Дополнительные главы уравнений в частных производных

Михаил Михайлович

Лекция 1

А.В. Бицадзе – Курс лекций

Пример Адамара о некорректности задачи Коши для ур-ния Лапласа.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,y)\big|_{y=0} = 0 \\ u_y(x,y)\big|_{y=0} = \dfrac{\sin nx}{n} \end{cases}$$

$u(x,y) = Y(y)\sin nx$

$Y'' \sin nx - n^2 Y \sin nx = 0$

$$\begin{cases} Y'' - n^2 Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow Y(y) = c_1 e^{-ny} + c_2 e^{ny}$$

$Y(y) = c_1 \,\mathrm{sh}\, ny + c_2 \,\mathrm{ch}\, ny$

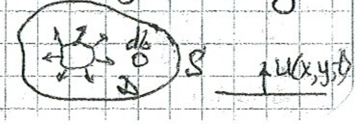
$c_2 = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{n}\,\mathrm{sh}\, ny \sin nx$

При увеличении n начальное условие $\to 0$, а решение растет!

Лекция 2

Вывод уравнений в ЧП

Уравнение колебаний мембраны (пленка, кот. в положении равновесия имеет плоскую форму, натянутая на контур S)



Вариационный метод: посчитать T_k (кинетическая энергия), T_p (потенциальная)

Дано: плотность ρ, коэф-т натяжения k

$L = \int_{t_1}^{t_2} (T_k - T_p)\,dt$. Этот ф-ал достигает min

$T_k = \iint_D \rho \frac{u_t^2}{2}\,d\sigma$, $T_p = \{\iint_D k\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,d\sigma - \iint_D 1\cdot k\,d\sigma\}$

$z = u(x,y,t)$ – поверхность

Предположение: $u_x^2, u_y^2 \ll 1$

$\Rightarrow \sqrt{1+u_x^2+u_y^2} \approx 1 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_y^2 \Rightarrow T_p = \iint_D k\,\frac{u_x^2+u_y^2}{2}\,d\sigma$

$\Rightarrow L = \int_{t_1}^{t_2}\iint_D \frac{1}{2}\left(\rho u_t^2 - k(u_x^2+u_y^2)\right)d\sigma\,dt$

Уравнение Эйлера:
$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx = V(y) \\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$ – вариац. задача

$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$

$V[u] = \iint_D F\left(x, y, u, \overset{p}{\frac{\partial u}{\partial x}}, \overset{q}{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)d\sigma$

Ур-ние Эйлера-Остроградского:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_p - \frac{\partial}{\partial y}F_q = 0$$

Запишем его для ф-ла L:

$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_t - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(k u_y) = 0$ (предполагаем, что $\exists$ вторые пр-ные ф-ции u всюду в обл-ти D!)

Если $\rho = const$, $k = const$, то $\Rightarrow$

$\rho u_{tt} - k(u_{xx} + u_{yy}) = 0$

$\boxed{u_{tt} = a^2 \Delta u}$, $a^2 = \frac{k}{\rho}$

Для струны: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ выводится аналогично

Условие закрепления: $u|_S = 0$

Начальное отклонение: $u|_{t=0}=\varphi(x,y)$, $u_t|_{t=0}=\psi(x,y)$

Ищем решение задачи в виде $u(x,y,t)=V(x,y)\cdot T(t)$

$\Rightarrow VT'' - a^2 T\Delta V = 0 \quad | : VT$

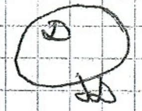
$\Rightarrow \frac{T''}{Ta^2} = \frac{\Delta V}{V} = -\lambda$

$TV|_S = 0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta V+\lambda V=0\\ V|_S=0\end{cases}$; $T''+\lambda a^2 T=0$

∡ трехмерную задачу: $u_{tt}=\Delta u$ $\quad \dim x=3$

Задача о колебаниях внутри эндовибратора:

1)



$u|_{\partial D}=0$

2) $x=x_1,x_2,x_3$ $\quad \mathbb{R}^3$

— область задания $\varphi(x)$, $\psi(x)$

задача ∡ в неогранич. области

Уравнение распространения тепла

∡ трехмерную област

с — удельная теплоемкость

ρ — плотность

k — коэф-т теплопроводности

Составим баланс тепла

$u(x,t)$ — температура, $\dim x=3$

$\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}ds$ — втекает тепло

$\iiint_\tau c\rho u_t\, d\tau$ — изменение температуры

По ф-ле Гаусса-Остроградского:

$\iiint_\tau \{\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) - c\rho u_t\}\, d\tau = 0 \Rightarrow \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) = c\rho u_t$

Пусть $k=const \Rightarrow \boxed{u_t = a^2\Delta u}$, $a^2=\frac{k}{c\rho}$

Ур-ние Кортевега де Фриза $\quad u_t - 6uu_x + u_{xxx}=0$

описывает движение уединенной волны

Краевые задачи

I) $u|_S = f(x,t)$

II) $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(x,t)$

III) $\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\Big|_S = h(x,t)$

Лекция 3 1/2

Классификация ур-ний в ЧП

Пусть $D\subset E^n$, $x=(x_1\ldots x_n)$, $n\geq 2$ и в области D ∡ ф-цию $F(x,\ldots,P_{i_1\ldots i_n},\ldots)$, $x\in D$ $\; i_j\geq 0$, $i_j\in N$

$P_{i_1\ldots i_n}$: $i_1+i_2+\ldots+i_n=k$, $\; k=0\ldots m$

Пусть $\frac{\partial F}{\partial P_{i_1\ldots i_n}}\neq 0$ для $i_1+\ldots+i_n=m$

Тогда $F(x,\ldots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}},\ldots)=0$ (1)

Если F — линейная ф-ция по $P_{i_1}\ldots P_{i_n}$, тогда

$Lu=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i_1\ldots i_n} A^{k}_{i_1\ldots i_n}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}} = f(x)\ \forall x\in D$ (2)

Если в (1) ф-ция линейна только отн. старшей производной, то ур-ние квазилинейное

Если $Lu=0$, то ур-ние однородное

$Lu=f(x)$, то ур-ние неоднородное

Решение ур-ние $Lu=0$ образуют линейное пр-во:

$$\begin{cases} Lu_1=0 \\ Lu_2=0 \end{cases} \Rightarrow L(\alpha u_1+\beta u_2)=0$$

$\forall\, Lu=f(x)$ $\forall$ решение ур-ние представимо в виде $u=\underbrace{u_f}_{\text{частное решение}}+\underbrace{V}_{\text{общее решение однородного ур-ние}}$

$Lu_f=f$, $u_f\in D_L$ - область опред. оператора L

Решение неоднородного ур-ние ! $\Leftrightarrow$ однородное ур-ние имеет только нулевое решение.

Дифф-ное ур-ние II порядка

$$Lu=\sum_{ij=1}^{n}A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x) \quad (3)$$

Если $A_{ij}=0$, то ур-ние вырожденное

Опр. Ур-ние (3) наз. гиперболическим в т. $x\in D$, если ~~..~~ один коэф-т $\alpha_i=-1$, а остальные $(n-1)$ равны $+1$

$\forall$ $Q(\lambda_1\ldots\lambda_n)=\sum_{ij=1}^{n}A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ - квадратичная форма

$$\begin{cases} \lambda_1=\lambda_1(\xi_1\ldots\xi_n) \\ \ldots \\ \lambda_n=\lambda_n(\xi_1\ldots\xi_n) \end{cases} \quad \frac{\partial(\lambda_1\ldots\lambda_n)}{\partial(\xi_1\ldots\xi_n)}\neq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{Q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i^2}_{\text{канонический вид}},\ \text{где } \alpha_i=\begin{cases}1\\-1\\0\end{cases} \quad (*)$$

"Закон инерции квадратичных форм" - кол-во положительных α_i и отрицательных не меняется

Опр. Ур-ние (3) явл. эллиптическим в т. x, если все α_i или $+1$, или -1.

Опр. Ур-ние (3) явл. параболическим в т. x, если ~~хотя бы~~ $\ast$ один $\alpha_i=0$.

Опр. Ур-ние (3) наз. ультра гиперболическим в т. x, если l коэф-тов $\alpha_i=-1$, а остальные $(n-l)$ - $+1$.

Опр. Ур-ние (3) наз. ультра параболическим в т. x если l коэф-тов $\alpha_i=0$, а остальные $\neq 0$.

Опр. Ур-ние (3) наз. гиперболическим (эллеп., парабол.) в области D, если оно гипер. (эллеп., параб.) в каждой т. области D

Приведение ур-ние (3) к каноническому виду во всей обл-ти возможно только при $n=2$.

$F=(F_1\ldots F_N)$

$F_1=(x\ldots P_{i_1\ldots i_n}\ldots)$ $\quad x\in E^n$ ~~...~~

$P_{i_1\ldots i_n}=(P^1_{i_1\ldots i_n}\ldots P^M_{i_1\ldots i_n})$;

Тогда равенство $F(x\ldots P_{i_1\ldots i_n})=0$, где $u=(u_1\ldots u_{N_1})$

$\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} u_k}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}\neq 0$, $i_1+\ldots+i_n=m$, явл. системой

$\Delta u = 0$ – ур-ние Лапласа

Лекция 5

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$ (1)

u, v – гармонические

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = 0$ (2)

Интегрируем (1) и (2) по обл-ти гармоничности:

(1): $\int_D \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right\} d\tau = \int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$

(2): $\int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) d\tau = 0$

Применим ф-лу Гаусса-Остроградского:

$\int_S u \frac{\partial u}{\partial n_s} ds = \int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$ (1)

$\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n_s} - u \frac{\partial v}{\partial n_s}\right) ds = 0$ (2)

Св-ва гармонических ф-ций:

1) Если $u|_S = 0$, то $u \equiv 0$ (из (1))

2) $\int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (Выберем в (2) $v = 1$)

Для разрешимости задачи Неймана надо потребовать $\int_S \varphi(x) ds = 0$ $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \varphi(x) \end{cases}$

Интегральное представление гармонической ф-ции по значениям на границе и значениям производной

Фундаментальное решение

В 3хмерном случае для ур-ния Лапласа $u = \frac{1}{r}$

$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = 0 \text{ – ур-ние Эйлера} \\ u = r^k \end{cases} \Rightarrow k = 0$

$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{(n-1)}{r} \cdot r \frac{du}{dr} = 0$

$r^2 \cdot k(k-1) r^{k-2} + (n-1) r \cdot k r^{k-1} = 0$

$k(k-1) + k(n-1) = 0$

$k + n - 2 = 0 \Rightarrow k = 2 - n \Rightarrow u = 1,\ u = \frac{1}{r^{n-2}}$

$E(r) = \begin{cases} -\ln r & n = 2 \\ \frac{1}{(n-2) r^{n-2}} & n > 2 \end{cases}$ – ФР (сингулярное)

$\Rightarrow E = \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, n > 2$

$\Rightarrow \int_S \left(E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_s} - u \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_s}\right) ds = \int_{|x-y|=\varepsilon} \left(E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} - u \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}\right) ds_\varepsilon$

$I_1 = \int_{|x-y|=\varepsilon} E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} ds_\varepsilon = E_\varepsilon(x,y) \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} ds_\varepsilon = 0$

$I_2 = \int_{|x-y|=\varepsilon} u(y) \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon} ds_\varepsilon = \int_{|x-y|=\varepsilon} u(x) \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon} ds_\varepsilon + \int_{|x-y|=\varepsilon} [u(y) - u(x)] \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon} ds_\varepsilon$

$\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{1}{r^{n-1}}$ $\quad u(x) \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon} ds_\varepsilon$

$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left\{E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_s} - u \frac{\partial E}{\partial n_s}\right\} ds$ (*)

! Теорема о среднем

Сфера радиуса R. Применим к ней (*). $E(x,y) = const$ на сфере $\Rightarrow$

$E(R) \int \frac{\partial u}{\partial n_{C_R}} dS_{C_R} = 0$ (по св-ву гар. ф-ций)

$\Rightarrow u(x) = \int_{C_R} \frac{1}{\omega_n} u \, dS_{C_R} \frac{1}{R^{n-1}} =$

$= \boxed{\frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{C_R} u(y) dS_y = u(x)}$ – Теорема о среднем по пов-ти сферы

$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{S_\rho} u(y)\,dS_y \Rightarrow \rho^{n-1} u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_\rho} u(y)\,dS_y \Rightarrow$

$\int_0^R \rho^{n-1} u(x)\,d\rho = \int_0^{R} \frac{1}{\omega_n} \int_{S_\rho} u(y)\,dS_y\,d\rho$

$\Rightarrow \boxed{u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int u(y)\,d\tau_y}$ – Теорема о среднем по ~~сфере~~ шару

Принцип экстремума для гармонической ф-ции – внутри обл-ти гармоничности ф-ция не достигает ни max ни min, если она не const

$M = \max$, $m = \min$

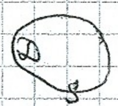
$\exists$ в x_0 достигается M. Тогда $u(y) < M$ в некот. окр-ти x_0

$M = u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_\Omega u(y)\,d\tau_y$ – противоречие

$\Rightarrow$ max и min достигается на границе

Лекция 6 (1/2)

$\Rightarrow$ т. ! для задачи Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S = \varphi(x) \end{cases}$



Док-во. $\exists$ 2 u_1, u_2 – решение $\Rightarrow u = u_1 - u_2$: $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u = 0$

$\Rightarrow$ т. о непрерывной зависимости решения от граничного значения $\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1|_S = \varphi_1(x) \end{cases}$; $\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2|_S = \varphi_2(x) \end{cases}$, $\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|\big|_S \le \varepsilon$

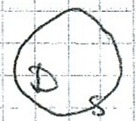
$u = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S \le \varepsilon \end{cases} \Rightarrow u \le \varepsilon$ всюду

$\Rightarrow$ корректность задачи Дирихле: решение $\exists$, !, непр-но зависит от входных данных

Пример. Задача Коши для ур-ния Лапласа некорректна

Функция источника

$\Delta u = 0$



Опр. Ф-цией Грина наз. ф-ция представимая в виде:

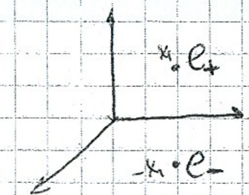
1) $E(x,y) + g(x,y)$, где $g(x,y)$ – гармоническая

2) $g(x,y)|_S = -E(x,y)|_S$ (т.е. g – решение задачи Дирихле)

Свойства $G(x,y)$:

1) $G(x,y) > 0$ (т.к. $G(x,y)|_S = 0$)

2) $G(x,y) = G(y,x)$ (см. у Эльсгольца)



ФГ – потенциал заряда

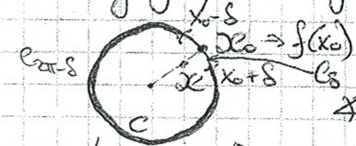
$G(x,y) = \frac{1 \cdot e_+}{(n-2)\left(\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots (x_n-y_n)^2}\right)^{n-2}} + \frac{e_-}{(n-2)\left(\sqrt{(x_1+y_1)^2 + \ldots (x_n-y_n)^2}\right)^{n-2}}$

$y_1 = 0$ на $S \Rightarrow G(x,y) = 0|_S$

Интеграл Пуассона: Лекция 7

$$u(x)=\int_C \frac{1-x^2}{|y-x|^{n-1}}\cdot\frac{f(y)}{\omega_n}ds$$

В двумерном случае $u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_C f(y)\frac{1-x^2}{|y-x|}ds$



$$1=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{1-x^2}{|y-x|}ds$$

$$\forall\ u(x)-f(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))ds$$

окружность $R=1$

1) Граничная ф-ция непрерывна

2) При $x\to x_0$ $(1-x^2)\to 0$

$$\Rightarrow u(x)-f(x_0)=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta}\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))ds}_{I_1}+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C_{2\pi-\delta}}\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))ds}_{I_2}$$

Фиксируем $\forall\varepsilon>0$; $\delta=\delta(\varepsilon)$: $|I_1|\le\frac{\varepsilon}{2}$ (это возможно в силу 1))

Выберем $x\to x_0$ и получим $|I_2|\le\frac{\varepsilon}{2}$ (в силу 2)). Точка сингулярности вырезана в I_2

Т.О. решение $u(x)$ непр-но примыкает к граничному значению.

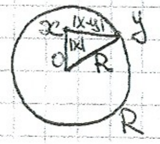
$\dim x = n$

значение на границе

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int_{C_R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^{n-1}}u(y)ds_y \quad (*)$$

<u>Теорема</u> Если гармоническая в пр-ве E^n ф-ция $u(x)$ знакопостоянна, то она const

<u>Док-во:</u>



$R-|x|\le|x-y|\le R+|x|$

Подставим в (*)

$$\frac{1}{\omega_n R}\int_{C_R}\frac{u(y)(R-|x|)(R+|x|)}{(R+|x|)^{\cancel{n-1}\,n-2}}ds_y\le u(x)\le\frac{1}{\omega_n R}\int_{C_R}\frac{u(y)(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-2}}ds_y$$

$$\frac{R-|x|}{\omega_n R(R+|x|)^{n-2}}\int_{C_R}u(y)ds_y\le u(x)\le\frac{R+|x|}{\omega_n R(R-|x|)^{n-2}}\int_{C_R}u(y)ds_y$$

Воспользуемся теоремой о среднем: $\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{C_R}u(y)ds_y=u(0)$

$$\int_{C_R}u(y)ds_y=u(0)\omega_n R^{n-1}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cancel{\omega_n}R}\cdot\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-2}}\cdot u(0)\cancel{\omega_n}R^{n-1}\le u(x)\le\frac{1}{\cancel{\omega_n}R}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-2}}u(0)\cancel{\omega_n}R^{n-1}$$

Исправить: везде степень $n-1\Rightarrow n$!

$$\Rightarrow u(0)\le u(x)\le u(0)\Rightarrow u(x)=u(0)=const$$ чтд

<u>Теорема Лиувилля</u> Если гармоническая ф-ция ограничена во всем пр-ве, то она постоянна.

<u>Док-во:</u> $\exists\ u(x)\le M$, $\forall\ v(x)=M-u(x)\ge 0\Rightarrow$ по пред. теореме $v(x)=const\Rightarrow u(x)=const$.

<u>Эллиптические ур-ния общего вида</u>

$\forall$ ур-ние II порядка $\underbrace{\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u}_{L(u)}=f(x)$

анизотропная среда

$Q(\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_n)=\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ — квадратичная форма

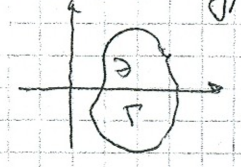
$\exists\ k_0,k_1>0$: $k_0\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\le Q(\lambda_1\dots\lambda_n)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i^2k_1$ — <u>равномерная эллиптичность</u> оператора $L(u)$

Эллиптичность в точке

$\exists$ ур-ние смешанного типа $u_{xx}+y^{2n+1}u_{yy}=0$

При $y>0$ – элептическое, $y<0$ – гиперболическое

Элептические ур-ние описывают стационарные процессы, гиперболические – динамические



1) Строить фундаментальное решение
2) Вывести ф-лы Грина
3) Краевые задачи

Если $A_{ij}(x) \in C^{1,0}(D)$, то ур-ние можно записать в виде: $\sum\limits_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\left(B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum\limits_{ij=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u = f(x)$

$$B_i(x) - \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_i} = e_i(x)$$

$$L(u) = \sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

$$L^*(u) = \sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_i(x)\, u\right) + c(x)u$$

Оператор самосопряжен, если $L(u) = L^*(u)$

Достаточное условие самосопряженности: $e_i(x) \equiv 0$.

Это условие яв. необходимым. ($\forall\ u=1$, $u=x_j$)

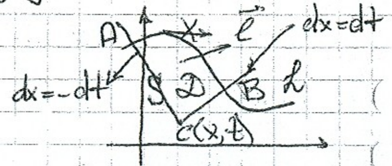
$$\Omega(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y| + \int_D \mu(y)K(x,y)\,ds$$

$\Delta u = 0$; $-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$

Гиперболические уравнения

Обобщеная постановка задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$



$S = BA + AC + CB$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,t)\big|_L = \varphi(x,t) \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}\Big|_L = \psi(x,t) \end{cases}$$

s – длина дуги

L – кривая на пл-ти (x,t)

Хар-ие уравнение: $x+t=const$, $x-t=const$

1) Хар-ки пересекают L в одной точке
2) $\vec{e}$ не совпадает с кас. к кривой

$\forall$ тождество: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \Rightarrow$

$\int\limits_D \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} dx\,dt = \{$применим ф-лу Гаусса-Остроградского, ф-лу Грина$\} = \int \frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt =$

$$= \int_{BA}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right) + \int_{AC}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right)^{S} + \int_{CB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right) = 0$$

$$-\int_{AC}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) + \int_{CB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)$$

$$-(u(C) - u(A)) + u(B) - u(C)$$

$$-2u(C) + u(A) + u(B)$$

$$\Rightarrow u(C) = u(x,t) = \frac{1}{2}u(A) + \frac{1}{2}u(B) + \frac{1}{2}\int\limits_{BA}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right)$$ – решение в квадратурах

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vec{l}} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \vec{l}} = \psi(s) \end{cases}$$ – СЛАУ отн. $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$

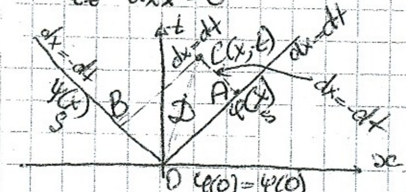
$\det \neq 0$ – для этого нужно условие 2)

Задача с данными на хар-ках (Гурса)

$u_{tt} - u_{xx} = 0$

Хар-ки: $x + t = const$

$x - t = const$



$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

Проинтегрируем по D:

$$\iint\limits_D \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\} dx\,dt = \{\text{по ф-ле Грина}\} =$$

$$= \int\limits_{\delta}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right\} = \int\limits_{OA}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) - \int\limits_{AC}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) +$$

$$+ \int\limits_{CB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) - \int\limits_{BO}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) = u(A) - u(0) - u(C) + u(A) +$$

$$+ u(B) - u(C) - u(0) + u(B) = 0$$

$$u(C) = u(x,t) = u(A) + u(B) - u(0)$$

$$A\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right),\ B\left(\frac{x-t}{2}, \frac{t-x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = -\varphi(0) + \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right)$$

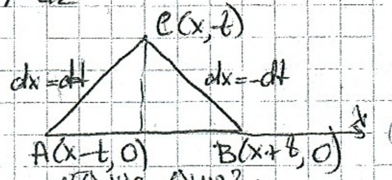
Краевая задача для гипербол. ур-ния некорректна

Единственность решения з. Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Пусть $\exists$ 2 решения $u_1, u_2 \Rightarrow u = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$



$$0 = \int\limits_{AB+BC+CA}\left(+2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\right) = \int\limits_{AB}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx -$$

$$- \int\limits_{BC}\underbrace{\left(-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}_{=\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} dx + \int\limits_{CA}\underbrace{\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}_{=\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

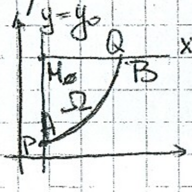
Лекция 14

Метод Римана

см. у Соболева „Ур-ния мат. физики"

$$L(u) = u''_{xy} + \underline{a(x,y)}u'_x + \underline{b(x,y)}u_y + \underline{c(x,y)}u = f(x,y) \quad (1) \quad \mathbb{R}^2$$

гиперболическое ур-ние в хар-ких переменных



$x = x_0$ $\quad u\Big|_{AB} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AB} = \psi(x) \quad (2)$

$\exists$ ф-ции имеют непр-ные первые производные

$$L^*(v) = M(v) = v''_{xy} - \frac{\partial}{\partial x}(a(x,y)v) - \frac{\partial}{\partial y}(b(x,y)v) + c(x,y)v$$

$[vL(u) - uL^*(v)]$ – выражение типа дивергенции

Касательная к $\overset{\frown}{AB}$ ни в одной точке не $\parallel$ осям.

По ф. Грина $\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy$ получим

$$\iint\limits_D (vL(u) - uL^*v)\,dx\,dy = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(vu'_x - v'_x u + 2bvu)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(vu'_y - uv'_y + 2auv)\,dx \quad (5)$$

$\Gamma = \overset{\frown}{PQ} + QM + MP$

Справедливо тождество:

$$vLu - uL^*v = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} + 2auv\right)}_{P} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} + 2bvu\right)}_{Q} \quad (4)$$

$$(5): \frac{1}{2}\int_{QMP} -(vu'_x - uv'_x + 2buv)dx + (vu'_y - uv'_y + 2auv)dy =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{QM}(vu'_x - uv'_x + 2buv)dx + \frac{1}{2}\int_{MP}(vu'_y - uv'_y + 2auv)dy \quad (6)$$

Воспользуемся тождествами:

$$vu'_x - uv'_x + 2buv \equiv \frac{\partial}{\partial x}(uv) + 2u(bv - v'_x)$$
$$vu'_y - uv'_y + 2auv = \frac{\partial}{\partial y}(uv) + 2u(av - v'_y)$$

$$(6): \frac{1}{2}(uv)_Q - \frac{1}{2}(uv)_M - \int_{QM} u(bv - v'_x)dx + \frac{1}{2}(uv)_P - \frac{1}{2}(uv)_M + \int_{MP} u(av - v'_y)dy = \iint_D (vLu - uL^*v)dxdy \quad (7)$$

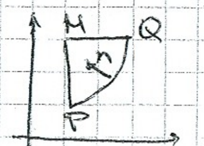
$$(uv)_M = \frac{1}{2}[(uv)_P + (uv)_Q] - \int_{QM} u(bv - v'_x)dx + \int_{MP} u(av - v'_y)dy + \frac{1}{2}\int_{PQ} -(vu'_x - uv'_x + 2buv)dx + (vu'_y - uv'_y + 2auv)dy - \iint_D (vLu - uL^*v)dxdy] \quad (8)$$

$\exists v$: $L^*v = 0$, $Lu = f \Rightarrow \iint_D (vLu - uL^*v)dxdy = \iint_D vf\,dxdy$; $\int_{QM} = 0$, $\int_{MP} = 0$, если

$v'_x - bv = 0$ на QM

$v'_y - av = 0$ на MP

$v = 1$ в $M(x_0, y_0)$



Такая ф-ция v наз. ф-цией Римана

$\frac{v'_x}{v} = b \Rightarrow v = e^{\int_{x_0}^{x} b(x, y_0)dx}$, $v = e^{\int_{y_0}^{y} a(x_0, y)dy}$

$$(uv)|_M = [(uv)_P + (uv)_Q]\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{PQ}(vu'_x - uv'_x + 2buv)dx - (vu'_y - uv'_y + 2auv)dy - \iint_\Omega vf\,dxdy \quad (9)$$

$\Rightarrow$ решение!

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{PQ} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial s}}_{\text{по касат.}}\cos(s,x) + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{\text{по нормали}}\cos(n,x) = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial s}\cos(s,x) + \psi(s)\cos(n,x)\Big|_{PQ}}_{\text{известные ф-ции}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{PQ} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\cos(s,y) + \psi\cos(n,y)\Big|_{PQ}$$

$\Rightarrow \int_{PQ}(\quad)$ нам известен

$\exists \Rightarrow$ из задачи Гурса.

Опр. Ф-ция $v(x, y, x_0, y_0)$, удовл. однородному ур-нию $L^*v = 0$ и условиям $v'_x - bv = 0$ по QM, $v'_y - av = 0$ по MP, $v = 1$ в $M(x_0, y_0)$, наз. ф-цией Римана

Если $L = L^*$, то v симметр. отн. пар точек (x, y) и (x_0, y_0)

v не зависит от области

Зельдович, Разин

Рождественский, Яненко, "Нелинейные гиперб. ур-ния"

Пример использования метода Римана

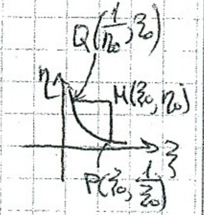
$$\begin{cases} x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4) \\ u|_{y=1} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = F(x) \quad (5) \end{cases}$$

$D = x^2y^2 > 0 \Rightarrow$ ур-ние гиперболическое

Ур-ние хар-к $\quad \begin{matrix} xdy + ydx = 0 \\ xdy - ydx = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} xy = c_1 \\ y/x = c_2 \end{matrix}$

Замена $\xi = xy,\ \eta = \frac{x}{y}$ (6)

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0$ (7)



В (6) положим $x=1$ и исключим y

$y=1 \to \xi\eta = 1$ – равнобокая гипербола

$x = \sqrt{\xi\eta},\quad y = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$

$\frac{\partial u}{\partial\xi}\Big|_{\xi\eta=1} = \frac{f'(\xi)}{2} + \frac{1}{2\xi}F(\xi)\ ;\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\Big|_{\xi\eta} = -\frac{\xi^2}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2}F(\xi)$ (9)

В (9) положим $a=0,\ b=-\frac{1}{2\xi},\ f=0$

$(uv)|_M = \frac{1}{2}[(uv)_P + (uv)_Q] + \frac{1}{2}\int\limits_{PQ}(vu'_x - uv'_x - \frac{uv}{\xi})dx -$

$-(vu'_y - uv'_y)dy \quad (x \to \xi,\ y \to \eta)$

Сопр. ур-ние $\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta} = 0$

$v(\xi, \eta_0, \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}$ на MQ

$v(\xi_0, \eta, \xi_0, \eta_0) = 1$ на MP

$\Rightarrow v(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}}$

$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2}\Big\{f(\xi_0) + \sqrt{\xi_0\eta_0}\, f(\frac{1}{\eta_0}) + \sqrt{\frac{\xi_0}{4}}\int\limits_{\xi_0}^{1/\eta_0}\frac{f(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi -$

$-\sqrt{\xi_0}\int\limits_{\xi_0}^{1/\eta_0}\frac{F(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi\Big\}$

В (x,y): $u(x,y) = \frac{1}{2}\Big\{f(x,y) + y f(\frac{x}{y}) + \frac{\sqrt{xy}}{2}\int\limits_{xy}^{x/y}\frac{f(z)}{z^{3/2}}dz -$

$-\sqrt{xy}\int\limits_{xy}^{x/y}\frac{F(z)}{z^{3/2}}dz\Big\}$

Д/З решить обычную задачу Коши методом Римана

~~Ш~~ $u_{xx} - u_{tt} = f$

12.02.07

$U\subset\mathbb{R}^N$, U - открытое мн-во

$$\int\limits_U\!\!\int \frac{\partial P}{\partial x_i}dx = \int\limits_{\partial U = S} P\cos(n,x_i)\,ds \quad (0)$$ — формула Гаусса – Остроградского

$i=1..n$

$P\in C^1(\bar U)$

Пусть $v,u\in C_0^\infty(\bar U)$ - бесконечно дифф-мые ф-ции с компактным носителем

$$\int\limits_U v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \int\limits_U\Big[\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big]dx = \cancel{\int\limits_S \cos(n,x_i)\,uv\,ds} - \int\limits_U u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$$ т.к. $u,v|_S=0$

(1) $\int\limits_U u(x)\varphi_{x_i}dx = -\int\limits_U \varphi u_{x_i}dx$ $\quad u\in C_0^1(U)$

Пусть $u\in L_1^{loc}(U)$, т.е. $V,\bar V\subset U$ $u\in L_1(V)$

Если $\exists v\in L_1^{loc}(U)$ такая, что для $\forall\varphi\in C_0^\infty(U)$ справедливо равенство $\int\limits_U u(x)\varphi_{x_i}dx = -\int\limits_U\varphi(x)v(x)dx$, то $v(x)$ наз. первой обобщенной пр-ной ф-ции $u(x)$

С.Л. Соболев „Некоторое применение ФА в мат. физике", В.И. Смирнов „Курс высшей мат." Том 5

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_N)$, $\alpha_i\ge 0$, α - мультииндекс

Длина мультииндекса $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N$

$$\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}} = D^{|\alpha|}u$$

Пусть $k\in\mathbb{N}$, $\alpha=(\alpha_1\ldots\alpha_N)$, $|\alpha|=k$. Тогда по (1) по индукции: $\int\limits_U uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_U\varphi D^\alpha u\,dx$, $u\in C^k(U)$

Опр. Пусть $u,v\in L_1^{loc}(U)$ (или $L_p^{loc}(U)$ $1\le p\le\infty$). $v\in L_1^{loc}(U)$ наз. обобщенной частной производной порядка α, если для $\forall\varphi\in C_0^\infty(U)$ справедлива ф-ла:

$$\int\limits_U uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_U\varphi v\,dx \quad (3)$$

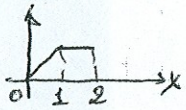
Свойство 1: Если $v(x)$ $\exists$, то она !

Опр. $f=g$ в L_p, если они равны всюду, кроме мн-в меры 0.

Док-во свойства 1: От противного, т.е. пусть $\exists$ еще одна частная пр-ная $\bar v\in L_1^{loc}(U)$: $\forall\varphi\in C_0^\infty(U)$ справедливо (4) $\int\limits_U uD^\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_U\varphi\bar v\,dx$

(3)−(4): $\int\limits_U\varphi(v-\bar v)dx=0$. В силу основной леммы вариац. исчисления $v=\bar v$ почти всюду

Пример $u(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 1, & x\in(1,2)\end{cases}$



ф-ция не дифф-ма

$v(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}$

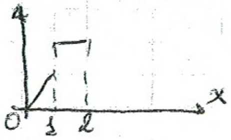
$U=(0,2)$

$v(x)$ яв. обобщенной пр-ной $u(x)$

Док-во: Фиксируем $\forall\varphi\in C_0^\infty(U)$. $\int\limits_0^2 u\varphi'dx = -\int\limits_0^2\varphi v\,dx$

$$\int\limits_0^2 u\varphi'dx = \int\limits_0^1 x\varphi'dx + \int\limits_1^2\varphi'dx = x\varphi\Big|_0^1 - \int\limits_0^1\varphi\,dx + \underbrace{\varphi(2)}_{0} - \varphi(1) =$$
$$= \varphi(1) - \int\limits_0^1\varphi\,dx - \varphi(1) = -\int\limits_0^1\varphi\,dx = -\int\limits_0^2\varphi v\,dx$$ чтд.

Пример 2 $u(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1\\ 2, & 1<x<2\end{cases}$



$u(x)$ не явл. дифф-мой в обобщенном смысле

<u>Док-во:</u> Покажем, что $\nexists\, v \in L_1^{loc}(U)$: $\forall \varphi \in C_0^\infty(U)$:

$\int_0^2 u\varphi' dx = -\int_0^2 v\varphi dx$. От противного: $\forall \varphi \in C_0^\infty(U)$

$\exists v(x) \in L_1^{loc}(U)$: $\quad \int_0^2 u\varphi' dx = \int_0^1 x\varphi' dx + 2\int_1^2 \varphi' dx = x\varphi\Big|_0^1 -$

$- \int_0^1 \varphi\, dx + 2[\overset{0}{\varphi(2)} - \varphi(1)] = -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi\, dx$ (6)

$\exists \{\varphi_m(x)\}_{m=1}^\infty \in C_0^\infty(U)$: 1) $0 \le \varphi_m \le 1$, 2) $\varphi_m(1) = 1$, 3) $\varphi_m \to 0$

$m \to \infty$ $\forall x \ne 1$. $\int_0^2 u\varphi_m' dx = -\varphi_m(1) - \int_0^1 \varphi_m dx$

$\Rightarrow \varphi_m(1) = 1 = \lim\limits_{m\to\infty} \int_0^2 v\varphi_m dx - \int_0^1 \varphi_m dx = 0$

<u>Теорема 1</u> $\varphi(x) \in C_0^\infty(U)$, $\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_N^{\alpha_N} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}$, то обобщ. пр-ная тоже не зависит от порядка дифф-ния

<u>Опр.</u> $\underline{W_p^k(U)} = \{u \in L_p^{loc}(U),\ D^\alpha u \in L_p^{loc}(U)\}$ $|\alpha| \le k$, $1 \le p \le \infty$, $k \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\|u\|_{W_p^k} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \le k} \int_U |D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p} & 1 \le p < \infty \\ \sum\limits_{|\alpha| \le k} \operatorname*{ess\,sup}_U |D^\alpha u|, & p = \infty \end{cases}$$

<u>Опр</u> $\{u_m\}$, $u_m \xrightarrow{W_p^k} u$, если $\lim\limits_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W_p^k} = 0$

<u>Опр.</u> $\underline{\overset{\circ}{W}{}_p^k(U)}$ - замыкание мн-ва ф-ций $C_0^\infty(U)$ по норме $W_p^k(U)$. $\overset{\circ}{W}{}_p^k(U) \subset W_p^k(U)$, $C_0^k \subset \overset{\circ}{W}{}_p^k \subset W_p^k$

<u>Обозначение</u> $H^k \equiv W_2^k$ (Hilbert)

$L_2(U) = H^0(U)$

Элементарные св-ва ф-ций из пр-ва Соболева

<u>Теорема 1</u> Если $u, v \in W_p^k(U)$, $|\alpha| \le k$, то $D^\alpha u \in W_p^{k-|\alpha|}(U)$ (1), $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ $\forall \alpha, \beta: |\alpha| + |\beta| \le k$

(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda u + \mu v \in W_p^k(U)$

(3) если V - открытое подмн-во U, то $u \in W_p^k(V)$

(4) если $\zeta \in C_0^\infty(U)$, то $(\zeta u) \in W_p^k(U)$ и справедлива ф-ла Лейбница $D^\alpha(\zeta u) = \sum\limits_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$, где

$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \frac{\alpha_1! \dots \alpha_N!}{\beta_1! \dots \beta_N! (\alpha_1 - \beta_1)! \dots (\alpha_N - \beta_N)!}$

<u>Пример 3</u> $u = \frac{1}{|x|^\alpha}$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$, $x \ne 0$

При каких α, p, N $u \in W_p^\alpha(U)$? (N-размерность)

$\exists U = \overset{\circ}{B}_1$ $\quad u_{x_i} = -\frac{\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}}$, $|u_{x_i}| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}$

$\int_{U - \overset{\circ}{B}_\varepsilon} u\varphi_{x_i} dx = -\int_{U - \overset{\circ}{B}_\varepsilon} \varphi u_{x_i}' dx + \int_{\partial \overset{\circ}{B}_\varepsilon} u\varphi \cos(n, x_i) ds$

$\int_{\partial \overset{\circ}{B}_\varepsilon} u\varphi \cos(n, x_i) ds \le \frac{C}{\varepsilon^\alpha} \int_{\partial \overset{\circ}{B}_\varepsilon} ds = \omega_N \cdot \varepsilon^{N-1-\alpha} \to 0$

$N - 1 - \alpha > 0 \Rightarrow \boxed{\alpha < N - 1}$ (для $W_1^\alpha(U)$)

$u_{x_i} \in W_p^{\alpha, loc} \Leftrightarrow |u_{x_i}| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L_p \Leftrightarrow (\alpha + 1)p < N$

$\Rightarrow \boxed{0 < \alpha < \frac{N-p}{p}}$

<u>Пример 4</u> $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ - счетное всюду плотное мн-во в $\overset{\circ}{B}_1 = \{|x| < 1\}$. $u(x) = \sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{1}{|x - r_k|^\alpha}$

$u \in W_p^1$, $\alpha < \frac{N-p}{p}$. Ф-ция $u(x)$ неограничена на $\forall$ открытом подмн-ве $\overset{\circ}{B}_1$

Пространства $W_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

19.02.07
II часть

$H^1(\Omega) \equiv W_2^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$W_2^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)$ и обобщ. пр-ные $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)\}$

$\nabla u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right\}$, $\|u\|_0^2 = \int_\Omega u^2(x)dx$

$(u,v) = \int_\Omega uv\,dx$. W_2^1 - гильбертово пр-во

$[u,u]_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$

$[u,v]_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega uv\,dx + \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)dx$

$\Rightarrow \|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u\|_0 + \|\nabla u\|_0$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ - замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $W_2^1(\Omega)$

$C_0^\infty(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$

Теорема 7 (Нер-во Фридрихса - Стеклова) Пусть $u(x) \in C^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда $\int_\Omega u^2 dx \le C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$

Док-во: Пусть $\Omega \in \{x : |x_i| < R\}$ - куб. Доопределим $u = 0$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$. По ф-ле Ньютона - Лейбница

$$u(x) = \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1, \quad |x_i| \le R$$

По нер-ву Коши - Буняковского: $|u(x)|^2 = \left(\int_{-R}^{x_1^\circ} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1\right)^2 \le$ ($-R \le x_1^\circ \le R$)

$\le \left(\int_{-R}^{x_1^\circ} dx_1\right)\left(\int_{-R}^{x_1^\circ}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\right) \le 2R \int_{-R}^{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1$

Умножаем на $dx_2 \dots dx_N$ и $\int_{\mathbb{R}^{N-1}}$:

$$\int_{(x_1 = x_1^\circ)\cap\Omega'} u^2(x)dx \le 4R^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx \le 4R^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{ч.т.д.}$$

(Ω' - дополнение до куба)

Замечание Теорема 7 справедлива для $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

В пр-ве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ можно ввести другую норму, эквивалентную прежней: $\|u\|_1^2 = \int_\Omega \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$

$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2} + \|\nabla u\|_{L_2}$. Покажем это:

$\|u\|_1 = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \le \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} = \|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ $(\Rightarrow)$

$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \overset{\text{T7}}{\underset{u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}{\le}} C(\Omega)\|\nabla u\|_{L_2} + \|\nabla u\|_{L_2} = (1 + C(\Omega))\|\nabla u\|_{L_2}$ $(\Leftarrow)$

Эквивалентные нормы: $c_2\|u\|_1 \le \|u\|_2 \le c_1\|u\|_1$

Теорема 8 $\|u\|_1$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ эквивалентна $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$

Док-во: см. выше

$\ast$ $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. $\forall u \in C_0^\infty(\Omega)$. Ф-ции из $C_0^\infty(\Omega)$ плотны в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Сечение $x = x_j = const$. $u \equiv 0$ на $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$

$u|_{x = x_j = const}$ $\exists$ т.е. $\gamma : C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$ - оператор следа

Мы докажем, что γ может быть продолжен по непр-ти на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $\gamma : \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to L_2(\Omega')$, где $\Omega' = \Omega \cap \{x = x_j\}$

Теорема 9 Если $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty \in C_0^\infty(\Omega)$ фундаментальна в норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то она явл. фундаментальной и в норме $L_2(\Omega')$, $\Omega' = \Omega \cap \{x = x_j\}$

Док-во Кладем $u = 0$ в $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Пусть $j = 1$ и $x_1 = x_1^\circ = const$

По ф-ле Ньютона - Лейбница $u(x_1, x_2, \dots x_N) = \int_{-A}^{x_1^\circ} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1$
$\Omega \in \{|x_j| \le A\}$

$u^2(x_1^0, \dots x_N) = \left(\int_{-A}^{x_1^0} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1\right)^2 \overset{КБ}{\le} \int_{-A}^{x_1^0} dx_1 \int_{-A}^{A} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx \le 2A \int_{-A}^{A} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx_1$

$\Rightarrow \int\limits_{x_1 = x_1^0 \cap \Omega} u^2(x)\, dx \le 4A^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_0^2$

Напишем нер-во для $u_{n+p} - u_n$: $\|u_{n+p} - u_n\|^2_{L_2(\Omega')} \le 2A$ $\|u_{n+p} - u_n\|_{L_2(\Omega)} \Rightarrow$ чтд. (непр-ть по Гельдеру в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$)

Т.о. $\gamma: \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \to L_2(\Omega')$

__Теорема 10__ След $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ на гиперплоскости $x_j = x_j^0$ зависит непр-но от x_j^0.

__Док-во:__ Выберем $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} \to 0$, $n \to \infty$ {пр-во C_0^∞ всюду плотно в L_2}. Тогда $u_n(x)|_{x_1 = x_1^0}$ сх-ся к следу $u(x_1^0, x')$ в $L_2(\mathbb{R}^{N-1})$

$u_n(x_1^0 + \Delta x_1^0, x')$ сх-ся (по опр.) к следу $u(x_1^0 + \Delta x_1^0, x')$ в $L_2(\mathbb{R}^{N-1}) \Rightarrow |u_n(x_1^0 + \Delta x_1, x') - u_n(x_1^0, x')| = \left| \int_{x_1^0}^{x_1^0 + \Delta x_1} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} dx \right| \le \Delta x_1 \int_{-A}^{A} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\right)^2 dx \le \Delta x_1 \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$ чтд.

Задача Дирихле с однородными граничными условиями

__Классическая:__

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $\quad \begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} f(x) \in C(\Omega) \\ u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega) \end{matrix}$

Если $f(x) \in C^{(0,\beta)}(\Omega) \Rightarrow u \in C^{(2)}$

Если $f(x) \in L_2(\Omega)$, то $u \in W_2^2(\Omega)$

Если $f(x) \in W_2^k(x)$, то $u \in W_2^{k+2}(\Omega)$

__Предложение 1__ Пусть $u \in C^2(\Omega)$ удовл. $\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$ (1). Тогда $[u, \varphi] + (f, \varphi) = 0$ $\forall \varphi \in C_0^\infty$ (2)

__Док-во:__ Для $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\int_\Omega \varphi \Delta u\, dx = \int_\Omega \varphi f\, dx$

$-\int_\Omega \nabla\varphi \nabla u\, dx = \int_\Omega \varphi \Delta u\, dx \Rightarrow \int_\Omega \nabla\varphi \nabla u\, dx + \int_\Omega \varphi f\, dx = 0$ чтд

$[u, \varphi] = \int_\Omega \nabla u\, \nabla\varphi\, dx$

__Опр__ $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ наз. __обобщенным решением задачи Дирихле (1)__, если справедливо (2) при $\forall \varphi \in C_0^\infty$, $f \in L_2(\Omega)$.

__Предложение 2__ Пусть $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ и $u(x)$ явл. обобщенным из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ решением задачи Дирихле (1). Тогда $u(x)$ явл. классическим решением, при $f(x) \in C(\Omega)$

__Док-во__ При $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $u \in C^{(2)}(\Omega)$ $\int_\Omega \varphi [\Delta u - f]\, dx = 0$ (3).

Из основной леммы вариац. исчисления $\Rightarrow \Delta u = f$

__Теорема 11__ Обобщенное решение (1) $\exists!$

__Док-во:__ $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $l(\varphi) = -(f, \varphi) = -\int_\Omega f\varphi\, dx$ — линейный непр-ный ф-ал: $|l(\varphi)| = |(f, \varphi)| \le \|f\|_{L_2} \|\varphi\|_{L_2} \le C(\Omega) \|f\|_2 \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}$. По т. Рисса в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ ф-л можно представить в виде скалярного пр-ия $l(\varphi) = [u, \varphi]$ $\exists! u$ $\quad l(\varphi) = -(f, \varphi) = [u, \varphi]$ $\forall \varphi \in C_0^\infty \Leftrightarrow$ $[u, \varphi] + (f, \varphi) = 0$ чтд.

Задача Дирихле с неоднородными граничными условиями

$$\begin{cases}\Delta u = f & (3)\\ u|_{\partial\Omega}=\psi(x) & (4)\end{cases}$$

Если след $\psi\in W_2^1(\partial\Omega)$, то $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\psi(x)\in W_2^1(\Omega)$. Это так если $\partial\Omega\in C^{(1)}$. Потребуем $\psi(x)\in W_2^1(\Omega)$

<u>Опр.</u> Ф-ция $u(x)\in W_2^1(\Omega)$ наз. обобщенным решением задачи Дирихле (3)-(4), где $\psi(x)\in W_2^1(\Omega)$, $f\in L_2(\Omega)$, если 1) $u-\psi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

2) $\forall\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $[u,\varphi]+(f,\varphi)=0$

$v=u-\psi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$u=v+\psi \Rightarrow [v,\varphi]=-[\psi,\varphi]-(f,\varphi)$ $\forall\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$\psi(x)\in W_2^1(\Omega)$, $v(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

Ф. $l(\varphi)=-[\psi,\varphi]-(f,\varphi)$ — непр-ный ф-ал:

$\forall\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $|l(\varphi)|\le\|\nabla\psi\|_{L_2}\|\nabla\varphi\|_{L_2}+\|f\|_{L_2}\|\varphi\|_{L_2}\overset{T.7}{\le}$

$(\|\psi\|_{W_2^1(\Omega)}+\sqrt{C(\Omega)}\|f\|_{L_2})\|\varphi\|_1$

$\Rightarrow$ по Т. Рисса $\exists!\, v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$: $[v,\varphi]=-[\psi,\varphi]+(f,\varphi)$

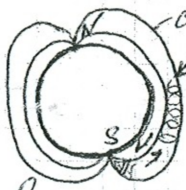
26.02.07

Нелинейные ур-ния в ЧП

1) Термоядерный синтез (управляемый)

Ак. Арцимович

50-60гг работы в одночастичном приближении: изучение космических лучей



силовые линии

частица дрейфует вдоль силовых линий. Радиус зависит от энергии и массы частицы

+ уравнение плазмы. За основу взяли ур-ние теплопроводности. „Режим с обострением"

<u>Пример</u>
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+u^3; & 0<x<\pi,\ t>0\\ u(0,t)=0;\ u(\pi,t)=0; \\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$
~ процесс диффузии нейтронов

Определить для каких $\varphi(x)$ $u(x,t)$ возрастает / убывает?

$\exists$ ли $\varphi(x)$: $u(x,t)$ за конечное время $\to\infty$?

Пусть $\varphi(x)\ge 0$, $\int_0^\pi\varphi(x)\sin x\,dx>2$. При этих условиях решение $\to\infty$ за конечное время:

Пусть $s(t)=\int_0^\pi \sin x\, u(t,x)\,dx$

$\frac{ds}{dt}=\int_0^\pi\sin x\, u_t(t,x)\,dx=\int_0^\pi \sin x\,(u_{xx}+u^3)\,dx=$

$=-s+\int_0^\pi \sin x\, u^3(t,x)\,dx \Rightarrow$ {Нер-во Гёльдера

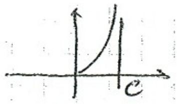
$\int_a^b x(t)y(t)\,dt\le\left(\int_a^b|x^p|\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b|y^q|\,dt\right)^{1/q}$, $\frac1p+\frac1q=1$

Выберем $p=\frac32$, $q=3$}

$s(t)\le 2^{2/3}\left(\int_0^\pi u^3\sin x\,dx\right)^{1/3} \Rightarrow \frac{ds}{dt}\ge -1+\frac14 s^3$, $t>0$ (4)

$\frac{ds}{dt}=s \Rightarrow e^t$ - решение уходит в ∞ за ∞ время

$\frac{ds}{dt} = s^2 \Rightarrow \frac{-1}{s} + c = t \Rightarrow s = \frac{1}{c-t}$



c определяется начальными условиями

$u_3(x): \; t = \frac{1}{2}\ln(s(0)+2)/(s(0)-2)$

Режим с обострением:

$u_t = (k(u)u_x)_x$

Для каких $k(u)$ возможен режим с обострением?

Определяется методом подбора

При каких $k(u)$ неограниченное возраст. температуры?

$\xi = x - \lambda t$. λ подлежит определению. $\lambda > 0$

* Уравнение Sin-Gordona

$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \; (\operatorname{sh} u, \operatorname{th} u)$

Решение типа бегущей волны $\xi = x - \lambda t \to$ ОДУ:

$\xi''(\lambda^2 - 1) = \sin\xi \Rightarrow \xi'' - \frac{\sin\xi}{\lambda^2-1} = 0$ — ур-ние колебаний маятника

Такая переменная ξ наз. автомодельной, а ур-ние автомодельным. */

$\Rightarrow \frac{d}{d\xi}\left(k(f_a)\frac{df_a}{d\xi}\right) + \lambda\frac{df_a}{d\xi} = 0$

$\Rightarrow k(f_a)\frac{df_a}{d\xi} + \lambda f_a = c$. $\exists\, c = 0$

$\frac{k(f_a)}{f_a}\frac{df_a}{d\xi} = -\lambda$, $\exists \int_0^1 k(\eta)/\eta \, d\eta < \infty$

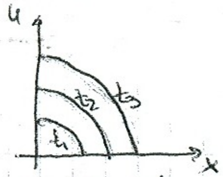
Введем $\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta$, $\Phi(0) = 0$, $u \geq 0$

$\Rightarrow \Phi(f_a(\xi)) = -\lambda(\xi - \xi_0) \Rightarrow f_a(\xi) = \Phi^{-1}(-\lambda\xi)$

$u_a(t,x) = \Phi^{-1}[\lambda(\lambda t - x)^+]$ $\quad \left.\begin{matrix} \Phi \neq 0, & \lambda t - x > 0 \\ 0 & \text{— " —} < 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow *$

1) Возьмем $k(u) = u^\sigma$, $\sigma = const$.

$\Phi^{-1}(u) = (\sigma u)^{1/\sigma} \Rightarrow u_a(t,x) = [\sigma\lambda(\lambda t - x)^+]^{1/\sigma}$



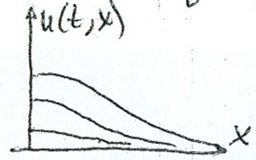
$t_1 < t_2 < t_3$

За конечное время нет неогр. возрастания температуры

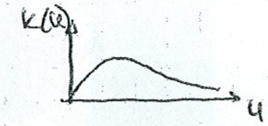
2) $k(u) = |\ln u|^{-1}$, $k(u) > 0$, $k(0) = 0$ $\quad x \in (0, 1/2)$

$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta$ — расходится (0 - особая точка)

$\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta = \int_0^u \frac{d\eta}{|\ln\eta| \cdot \eta}$

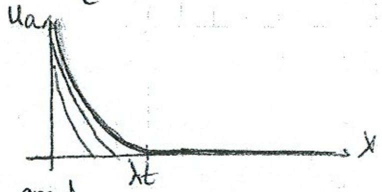


3) $k(u) = u\exp(-u)$, $u > 0$



$u_a(t,x) = \begin{cases} -\ln[1 - \lambda(\lambda t - x)] & 0 \leq x \leq \lambda t \\ 0 & x > \lambda t \end{cases}$

$x = 0 \quad u = -\ln(1 - \lambda^2 t)$, $0 < t < T$



06.03.07

$u_t = \overset{grad}{\nabla}(u^\sigma \nabla u)$, $t > 0$, $x \in R^N$

$\int_{R^N} u(t,x)dx = E_0$, $u_a(t,x) = t^\alpha\theta(\xi)$, $\xi = \frac{x}{t^\beta}$ автомодельное решение

Продифф-ем $\Rightarrow \alpha t^{\alpha-1}\theta - \beta t^{\alpha-1}\sum_{i=1}^N \frac{\partial\theta}{\partial\xi_i}\xi_i = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta}\nabla_\xi(\theta^\sigma\nabla_\xi\theta)$

$\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} t^{\alpha}\theta\left(\frac{x}{t^{\beta}}\right)dx = t^{\alpha+N\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\theta(\xi)\,d\xi$

$\alpha + N\beta = 0$ – второе ур-ние $\Rightarrow \alpha!\ \beta!$

$\Rightarrow$ интегрируемое автомодельное ур-ние:

$\eta^{N-1}\theta^{\sigma}\theta' + \frac{1}{N\sigma+2}\theta^{N}_{\eta} = 0$, $\eta > 0$

$\theta^{\sigma}\theta'(0) = 0$ подбирается автомодельная переменная из двух ур-ний

Пр. $u_t = (u^{\sigma}u_x)_x$ $\sigma = const$, $t>0$, $x>0$

$u(0,x) = u_0 \geq 0$; $u(t,0) = u_1(t)$, $u_1(t) = (1+t)^m$

Будем искать автомодельное решение в виде:

$u_A(t,x) = (1+t)^m\theta_A(\xi)$, где $\xi = x/(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}$

Сделаем замену: $t \to \frac{t}{\alpha}$, $x \to \frac{x}{\alpha^{(1+m\sigma)/2}}$, $u \to \alpha^m u$, $t>0$

$\Rightarrow$ автомодельное ур-ние: $(\theta_A^{\sigma}\theta_A')' + \frac{1+m\sigma}{2}\theta_A'\xi - m\theta_A = 0$

$\theta_A(0) = 1$, $\theta_A(\infty) = 0$ $\Rightarrow$ ОДУ с краевыми условиями

Пр. еще один пример:

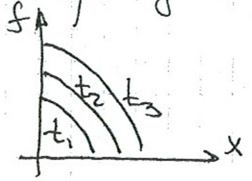
$u_1(t) = e^t$, $t>0$

$u_A(t,x) = e^t f_A(\eta)$, $\eta = \frac{x}{\exp\{\frac{\sigma t}{2}\}}$ $\Rightarrow$

$(f_A^{\sigma}f_A')' + \frac{\sigma}{2}f_A'\eta - f_A = 0$, $\eta > 0$

$f_A(0) = 1$, $f_A(\infty) = 0$

На границе температура exp-но растет:



Пр. задачу с внешним источником:

$u_t = (u^{\sigma}u_x)_x + u^{\beta}$ $t>0$, $\sigma>0$, $x\in\mathbb{R}$, $\beta>1$

$u_A(t,x) = (T_0 - t)^{-1/\beta-1}\theta_A(\xi)$

$\theta_A(\xi) \geq 0$, $\xi = \frac{x}{(T_0-t)^m} \in \mathbb{R}$

$m = [\beta - (\sigma+1)]/[2(\beta-1)]$

$u_0(-x) = u_0(x)$ $x\in\mathbb{R}$

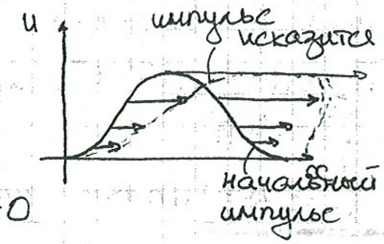
$\theta(t,\xi) = (T_0-t)^{1/\beta-1}u(t,\xi(T_0-t)^m)$ $t\in(0,T_0]$

$(\theta_A^{\sigma}\theta_A')' - m\theta_A'\xi - \frac{1}{\beta-1}\theta_A - \theta_A^{\beta} = 0$

Одно дело – найти автомод. решение, но важно исследовать устойчивость

1ый метод Ляпунова: если все действ. части <0, то асимпт. устойчивость. Если хотя бы одна действ. часть >0, то неустойчивость

$u_t + uu_x = 0$ ур-ние Хопфа



$u = f(x-ut)$

$f'(-u - tu_t) + uf'(1 - tu_x) = 0$

$f'(-u + tuu_x) + uf' - uf't u_x = 0$

/* $u_{tt} - u_{xx} = 0 \Rightarrow f_1(x-t) + f_2(x+t) = u(x,t)$ */

Чем выше импульс, тем больше скорость точки

<u>Уравнение КдФ</u> (Кортевега де Фриза)

$\frac{\partial \bar v}{\partial t} + (\bar v \nabla)\bar v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f$

$\mathrm{div}\, \bar v = 0$ - ур-ние неразрывности

$v(r,t)|_{t=0} = v_0(r)$

$\xi(r,t) = 0$

$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\dot x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\dot y + \frac{\partial\xi}{\partial z}\dot z$

$\bar n v|_S = 0$, $v_n|_S = 0$ - условие непротекания

На поверхности $p|_{S+} = p|_{S-}$

ур-ние Эйлера $| \rho \bar v$

$\frac{d v}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f$, $\mathrm{div}\, \bar v = 0$

$f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$ - потенциальная сила

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac12 \rho|v|^2\right) + \bar v\nabla p + \bar v \nabla U = 0$

Считаем, что поле стационарно: $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac12\rho|v|^2 + U\right) + \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0$

Энергия $\varepsilon = \frac12\rho|v|^2 + U$

$\Rightarrow \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac12\rho\bar v\nabla|\bar v|^2 + \bar v\nabla p + \bar v\nabla U = 0$

$\bar a\nabla\varphi = \mathrm{div}(a\varphi) - \varphi\,\mathrm{div}\,\bar a$

$\bar\Pi = \bar v\left(p + \frac12\rho|\bar v|^2 + U\right)$ - вектор Умова-Пойтинга

$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \mathrm{div}\,\vec\Pi$

$\frac{d}{dt}\int_\tau \varepsilon\, d\tau + \int_S \bar\Pi \bar n\, ds = 0$ - закон сохранения энергии

∃ движение жидкости стационарно:

$\frac{d}{dt}\left(\frac12\rho|\bar v|^2 + U + p\right) = 0 \Rightarrow \frac12\rho|\bar v|^2 + U + p = const$ - интеграл Бернулли

∃ движение потенциальное: $\bar v = \nabla\Phi$

Φ - потенциал скоростей

Подставим в ур-ние Эйлера:

$\nabla\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + (\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi = f$, $f = -\frac1\rho\nabla U$

$(\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi \equiv \nabla\left(\frac12|\nabla\Phi|^2\right) \Rightarrow$

$\nabla\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac12|\nabla\Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho}\right] = 0$

$\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac12|\nabla\Phi|^2 + U + \frac p\rho = c(t)$ - интеграл Бернулли-Коши

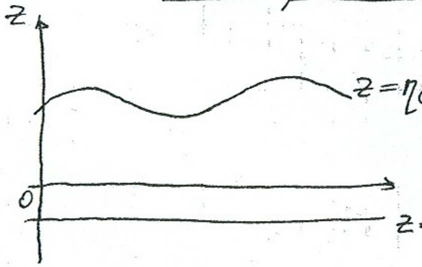
$\mathrm{div}\,\nabla\Phi = 0$ - ур-ние неразрывности

$\Rightarrow \Delta\Phi = 0$ - ур-ние Лапласа

<u>Общая нелинейная задача о волнах</u>

<u>на поверхности жидкости</u>

∃ водоем неглубокий



$z = \eta(x,y)$ - предмет исследования

$z = -h(x,y)$; $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0$ - условие непротекания

Движение потенциальное $\boxed{\Delta\Phi=0}$

Интеграл Бернулли: $\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi| + gz + p = 0$

$\zeta = \eta(x,y,t) - z$; $\frac{\partial}{\partial t}\eta + \Phi_x\eta_x + \Phi_y\eta_y - \Phi_z\big|_{z=\eta(x,y,t)} = 0$

Интеграл Бернулли-Коши:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta(x,y,t)\Big|_{z=\eta(x,y,t)} = -p_0(x,y,t)$$

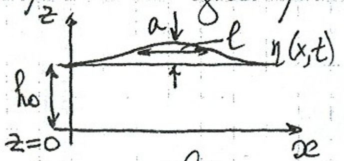
Начальные скорости: $\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x,y,z)$, $\eta|_{t=0} = \eta_0(x,y)$

$\Rightarrow$ получили нелинейную краевую задачу для ур-ние Лапласа.

12.03.07

Теория мелкой воды

Перешли к одномерному по координате движению



Вводятся безразмерные параметры: $\alpha = \frac{a}{h_0}$, $\beta = \frac{h_0^2}{l^2}$

l - длина волны, a - амплитуда.

Безразмерные переменные: $\frac{x}{l}, \frac{z}{h_0}, t\sqrt{gh_0}/l$, $\frac{(\eta-h_0)}{a}$, $\frac{\sqrt{gh_0}}{gla}\Phi$

x, z, t, η, Φ

$\beta\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0 \quad 0<z<1+\alpha\eta$

$\Phi_z|_{z=0} = 0$ - условие непротекания

$$\left.\begin{aligned} &\eta_t + \alpha\Phi_x\eta_x - \frac{1}{\beta}\Phi_z = 0 \\ &\Phi_t + \eta + \frac{1}{2}\alpha\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\Phi_z^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{при } z = 1+\alpha\eta$$

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\beta^m\frac{z^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}f(x,t), \quad f(x,t) = f_0(x,t)$$

$$(*)\begin{cases} \eta_t + \frac{\partial}{\partial x}[(1+\alpha\eta)f_x] - \left\{\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3\frac{\partial^4}{\partial x^4}f + \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha\eta)^2\eta_x\frac{\partial^3}{\partial x^3}f\right\}\beta + O(\beta^2) = 0 \\ \eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 - \frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial t} + \alpha f_x\frac{\partial^3}{\partial x^3}f - \alpha f_{xx}^2\right\}\beta + O(\beta^2) = 0 \end{cases}$$

Считаем, что $0<\beta\ll 1$. Опустим члены более высокого порядка: (волна сильно размазана)

$\eta_t + [(1+\alpha\eta)f_x]_x = 0$

$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 = 0$

Обозначим $f_x + \Phi_x = u$. Дифф-ем 2ое ур-ние по x и возвращаемся к размерным переменным

$$\left.\begin{aligned} &\eta_t + [(h_0+\eta)u]_x = 0 \\ &u_t + uu_x + g\eta_x = 0 \end{aligned}\right\} \text{ур-ние мелкой воды}$$

Вертикальная компонента $= 0$.

$\exists\ \alpha \ll 1$, т.е. амплитуда мала $\Rightarrow$

$\eta_t + u_x = 0$

$u_t + \eta_x = 0$ $\quad f_x = u \quad \Rightarrow \eta_{tt} = c_0^2\eta_{xx} \quad c_0^2 = gh_0$ получились обычные волны

Вывод ур-ние Картевега де Фриза

$\exists\ \alpha = O(\beta)$. Из $(*)$ получим:

$$\left.\begin{cases} \eta_t + [(1+\alpha\eta)u]_x - \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0 \\ u_t + \alpha uu_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xxt} = 0 \end{cases}\right\} \text{ур-ние Буссинеско}$$

эта нелин-сть порожд. уединен. волну

Они описывают волны малой амплитуды на мелкой воде.

Если выделить волны, бегущие только вправо, то получим ур-ние КдФ

Ищем решение в виде $u = A_0(\eta) + \alpha A_1(\eta) + \beta B_1(\eta) + O(\alpha^2 + \beta^2)$, а η в виде: $\eta_t + \frac{1}{x} = \alpha C_1(\eta) + \beta C_2(\eta) + O(\alpha^2 + \beta^2)$. Получим:

$$\begin{cases} 0 = \eta_t + [A_0]_x + \alpha[(\eta A_0)_x + (A_1)_x] + \beta[(B_1)_x - \frac{1}{6}(A_0)_{xxx}] + O(\alpha^2 + \beta^2) \\ [A_0]_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + A_0(A_0)_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}(A_0)_{xxt}] + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \end{cases}$$

2 ур-ние для ф-ции $\eta(x,t)$ – форма поверхности

Если выбрать $A_0(\eta) = \eta$, то ур-ние приобр. вид:

$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_x + 2\eta\eta_x] + \beta[(B_1)_x - \frac{1}{6}\eta_{xxt}] = 0$

$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + \eta\eta_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}] = 0$

$\eta_t = -\eta_x + O(\alpha + \beta)$. Все производные по t можно заменить на пр-ные по x с другим знаком

$A_1 = \eta^2 b$ $\quad 6 \cdot 2\eta \cdot \eta_x + 2\eta\eta_x = 2\eta \cdot \eta_t b + \eta\eta_x$

$B_1 = b\eta_{xx}$ $\quad 2b\eta\eta_x + \eta\eta_x = 2\eta\eta_t b$

$4b\eta\eta_x + \eta\eta_x = 0$

$4b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{4} \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{4}\eta^2$

$b\eta_{xxx} - \frac{1}{6}\eta_{xxt} = b\eta_{xxt} - \frac{1}{2}\eta_{xxt}$

$2b\eta_{xxx} + \frac{1}{6}\eta_{xxx} - \frac{1}{2}\eta_{xxx} = 0$

$(2b - \frac{1}{3})\eta_{xxx} = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{6} \Rightarrow B_1 = \frac{1}{6}\eta_{xx}$

$\Rightarrow \eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0$

$\eta_t + c_0(1 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{h_0})\eta_x + \frac{1}{6}h_0^2 c_0 \eta_{xxx} = 0$

В каноническом виде:

$\boxed{u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0}$ – ур-ние КдФ

Решением явл. $u(x,t) = 3\alpha^2 \operatorname{sech}^2[\frac{1}{2}\alpha(x - \alpha^2 t)]$. Устанавливается непосред. проверкой

Импульсы большей амплитуды бегут быстрее, т.к множитель при t больше, чем при x.

Решение наз. <u>солитоном</u>

Задача Коши для ур-ние КдФ: $u|_{t=0} = \varphi(x)$

ур-ние Хопфа 19.03.07

$u_t + uu_x + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-s)u_s(s,t)\,ds = 0$ – ур-ние Уизона (*)

Как представить член, который сохраняет начальную форму решение? Нужно затормозить быстрые части. Можно подобрать ядро так, чтобы получилось КДФ.

Изучим интегралы этого ур-ние. Для этого нужны предположение о ядре:

1) $K(x) = K(-x)$

Обозначим $\hat{K}u = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-s)v(s)\,ds$

$(\hat{K}u, v) = (u, \hat{K}v)$ – в силу четности

2) Перестановочность с оператором дифф-ние пох:

$D_x \hat{K} = \hat{K} D_x$

Запишем ур-ние в виде: $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2}{2} + \hat{K}u\right] = 0 \quad \Big| \int dx$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = -\left[\frac{u^2}{2} + \hat{K}u\right]\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

$\Rightarrow$ Первый интеграл $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = const = I_1}$

Умножим ур-ние (*) на u и $\int \Rightarrow$

$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u^2(x,t)\,dx + \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} D_x\left(\frac{u^3}{3}\right)dx}_{=0} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} u D_x \hat{K}u\,dx = 0$

$\frac{d}{dt} I_2[u] + (u, D_x\hat{K}u) = 0, \quad I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dt$

$\measuredangle\ (u, D_x\hat{K}u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u D_x \hat{K}u\,dx = \underbrace{u\hat{K}u\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_x u\,\hat{K}u\,dx =$

$= -(\hat{K}u, D_x u) = -(u, \hat{K}D_x u) = (-u, D_x\hat{K}u)$

$\Rightarrow (u, D_x\hat{K}u) = 0 \Rightarrow \boxed{I_2 = const = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dt}$

$I_3[u] = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^3}{3} + u\hat{K}u\right]dx \overset{?}{=} const$. Для этого надо продифф-ть и воспользоваться ур-нием (*)

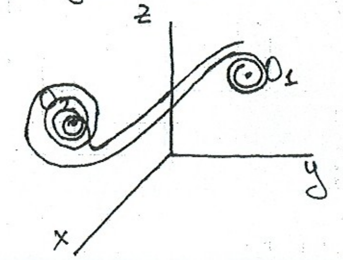
$\frac{d}{dt} I_3[u] = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{u^3}{3} + u\hat{K}u\right]dx =$ Д/З!

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = x(r-z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

Положение равновесие $(0,0,0)$

2 особые точки: $O_1(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$

$O_2(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$



Возникают пр-ва дробной размерности.

Критическое значение $r_c = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$. Происходит смена устойчивости

19.04. <u>Стационарное распределение намагниченности</u>

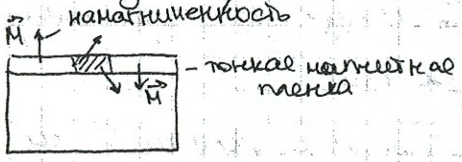
<u>в магнетике</u>

Распределение будет таким, чтобы полная энергия была минимальной.

Ур-ние Ландау-Лифшица (феноменологическое)

О распределении можно судить по:

1) эффекту Фарадея. J на пластинку падает поляризованый свет, проходит через нее. После прохождения плоскость поляризации повернута. Механизм поворота не ясен.

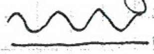


Область, где происходит поворот, наз. <u>доменной границей</u>

$\int_D \{(\nabla M)^2\alpha + (M_\perp)^2 A + (MH)\} d\tau$ (*)

3 вида энергии

Главная трудность - вычислить поле H.

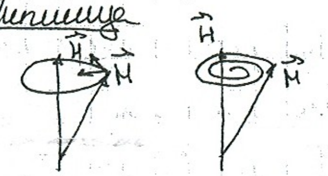
Конкуренция явлений происходит между I и III слагаемым в ф-ле. Когда немеета намагниченность (Например: ), то преобладает I член. Поле будет меньше

______ ← в такой ситуации, III член будет преобладать

<u>Ур-ние Ландау-Лифшица</u>

Прикладывается поле $\vec{H}$.

$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \gamma[\vec{M}\vec{H}] + \underbrace{\alpha[\vec{M}[\vec{M}\vec{H}]]}_{\text{отвечает за затухание}}$



движение происходит по спирали

доменная стенка
разбиение 30×40

для решения таких задач нужен суперкомпьютер (хотим посчитать доменную стенку);

I) Выбор M_0 минимизировав ф-л(*)

II) По M_0 сосчитать H_m^0 образца: можно проинтегрировать Ур-ние Лапласа для поля

III) По ур-нию Ландау-Лифшица получить $\vec{M}_1$ под влиянием поля $\vec{H}_m^0$

IV) Сосчитать поле $\vec{H}_m^1$ от распределения M_1

V) Сосчитать $\vec{M}_2$ по ур-нию Ландау-Лифшица и т.д. пока разница между итерациями не станет меньше заданного ε. Получится распред. намагниченностей

<u>16.04</u>

$\varepsilon^2 \Delta u = f(u,x) \quad x=\{x_1,x_2\}$

I) $u|_{\partial D} = \varphi(x)$ (или $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = \psi(x)$ II))

$f(u,x)=0$, $\exists\ u=\varphi_i(x)$ — корни ур-ния

$\exists$ на этих корнях ф-ция f меняет знак

$\exists$ для задачи I нам известна ф-ция источника $G(x,\xi)$

Через нее можно записать решение:

$$u = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_D G(x,\xi)f(u,\xi)\,d\tau_\xi$$

$\Rightarrow \varepsilon^2 u = -\int_D G(x,\xi)f(u,\xi)\,d\tau_\xi$ — ур-ние Фредгольма II рода с малым пар-ром

$\varepsilon^2 \ll 1$. Обратим малый параметр в 0:

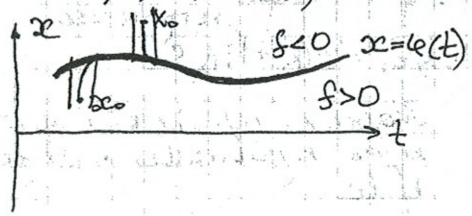
$0 = -\int_D G(x,\xi)f(u,\xi)\,d\tau_\xi$ — ур-ние I рода

Все корни $\varphi_i(x)$ явл. точными решениями этого ур.

Есть ли связь между решениями ур-ний I-го и II-го рода? У ур-ние I-го рода нет краевых условий

4 $\varepsilon\dot{x} = f(x,t)$, $\varepsilon \ll 1$, $x(t_0)=x_0$

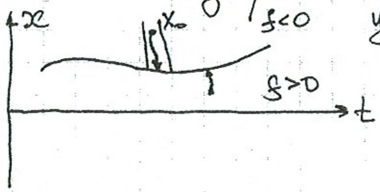
$0 = f(x,t)$ $\quad x=\varphi(t)$



предельный переход решение полного ур-ние к однород. Имеется область быстрого изм. решения погран. слой

$\varepsilon\dot{x} = (f(x,t))^{-1}$

$x=\varphi(t)$ — сингулярное многообразие



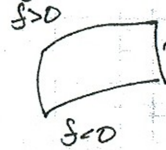
укороченный погран слой

$\dot{x}_i = f_i(x,t)$ $\quad 1\le i\le n$ — система ур-ний

$\exists\,(f_{i_0}(x,t))^{-1} = 0$ вблизи начальной точки. Тогда траектория по этой координате будет стремиться к этому многообразию

Связь есть и она формируется погран слоем

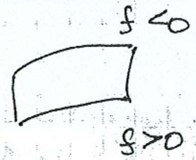
Существенна перемена знака ф-ции на корне φ_i



$G(x,\xi)>0$ всюду

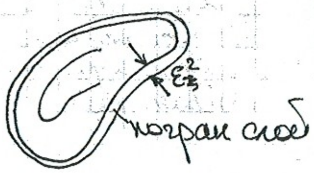
$u=\varphi_i(x)+\delta u$ — вариация корня

Неустойчивость и неоднозн-сть решение $\Rightarrow$ связи между решениями нет.



в такой ситуации величины в разных частях разных знаков $\Rightarrow$ устойчивость

$u_i(x,\varepsilon) = \varphi_i(x) + \underbrace{\Pi(x,\varepsilon)}_{\text{погран слой}}$



Можно ли перейти от неуст. корня к устойчивому по зад. кривой.