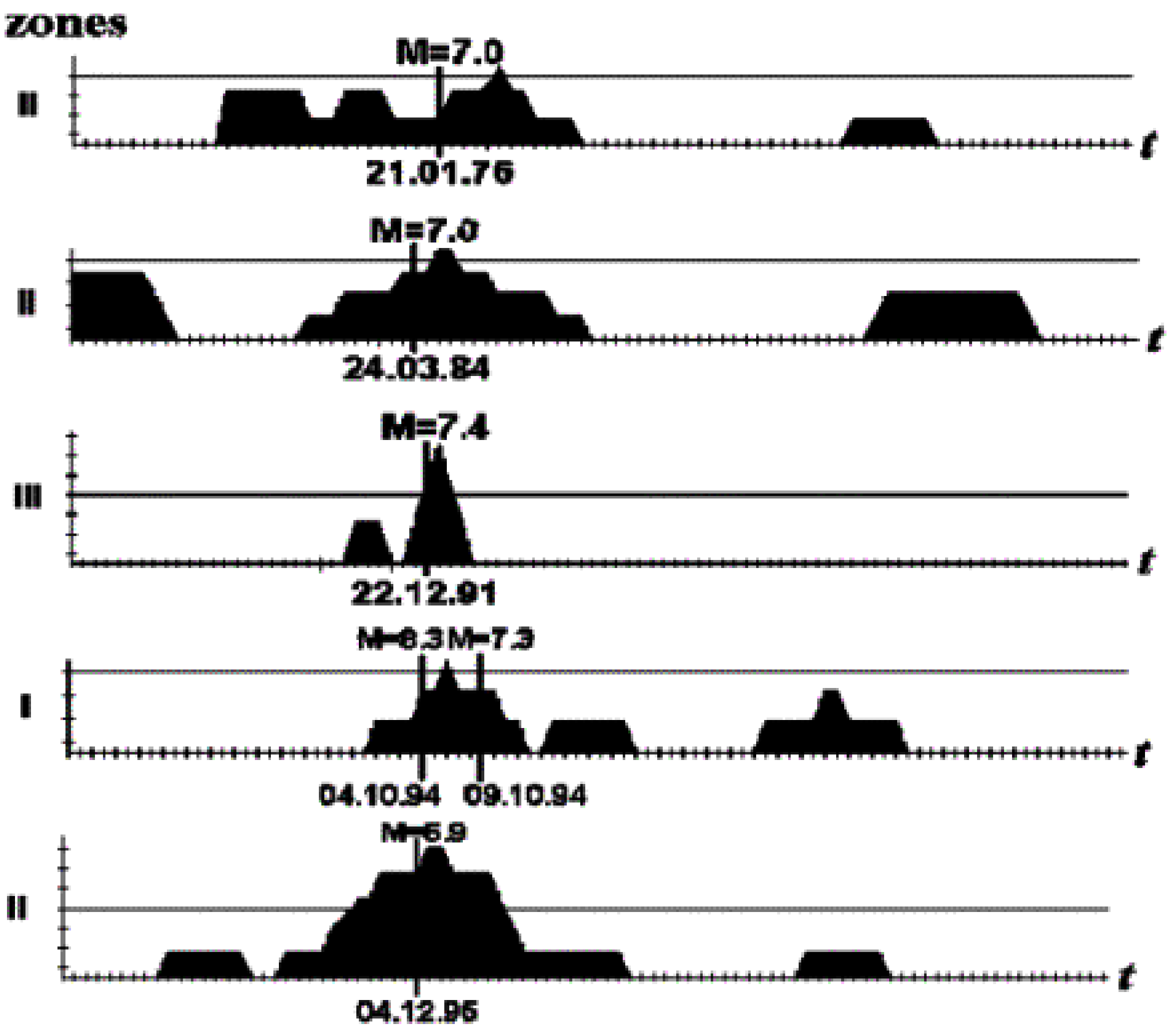




Курильские острова

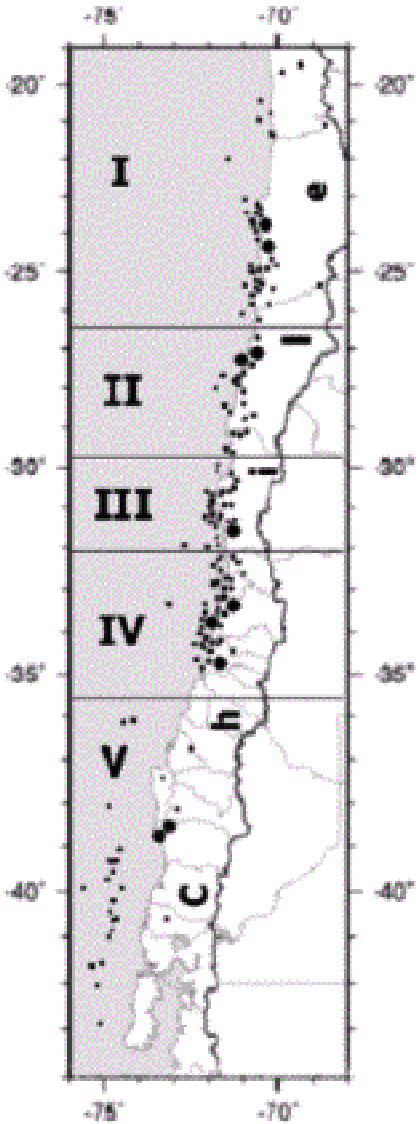
Прогнозные функции для предсказуемых землетрясений. Горизонтальные Оси *t* градуированы в сутках.

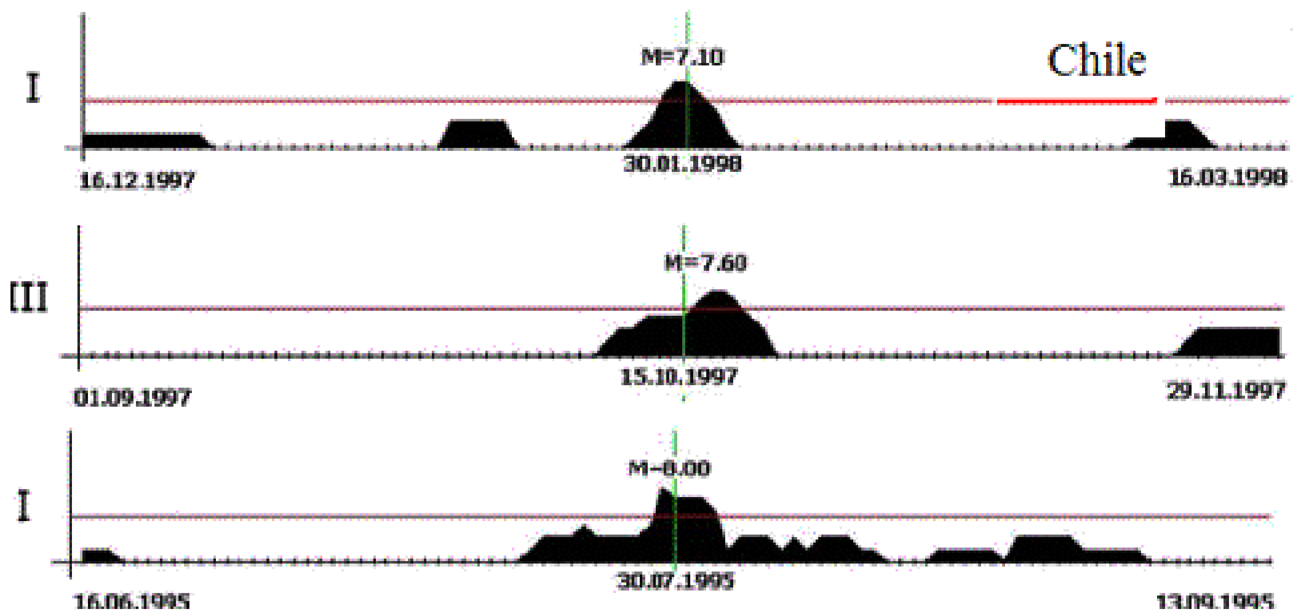




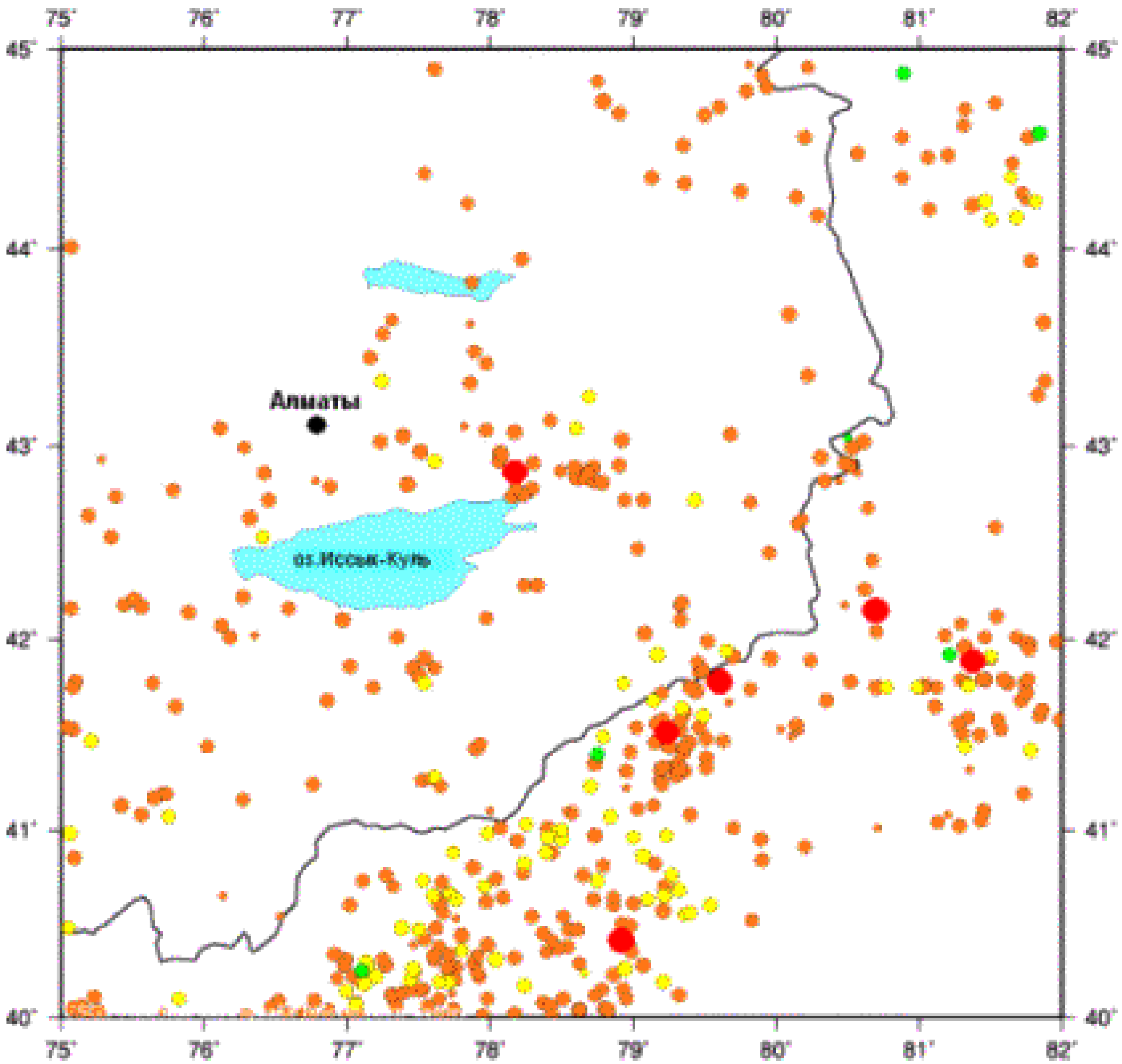
Чили

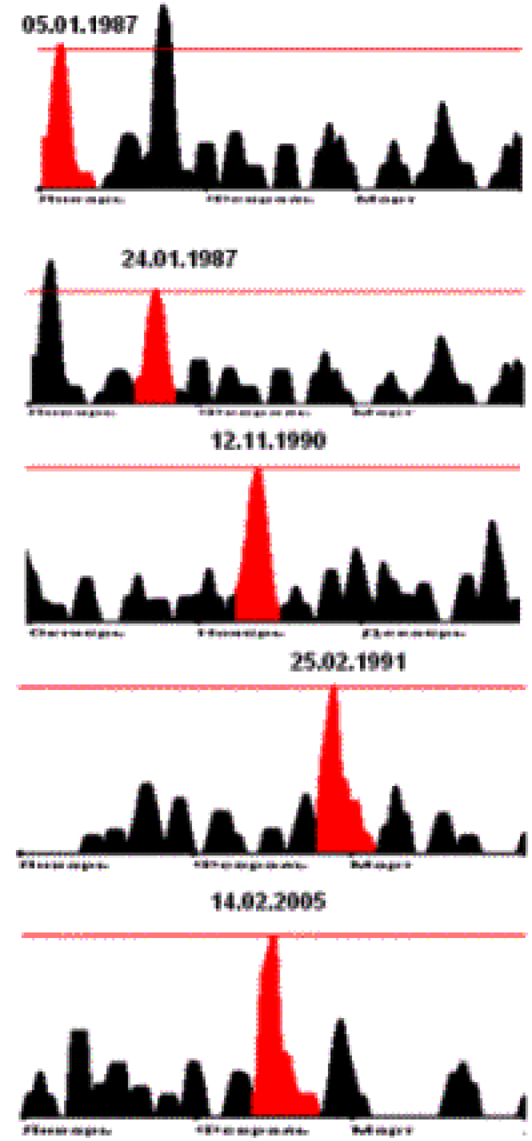
Прогнозные функции для предсказуемых землетрясений. Горизонтальные оси *t* градуированы в сутках.





Южный Казахстан





sliding_window=3

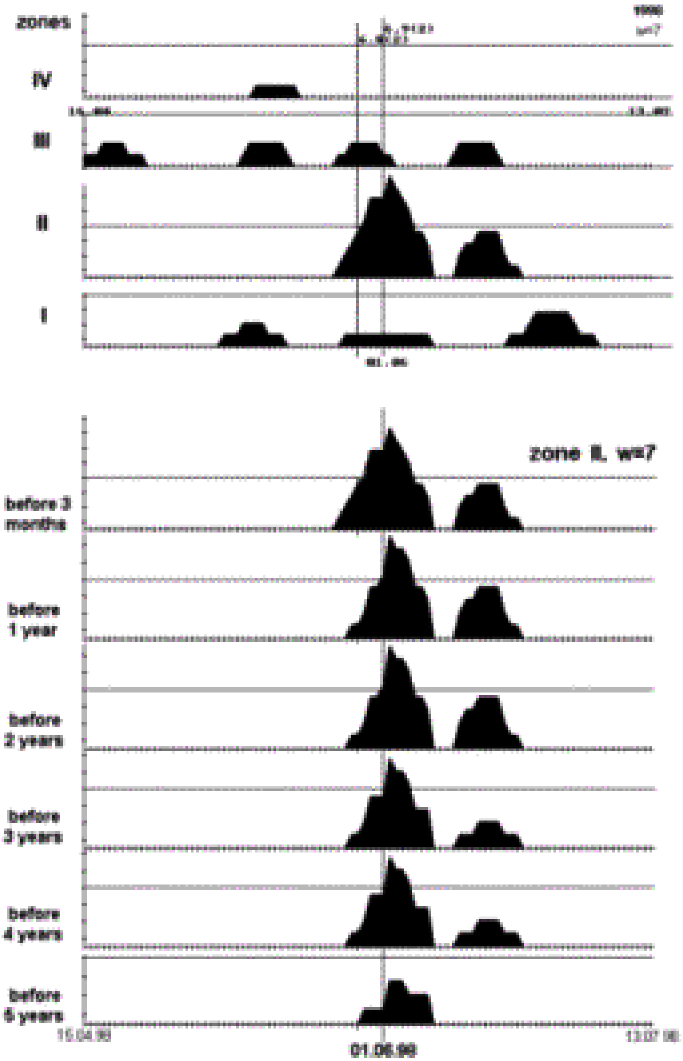
Результаты скользящего экзамена

регион	количество сильных землетрясений	количество прогнозируемых сильных землетрясений	ответственный за регион
Камчатка	6	4	М.Стригунова
Курилы	9	6	
Алеуты	8	6	
Чили	5	4	Т.Крупнова
Ю. Казахстан	6	5	Р.Сатаев

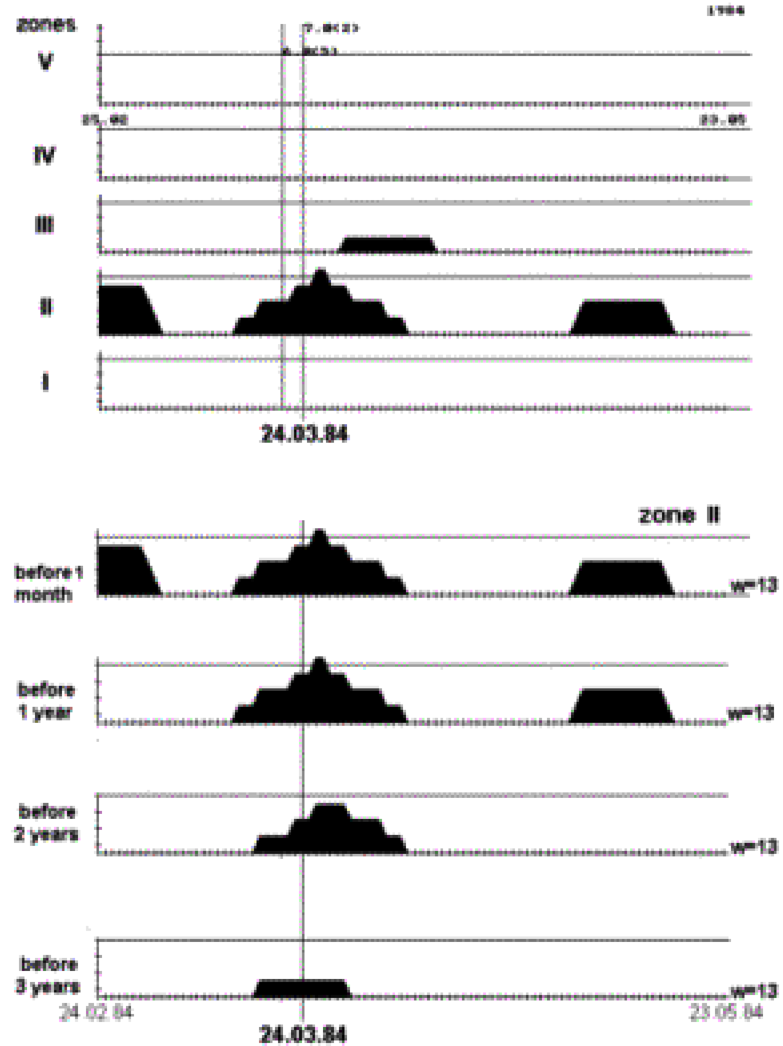
70% сильных ЗТй прогнозируются на скользящем экзамене
Прогноз с точностью до номера зоны.
Максимальная ошибка по времени ±3 дня.
Нет ложных тревог!

Долгосрочный прогноз

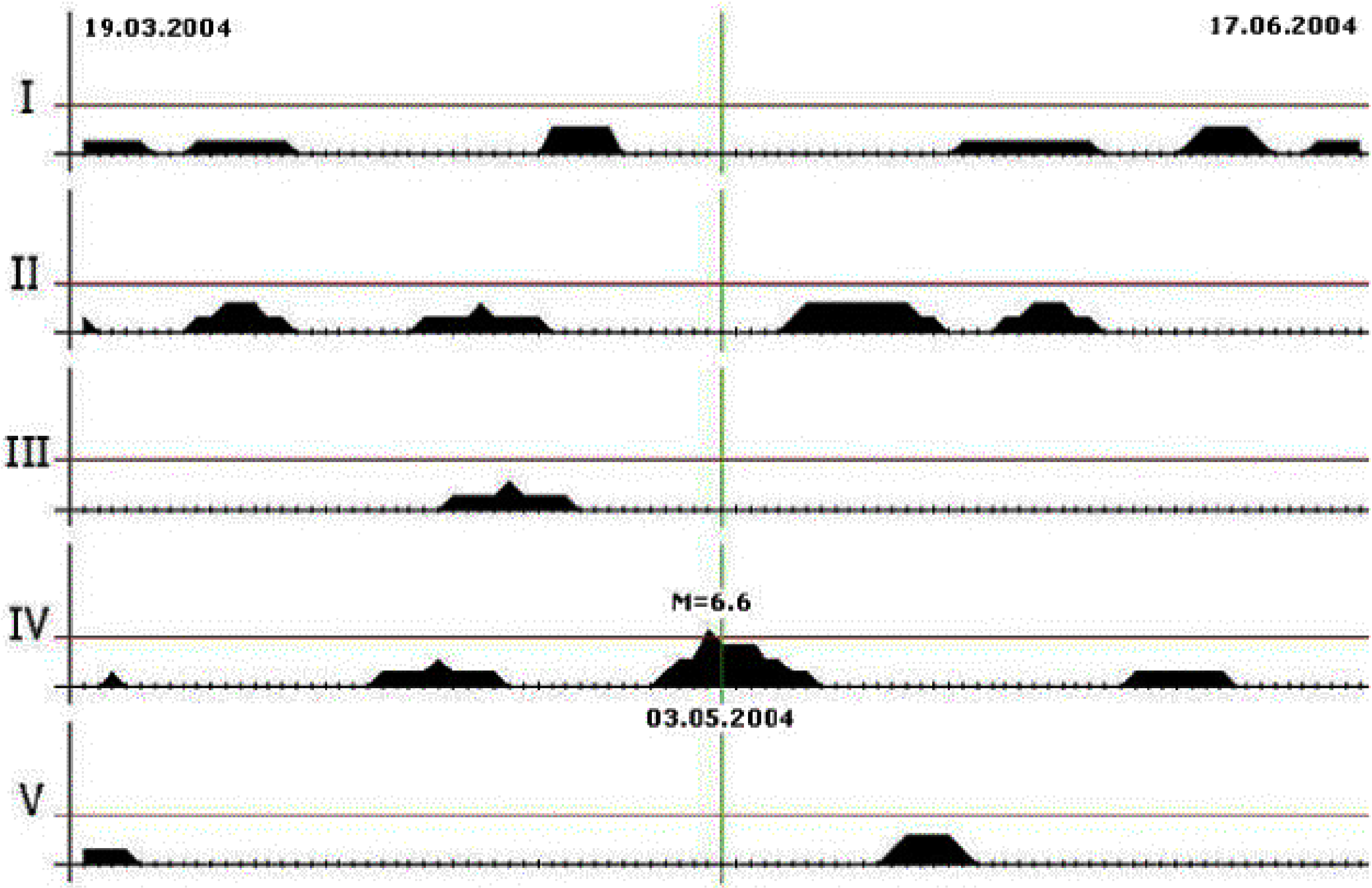
Камчатка



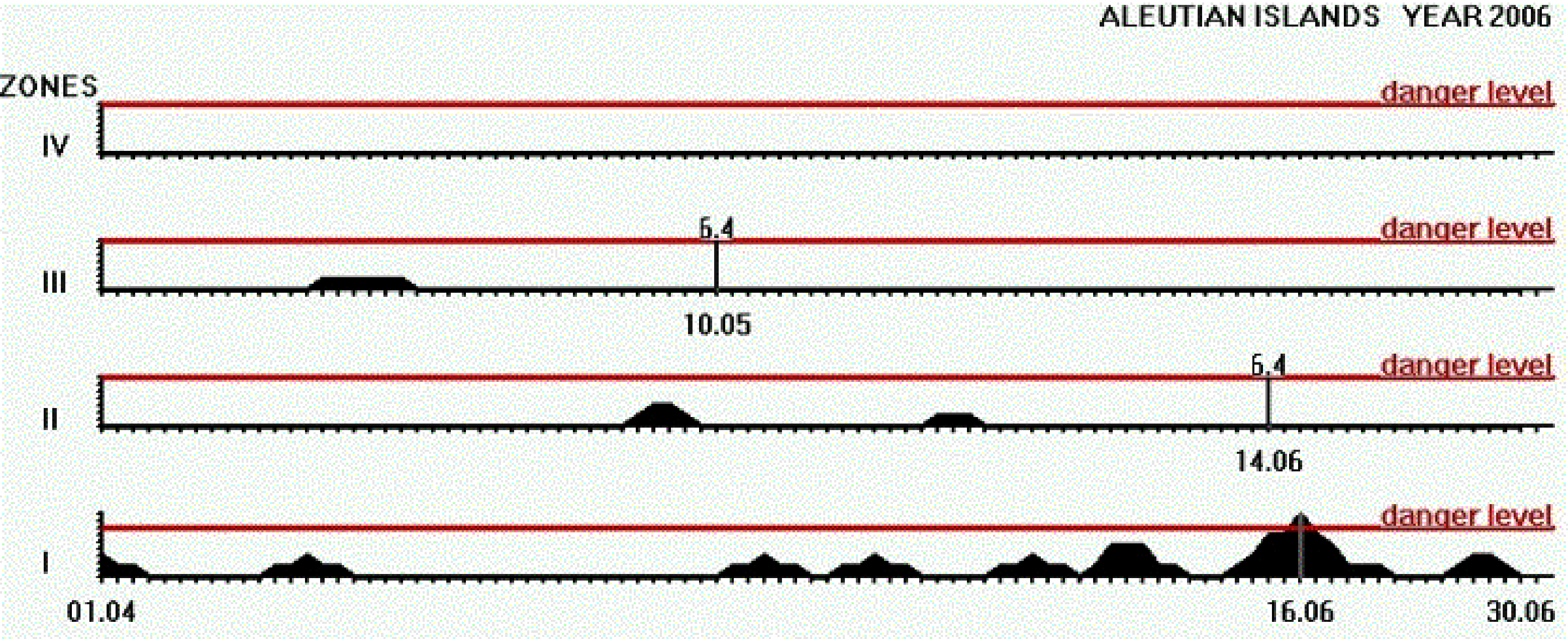
Курильские острова



Землетрясение 03.05.2004 в Чили (по Т.Крупновой)



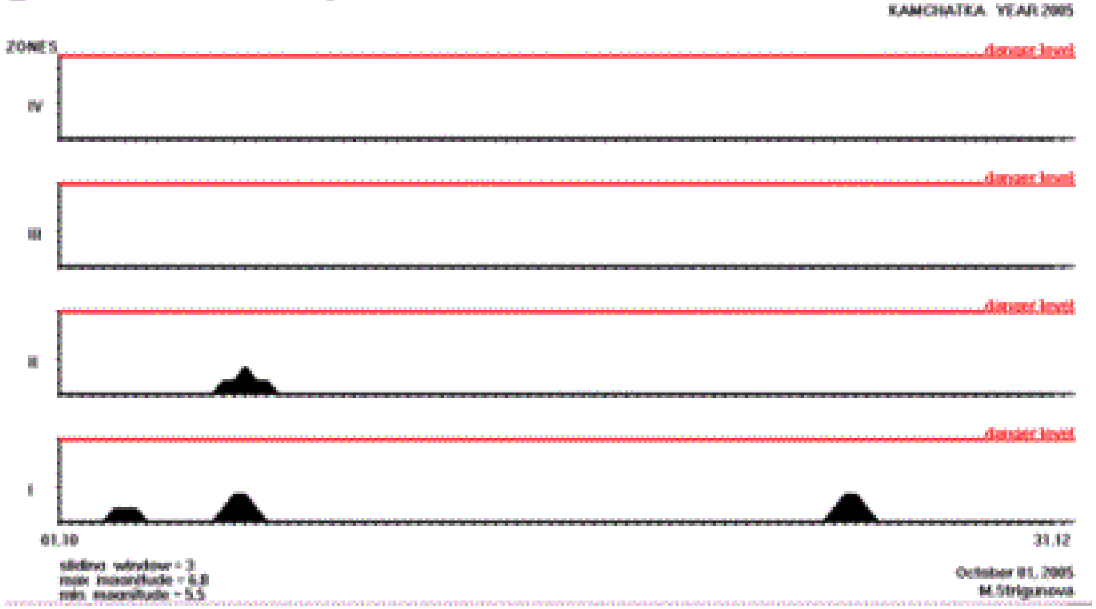
Землетрясение 14.06.2006
на Алеутских островах
(по М.Стригуновой)



Дискуссия с МЧС РФ относительно сейсмического прогноза на Камчатке в 2005 году

МЧС в октябре по ТВ: ожидается сильнейшее землетрясение с количеством жертв 60000.

А.М.Шурыгин по «Радио России» на основании прогнозных функций: такого землетрясения не будет.



В 2005 году на Камчатке не было ни сильных, ни умеренных землетрясений.

Оценка плотности распределения

Симметричная п.р. Составляет $f(x) = f(-x)$,
её МТР $h_{\alpha\beta} = x_\alpha - x_\beta$ имеют п.р.

$$v(h) = \int_{\mathrm{R}^1} f(x) f(x-h) dx =$$

$$= \int_{\mathrm{R}^1} f(x) f(h-x) dx = f * f.$$

$$F(v) = F(f * f) = [F(f)]^2.$$

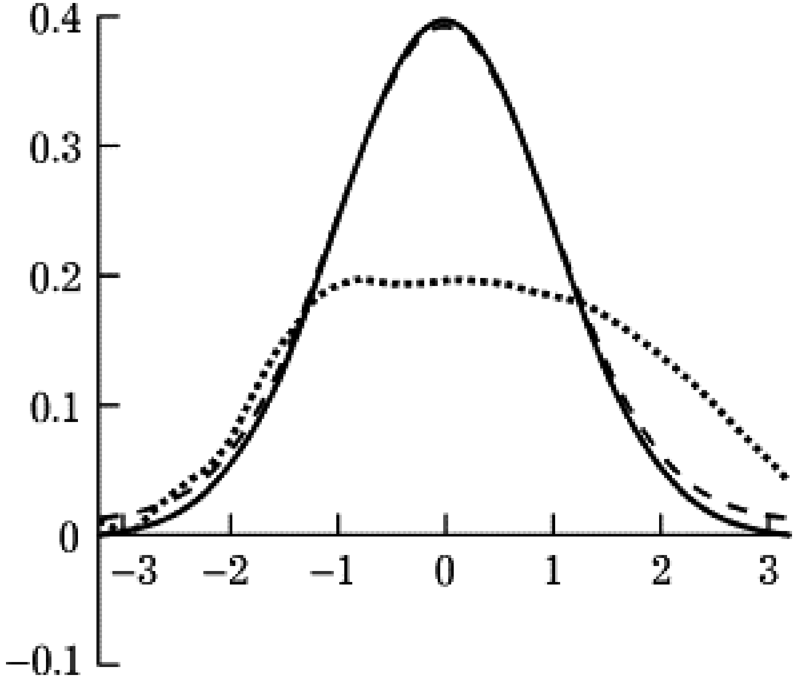
$$\text{Пусть } F(v) \geq 0:$$

$$\sqrt{F(v)} = F(f),$$

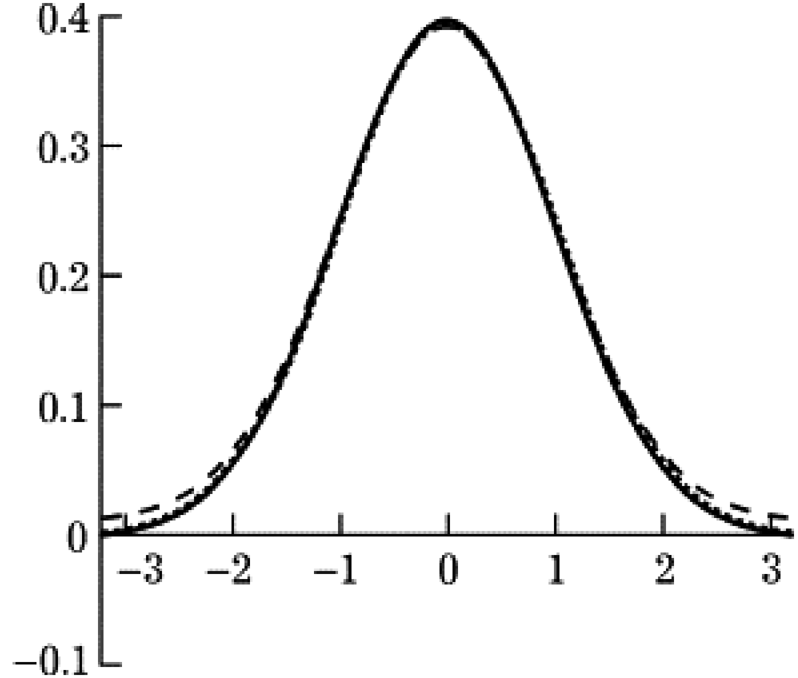
$$F^{-1}[\sqrt{F(v)}] = f.$$

Моделирование гистограмм для нормального распределения

$$n_1 = n_2 = 100$$



$$n_1 = 100, \; n_2 = 10000$$



МТР в распознавании образов

Теорема. Точки первого класса $\mathbf{x}_1^1,\ldots,\mathbf{x}_{n_1}^1 \in Q_1 \subseteq \mathbf{R}^p$ и точки второго класса $\mathbf{x}_1^2,\ldots,\mathbf{x}_{n_2}^2 \in Q_2 \subseteq \mathbf{R}^p$ имеют п.р., абсолютно непрерывные относительно меры Лебега. Тогда МТР $r_{\alpha\beta}^{\times} = \| \mathbf{x}_\alpha^1 - \mathbf{x}_\beta^2 \|$, $\alpha = 1,\ldots,n_1$, $\beta = 1,\ldots,n_2$, асимптотически ($n_1, n_2 \to \infty$) попарно независимы.

Заметим, что теорема верна и для зависимых точек. Используем теорему для проверки гипотезы о разделимости двух классов.

Проверка разделимости классов

$D_1(r)$ - функция распределения (ф.р.) МТР в I классе,

$D_2(r)$ - ф.р. МТР во II классе,

$D_\times(r)$ - ф.р. МТР между классами.

Соответствующие количества МТР обозначим через $m_1, m_2, m_\times, m_+ := m_1 + m_2$, а через $D_+(r)$ ф.р. m_+ внутриклассовых МТР. Через $D_\bullet^*$ будем обозначать эмпирические ф.р. Если распределения классов совпадают, то совпадают все ф.р. Если не совпадают, то наибольшая разница будет между D_+ и $D_\times$.

Многомерная задача свелась к одномерной, можно пользоваться критериями согласия, их много.

Критерий Колмогорова-Смирнова

При совпадении распределений величина

$$A_{m_+, m_\times} = \sqrt{\frac{m_+ m_\times}{m_+ + m_\times}} \max_r | D_+^* - D_\times^* |$$

имеет асимптотически ($n \to \infty$) табулированное распределение Колмогорова.

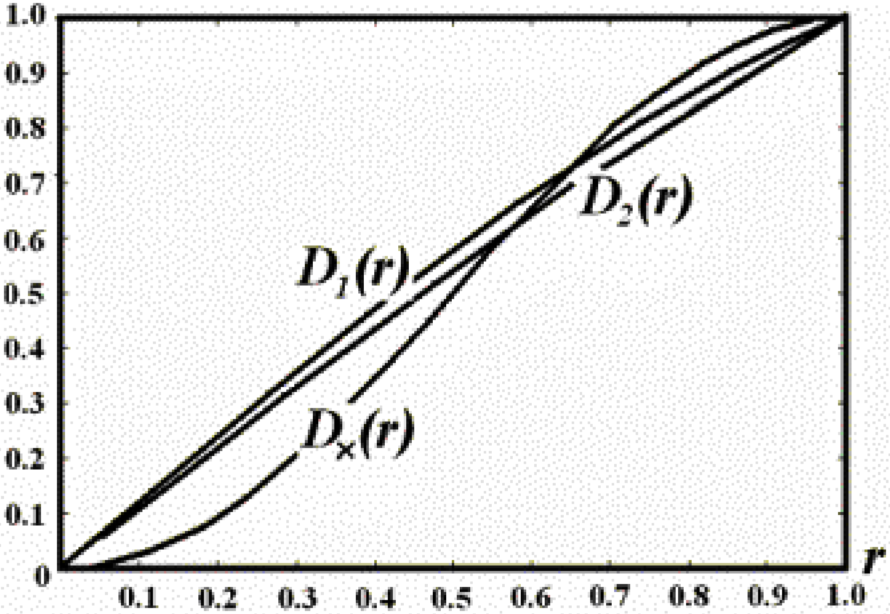
Выбор оптимального радиуса

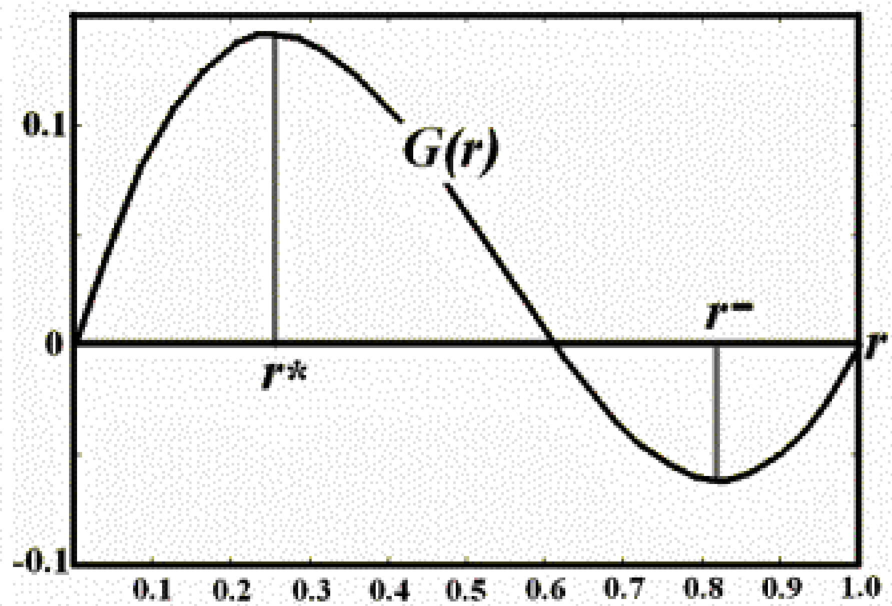
Классифицируемую точку $\mathbf{x}^?$ сделаем центром шара радиуса r и отнесём её к классу, преобладающему в шаре (прямая классификация) или к другому классу (обратная классификация для чередующихся точек).

Пусть $\mathbf{x}^? = \mathbf{x}^1$. Тогда вероятность того, что следующая точка тоже $\mathbf{x}^1$, равна $D_1(r)$, а вероятность того, что она $\mathbf{x}^2$, равна $D_\times(r)$. Осреднив эти разности по классам, получим функцию

$$G(r) = [D_1(r) + D_2(r)]/2 - D_\times(r).$$

Радиус $r^* = \arg\max_r G(r)$ наилучший для деления «компактных» классов, а величину $d = G(r^*)$ можно назвать компактностью классов. Если $|G(r^-)| > G(r^*)$, где $r^- = \arg\min_r G(r)$, то обратная классификация будет более эффективной, чем прямая, она может быть полезной в задачах микробиологии. Величину $d^- = |G(r^-)|$ можно назвать смешанностью классов. Для определённости будем говорить о прямой классификации .


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
r
D1(r)
D2(r)
D×(r)


0.1
0
-0.1
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
r
G(r)
r*
r**

Отбор информативных признаков

Если гипотеза о совпадении распределений отвергается, то полезно избавиться от «шумовых» признаков. Изложенное даёт для этого два способа.

1) Максимизировать разобщённость d.

2) Максимизировать статистику Колмогорова-Смирнова или другой критерий согласия.

Оценка качества решения

Оценка погрешности $D_{\times}(r^{*})$ имеет преимущества перед традиционными методами.

Цепь разнородных импульсов

На окружности импульсы k родов $a_1,\ldots,a_k$ в количестве $n_1,\ldots,n_k$, $\Sigma n_i = n$, $n_i / n = p_i$. Количество переходов от импульса a_i к импульсу a_j обозначим n_{ij}.

В **тривиальной цепи разнородных импульсов (ТЦРИ)** импульсы независимы и равномерно распределены на окружности.

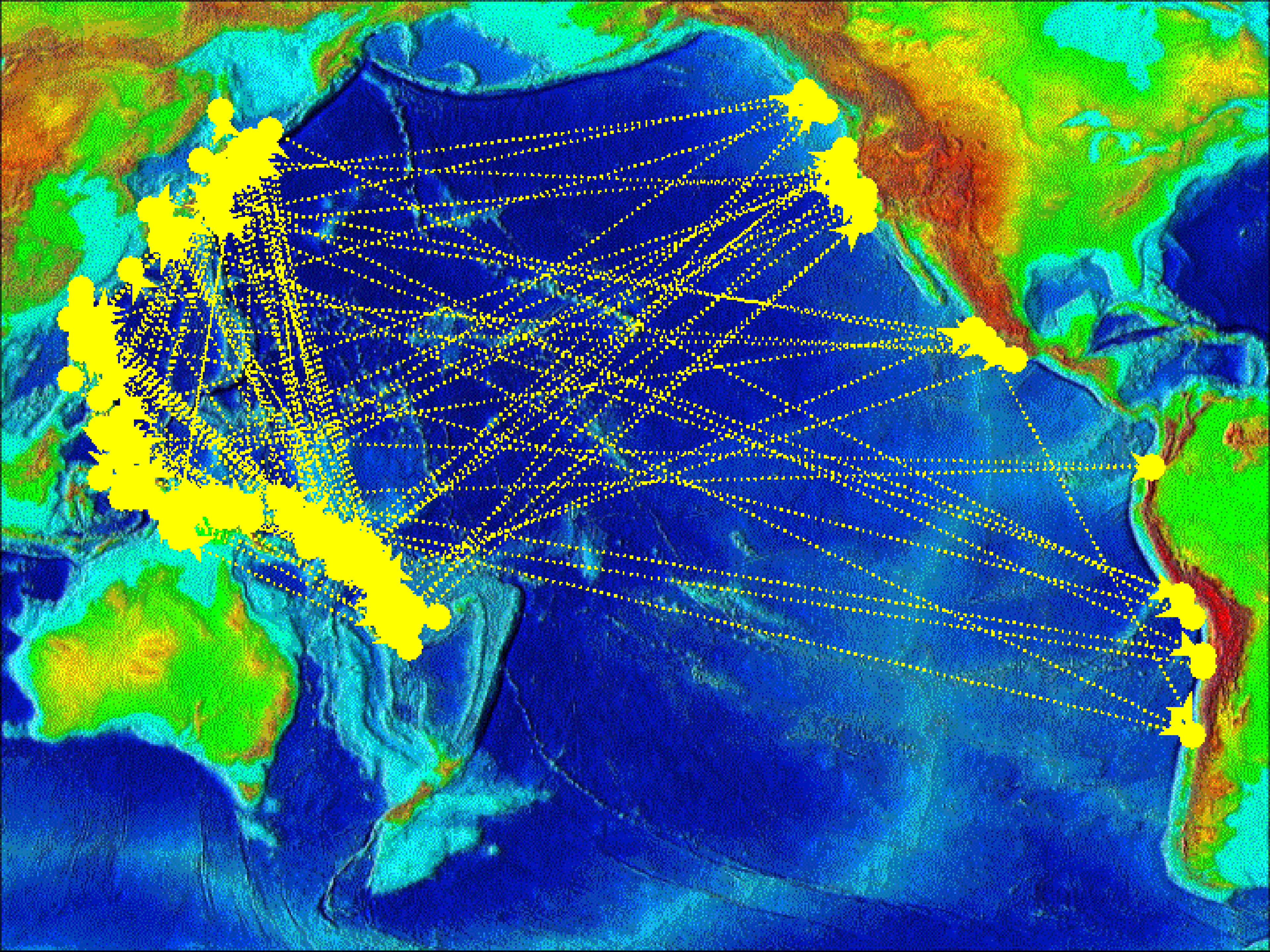
Теорема. В ТЦРИ $\mathrm{E}n_{ij} = n_i p_j$,

$$\mathrm{D}n_{ij} = n_i p_j (1 - p_j),$$

$$\mathrm{Cov}(n_{ij}, n_{il}) = -n_i p_j p_l \quad \text{при } j \neq l.$$

Если импульсы *i*-го рода не зависят от остальных, то по критерию Пирсона

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - n_i p_j)^2}{n_i p_j} = \chi^2_{k-1}$$



Литература

Шурыгин А.М. Статистика при подсчёте запасов месторождений. Изд. МГУ, 1978

Шурыгин А.М. Прикладная стохастика: робастность, оценивание, прогноз. «Финансы и статистика», 2000

Стригунова М.С., Шурыгин А.М. Скалярное умножение матриц со скользящим окном и прогноз землетрясений. //Автоматика и телемеханика, №7, 2004, с.27-34

http://www.ccas.ru/cito/eq