Доп. главы Уравнений в частных пр-ых.

Лит-ра

А. В. Бицадзе — Курс лекций по ДГУЧП.

Соболев — Урмат.

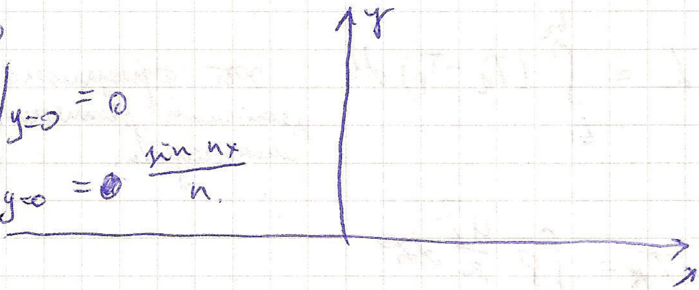
Гельфанд — Теория обобщ. ф-ий.

Михаил Михайлович.

$f(x) = f_k e^{\int_0^x k(\xi)\,d\xi}$

Пример Адамара по некорр. зад. Коши для ур. Лапласа.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,y)\big|_{y=0} = 0 \\ u_y(x,y)\big|_{y=0} = \dfrac{\sin nx}{n} \end{cases}$$



$u(x,y) = Y(y)\sin nx.$

$\boxed{Y''(y) \cancel{\sin x} - n^2 Y(y) = 0.}$

$\cancel{Y = C_1 e^{ny} + C_2 e^{-ny}}$ $\cancel{Y = C_1 \operatorname{sh} ny + C_2 \operatorname{ch} ny}$

$\cancel{nC_1 + C_2 = 1}$ $\cancel{\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ nC_1 - nC_2 = 1. \end{cases}}$ $\cancel{C_1 = C_2 = \frac{1}{2}}$

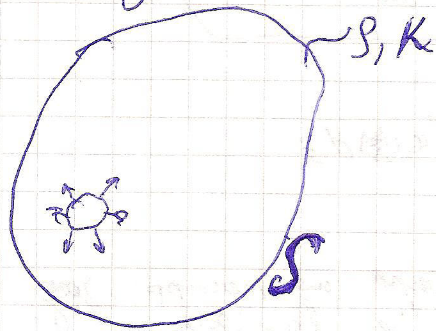
$Y = C_1 \operatorname{sh} ny + C_2 \operatorname{ch} ny. \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow$ и

$\Rightarrow u = \dfrac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n}.$

$n \to \infty \Rightarrow u \to \infty$, а гр. усл $\to 0$.

неустойч.

Вывод уравнения в частных пр-х



$T_к - T_р.$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} (T_к - T_р)\, dt$$ — этот функционал на реальном движении достигает минимума.

$$T_к = \iint_D \rho \frac{u_t^2}{2}\, d\sigma.$$

$$T_р = \left\{ \iint_D K\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\, d\sigma - \iint_D K\, d\sigma \right\} \approx$$

$$u_x, u_y \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1+u_x^2+u_y^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)$$

$$\approx \iint_D \frac{K}{2}(u_x^2+u_y^2)\, d\sigma$$

Т.о.

$$L = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \iint_D \left(\rho u_t^2 - K(u_x^2+u_y^2)\right) d\sigma\, dt$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = V(y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y(x_1) = y_1$$

$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ – ур. Эйлера

Для двумерных задач:

$$U[u] = \int_D F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) d\sigma$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = p$, $\frac{\partial u}{\partial y} = q$

$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0$ – ур. Эйлера-Остроградского

Применим ур. Эйлера-Остроградского (в предполож., что u имеет вторые пр-ые в D)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(k u_y) = 0.$$

Если положить $\rho, k = const$, то

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u_t = k\left(\frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y\right)$$

или же

$$\begin{cases} \boxed{u_{tt} = a^2 \Delta u.} \\ u|_S = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases}$$

$u(x,y,t) = V(x,y)\cdot T(t).$

$V\cdot T'' - a^2 T\cdot \Delta V = 0$

$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\Delta V}{V} = -\lambda.$

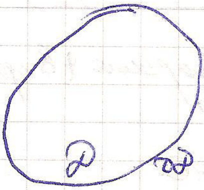
$TV|_S = 0.$

$\begin{cases} \Delta V + \lambda V = 0 \\ V|_S = 0 \end{cases}$

$T'' + \lambda a^2 T = 0.$

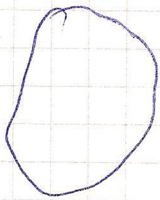
$u_{tt} = \Delta u \qquad \dim x = 3.$

1)

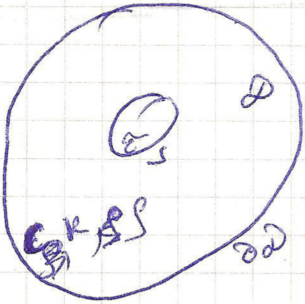


$u|_{\partial D} = 0$

2) $x = x_1, x_2, x_3 \qquad R_3$



$\varphi(x),\ \psi(x).$



$\dim x = 3$

$u(x,t)$

$$\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}\,dS \qquad \int_\tau c\rho u_t\,d\tau$$

$$\int_\tau \{\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) - c\rho u_t\}\,d\tau = 0.$$

Т.к. τ – произв. объём, то $\int = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) = c\rho u_t.$

Если $k = \mathrm{const}$, то $\mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) = k\Delta u.$

Т.е. $u_t = \underbrace{\frac{k}{c\rho}}_{=a^2}\Delta u.$

$$\boxed{u_t = a^2\Delta u}$$

~~Уравнение Корте. Де~~

Уравнение Кортевега – де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Описывает движение солитона

$$u_t = a^2 \Delta u$$

I $\quad u\big|_S = f(x)$

II $\quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi(x)$

III $\quad \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_S = R(x).$

Волновое уравнение. Ф-ла Кирхгофа
Ф-ла Пуассона и Ф-ла Даламбера
Принцип Гюйгенса.

уравнение в частных пр-х вида

$$\Delta u - u_{tt} = 0, \quad x \in (x_1, \dots, x_n) \in E^n$$
$$t \in E^1$$

Рассмотрим $n=3$.

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

$$Q(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \lambda_{n+1}^2 \qquad \lambda_i \in R.$$

Уравнение (1) - гиперболическое в E_n^{n+1}

Лемма Ф-ла $u(x,t) = \int\limits_S \frac{\mu(y_1, y_2, y_3)}{|y-x|} dS_y$ (2)

$|y-x| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$

$S: \{y: |y-x|^2 = t^2\}$ - сфера с центром в т. x радиуса t

$\mu(y_1, y_2, y_3) \in C^2$ по $y_1, \dots, y_3$

является регулярным решением (1). в E^4

(имеет непрерывные частные пр-ые, вход в уравн).

Док-во Сделаем замену переменных:

$S \ni y_i = x_i + t\xi_i \;-\; |\xi| = 1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$

$dS_y = t^2 d\sigma_\xi$ — эл. пл. пов. сферы $|\xi| = 1$.

$$u(x,t) = t \int_\sigma \mu(x + t\xi)\, d\sigma_\xi$$

~~(4) $\Delta u = \int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \xi_i^2} d\sigma_\xi$~~

(4) $$\Delta u = \int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \int_\sigma \mu(x+t\xi)\, d\sigma_\xi\right) = \int_\sigma \mu(x+t\xi)\, d\sigma_\xi +$$

$$+ t \int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial y_i} \xi_i\, d\sigma_\xi = \frac{u}{t} + \frac{1}{t} I, \quad (5)$$

где $$I = \int_S \left(\frac{\partial \mu}{\partial y_1}\nu_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2}\nu_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_3}\nu_3\right) dS_y, \text{ и } \quad (*)$$

(ν_1, ν_2, ν_3) — внешняя нормаль к S.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{u}{t} + \frac{I}{t}\right\} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} -$$

$$- \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} \quad (6)$$

Ф-ла Гаусса - Остроградского

$A_i(x) \in C^{(1)}(D \cup C)$. C - гл. граница;

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dx = \int\limits_S \sum_{i=1}^n A_i(y)\, \nu_i \, dS_y.$$

~~Д~~

Применим ф-лу Остроградского - Гаусса к в $(*)$.

$$I = \int\limits_{|y-x| \le t} \left[\sum \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y^2}\right] dy = \int\limits_D \Delta u \, dy.$$

Перейдём к сфер. коорд.:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y_2 = x_2 + \rho\sin\varphi\sin\theta \\ y_3 = x_3 + \rho\cos\theta. \end{cases}$$

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int\limits_0^t \rho^2 d\rho \underbrace{\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \Delta u \, d\varphi}$$

$$\frac{dI}{dt} = t^2 \int\limits_\sigma \Delta u \, d\sigma_\xi \qquad \overset{\shortparallel}{\int\limits_\sigma \Delta u \, d\sigma_\xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{t} \frac{dI}{dt} = t \int\limits_\sigma \Delta u \, d\sigma_\xi = \Delta u$$

ч.т.д.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0 \\ u|_t = \varphi(x) \in C^3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_t = \psi(x) \in C^2 \end{cases}$$

$\psi \in C^2 \Rightarrow t \cdot M[\psi]$ — рег. решение задачи.

$$\underbrace{M[\psi]}_{\displaystyle \int_{\sigma = \{|\xi| = 1\}} \psi(x + t\xi)\, d\sigma_\xi}$$

~~Т.к. уравн. имеет пост. коэффиц., то его произв. по t рег. решению тоже будет реш. ($\frac{\partial}{\partial t}\{t M[\varphi]\}$ — тоже реш).~~

Т.к. уравн. имеет пост. коэффиц. то

$\frac{\partial}{\partial t}(t M[\varphi])$ — тоже реш ($\varphi \in C^3$).

(8). $u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\{t M[\varphi]\} + \frac{t}{4\pi} M[\psi]$ — ф-ла Кирхгофа.

Устремим $t \to +0$: $\frac{t}{4\pi} M[\psi]\Big|_{t=0} = 0.$

$$\left(t \frac{\partial M}{\partial t}[\varphi] + \frac{M[\varphi]}{4\pi} \right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \varphi(x).$$

Т.о. $u(x,0) = \varphi(x)$ — нач. условие вып.

Покажем выполнение второго

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \underbrace{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\{t M[\psi]\}\Big|_{t=0}}_{=\,\psi(x)} + \left(\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 (t M[\varphi])\right)\Big|_{t=0} =$$

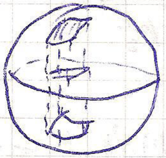
$$= \frac{4}{4}\psi(x) + \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi}\, t M(\Delta\varphi)\right)\Big|_{t=0}}_{=\,0} = \psi(x).$$

т.о. ф-ла (8) удовлетв. задаче Коши.

Двумерный случай. Фор-ла Пуассона

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{tt} = 0 & (9) \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2) & (10) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2) & (11) \end{cases}$$

Ф-ла Кирхгофа удовл. (9-11), если φ и ψ положить $=$ const по перем. x_3.



При вычислении поверхн. интегралов в (8) мы проектир верхн ~~полусферу~~ и нижнюю полусферы на $|y|^2 \le t^2$

$$dy_1\, dy_2 = \cos(i_3, \nu)\, dS_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dS_y = \frac{t\, dy_1\, dy_2}{\sqrt{t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}$$

Т. е.

$$\frac{1}{4\pi} t M\{\psi\} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|y-x|\le t} \frac{\psi(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{t^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, t M\{\varphi\} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|y-x|\le t}\frac{\varphi(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}$$

(14) $$u = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|y-x|\le t}\frac{\psi(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{|y-x|\le t}\frac{\varphi(y_1,y_2)}{\sqrt{t^2-|x-y|^2}}\,dy$$

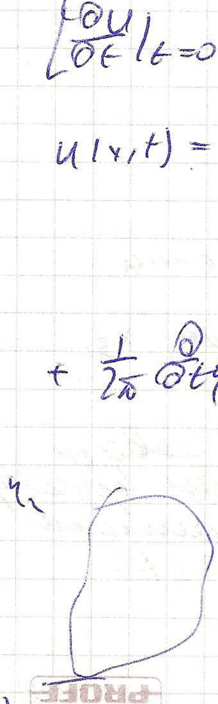
Ф-ла Пуассона.

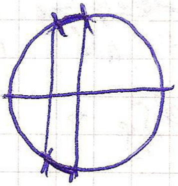
<u>Одномерный случай</u>

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

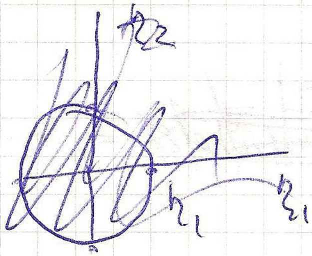
$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\psi(x+\eta_1)\,d\eta_1\left(\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t}\varphi(x+\eta_1)\,d\eta_1\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} =$$





$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(\eta)\,d\eta + \frac{1}{2}\left(\varphi(x+t) + \varphi(x-t)\right).$$



Рассмотрим ф-лу Кирхгофа ещё раз:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\{t M(\varphi(x))\} + \frac{t}{4\pi} M(\psi)$$

Несмотря на то, что φ и ψ задаваем ~~пом~~ во всём пр-ве. Но у нас интегр. идёт по сфере. Появляется передний и задний фронт волны. - св-во Гюйгенса. В двумерном случае этого нет.

Лемма Пусть $U(x,t,\tau)$ реш. зад.

$$\begin{cases} \Delta U = U_{tt} \\ U|_{t=\tau} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x,t) \end{cases}$$

то $u(x,t) = \int_0^t U(x,t,\tau)\,d\tau$ - реш. однород. задачи Коши:
$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = f(x,t) \\ u|_{t=0} = 0 = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} \end{cases}$$

Док-во надо проверить.

$$\Delta u = \int_0^t \Delta \bar{U} \, d\tau$$

$$u_t \Big|_{t=0} = \bar{U}(x,t,\tau)\Big|_0^t + \int_0^t \frac{\partial \bar{U}}{\partial t}(x,t,\tau)\, d\tau =$$

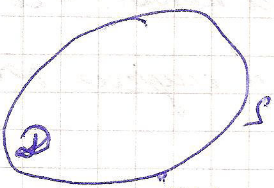
$$= \int_0^t$$

Уравнение Лапласа.

$\Delta u = 0.$ $\qquad \dim x = n.$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

~~Задача~~



~~$x \in S$~~.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = Q(\lambda)$$

$$\Delta u = 0$$
$$u\big|_{x \in S} = \varphi(x)$$

~~Задача~~ Решение называется гармонической ф-цией

Св-ва

1) $u_k(x)$ - гармонич. $\Rightarrow$

$u(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)$ - так же гармоническая.

2) Если $u(x)$ - гармоническая, то

$u(\lambda_k C x + h)$ - так же гармоническая,

если $\lambda = const$, C - ортогон. матрица,

h - n-мерный постоянный вектор.

Ф-лы Грина.

1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \underset{0}{\underset{\parallel}{u \Delta u}} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$

2). $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v \partial u}{\partial x_i \partial x_i}$

$= 0.$

Проинтегр. рав-ва 1) и 2) получим.

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) d\tau = \int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$$

$$\int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) d\tau = 0.$$

Воспользуемся ф-лу Остроградского - Гаусса.

1) $\int_S u \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_s} ds = \int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$

2) $\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_s} - \frac{\partial v}{\partial \bar{n}_s} u\right) ds = 0.$

① Если u на границе S 0, то $u \equiv 0$
из 1)

Если $\int\limits_{D} \sum\limits_{i=1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \; i=\overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = const \Rightarrow u \equiv 0.$

② Если u на границе 0, то $\int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$
из 2).

Отсюда необход. условием разрешимости задачи Неймана $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = p(x) \end{cases}$

будет условие $\int\limits_S p(x)\, dS = 0.$

③ ~~Интегр. представление~~

Элементарное решение
(Фундам. решение)

$r^2 \frac{d^2 u}{d r^2} + \frac{n-1}{\cancel{r}}r \frac{du}{dr} = 0.$

$u = r^k$

$k(k-1) r^k + (n-1) k r^k = 0$

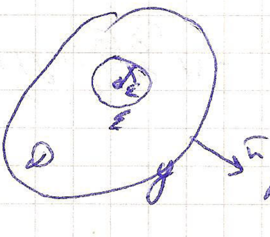
$k = -(n-2) \Rightarrow$ ~~фунд~~ $u = r^{2-n}.$

Т.о. Фунд. решение:

$$E(r) = \begin{cases} -\ln r & n=2 \\ \frac{1}{n-2} r^{2-n} & n>2 \end{cases}$$

Интегральное представление

Фунд. решение имеет особенность при $r=0$



$$E(x,y) = \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}$$

В области $D \setminus \varepsilon$ применим 2-ую ф-лу Грина.

$$\int\limits_S \left(E(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_s} - u \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_s}(x,y) \right) dS = \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \left(E(x,y) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_\varepsilon} - u \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_\varepsilon} \right) dS_\varepsilon$$

$$I_1 = \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} E(x,y) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_\varepsilon} dS_\varepsilon = E(x,y)\Big|_{|x-y|=\varepsilon} \underbrace{\int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_\varepsilon} dS_\varepsilon}_{\text{0 по св-вам гарм. ф-ии}} = 0$$

$$I_2 = \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} u(y) \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_\varepsilon} dS_\varepsilon = \left(\pm \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} u(x) \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_\varepsilon} dS_\varepsilon + \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} u(y) \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_\varepsilon} dS_\varepsilon \right.$$

$$= \left(u(x) \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_\varepsilon} dS_\varepsilon + \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \{u(y) - u(x)\} \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_\varepsilon} dS_\varepsilon \right) =$$

$$\cancel{= u(x) \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\omega_n \varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}}}$$

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\left(\frac{1}{(n-2) r^{n-2}}\right)' = \frac{1}{r^{n-1}}$$

$$= u(x) \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \frac{1}{r^{n-1}}\, dS_\varepsilon + \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \overbrace{[u(y)-u(x)]}^{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0}\ \overbrace{\frac{\partial E}{\partial n}}^{\sim \text{const}}\, dS_\varepsilon =$$

$$u(x) \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \omega_n \varepsilon^{n-1}$$

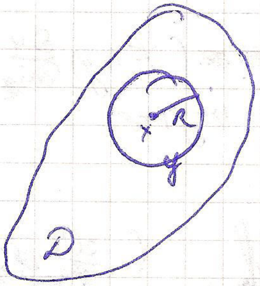
ω_n – площадь ед. сферы.

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$= u(x) \cdot \omega_n.$$

Т.о. $$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \left(E(x,y) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_S} - u \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_S}(x,y)\right) dS$$

$$\boxed{\text{Теорема о среднем}}$$



Применим инт. представление к сфере R.

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{K_R} \left(\underbrace{E(x,y) \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_S}} - u \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_S}(x,y)\right) dS_R =$$

$E = \text{const} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E(R) \int\limits_R \frac{\partial u}{\partial \bar{n}_S}\, dS_R = 0.$$

$$= -\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{K_R} u \frac{\partial E}{\partial \bar{n}_S}(x,y)\, dS_R =$$

$$= \frac{1}{\omega_n}\int_R u\, dS_R \frac{1}{R^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_R u(y)\, dS_y$$

Т.о. $u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{C_R} u(y)\, dS_y$

$$\int_0^R \rho^{n-1} u(x)\, d\rho = \int_0^R \frac{1}{\omega_n} \int_{C_\rho} u(y)\, dS_y\, d\rho$$

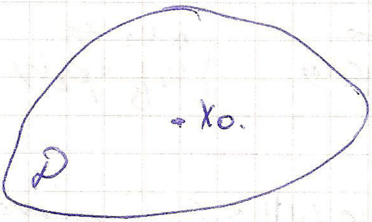
$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\Omega_R} u(y)\, d\tau_y$$ Т-ма о среднем по сфере.

Принцип экстремума

Гармоническая ф-ия внутри области гармоничности не достигает ни максимума, ни минимума.

M – max

m – min –

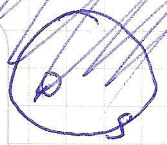


Пусть в x_0 достиг. M. Тогда в некоторой окр. $u(y) < M$ $< M\frac{n}{\omega_n R^n}$

$$\underset{\underset{M}{\parallel}}{u(x_0)} = \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\Omega_R} u(y)\, d\tau_y \Rightarrow$$

$M = u(x_0) < M$. Противор.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S = \varphi(x) \end{cases}$$



Теорема: решение задачи Дирихле единственно.

$\Delta u = 0$; $u|_S = \varphi(x)$, $u \in C^2(D) \cap C(D \cup S)$

Д-во: пусть u_1 и u_2 — реш.

$u = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S = 0 \end{cases}$ реш. этой задачи $u \equiv 0$, ~~отсюда~~ т.к. ее и доctиг. максимум и миним. на границе, т.е. оба они $= 0$.

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1|_S = \varphi_1(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ u_2|_S = \varphi_2(x) \end{cases}$$

$\|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| \le \varepsilon \Rightarrow$ решения $\|u_1 - u_2\| \le \varepsilon$ — непрерывна по вх. нач. данным.

Т.е. задача Дирихле корректна.

Под корректной по Адамару задачей понимают

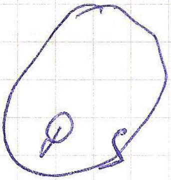
1) $\exists$ решение

2) ! решение

3) непрер. зависимость от входных данных

Ф-ия источника (ф-ия Грина)

$\Delta u = 0$ Ф-ия Грина для точек



$G(x,y)$ называется ф-ия, представимая в виде

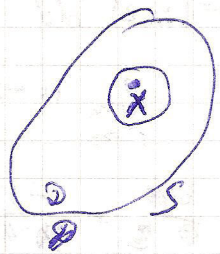
1) $E(x,y) + g(x,y)$, где E — фунд. решение, g — гармонич.

2) $g(x,y)\big|_S = -E(x,y)\big|_S$ для и з точек на границе.

Св-ва

1) положительна

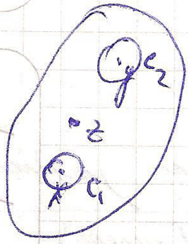
Пусть x лежит внутри D.



Вырежем шарик из D $\Rightarrow$ G достиг. max и min на границе: на S $G=0$, на шарике $\to +\infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в D огр. $G(x,y) \geq 0$.

2) Ex $G(x,y) = G(y,x)$.



$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0.$$

$$u = G(z,x)$$

$$v = G(z,y).$$

$$\int_S \left(G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n} - G(z,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n} \right) dS_z$$

$$= 0$$

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = 0 \Rightarrow$$

$\varepsilon \to 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_1} \left(G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n} - G(z,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n} \right) dS_z = - G(x,y)$$

$$E(z,x) = \frac{1}{(n-2)\,|z-x|^{n-2}}$$

$$dS = |x-z|^{-1} d\sigma \qquad \frac{|x-z|^{n-1}}{(n-2)\,|x-z|^{n-2}} = \frac{(n-2)}{n-2}.$$

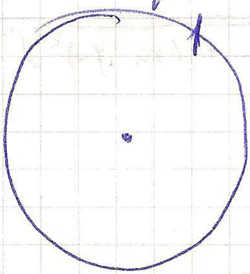
$$\lim_{\varepsilon \to 0} |x-z| = 0 \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|x-z|^{n-1}}{|x-z|^{n-1}} = 1.$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{-1}{|x-z|^{n-1}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial n} - G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial n}\, ds = G(y,x).$$

$$G(x,y) = G(y,x).$$ См Тихонов - Самарский

Пример



$$G(x,y) = E(x,y) - E\left(|x|y, \frac{x}{|x|}\right).$$

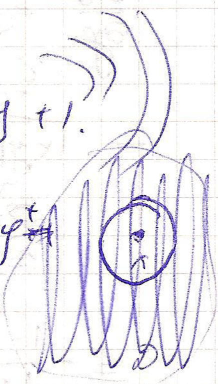
$$E(x,y) = \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}.$$

$$|x-y|^2 = x^2 - 2xy + 1$$

$$\left||x|y - \frac{x}{|x|}\right|^2 = |x|^2 y^2 - 2xy + 1.$$

$|y|=1$

$$\left||y|x - \frac{y}{|y|}\right|^2 = |y^2| x^2 - 2xy + 1$$



$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S \left(E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n} - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n}\right) dS_y.$$

Подставим вместо E ф-цию Грина.

~~Какого???~~

Получим $u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int \left(\underbrace{G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n}}_{=0} - u(y)\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS_y$

$G(x,y) = E(x,y) - E\left(|x|y, \frac{x}{|x|}\right).$

$\bar{n} = \{y_i\}$

$|x-y|^{n-1}$

$$E(x,y) = \frac{1}{(n-2)\left(\sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}\right)^{n-2}}$$

$\cancel{\frac{1}{|x-y|^{n-1}} E}$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \sum_i \left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}} \frac{1}{2} 2(-1)(x_i - y_i) y_i - \frac{-1\left(|x|y_i - \frac{x_i}{|x|}\right)}{|x-y|^{n-1}} |x| \right)$$

$$= \frac{-1}{|x-y|^{n-1}} \left(\cancel{\sum_{i=1}^n x_i y_i} - \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i^2}_{=1} - |x|^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i^2}_{=1} - \cancel{\sum_{i=1}^n x_i y_i} \right) =$$

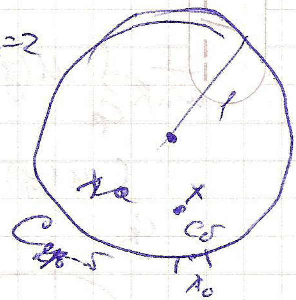
$$= -\frac{1-|x|^2}{|x-y|^{n-1}}$$

Т.о. $\underbrace{u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int_S \varphi(y) \frac{1-|x|^2}{|x-y|^{n+1}} dS_y}_{\text{интеграл Пуассона}}.$

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{1-x^2}{|y-x|}\,dS \qquad n=2,\quad f(y)=1.$$

$$u(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{1-x^2}{|y-x|}\left(f(y)-f(x_0)\right)dS =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta} \frac{1-x^2}{|y-x|}\left(f(y)-f(x_0)\right)dS}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta} \frac{1-x^2}{|y-x|}\left(f(y)-f(x_0)\right)dS}_{I_2}.$$



$\varepsilon > 0 \quad \delta(\varepsilon): |I_1| \le \frac{\varepsilon}{2}.$

$x \to x_0$ $\quad |I_2| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1-x^2)$ рез. мало.

Т.о. интеграл Пуассона непрерывно примыкает к граничному значению.

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int_{C_R} f(y)\frac{R^2-|x|^2}{|y-x|^{n}}\,dS_y.$$

Если гармоническая ф-ия знакопостоянная, то она const.

$$R - |x| \le |x-y| \le R + |x|$$

$$\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{C_R}\frac{u(y)(R-|x|)(R+|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}\,dS_y \le$$

$$\le u(x) \le \frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{C_R}\frac{u(y)(R-|x|)(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}\,dS_y$$

$$\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int\limits_{C_R} u(y)\,dS_y = u(0).$$

$$\int\limits_{C_R} u(y)\,dS_y = u(0)\,\frac{\omega_n R^{n-1}}{1}.$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{1\,(R-|x|)\cancel{\omega_n}\,u(0)\,R^{n-1}}{\cancel{\omega_n} R(R+|x|)^{n-1}}}_{\downarrow\ 1} \le u(x) \le \underbrace{\frac{1\,\cancel{\omega_n}(R+|x|)\,u(0)\,R^{n-1}}{\cancel{\omega_n} R(R-|x|)^{n-1}}}_{\downarrow\ 1.}$$

$$\Downarrow$$

$$u(0) \le u(x) \le u(0).$$

Теорема Лиувилля.

Если гармоническая ф-ия ограничена во всём пр-ве $\Rightarrow$ она постоянна.

Пусть $u(x) \le M$.

$$V(x) = M - u(x) \geq 0 \Rightarrow V(x) = const \Rightarrow$$
$$u(x) = const.$$

Эллиптические уравнения общего вида.

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$$

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$$ положит. опр. $\Rightarrow$ эллипт. ур.

равномерная эллиптичность: $\exists\, k_0, k_1$:

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \le k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

$$A_{ij}(x) \in C^{1,0}(\mathcal{D})$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} \cancel{+ C(x)u}\right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + C(x)u.$$

$$B_i(x) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_i} = e_i$$

$$\mathcal{L}(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u$$

$$\mathcal{L}^*(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \cancel{+ \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}}$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_i(x)u\right) + C(x)u$$

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{L}^*(u) \Leftrightarrow e_i(x) = 0.$$

~~Pe~~ $L(u) = L^*(u) \Rightarrow e_j(x) = 0.$

$u = 1 \Rightarrow 0 = -\sum \frac{\partial e_i}{\partial x_i}$

$u = x_j \Rightarrow \lambda e_j(x) = -x_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - e_j(x). \Rightarrow$

$e_j(x) = 0.$

Уравнение параболич. типа.

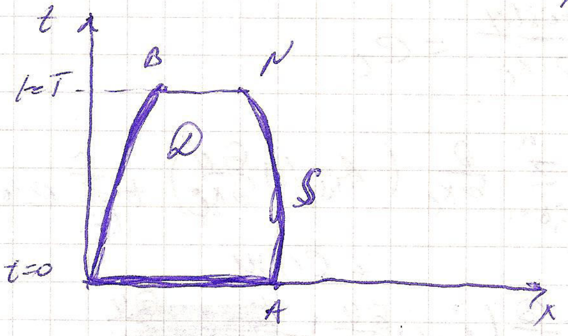
Ур теплопроводности

I-ая краевая задача.

Принцип экстремума

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$(dt)^2 = 0 \Rightarrow t = const$ - характеристики.



BO и AN пересекают характеристики только в одной точке.

$0 \le t \le T$, $\alpha = \alpha(t)$ (OB)
$\beta = \beta(t)$ (AN) $\alpha(t) < \beta(t)$

$S = OA \cup OB \cup AN$, B и N $\in S$

парабол. граница.

Рег. решением в $D \cup S \cup BN$

назыв. $u(x,t) \in C(D \cup S \cup BN)$, u_{xx}, u_t внутри, удовлетв. уравнению.

Теорема (принцип экстремума)

Рег. решение уравн (1) в замкнутой $D \cup S \cup BN$ достиг. экстремума только на S

Док-во Пусть $\exists M - \max\limits_{\bar{D}} u(x,t)$ и пусть M достиг. в $(x_0,t_0) \in D$ или $(x_0,t_0) \in BN$

$v(x,t) = u(x,t) + a\underset{\ge 0}{(T-t)}$ (2). $a > 0$

Т.к. $0 \le t \le T$

$v(x,t) \le u(x,t) + aT$ (3).

$M_u^S = \max\limits_S u$, $M_v^S = \max\limits_S v$.

Выберем $a: 0 < a < \frac{M-M_u^S}{T}$ (4)

из (3) и (4).

$$M_v^S \le M_u^S + aT < M_u^S + M \frac{M-M_u^S}{T} T <$$

$$< M. \Rightarrow M_v^S < M = u(x_0,t_0) \le v(x_0,t_0) \Rightarrow$$
(★)

~~$\Rightarrow M < v(x_0,t_0)$~~

из (★) $\Rightarrow$ $v(x,t)$ не может достиг. v на $\partial S \Rightarrow \max\limits_{\bar{D}} v$ достиг. или ~~на~~ в D или на BN.

1) $(x_1,t_1) \in D$
max v.

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) = 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1,t_1) \le 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ge 0 \ (5)$$

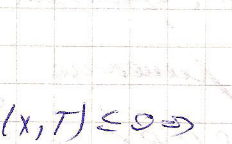
2) $(x_1,t_1) \in BN$, $t_1 = T$.

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_1,T) \ge 0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x,T) \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(\cancel{x_1,T}) \ge 0$$

$$u_t - a - u_{xx} \ge 0$$

Т.к. $u_t - u_{xx} = 0 \Rightarrow -a \ge 0 \Rightarrow a \le 0$, что против $a > 0$.



Принцип минимума аналогично.

Первая краевая задача ур-я теплопроводности.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (6,0) \\ u\big|_{OB} = \psi_1(t) & (6,1) \\ u\big|_{AN} = \psi_2(t) & (6,2) \\ u\big|_{OA} = \varphi(x) & (6,3) \\ \varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi(A) = \psi_2(0) & (6,4) \end{cases}$$

из принципа экстр $\Rightarrow$ реш зад (6) единственно и устойчиво.

(Задолбался писать одно и тоже

u_1, u_2 − реш. (6) ~~однор. краева~~

$u_1 - u_2$ − реш 6 с однор. усл. $\Rightarrow$

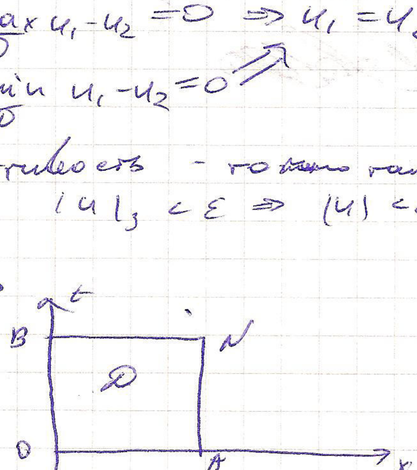
$\max\limits_{D} u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

$\min\limits_{D} u_1 - u_2 = 0$

Устойчивость − точно так же

$|u|_3 < \varepsilon \Rightarrow |u| < \varepsilon$).

Пусть



Покажем $\exists$ реш. задачи

$$u_k(x,t) = e^{-\frac{\pi^2}{l^2}k^2 t}\sin\frac{\pi k}{l}x.$$

$$\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1[0,l].$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{l}x,\quad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi \xi}{l}\,dx.$$

$$u_n(0,t) = 0;\quad u_n(l,t) = 0$$

$$u_k(x,0) = \sin\frac{\pi k}{l}x.$$

$$u(x,l) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\pi k}{l}x\, e^{-t\frac{\pi^2 k^2}{l}}$$

Задача Коши - Дирихле.

$$D = \{\, x \in R,\ 0 \le t \le T \,\}.$$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. & \text{в } D \quad (12) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & (12.1) \end{cases}$$

Рег. решение (12) в D:

1) $|u(x,t)| \leq M$, $u \in \bar{D}$

2) u_t, u_{xx} непр внутри D

3) (12)

4) $u|_{t=0} = \varphi(x)$. $\varphi(x) \in R$ и $|\varphi(x)| \leq M$.

$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}$ - френ (13)

кроме $(0, x=y)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_R e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \varphi(y)dy \quad (14).$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2} d\eta \quad (15).$$

Пусть $m = \inf_R u(x,0)$. $M = \sup_R u(x,0) \Rightarrow$ реш. зад. К-Дирихле (12,0), (12,1) $m \leq u(x,t) \leq M$. в D.

$v(x,t) = x^2 + 2t$ - реш

Пусть $m = \inf u(x,t)$

$$w(x,t) = u(x,t) - m + \varepsilon \frac{v(x,t)}{v(x_0,t_0)} \quad (16).$$

$(x_0, t_0) \in D$, $\varepsilon > 0$.

$$w(x,0) = u(x,0) - m + \varepsilon \frac{x^2}{x_0^2+t_0^2} \geq 0$$

$$w(x,0) \geq 0.$$

$$w\Big|_{|x| = |x_0| + \sqrt{\frac{m-n}{\varepsilon} v(x_0,t_0)}} =$$

$$= \frac{\varepsilon(2t + |x|^2)}{v(x_0,t_0)} + u(x,t) - m =$$

$$= \frac{\varepsilon}{v(x_0,t_0)} \left\{ 2t + \frac{m-n}{\varepsilon} v(x_0,t_0) + 2|x_0| \sqrt{\frac{m-n}{\varepsilon} v(x_0,t_0)} \right\} >$$

$$> m - n + u - m = u - n \geq 0$$

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq T \\ -\left(|x_0| + \sqrt{\frac{m-n}{\varepsilon} v(x_0,t_0)}\right);\ |x_0| + \sqrt{\frac{u-m}{\varepsilon} v(x_0,t_0)} \end{cases} -$$

неотрицательна на границе $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ внутри по пр. экстр.

$w(x,t) \geq 0$ внутри прямоуг.

$$w(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) - m + \varepsilon \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x_0,t_0) \geq m - \varepsilon \quad \forall \varepsilon \Rightarrow$$

~~$\Rightarrow \inf u(x_0,t)$~~

$u(x,t) \geq m$ внутри Q.

из принципа экстремума $\Rightarrow$ единственность

и устойчивость.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t). \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$\Downarrow$

из принципа Дюамеля

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau)\,dy.$$

$$v \,\Big|\, \mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = \dot{v}$$

$$u \,\Big|\, \mathcal{L}^*(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_i(x)v\right) + C(x)v = 0$$

Получим:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(v \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - u\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e_i(x)v\right)\right) d\Omega = 0$$

$$a^2(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) \cos(\bar{n}, y_j) \right)^2$$

$$\bar{N} = \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\cos(n, y_j)}{a} \right\}$$

$$\int_S a(x) \left\{ u\frac{\partial v}{\partial N} - v\frac{\partial u}{\partial N} \right\} dS + \int_S \sum_{i=1}^{n} e_i(x)\, u v \cos(n, y_i)\, dS = 0$$

ф-ла Грина

$a(x) > 0$ — ? Пусть $a = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) \cos(n, y_j) = 0.$

$\bar{N}$ ни в одной точке не совпадает с ~~р~~ касательной к S.

A_{ij} – равном. эллиптич., если $\exists\, k_0, k_1 > 0$:

$$k_0 \sum_{i} \lambda_i^2 \le \sum_{ij} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \le k_1 \sum_i \lambda_i^2$$

Пусть $(\bar{N}, \bar{n}) = 0 \le \cancel{\sum_{i,j} A_{ij}(x) \cos(\bar{n}, y_i) \cos(\bar{n}, y_j)}$

$$\le \sum_{i,j} A_{ij}(x) \cos(\bar{n}\, y_i) \cos(\bar{n}\, y_j) < k_1 \sum_i \lambda_i^2$$

$\sum_i A_{ij} \cos \bar{n}\, y_i = 0 \Rightarrow \cancel{\ne} 0$, но из равномерной эллиптичности это невозможно.

$$E(x, y) = \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}$$

$A_{ij}(x)$ положит. опред.

$$a_{ij} = \frac{\text{алгебр. дополн. к элем. } A_{ij}(x)}{\det \|A_{ij}\|}$$

$$\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j).$$

$$\psi(x,y) = \frac{\sigma(x,y)^{\frac{2-n}{2}}}{(n-2)\sqrt{A(y)}\,\omega_n}$$

$$E(x,y) = \frac{-1}{2\pi} \ln|x-y|$$

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u = 0.$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_D \ln|x-y| \mu(y)\, d\tau_y + \omega(x)$$

$$\Delta u = -\mu(x)$$

$$-\mu(x) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x \frac{1}{2\pi} \frac{\mu(x}{|x-y|}.$$

$$\mu(x) = \int_D K(x,y)\mu(y)\, d\tau + L\{\omega(x)\} + g(x).$$

Фредгольма 2-го рода.

$$\Omega(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x-y| + \int_D \mu(y) K(x,y)\, d\rho$$

фунд. решение.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

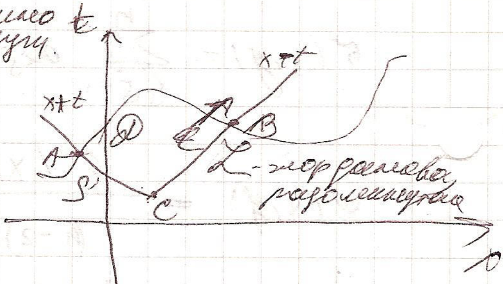
Корректн. постановка задачи Коши.

$u_{tt} - u_{xx} = 0$

(S) – гладк. крив.

$u(x,t)\Big|_{L} = \varphi(x,t)$

$\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\ell}}\Big|_{L} = \psi(x,t)$ (S)



$\bar{\ell}$ задан в каждой точке кривой.

1) ~~(1)~~ характеристики пересекают L ~~не более~~ в одной точке.

2) ℓ не совпадает с касательной к L ни в одной точке кривой

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,dt \overset{\text{Ф. Грин}}{=} \int\limits_{S} \frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt \;=$$

$S = BA + AC + CB.$

$$= \int\limits_{BA}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right) + \int\limits_{AC}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right) +$$

$$+ \int\limits_{CB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right) =$$

$$= \int\limits_{BA}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right) \mp \int\limits_{AC} \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx \;\cancel{+}$$

$$+ \int\limits_{CB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) =$$

$$= \int_{BA} \left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right) - \left(u(B) - u(A)\right) +$$

$$+ u(B) - u(C) = u(B) + u(A) - 2u(C) +$$

$$+ \int_{BA} \frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt = 0.$$

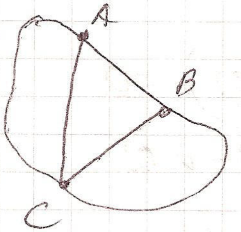
Т.о. $u(C) = u(x,t) = \frac{u(A) + u(B)}{2} + \frac{1}{2}$

$$+ \int_{BA} \left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dt\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial s} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial l} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial l} = \dfrac{\partial \psi}{\partial l}. \quad \psi\{ \end{cases}$$

если l совпадает с харак. $\Rightarrow$ 2 условия подтверждают первое или противоречат ему! в обоих случаях плохо.

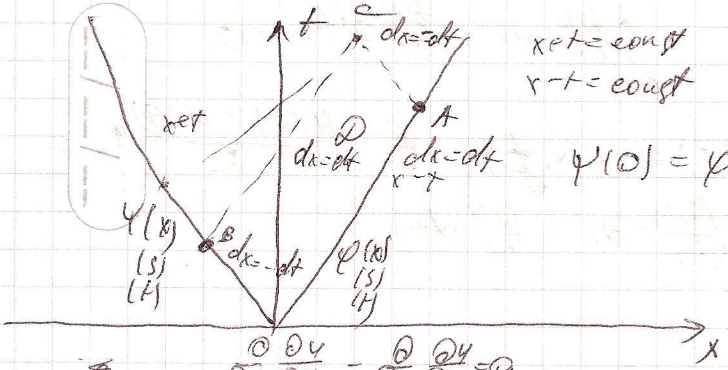
Краевая задача для уравнения [illegible].



в точку C по ф-ле придёт значение из A и B и оно не обязательно совпадёт с ~~уже~~ ~~начальным~~ заданным значением в C.

задачи с данными на характ. (Гурса)

$u_{tt} - u_{xx} = 0$



$x+t = const$

$x-t = const$

$\psi(0) = \varphi(0).$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) dx\,dt \overset{\text{по Грину}}{=} \oint_S \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt =$$

$$= \int_{OA} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_{AC} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx +$$

$$+ \int_{CB} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx - \int_{BO} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx =$$

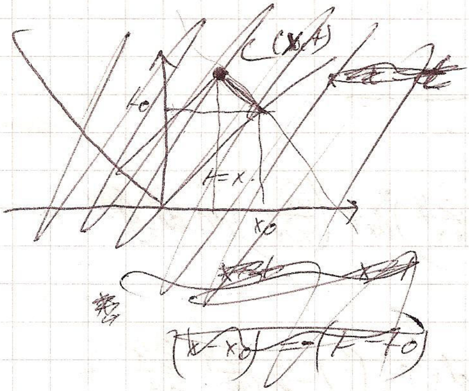
$$= u(A) - u(O) - u(C) + u(A) + u(B) - u(C) -$$

$$- u(O) + u(B) =$$

$$= 2\left(u(A) - u(O) + u(B) - u(C)\right) = 0.$$

$$u(C) = u(x,t) = u(A) + u(B) - u(O)$$

$$A\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) \quad B\left(\frac{x-t}{2}, \frac{t-x}{2}\right)$$



т.о. $u(x,t) = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x-t}{2}\right) - \varphi(0)$

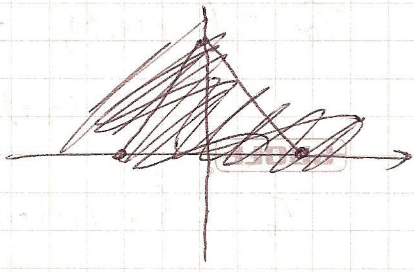
Кр. задача некорректна по тем же самым причинам

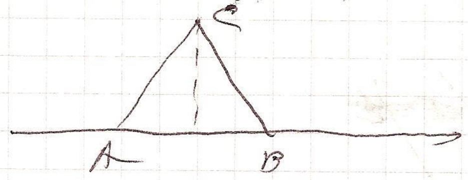
Единственность решения задачи Коши.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= -2\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$





$$\int\limits_{AB+BC+CA} \left(2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right) =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \int\limits_{BC} \underbrace{\left(-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}_{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} dx + \int\limits_{CA} \underbrace{\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}_{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} dx = 0.$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ и реш. единственно.

$\boxed{\text{Теорема единственности для класса Тихонова}}$

(1) $Lu = \Delta u - u_t = 0 \qquad \{t>0\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n, t>0\}$

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$

$\{0<t<T\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n, 0<t<T\}$

Класс. реш: $u(x,t) \in C^{2,1}\{0<t<T\} \cap C^0\{0 \le t \le T\}$

$T_\sigma = \{u(x,t),\ \exists A>0,\ a>0 : \forall x \in \{0 \le t \le T\}: |u(x,t)| \le A e^{a|x|^\sigma}\}\ \sigma > 0.$

$T_0 \equiv \{u : |u(x,t)| \le A\}.$

$T_2 = \{ |u(x,t)| \le A e^{a|x|^2} \ \forall (x,t) \in \{0 \le t \le T\} \}$

Рассмотрим задачу (1)(2₀) ($\varphi \equiv 0$).

Теорема (Единственности Тихонова)

Задача (1), (2₀) не может иметь более одного решения u из T_2

Лемма

$$|u| \le A e^{a|x|^2} \quad (3)$$

~~Пусть~~ Если $u(x,t)$ в $\{0<t<T\}$ реш (1),(2),(3), то $u \equiv 0$ $\forall (x,t) \in \{0<t<T_1\}$ где $T_1 = \min\{T, \frac{1}{5a}\}$.

Док-во $\forall \varepsilon > 0$, $\{0<t<T_1\}$

$$w_\pm(x,t) = \pm u(x,t) + \varepsilon\left(t + \frac{e^{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}}}{(T_1-t)^{n/2}}\right)$$

$$\begin{cases} w_\pm(x,0) = \frac{\varepsilon}{T_1^{n/2}} e^{\frac{|x|^2}{4T_1}} > 0 \quad (4). \\ L w_\pm = \varepsilon > 0 \quad (5). \\ w_\pm(x,t)\big|_{|x|=R} > 0 \end{cases}$$

Зафикс. $\forall (\overset{0}{x}, \overset{0}{t})$ и выберем $R>0$ таким большим.

$$(\overset{0}{x}, \overset{0}{t}) \in \{|x|<R \ 0<t<T\} = Z_R^T$$

$$w_\pm\big|_{|x|=R} = \pm u\big|_{|x|=R} + \varepsilon\left(t + (T_1-t)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{R^2}{4(T_1-t)}}\right) \ge$$

$$\ge -A e^{aR^2} + \varepsilon (5a)^{n/2} e^{\frac{5aR^2}{4}} \xrightarrow[R\to\infty]{} +\infty$$

$R>0$. $\Rightarrow (4,5,6)$ доказано.

Докажем, что если w ~~(5)~~ удовлетв. (3),

то
$$\begin{cases} w \in C^{2,1}(|x|<R,\ 0<t<T_1) \\ Lw \geq 0 \\ w_t(x,0) \geq 0 \\ w_t\big|_{|x|=R} \geq 0, \end{cases}$$

то $w_t(x,t) \geq 0 \quad |x|<R,\ 0<t<T$

(из принципа максимума).

Т.о. $v_\rho(x^0,t^0) \geq 0 \Longrightarrow |u(x^0,t^0)| \leq$

$$\leq \varepsilon\left(t^0 + \frac{e^{\frac{|x^0|}{4(T_1-t^0)}}}{(T_1-t^0)^{N/2}}\right).$$

Из $\forall (x^0,t^0)$ и $\forall \varepsilon \Rightarrow u(x^0,t^0)=0$. ЧТД

Док-во 1° теоремы

Пусть $\exists$ u_1 и u_2, удовлетв. нер-ву (3),

$$u_{1,2}\big|_{t=0} = \varphi(x).$$

Рассм. $u=u_1-u_2$; $\quad Lu=0$, $\quad u\big|_{t=0}=0$

В силу леммы $u \equiv 0 \quad x\in\mathbb{R}^N,\ 0<t<T_1$,

$$T_1 = \min\left\{T, \frac{1}{8a}\right\}$$

~~В силу Кол~~

Т.о. Если $T=T_1$, то ЧТД, иначе

Пусть $T_1 = \frac{1}{5a} < T$.

Так как $\varphi(x,t) \in C\{0<t<T\}$, то

~~$u|_{t=\frac{1}{5a}} = 0$, $\{x \in R^n, 0<t<T-\frac{1}{5a}\}$~~

$\Rightarrow$ {лемма} u

т.к. $u(x,t) \in C\{0<t<T\}$, то $u|_{t=\frac{1}{5a}} = 0$.

$\Rightarrow v(x,t) = u(x, t+\frac{1}{5a})$ $\{x \in R^n, 0<t<T-\frac{1}{5a}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ {лемма} $\Rightarrow v \equiv 0$. $\{0<t<T_2\}$ $T_2 = \min(T-\frac{1}{5a}, \frac{1}{5a})$.

и т.к. разм. за конечное число шагов

покроем всю полосу ЧТД.

Эванс Уравнения в частных производных

Теорема

Если $\varphi(x) e^{-a x^2} \in L^1(R)$, $\cap C(R)$

$a>0$, то в полосе $\{x \in R, 0<t<\frac{1}{4a}\}$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_R e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi \quad (3).$$

Док-во $\quad k(x,t) = e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}$ реш (1)

$L^1(R) \ni g(x) = e^{-a x^2} \varphi(x)$ ~~$\varphi(x)$~~ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = g(x)\, e^{a x^2}.$$

$$\{|x| \le a,\ 0 < t_0 \le t < t_1 < \tfrac{1}{4a}\} = \Pi.$$

$$|\varphi(\xi)\, k(x-\xi,t)| \le |g(\xi)| \frac{e^{a\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \le$$

$$\le \frac{|g(\xi)|}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{a\xi^2 - \frac{(|x|-|\xi|)^2}{4t}\right\} \le$$

$$\le \frac{g(\xi)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{\left(-\left(\frac{1}{4t_1} - a\right)\right)\xi^2 + \frac{a}{2t_1}|\xi|\right\} =$$

$$= |g(\xi)|\, e^{\frac{B^2}{4A}} \le |g(\xi)|\, e^{\frac{a^2}{4t_1(1-4at_1)}}$$

т. е. $|\varphi k| \le |g(\xi)| \exp\left(-\underbrace{\left((\sqrt{A}|\xi|)^2 - \frac{B}{2\sqrt{A}}|\xi| + \frac{B^2}{4A}\right)}_{\left(\sqrt{A}|\xi| - \frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2} + \frac{B^2}{4A}\right\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{a\xi^2} \left(k(x+h-\xi,t) - k(x-\xi,t)\right)\frac{1}{h}\, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{a\xi^2} k_x(x+\theta h - \xi, t)\, d\xi.$$

Совершенно аналогично предыдущему получаем оценку

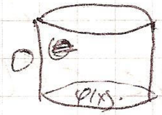
$$g(\xi)\, e^{a\xi^2} k_x(x+h\theta-\xi,t) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Аналогично оцениваются и остальные пр-ые.

Если $p(x) \le e^{-ax^2} \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Реш. $\exists$ везде.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & Z_T = \{x \in U, 0 < t < T\} \\ u\big|_S = 0, & S = \partial U \times (0, T) \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) & x \in U. \end{cases}$$



$u \in C^{2,1}(Z_T) \cap C(\overline{Z}_T)$.

Пусть $\exists$ $\tilde{u}$ — реш. Рассмотрим

$w = u - \tilde{u}$

$$\begin{cases} \Delta w - w_t = 0 \\ w\big|_S = 0 \\ w\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$e(t) = \int_U w^2(x,t)\,dx$$

$$\dot{e}(t) = 2\int_U w w_t\,dx = 2\int_U w \Delta w\,dx =$$

$= (\text{по ф-ле ОГ}) = -2\int_U (\nabla w)^2 dx \le 0$, но $e(t) \ge 0 \Rightarrow$

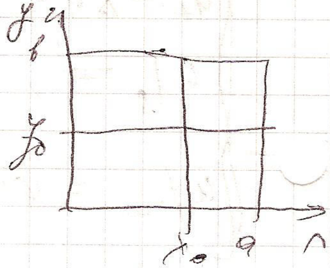
$\Rightarrow w \equiv 0$.

Успехи мат теории 1960 т 15 №2.

Метод Римана решения гиперболич. уравнений.

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u =$$

$$= F(x,y) \qquad x_0 < x < a, \quad y_0 < y < b$$



(2) $u|_{x=x_0} = \varphi_1(y) \quad y_0 \le y \le b$

$u|_{y=y_0} = \varphi_2(x), \quad x_0 \le x \le a$

$\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0).$

$a, b, c \in C(\overline{\Pi})$

$\varphi_1 \in C^1[y_0, b)$

$\varphi_2 \in C^1[x_0, a)$

$F \in C(\overline{\Pi}).$

$$\begin{cases} v = \frac{\partial u}{\partial x} \\ w = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = F - av - bw - cu \\ \frac{\partial w}{\partial x} = F - av - bw - cu \end{cases} \quad (4)$$

Проинтегр. (4) первое по y, второе по x

(5) $$\begin{cases} v(x,y) = v(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} (F - av - bw - cu)\,dy \\ w(x,y) = w(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} (F - av - bw - cu)\,dx. \end{cases}$$

$w(x,y) =$

$$\begin{cases} v(x,y) = \varphi_2'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} (F - av - bw - cu)\,dy \\ w(x,y) = \varphi_1'(y) + \int\limits_{x_0}^{x} (F - av - bw - cu)\,dx \qquad (6). \\ u(x,y) = \varphi_2(y) + \int\limits_{y_0}^{y} w(x,y)\,dy \end{cases}$$

Покажем, что $(1,2) \Leftrightarrow (6)$ $\quad (1,2) \Rightarrow 6$ - по построению ~~очевидно~~

$(6) \Rightarrow (1,2)$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_2'(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial w}{\partial x}(x,y)\,dy =$$

$$= \varphi_2'(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dy =$$

$$= \varphi_2'(x) + \int\limits_{y_0}^{y} (F - av - bw - cu)\,dy = V \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = V.$$

Проверим (2) $\quad u|_{y=y_0} = \varphi_2(x).$

$$u|_{x=x_0} = \varphi_2(x_0) + \int\limits_{y_0}^{y} w|_{x=x_0}\,dy =$$

$$= \varphi_2(x_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \varphi_1'(y)\,dy =$$

$$= \varphi_1(y) - \cancel{\varphi_1(y_0)} + \cancel{\varphi_2(x_0)} =$$

$$= \varphi_1(y).$$

4 + 2

Будем решать (6) методом послед. приближ.

$$v_0 = \varphi_2'(x) \qquad v_n = \varphi_2' + \int\limits_{y_0}^{y} (F - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1})\,dy$$

$$w_0 = \varphi_1'(y) \qquad w_n = \varphi_1' + \int\limits_{x_0}^{x} (F - av_{n-1} - bw_{n-1} - cu_{n-1})\,dx$$

$$u_0 = \varphi_2(x) \qquad u_n = \varphi_2 + \int\limits_{y_0}^{y} w_{n-1}\,dy$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2', F, a, b, c$ - огр в $\overline{\Pi}$

(8)
$$\begin{cases} v_{n+1}-v_n = -\int\limits_{y_0}^{y}\left[a(v_n-v_{n-1})+b(w_n-w_{n-1})+c(u_n-u_{n-1})\right]dy \\ w_{n+1}-w_n = -\int\limits_{x_0}^{x}\left[a(v_n-v_{n-1})+b(w_n-w_{n-1})+c(u_n-u_{n-1})\right]dx \\ u_{n+1}-u_n = \int\limits_{y_0}^{y}(w_n-w_{n-1})\,dy \end{cases}$$

Докажем, что v_n, w_n и u_n имеют предел в $\overline{\Pi}$

(9)
$$\begin{cases} |v_n-v_{n-1}| \le K^{n-1}A\dfrac{|x+y-x_0-y_0|^{n-1}}{(n-1)!} \\ |w_n-w_{n-1}| \le K^{n-1}A\dfrac{|x+y-x_0-y_0|^{n-1}}{(n-1)!} \\ |u_n-u_{n-1}| \le K^{n-1}A\dfrac{|x+y-x_0-y_0|^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases} \quad K>(|a|+|b|+|c|),\ A>0.$$

при $n=1$ — очевидно.

Пусть при $n=n$, покажем для $n=n+1$

$$|v_{n+1}-v_n| \le \int\limits_{y_0}^{y}(|a|+|b|+|c|)K^{n-1}A\cdot\frac{|x+y-x_0-y_0|^{n-1}}{(n-1)!} \le$$

$$\le AK^n\int\limits_{y_0}^{y}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}dy \le AK^n\frac{|x+y-x_0-y_0|^n}{n!}$$

Т.о. из (9) следует абсол. и равном.

сх-ть рядов

$u_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$, $v_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1})$,

$w_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(w_n-w_{n-1})$ $\Rightarrow$ по признаку

Вейерштрасса

П.ч. ~~общего члена этих рядов~~

$$A + A\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1}\frac{|x_0+y-x_0-y_0|^{n-1}}{(n-1)!} = A + Ae^{k(x+y-x_0-y_0)}$$

Если $F=0$, $\varphi_1(y)=\varphi_2(x)\equiv 0$, то

сист. (6) имеет не более чем (1) реш.

$u\equiv 0$, $v\equiv 0$, $w\equiv 0$

Пусть это не так. Тогда $\exists$ реш. ~~$|u|<A$~~, ~~$|v|<A$~~, ~~$|w|<A$~~.

Ф-ии u, v, w :

$$(9')\begin{cases} |u| \le Ak^{n-1}\dfrac{|x+y-x_0-y_0|^{n-1}}{(n-1)!} \\ |v| \text{ — '' — } \\ |w| \text{ — '' — } \end{cases} \Rightarrow \text{аналог. пред.} \; u=v=w=0$$

$\boxed{\text{Метод Римана}}$

(1) $L(u) = u_{xy} + a u_x + b u_y + cu = F$

$x=const$, $y=const$ — характеристики.

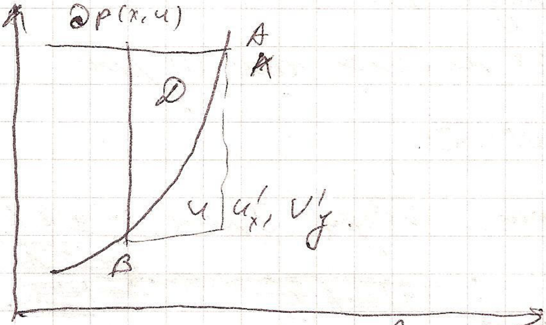
Сопряж. уравнение: (2) $M(v) = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv$

$$2(vLu - uMu) \equiv (u_x v - v_x u + 2buv)_y + (u_y v - v_y u + 2auv)_x \quad (3)$$

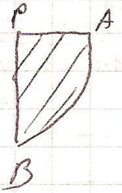
$D \in R^2$

$\partial D = \lambda$: $\iint_D (\;)\,dx\,dy$ применим формулу Грина.

$$2\iint_D (vLu - uMv)\,dx\,dy = \oint_\lambda -(u_x v - v_x u + 2buv)dx + (u_y v - v_y u + 2auv)dy. \quad (5)$$



Пусть v: $M(v)=0$ в



$L(u)=u$

на PA $dy=0$; $\int\limits_{PA}(u_x v - v_x u + 2buv)\,dx =$

$(u_x v - v_x u + 2buv) \equiv (uv)'_x + 2u(bv - v_x)$

$= (uv)_P - (uv)_A - \int\limits_{PA} 2u(bv-v_x)\,dx.$

$-\int\limits_{BP} = uv\Big|_B^P + \int\limits_{BC} 2u(av_x - v_y)\,dy$

$\cancel{-\int\limits_{AB} = u_x v - v_x u \Big|_A^P - \int\limits_{PA} 2u(bv - v_x)\,dx}$

Подставим функции в формулу $u(C)$

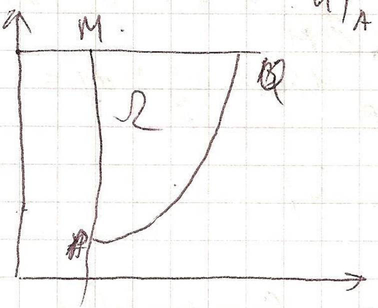
$$2u(C) = \int_{AB} (u_x v - v_x u + 2buv)\,dx - (u_y v - v_y u + 2auv)\,dy + u(A)v(A) + u(B)v(B)$$

Если
$$\begin{cases} Mu = 0 \\ v|_C = 1 \\ v_x = bv \\ v_y = bv \text{ на } CB \end{cases}$$

---

(1) $L(u) = u''_{xy} + a(x,y)u'_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$ в $\mathbb{R}^2$

$$u|_{AB} = \varphi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AB} = \psi(x) \quad (2)$$



Ф-ии и коэфф. непр. дифференц., правая часть непрерывна

$$\Gamma = PQ + QM + MP$$

(3) $L^*(v) = M(v) = v''_{xy} - \frac{\partial}{\partial x}(a(x,y)v) - \frac{\partial}{\partial y}(b(x,y)v) + c(x,y)v$

Применим ф-лу Грина

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_C P\,dx + Q\,dy.$$

(5) $$\iint_{\Gamma} (vLu - uL^*v)\,dx\,dy = -\frac{1}{2}\int_\Gamma (vu'_x - v'_x u + 2bvu)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma (vu'_y - uv'_y + 2auv)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{QMP} -(vu'_x - uv'_x + 2buu)\,dx + (vu'_y - uv'_y + 2auu)\,dy =$$

PROFF

$$= -\frac{1}{2}\int_{QM} (vu'_x - uv'_x + 2buv)\,dx + \frac{1}{2}\int_{MP}(vu'_y - uv'_y +$$

$$+ 2auv)\,dy \qquad (6)$$

Заметим, что

$$vu'_x - uv'_x + 2buv = \frac{\partial}{\partial x}(uv) + 2u(bv - v'_x)$$

$$vu'_y - uv'_y + 2auv = \frac{\partial}{\partial y}(uv) + 2u(av - v'_y).$$

Тогда

$$(6) = \frac{1}{2}(uv)_Q - \frac{1}{2}(uv)_M - \int_{QM} u(bv - v'_x)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}(uv)_P - \frac{1}{2}(uv)_M + \int_{MP} u(av - v'_y)\,dy =$$

$$= \iint_D (vLu + uL^*v)\,dx\,dy. \quad (7)$$

Т.о.

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \int_{QM} u(bv - v'_x)\,dx +$$

$$+ \int_{MP} u(av - v'_y)\,dy + \frac{1}{2}\Big(\int_{PQ} -(vu'_x - uv'_x + 2buu)\,dx +$$

$$+ (vu'_y - uv'_y + 2auu)\,dy - \iint_D (vLu - uL^*v)\,dx\,dy \qquad (8)$$

$$V: \begin{cases} L^* v = 0, \quad Lu = f \\ v'_x - bv = 0 \mid QM \\ v'_y - av = 0 \mid MP \end{cases}$$

$v = 1$ в $M(x_0, y_0)$.

$$(uv)\Big|_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_{PQ} (vu'_x - uv'_x + 2buv)\,dx -$$

$$- (vu'_y - uv'_y + 2auv)\,dy - \iint_\Omega vf\,dx\,dy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{PQ} = \frac{\partial u}{\partial s}\cos(s,x) + \frac{\partial u}{\partial n}\cos(n,x) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial s}\cos(s,x) + \psi(s)\cos(n,x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{PQ} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}\cos(s,y) + \psi\cos(n,y)$$

<u>Пример</u> использ. метода Римана.

$$u(x,y): \begin{cases} x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \; (4) \\ u|_{y=1} = f(x), \; \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=1} = F(x) \; (5) \end{cases}$$

$\Delta = x^2y^2 > 0$,

$$0 = x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = (x\,dy + y\,dx)(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

$\cancel{\xi = xy}$

$$\begin{cases} xy = C_1 \\ \frac{y}{x} = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \frac{x}{y} \end{cases} \quad (6).$$

Т.к. $x = \sqrt{\xi\eta}$ $y = \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}$

Т.о. $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0$ (7)

$y = 1 \Rightarrow \xi\eta = 1$ (?)

~~$x = \sqrt{\xi\eta}$~~

$\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big|_{\xi\eta=1} = -\frac{\xi}{2}f'(\xi) + \frac{\xi}{2}F(\xi)$ (9).

$D(u) = \int_D (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$ — интеграл Дирихле. $d\tau$

$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases}$ зад. Дирихле.

Минимизация $D(u)$ и ~~решение~~ зад. Дирихле эквивалентны при условии наличия непр. вторых пр-ых в D.

$\Rightarrow$ u — минимизирует D и обр. в φ на границе. $h|_S = 0$

$\bar{u}(x, y, z) = u(x, y) + \alpha h(x, y)$

$D(\bar{u}) = \int_D \{[u_x + \alpha h_x]^2 + [u_y + \alpha h_y]^2\}\,d\sigma =$

$= \int_D [u_x^2 + u_y^2]\,d\tau + 2\alpha\int_D [u_x h_x + u_y h_y]\,d\sigma +$

$+ \alpha^2\int_D [h_x^2 + h_y^2]\,d\tau = \Psi(\alpha).$

$\cancel{\Phi'\big|_{\lambda=0} = 0}$ $\qquad \Psi'\big|_{\lambda=0} = 0$ — т. к. u — точка экстремума.

$$\Psi' = 2\lambda\int_D (h_x^2 + h_y^2)\,d\tau + 2\int_D (u_x h_x + u_y h_y)\,d\tau$$

$$\Psi'(0) = 2\int_D (u_x h_x + u_y h_y)\,d\tau = 0$$

$$= \int_{\partial D} h\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = 0.$$

$$\int_D \big((u_x h)_x + (u_y h)_y\big)\,d\tau = \int_D (u_x h_x + u_{xx} h + u_y h_y + u_{yy} h)\,d\tau =$$

$$= \underbrace{\int_D (u_{xx} + u_{yy})\,h\,d\tau}_{\Downarrow} + \int_D (u_x h_x + u_y h_y)\,d\tau = \quad (*).$$

$$\int_D \Delta u\,h\,d\tau$$

$$= \int_D \Delta u\,h\,d\tau + \int_D (u_x h_x + u_y h_y)\,d\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_D \Delta u\,h\,d\tau = \int_D (u_x h_x + u_y h_y)\,d\tau \Rightarrow (*)$$

$$\Rightarrow \Delta u = 0$$

$$u\big|_S = \varphi(x).$$

$\Leftarrow$ $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_S = \varphi(x). \end{cases} \Rightarrow (*)$

~~$u(x,y)$ — реш~~

$$D(\bar u) = D(u) + \lambda^2\int_D (h_x^2 + h_y^2)\,d\tau + \Rightarrow D(\bar u) \geq D(u)$$

$$+ \underbrace{2\lambda\int_D (u_x h_x + u_y h_y)\,d\tau}_{\shortparallel \; 0}$$

~~т. к.~~ ~~согласно~~ $\int_D \Delta u\,h\,d\tau = 0.$

Метод Ритца.

$v(u)$ $\{u_k\}$.

$$u_n = \{ \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)$$

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)\right) \Rightarrow \Phi(c_1, \dots, c_n).$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_k} = 0 \qquad k = \overline{1, n}.$$

Метод Бубнова - Галеркина.

- лин. уравн.

$Lu = 0$ + Условия.

$\{u_k\}$ - полная система.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x).$$

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)\right) = 0.$$

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x)\right)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k L u_k,\ u_i\right) = 0. \qquad i = \overline{1, m}$$

$m \geq n.$

$$J = \frac{\mathcal{D}(u)}{H(u)} \to \lambda$$

$$\cancel{H(u) = \int_{\mathcal{D}} \ldots \, d\tau}$$

$$H(u) = \int_{\mathcal{D}} u^2 d\tau.$$

Рассм. задачу на собств. зн.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial \mathcal{D}} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{u}(x, \alpha) = u(x) + \alpha h(x).$$

$$J(\bar{u}) = \frac{\mathcal{D}(u) + 2\alpha \mathcal{D}(u,h) + \alpha^2 \mathcal{D}(h^2)}{H(u) + 2\alpha H(u,h) + \alpha^2 H(h)} = \varphi$$

$$\varphi'\Big|_{\alpha=0} = \frac{2\mathcal{D}(u,h) H(u) - 2H(u,h)\mathcal{D}(u)}{(\quad)^2} = 0$$

$$\mathcal{D}(u,h) H(u) - H(u,h) \cdot \mathcal{D}(u) = 0$$

$$\mathcal{D}(u,h) H(u) - \lambda H(u,h) H(u) = 0.$$

$$H(u) \{ \mathcal{D}(u,h) - \lambda H(u,h) \} = 0$$

$$H(u) \int_{\mathcal{D}} [\Delta u h + \lambda u h] d\tau$$

$$\int_{\mathcal{D}} (\Delta u + \lambda u) h \, d\tau = 0.$$

Пространство обобщённых производных. Пр-во Соболева

Пусть $U_m \subset \mathbb{R}^n$ U – открытое мн-во

$$\int \cdots \int_U \frac{\partial p}{\partial x_i} dx = \int \cdots \int_{\partial U = S} p \cos(\bar{n}, x_0) \, dS$$ – ф-ла Гаусса-Остроградского, $p \in C^1(U)$.

внешняя нормаль

~~Пусть v и $u \in C$~~

Пусть v и $u \in C_0^\infty(U)$ из ф-л дифф-я

$$\int_V v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx = \{\text{Q по частям}\}$$

$$= \underbrace{\int_S \cos(n, x_i)\, uv\, dS}_{=0} - \int_U u \frac{\partial u}{\partial x_i} dx =$$

$$\Rightarrow \int u \varphi'_{x_i} dx = -\int_V \varphi u'_{x_i} dx \quad (1)$$

Пусть теперь $\exists\, v \in L_1^{loc}(V)$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(V)$ такое, что верно: $\int_V u(x) \varphi_{x_i} dx = -\int_V \varphi(x) v(x) dx$.

Пусть α - мультииндекс $(\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N));\ \alpha_i \geq 0)$

Опр Длиной мультииндекса называется

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \quad D^{(\alpha)} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_N} x_N}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = k$. Тогда $\underset{u \in C^k(V)}{\int} u D^{|\alpha|} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_V \varphi D^{|\alpha|} u\, dx \quad (2)$

Опр Пусть u и $v \in L_1^{loc}(V)$ Будем называть $v \in L_1^{loc}(V)$ обобщ. частной пр-ной $|\alpha|$, если $\forall \varphi \in C_0^\infty(V)$:

$$\int_V u D^{|\alpha|} \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_V \varphi(x) v(x) dx \quad (3)$$

Св-ва

① Если обобщённая частная пр-ая $\exists$, то она единственна.

Д-во Пусть $\exists$ v и $\tilde{v}$ обобщ. частные пр-ые u. Тогда из линейности интегрирования

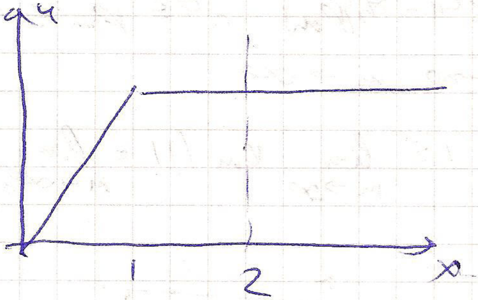
$\int_\Omega \varphi(x)(v(x)-\tilde{v}(x)) = 0$ (5)

Пусть $\varphi_m \xrightarrow{L^{loc}} v-\tilde{v} \Rightarrow \int_\Omega (v-\tilde{v})^2 dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v-\tilde{v} = 0$ почти всюду ч.т.д.

② Справедливы свойства производных кроме следования из $\exists$ старших пр-ных $\exists$ младших

Пример



$u \in L_1^{loc}(0,2)$

Обобщ. пр-ая

$$V = \begin{cases} \frac{3}{2} & x \in (0,1) \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Д-во $\int_0^2 u\varphi' dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x\varphi' dx + \frac{3}{2}\int_1^2 \varphi' dx =$

$= \frac{3}{2}\left(x\varphi\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi dx + \varphi\Big|_1^2\right) = -\int_0^2 \varphi V dx.$

сокращаются

Пример $u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$

Докажем, что нет первой производной, даже

обобщенной.

Пусть $\exists v$:

$$\int_0^2 u\varphi' dx = -\int_0^2 v\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(U).$$

$$\int_0^2 u\varphi' = \int_0^1 x\varphi' dx + 2\int_1^2 \varphi' dx = x\varphi\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi dx +$$

$$+ 2\varphi\Big|_1^2 = -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi\, dx \quad (6)$$

$\exists$ посл-ть $\{\varphi_m\}$ $0 \le \varphi_m \le 1$; $\varphi_m(1) = 1$,

$\varphi_m \to 0$ $m \to \infty$

тогда $1 = \lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(1) = \lim\limits_{m\to\infty} \{\int_0^2 u\varphi_m dx - \int_0^1 \varphi_m dx\} = 0$.