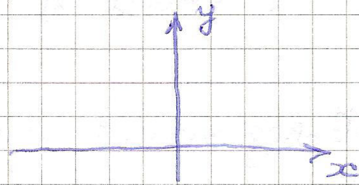
Дополнительные главы уравнений в частных производных.

Хапаев Михаил Михайлович

Лекция 1 06.09

Пример Адамара:



$\Delta u = 0$

$u(x,y)\big|_{y=0} = 0$

$u_y(x,y)\big|_{y=0} = \frac{\sin nx}{n}$

$u(x,y) = Y(y)\sin nx$

$\Rightarrow \quad Y'' \cdot \sin nx - n^2 Y \sin nx = 0$

$Y'' - n^2 Y = 0$ $\qquad\qquad \sin nx = 0$

$\operatorname{sh} ny, \ \operatorname{ch} ny$

$Y(y) = C_1 \operatorname{sh} ny + C_2 \operatorname{ch} ny$

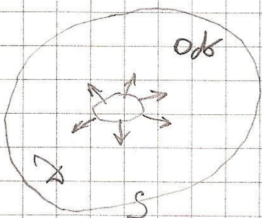
$\Rightarrow \quad u = \frac{\operatorname{sh} ny}{n} \sin nx$

Малым изменениям входных данных соотв. сколь угодно большие изменения решения

13.09 Лекция 2

О выводе ур-ний в частных производных.

① Вывод ур-ния колебания мембраны.



$T_к - T_р$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} (T_к - T_р)\,dt$$

Лагранжиан

ρ - плотность мембраны

k - коэф. натяжения

Движение происходит так, что L достигает минимума

u - отклонение мембраны

$u = u(x,y,t)$

$$T_к = \int_\Omega \rho \frac{u_t^2}{2}\,d\sigma \qquad T_р = k\left(\int_\Omega k\underbrace{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}_{1+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2}\,d\sigma - \int_\Omega k\,d\sigma\right) =$$

Будем считать, что $u_x^2, u_y^2 \ll 1$, т.е деформации не велики

$$\Rightarrow T_p = \int_{\mathcal{D}} k/2\,(u_x^2 + u_y^2)\,d\sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = 1/2 \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\mathcal{D}} \{\rho u_t^2 - k(u_x^2 + u_y^2)\}\,d\sigma\,dt$$

ищем минимум $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ур-ние Эйлера - Остроградского $\Rightarrow$

$$\left\{ \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx - \mathcal{V}(y) \right.$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}} F(x, y, u, \underset{p}{\frac{\partial u}{\partial x}}, \underset{q}{\frac{\partial u}{\partial y}})\,d\sigma = \mathcal{V}[y]$$

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0 \quad \}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(k u_y) = 0$$

при предположении, что u имеет вторые производные в этой области

ρ и k = const $\Rightarrow$ $\rho u_{tt} = k(u_{xx} + u_{yy})$

$$\Rightarrow \boxed{u_{tt} = a^2 \Delta u},$$

где $a^2 = k/\rho$

Край закреплён $\Rightarrow$ $u\big|_S = 0$

Начальные условия $\Rightarrow$ $u\big|_{t=0} = \varphi(x,y)$

$u_t\big|_{t=0} = \psi(x,y)$

Будем искать решение такой задачи в виде: $u(x,y,t) = v(x,y)\cdot T(t)$ {и $a=1$}

$\Rightarrow$ $vT'' = a^2 T\Delta v \quad \big|: vT$

$\Rightarrow$ $\dfrac{T''}{a^2T} = \dfrac{\Delta v}{v} = -\lambda$

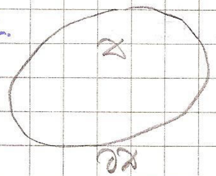
$Tv\big|_S = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0 \\ v\big|_S = 0 \end{cases} \qquad T'' + \lambda a^2 T = 0$

задача на собств. ф-ии и собств. значения

Имеет смысл и трёхмерная задача:

$u_{tt} = \Delta u \quad \dim x = 3$

1. 

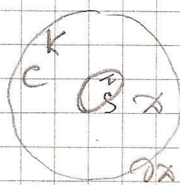
$u\big|_{\partial\Omega} = 0$

2. $x = x_1, x_2, x_3$ $\quad R_3$

в некоторой обл. заданы начальные условия $\varphi(x)$, $\psi(x)$

② Вывод уравнения распространения тепла:

для $x = 3$



$u(x;t)$ – температура

c – теплопроводность $\quad \rho$ – плотность

k – коэф теплот

Необходимо составить баланс тепла:

$$\int_S k \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_\tau c\rho u_t d\tau$$

По формуле Гаусса – Остроградского =>

$$\Rightarrow \quad \int_{\tau} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, d\tau = \int_{\tau} c\rho u_t \, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = c\rho u_t$$

$\exists\ k = const \Rightarrow \boxed{u_t = a^2 \Delta u}$, где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$

1. $u|_s = f(x)$

2. $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_s = \psi(x)$

3. $\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\Big|_s = h(x,t)$

Лекция 3 20.09

Классификация ур-ний в частных производных.

Пусть $D \subset E^n$, $x = (x_1 \ldots x_n)$, $n \geq 2$

и в обл D будем рассм. $F(x, \ldots, p_{i_1 \ldots i_n}, \ldots)$,

$x \in D$, $i_1 \ldots i_n$ $i_j \geq 0$ $i_j \in N$

$p_{i_1 \ldots i_n}$, $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k$, где $k = 0 \ldots m$

Пусть $\dfrac{\partial F}{\partial p_{i_1 \ldots i_n}} \neq 0$, $i_1 + \ldots + i_n = m$.

Тогда $F\left(x, \ldots \dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\right) = 0$ (1)

ур-ние в частных в производных

Если F – линейная ф-я по $p_{i_1} \ldots p_{i_n}$, то

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1 \ldots i_n} A^k_{i_1 \ldots i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = f(x) \quad (2)$$

Если ур-ние линейно по старшим производным, то оно квазилинейно.

Если в (2) $f(x) \equiv 0$, то такое ур-ние наз однородным : $Lu = 0$

Решения однородного ур-ния образуют линейное пр-во:

u_1 и u_2 — решения $\Rightarrow$ $\alpha u_1 + \beta u_2$ — решение

$Lu = f(x)$ $\quad \forall$ решение $u = u_ч + u_0$

частное решение неоднородного

решение однородного

Неоднородное ур-ние имеет единственное решение $\Leftrightarrow$ решение однородного ур-ния нулевое.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} +$$

$$+ c(x) u = f(x) \qquad (3)$$

Если $\forall A_{ij}(x) = 0$, то ур-ние вырождается.

Опр: уравнение наз. [illegible] в т. $x \in D$, если матрица A_{ij} [illegible]

Ур-ние (3) сопоставим квадратичную форму $Q(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$

С помощью преобразования координат (невырожденного)

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_1(\xi_1 \ldots \xi_n) \\ \vdots \\ \lambda_n = \lambda_n(\xi_1 \ldots \xi_n) \end{cases} \qquad \frac{\partial(\lambda_1 \ldots \lambda_n)}{\partial(\xi_1 \ldots \xi_n)} \neq 0$$

$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2$, где $\alpha_i = -1, 1, 0$. $(*)$

(приведение к главным осям)

Опр: ур-ние (3) наз гиперболическим в т $x \in D$, если только один коэф. $\alpha = -1$, а остальные $(n-1)$ равны 1 (или наоборот) в $(*)$

Опр: ур-ние (3) эл. эллиптическим в т $x \in D$, если все α_i или 1, или -1 в $(*)$

Опр: ур-ние (3) эл. параболическим в т $x \in D$, если ~~хотя бы~~ один из коэф $\alpha = 0$ в $(*)$, а остальные одного знака

Есть дальнейшая классификация

Опр: ур-ние (3) наз ультрагиперболическим в т x, если l котор. $\alpha_i = -1$, а остальные $(n-l)$ $+1$. в $(*)$

Опр: ур-ние (3) наз ультрапараболическим в т x, если l котор $\alpha_i = 0$, а остальные одного знака. в $(*)$

Опр: ур-ние (3) наз гиперболическим (эллиптическим, параболическим) в обл $\mathcal{D}$, если оно гиперболическое (эллиптическое, параболическое) в каждой точке обл $\mathcal{D}$.

Приведение дифф. ур-ние (3) во всей области возможно только в двумерном случае.

Пусть $F = (F_1, \dots F_N)$, где

$F_i = F_i(x, \dots P_{i_1 \dots i_n}, \dots)$, $x \in E^n$

$P_{i_1 \dots i_n} = (P^1_{i_1 \dots i_n} \dots P^{N_1}_{i_1 \dots i_n})$

Тогда равенство

(1') $F(x, \dots P_{i_1 \dots i_n} \dots) = 0$, где

$u = (u_1 \dots u_{N_1})$

$P_{i_1 \dots i_n} = \dfrac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} u_k}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$

$\dfrac{\partial F}{\partial P_{i_1 \dots i_n}} \neq 0$

является системой ур-ний в частных производных $N \cdot N_1$ порядка.

Приведение к каноническому виду ур-ний в частных производных 2-го порядка

(1) $a_{11} u_{xx} + 2 a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu = f(x,y)$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ – ф-ии от $(x,y) \in \mathcal{D} \subseteq E^2$

С помощью невырожденного преобразования:
$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases} \quad \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} =$$
$$= \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ эту систему можно обращать

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$
$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \overline{a_{11}} u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}} u_{\xi\eta} + \overline{a_{22}} u_{\eta\eta} + \overline{F} = 0, \qquad (2)$$

где
$$\overline{a_{11}} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \eta_x + a_{22} \eta_x^2$$
$$\overline{a_{12}} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y$$
$$\overline{a_{22}} = a_{11} \xi_y^2 + 2a_{12} \xi_y \eta_y + a_{22} \eta_y^2$$

Выберем ξ и η так, чтобы $\overline{a_{11}} = 0$ и $\overline{a_{22}} = 0$

Лемма: 1) Если ф-я $z = \varphi(x,y)$ явл. решением $a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0$ (3), то

$y: \varphi(x,y) = c$ — явл. решением ОДУ

(4) $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0$

2) Если $\varphi(x,y) = C$ — общий интеграл ОДУ (4), то $z = \varphi(x,y)$ — решение (3)

Док-во:

1) $\varphi(x,y) = C \xRightarrow{\text{дифф-е неявной ф-ии}} y'_x = -\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$

$$(3) \Leftrightarrow a_{11}\underbrace{\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2}_{= y'_x} - 2a_{12}\underbrace{\frac{-\varphi_x}{\varphi_y}}_{= y'_x} + a_{22} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{11}(y'_x)^2 - 2a_{12}y'_x + a_{22} = 0$$

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}(dx)^2\Big|_{y=f(x,c)} = 0$$

2) $\varphi(x,y) = C$ — общий интеграл (4)

$\forall (x_0, y_0) \in D$

интегральная кривая

реш. (4) $\Rightarrow y = f(x, c_0)$

$\Rightarrow$ дифф-си xy ф-ю $\Rightarrow$ (3).

чтд

Опр: ур-ние $a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0$ наз характеристическим ур-нием ур-ния в частных производных

Полагая $\xi = \varphi(x,y)$ $\eta = \psi(x,y)$,

где $\varphi(x,y)$ – реш. характ. ур-ния

$\psi(x,y)$ – другое независимое с ним реш. характ. ур-ния

$$y'_x = \frac{a_{12} + \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

$$y'_{1\cancel{x}} = \frac{a_{12} - \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

1) Если $\Delta > 0$, то ур-ние (1) гиперболическое

2) Если $\Delta < 0$, то ур-ние (1) эллиптическое

3) Если $\Delta = 0$, то ур-ние (1) параболическое

1) $\bar{a}_{11} = 0 \quad \bar{a}_{22} = 0$

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases} \qquad u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

2) $\Delta = 0 \qquad \xi = \varphi(x, y)$

η – $\forall$ другое независ. решение

$$u_{\eta\eta} = \Phi$$

3) $\Delta < 0 \qquad \varphi(x, y)$ – реш.

$\varphi^*(x, y)$

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} \qquad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2}$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi$$

Лекция 4 27.09

Волновое ур-ние. Ф-ла Кирхгофа.

Ф-ла Пуассона. Ф-ла Даламбера

Волновое ур-ние

$\Delta u - u_{tt} = 0 \qquad x = (x_1 \ldots x_n) \in E^n \quad t \in E^1$

Рассм $n = 3$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$

$Q(\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \lambda_{n+1}^2$

Ур-ние (1) - гиперболическое в E^{n+1}

Лемма: $u(x,t) = \int_S \frac{\mu(y_1, y_2, y_3)\, dS_y}{|y - x|} \quad (2)$

где $|y - x| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \quad (3)$

S - сфера $S = \{ |y - x|^2 = t^2 \}$
с центром в т. x и рад t

$\mu(y_1, y_2, y_3) \in C^2$ по y_1, y_2, y_3

явл. регулярным решением (1) в E^4

t - время; x_1, x_2, x_3 - пространственные переменные

Док-во:

Сделаем замену переменных:

$y_i = x_i + t\xi_i \Rightarrow |\xi_i| = 1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$

$\overset{\uparrow}{S}$

$|y - x|^2 = t^2$

$dS_y = t^2 d\sigma_\xi$, где $d\sigma_\xi$ – элемент поверхности $|\xi| = 1$

$$u(x,t) = t\int_\sigma \mu(x + t\xi)\, d\sigma_\xi$$

$$\Rightarrow \Delta u = t\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2}\, d\sigma_\xi \quad (4)$$

$$(5)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_\sigma \mu(x+t\xi)\, d\sigma_\xi\right] =$$

$$= \int_\sigma \mu(x+t\xi)\, d\sigma_\xi + t\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mu}{\partial y_i}\xi_i\, d\sigma_\xi =$$

$$= \frac{u}{t} + \frac{1}{t}I, \text{ где } I = \int_S \left[\frac{\partial \mu}{\partial y_1}\nu_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2}\nu_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_3}\nu_3\right] dS_y \quad (*)$$

(ν_1, ν_2, ν_3) – внешняя нормаль к сфере

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{u}{t} + \frac{I}{t}\right] = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} -$$

$$-\frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} \quad (6)$$

Ф-ла Остроградского:

Если $A_i(x) \in C^1(D \cup C)$,

где C - гладкая граница обл. D,

тогда
$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\, dx = \int\limits_S \sum A_i(y) \nu_i(y)\, dS_y$$

Применяем ф-лу Остроградского к (*)

$$\Rightarrow I = \int\limits_{|y-x|\le t} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2}\, dy = \int\limits_D \Delta\mu\, dy$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \rho\cos\varphi\sin\theta & \theta \in [0,\pi] \\ y_2 = x_2 + \rho\sin\varphi\sin\theta & \varphi \in [0,2\pi] \\ y_3 = x_3 + \rho\cos\theta \end{cases}$$

$$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta$$

$$dx = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^t \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \Delta\mu \, d\varphi$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = t^2 \int_\sigma \Delta\mu \, d\sigma_\xi$$

$$\frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = t \int_\sigma \Delta\mu \, d\sigma_\xi = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

чтд

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C^3 \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \in C^2 \end{cases}$$

$tM[\psi]$ — реш. реш

где $M[\psi] = \int\limits_{|\xi|=1} \psi(x+t\xi) d\sigma_\xi$

Т.к ур-ние имеет постоянные коэффициенты, то и производная $\frac{\partial}{\partial t}[tM[\varphi]]$ решение

Расс. $u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi(x)] +$

$+ \frac{t}{4\pi} M[\psi(x)]$ ← ф-ла Кирхгофа

(**) (β)

Рассм в (8) $t = 0$ и проверим нач. усл

(п2) Рассм $n=2$

$$\begin{cases} u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{tt} = 0 & (9) \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2) & (10) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2) & (11) \end{cases}$$

Применим метод спуска Адамара.

При вычислении поверхностных интегралов в ф-ле (8) мы проектируем верхнюю полусферу $y_3 > 0$ и нижнюю на круг

$$dy_1 dy_2 = \cos(\hat{\nu_3, \partial})\, ds_y = \frac{y_3}{|t|}\, ds_y$$

$$ds_y = \frac{t\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}}$$

$$\frac{t}{4\pi} M[\psi] = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{|x+y| \le t} \frac{\psi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left[t M[\varphi]\right] = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{|x-y| \le t} \frac{\varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}$$

ф-ла Пуассона

№3 Рассм $n=1$

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}(tM_\varphi) + \frac{1}{2\pi} t M_\psi$$

$\Rightarrow$ метод спуска $\Rightarrow$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t} \psi(x+\eta_1)\,d\eta_1 \int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-t}^{t} \varphi(x+\eta_1)\,d\eta_1 \int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}} \frac{d\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(y)\,dy + \frac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2}$$

Лемма: Пусть $v(x,t,\tau)$ решение

$$\Delta v = v_{tt}$$

$$v\big|_{t=\tau} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

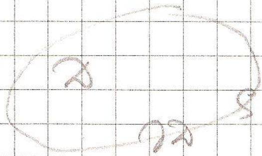
то $u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau$

решение $\Delta u - u_{tt} = f(x,\tau)$

Лекция 5 04.10

$\Delta u = 0$ для $x = n$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$



Задача Дирихле

$\Delta u = 0$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = Q(\lambda)$

$u|_S = \varphi(x)$

$u(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(x)$ — сумма гарм. ф-ций

$u(\lambda C x + h)$ — гарм. ф-я, если $\lambda = const$
C — орт. матр
h — n-мерный вектор

$$\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) d\tau =$$

$$= \int \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + \underbrace{u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}}_{=0 \text{ из ур-ния Лапласа}}\right) d\tau = \int_\tau \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$$

u и v — гарм. ф-ии

$$\Rightarrow \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) d\tau = 0$$

Применим ф-лу Остроградского-Гаусса

$$\int_S u \frac{\partial u}{\partial n_s} ds = \int_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$$

$$\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n_s} - u \frac{\partial v}{\partial n_s}\right) ds = 0$$ ф-ла Грина

① Если u на границе 0 и и всюду 0 (из 1-ой ф-лы)

② $\int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (из 2-ой ф-лы при $v = 1$)

Ур-ние для фунд решения:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr} = 0 \leftarrow \text{ур-ние Эйлера}$$

$u = 1$ - решение

Ищем решение в виде r^k

$$k(k-1) r^{k-2} + (n-1) k r^{k-2} = 0$$

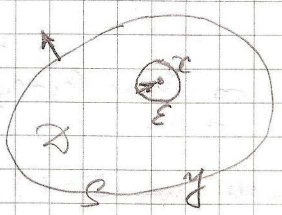
$$-2k + k^2 + nk = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k = 2-n$$

$$\Rightarrow u = 1 \vee u = r^{2-n}$$

$$E(r) = \begin{cases} -\ln r, & n = 2 \\ \dfrac{1}{(n-2)r^{n-2}}, & n > 2 \end{cases}$$

Применим 2ую ф-лу Грина для получения интегрального представления

$\frac{1}{r}$ – сингулярное решение



$$\Rightarrow \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}$$

$$\int_S \left(E(x,y) \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_s} - u \frac{\partial E}{\partial \overline{n}_s} \right) ds =$$

$$= -\int_{|x-y|=\varepsilon} \left(E \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_\varepsilon} - u \frac{\partial E}{\partial \overline{n}_\varepsilon} \right) ds_\varepsilon$$

$$I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_{|x-y|=\varepsilon} E \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_\varepsilon} ds_\varepsilon = E_\varepsilon(x,y) \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \overline{n}_\varepsilon} ds_\varepsilon = 0$$

$$I_2 = \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}\, ds_\varepsilon = \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} u(x) \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}\, s_\varepsilon +$$

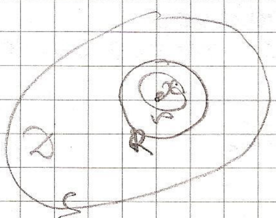
$$+ \int\limits_{|x-y|=\varepsilon} [u(y)-u(x)] \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}\, ds_\varepsilon =$$

$$= \underbrace{u(x)\int\limits_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}\, ds_\varepsilon}_{= -u(x)\frac{\omega_n r^{n-1}}{r^{n-1}}} + \underbrace{\{0\}}_{\text{при } \varepsilon \to 0}$$

$$\left\{ \frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon} = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{1}{r^{n-1}} \right\}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_S \left\{ E(x,y)\frac{\partial u}{\partial n_s} - u\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_s} \right\} ds$$

§ Теорема о среднем для гармонических ф-ций



Из интегрального представления.

$$I_1 = \int\limits_{C_R} E \frac{\partial u}{\partial n_{C_R}}\, ds_{C_R} = E(R) \int\limits_{C_R} \frac{\partial u}{\partial n_{C_R}}\, ds_{C_R} = 0$$

$$I_2 = \int\limits_{C_R} u \frac{\partial E}{\partial n_{C_R}}\, ds_{C_R} =$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{C_R} u \, ds_{C_R} \, \frac{1}{R^{n-1}} =$$

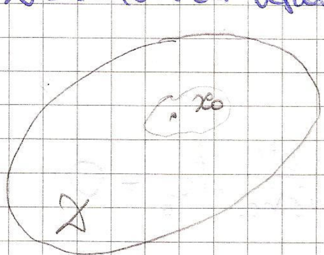
$$= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{C_R} u(y) \, ds_y$$ — т. о среднем по поверхности сферы

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{C_\rho} u(y) \, ds_y \quad \Big| \cdot \rho^{n-1} \int_0^R d\rho$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\Omega_R} u(y) \, d\tau_y$$ — т. о среднем по шару

Принцип экстремума для гарм. ф-ции: внутри обл. гармоничности гарм. ф-я не достигает ни своего наибольшего, ни своего наименьшего значения (если она не постоянная)

Док-во (от противного)



M — макс

m — мин

вокр т. x_0

$u(y) < M$

$$u(x_0) = M = \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\Omega_R} u(y)\,d\tau_y$$

$\Rightarrow u(y) = M$ ⚡

чтд

Лекция 6 11.10

§ Ф-я источника

$\Delta u = 0$

Ф-я Грина $G(x,y) \equiv$ ф-я представимая в виде:

1) $E(x,y) + g(x,y)$

2) $g(x,y)|_S = -E(x,y)|_S$, где $g(x,y)$ – решение задачи Дирихле

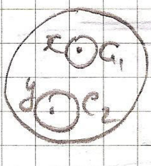
Св-ва:

1) положительная

2) $G|_S = 0$

3) $G(x,y) = G(y,x)$

Васем



Применим ф-лу Грина к области:

$$\iint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0.$$

$$v = G(z,x), \quad u = G(z,y)$$

$$\iint_{C_1} + \iint_{C_2} \left(G(z,x)\frac{\partial G}{\partial n} - G(z,y)\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS_z = 0$$

+ к $\quad G(z,x)\big|_S = G(z,y)\big|_S = 0$

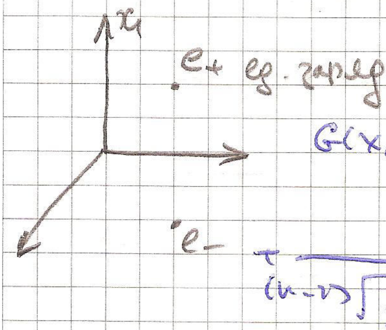
$$\int_{C_1} \left(G(z,x)\frac{\partial G}{\partial n} - G(z,y)\frac{\partial G}{\partial n}\right) dS_z = -G(x,y)$$

$$E(z,x) = \frac{1}{(n-2)|x-z|^{n-2}}$$

$$ds = |x-z|^{n-1}\, d\sigma$$

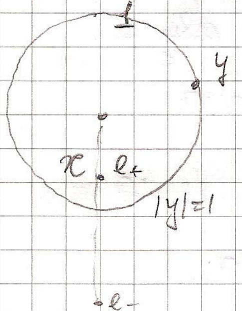
$$\frac{|x-z|^{n-1}}{(n-2)|x-z|^{n-2}} = \frac{|x-z|}{n-2}$$

Физическая интерпретация ф-ии источника



$$G(x,y) = \frac{1e_+}{(n-2)\sqrt{\sum (x_i-y_i)^2}} + \frac{1e_-}{(n-2)\sqrt{\sum\limits_{i=2}(x_i-y_i)^2 + (x_1+y_1)^2}}$$

Ф-я источника для единичной сферы



$$G(x,y) = E(x,y) -$$
$$- E\left(|x|y, \frac{x}{|x|}\right)$$
$g(x,y)$ - гарм. ф-я

$$E(x,y) = \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}$$

$$|x-y|^2 \qquad \left||x|y - \frac{x}{|x|}\right|^2 \qquad \left||y|x - \frac{y}{|y|}\right|^2$$

$$x^2 - 2xy + 1 \qquad |x|^2y^2 - 2xy + 1 \qquad |y|^2x^2 - 2xy + 1$$

$r \cdot \cos$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_S \left(\cancel{G(x,y) \frac{\partial u(x)}{\partial n}} - u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\right) dy$$

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_S u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n} ds_y$$

$$\bar{n} = \{y_i\}$$

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} =$$
$$= \sum_i y_i \left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} \, 2(x_i - y_i)(-1) - \frac{(-1)}{|x-y|^{n-1}} \left(|x|y_i - \frac{x_i}{|x|}\right)|x|\right)$$

$$= \frac{-1}{|x-y|^{n-1}} \left(\sum x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i^2 - |x|^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum x_i y_i \right) =$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int u(y) \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} \, ds_y$$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n} \, ds_y -$$

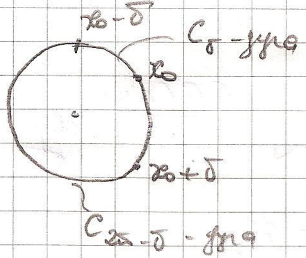
формула Пуассона

Лекция 7 18.10.

Интеграл Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_C \frac{1-x^2}{|y-x|^{n-1}} f(y) \, ds$$

$$n = 2 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{1-x^2}{|y-x|} f(y) \, ds$$



$u(x)$ непр. примыкает к $f(x)$

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} \frac{1-x^2}{|y-x|} \, ds$$

Тогда $u(x) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{1-x^2}{|y-x|} (f(y) - f(x_0)) \, ds =$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} \frac{1-x^2}{|y-x|} (f(y) - f(x_0)) \, ds}_{I_1} +$$

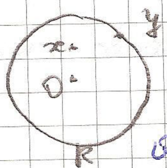
$$+ \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{C_{2\pi-\delta}} \frac{1-x^2}{|y-x|} (f(y) - f(x_0)) \, ds}_{I_2}$$

Далее $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon)$: $|I_1| \le \varepsilon/2$, $|I_2| \le \varepsilon/2$
$(x \to x_0)$

Круг радиуса R:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R} \int_R \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^{n-2}} u(y) \, ds_y$$

Т: Если гармонич. в E_n ф-я $u(x)$ знакопостоянна, то она const



$$R - |x| \le |x-y| \le R + |x|$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\omega_n R} \int_{C_R} \frac{(R-|x|)(R+|x|)}{(R+|x|)^{n-1}} u(y) \, ds_y \le$$

$$\le u(x) \le \frac{1}{\omega_n R} \int_{C_R} \frac{(R-|x|)(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}} u(y) \, ds_y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{C_R} u(y) \, ds_y = u(0)$$ — т. на о среднем

$$\int_{C_R} u(x) \, ds_y = u(0) \, \omega_n R^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_n R} \cdot \frac{R - |x|}{(R+|x|)^{n-2}} u(0) R^{n-1} \omega_n \le u(x) \le$$

$$\le \frac{\omega_n R^{n-1}}{\omega_n R} \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-2}} u(0)$$

$\Downarrow$ $\{R \to \infty\}$

$$u(0) \le u(x) \le u(0) \Rightarrow u(x) = u(0)$$

По сути это есть Т. Лиувилля:

Т: Если гарм. ф-я ограничена (сверху / снизу) в всем пр-ве, то она постоянна.

Док-во: Допустим $u(x) \leq M$. Составим $v(x) = M - u(x)$, тогда $v(x) \geq 0$ если $M > 0$. $\Rightarrow$ применим выше доказанную теорему $\Rightarrow$ чтд

Эллиптические ур-ния общего вида

Рассм. ур-ние 2-го порядка:

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u = f(x)$$

Составим квадратичную форму:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$$

$$k_0, k_1 > 0 : k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 \leq Q(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 k_1$$

Будем часто опираться на равн. эллиптичность оператора

Будем стараться получить результаты, аналогичные рез-ам ур-ния Лапласа

Фунд решение

- ф-я источника
- ф-ия Грина
- теория потенциала
- краевые задачи

Если $A_{ij}(x) \in C^{1,0}(D)$, то ур-ние можно записать в виде:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\Big(B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + C(x)u$$

О.б. $B_i(x) - \dfrac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_i} = b_i$

тогда: $L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) +$

$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u$

Можно ввести сопряженный оператор:

$L^*(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right) -$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(e_i(x)u) + c(x)u$$

Говорят, что оператор - самосопряженный, если $L(u) = L^*(u)$

Достаточное условие самосопряженности: $e_i(x) \equiv 0$. Это не усл и два необх:

Док-во:

$u = 1$: $\sum_{i=1}^{n} 0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i}$

$u = x_j$: $e_j(x) = -x_i \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e_i}{\partial x_i} - e_i(x)$

$$\Downarrow$$

$$2e_j(x) = 0 \Rightarrow e_j(x) = 0 \ \forall j$$

T: Оператор яв. самосопряженным $\Leftrightarrow e_i(x) = 0$

Лекция 8 25.10

Уравнения параболического типа.

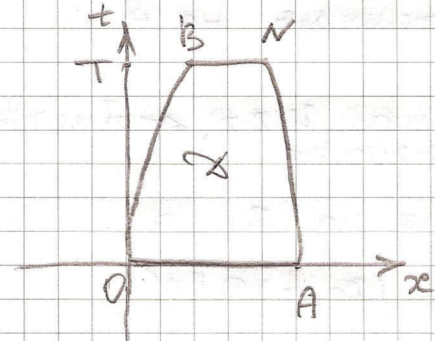
§1 Уравнение теплопроводности. 1я краевая задача

п1 Принцип экстремума

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$(dt)^2 = 0$ – хар-ое ур-ние $\Rightarrow$ $t = const$

семейство характеристик



BO и AN пересекают $t = const$ только в одной точке

$0 \le t \le T$, $\alpha = \alpha(t)$ (OB) $\exists\, \alpha(t) < \beta(t)$

$\beta = \beta(t)$ (AN)

Параболическая граница обл D – $S =$
$= OA \cup OB \cup AN$, $B, N \in S$

Регулярным решением ур-ния (1) в замкнутой области $D \cup S \cup BN$ наз

Ф-я $u(x,t) \in C(\mathcal{D} \cup S \cup BN)$, имеющая u_{xx} и u_t непр. во внутренних точках замкнутой области, удовлетворяющая ур-нию в точках этой области.

Теорема (принцип экстремума):
Регулярное решение (1) в $\mathcal{D} \cup S \cup BN$ достигает своего экстремума на S.

Док-во: Пусть $M = \max\limits_{\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup S \cup BN} u(x,t)$ ← ∃ по т Вейерштр.

и пусть M достигается не на S, т.е. в т $(x_0, t_0) \in \mathcal{D}$ или $(x_0, t_0) \in BN$

Введем вспомогательную ф-ю
$V(x,t) = u(x,t) + a(T-t)$ (2), $a > 0$

Т.к. $0 \le t \le T \Rightarrow a(T-t) \ge 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow V(x,t) \le u(x,t) + aT$ (3)

$M_u^S = \max\limits_S u$, $M_v^S = \max\limits_S V$

Втор шема $0 \le a < \dfrac{M - M_u^S}{T}$ (4)

Из нер-в (3) и (4) получим:

$$M_v^S \le M_u^S + aT < M_u^S + \frac{M - M_u^S}{T} \cdot T = M$$

$$\Rightarrow M_v^S < M = u(x_0, t_0) \overset{(2)}{\le} v(x_0, t_0) \quad (*)$$

Из (*) $\Rightarrow$ $v(x,t)$ не может достигать макс на S

$\Rightarrow$ $\max\limits_{\overline{D}} v$ достигается или в D, или на BN

1) $(x_1, t_1) \in D \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial t}(x_1, t_1) = 0$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1, t_1) \le 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ge 0 \quad (5)$$

2) $(x_1, t_1) \in BN$ $\quad t_1 = T$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x_1, T) \ge 0 \\ v_{xx}(x_1, T) \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ge 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial t} = u_t - a \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = u_{xx} \end{array}\right\} \Rightarrow (5) \Rightarrow u_t - u_{xx} - a \ge 0$$

$$\left.\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{u_t - u_{xx}} \ge a \right\} \Rightarrow a \le 0 \;\times$$

$\quad$ пр

Принцип минимума доказывается аналогично.

п2 1я краевая задача для ур-ния теплопроводности.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (6.0) \\ u|_{OB} = \psi_1(t) & (6.1) \\ u|_{AN} = \psi_2(t) & (6.2) \\ u|_{OA} = \varphi(x) & (6.3) \end{cases}$$

$\varphi(0) = \psi_1(0)$, $\varphi(A) = \psi_2(0)$ ← условия согласования

Из принципа экстремума следует, что решение (6.0) - (6.3) единственно и устойчиво.

а) единственность: $\exists$ $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$

$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ — решение

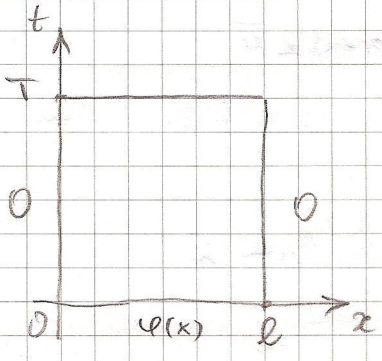
и $u|_{OB} = u|_{AN} = u|_{OA} = 0$

$$\underbrace{\min_S u}_{=0} \le u \le \underbrace{\max_S u}_{=0} \Rightarrow u = 0$$

б) устойчивость доказывается аналогично.

$u|_S < \varepsilon$. => принцип максимума

$\Rightarrow u\Big|_{\Omega \cup \partial\Omega} < \varepsilon$.



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0,t) = 0 & (7) \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \in C^0_1[0,l] & (8) \\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \end{cases}$$

$u_k(x,t) = e^{-\frac{\pi^2}{l^2}k^2 t} \sin \frac{\pi k}{l} x$

$\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k}{l} x$, $a_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi k \xi}{l} d\xi$

$u_k(0,t) = 0$; $u_k(l,t) = 0$

$u_k(x,0) = \sin \frac{\pi k}{l} x$

$u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{\pi k}{l} x \, e^{-t \frac{\pi^2 k^2}{l^2}}$

§2 Задача Коши-Дирихле

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & D = \{x \in \mathbb{R}^1, 0 \le t \le T\} \quad (12) \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) & (12.1) \end{cases}$$

$$\varphi(x) \in C, \quad |\varphi(x)| < \bar{M}$$

Регулярное решение (12) в D – это

1) $|u(x,t)| \le M$

2) u_t, u_{xx} – непр. во внутр. D

3) удовл. (12)

4) $u\Big|_{t=0} = \varphi(x)$

(13) $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$ – фундаментальное решение кроме $(0, x=y)$

(14) $u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \varphi(y)\,dy$

Лемма:

$\exists\, m = \inf\limits_{\mathbb{R}} u(x,0)$, $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} u(x,0)$. Тогда

Решение задачи К-Д (12.0)(12.1) :

$$m \le u(x,t) \le M \quad \text{в } D$$

Док-во: $V(x,t) = x^2 + 2t$ — решение (12.0)

$\exists\, n = \inf\limits_{\mathcal{D}} u(x,t)$

$$W(x,t) = u(x,t) - m + \varepsilon \frac{V(x,t)}{V(x_0,t_0)} \quad (15)$$

$\forall (x_0, t_0) \in \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$

решение (12.0)

$$W(x,0) = u(x,0) - m + \varepsilon \frac{x^2}{x_0^2 + 2t_0} \geq 0$$

$\Rightarrow W(x,0) \geq 0$

$$W(x,t)\Big|_{|x| = |x_0| + \sqrt{\frac{m-n}{\varepsilon} V(x_0,t_0)}} =$$

$$= \frac{\varepsilon(2t + |x|^2)}{V(x_0,t_0)} + u(x,t) - m =$$

$$= \frac{\varepsilon}{V(x_0,t_0)} \left[2t + \frac{m-n}{\varepsilon} V(x_0,t_0) + 2|x_0| \sqrt{\frac{m-n}{\varepsilon} V(x_0,t_0)} \right] +$$

$$+ u(x,t) - m \geq m - n + u(x,t) - m = u(x,t) - n \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$u(x,t) - m + \varepsilon \frac{x^2 + 2t}{x_0^2 + 2t_0} \geq 0$$

$W(x,t) \geq 0$ в $\forall (x_0, t_0) \Rightarrow u(x,t) \geq m - \varepsilon \quad \forall \varepsilon$

$\Rightarrow u(x,t) \geq m$ в $\mathcal{D}$

чтд

Из принципа экстремума $\Rightarrow$

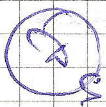
единственность в этом классе ф-ий

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$$u\big|_{t=0} = 0$$

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau)\,dy$$

Ф-ла Грина



$$\int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0$$

u, v — гармонические

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} l_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} +$$

$$+ C(x)u = 0 \qquad | \cdot v$$

$$L^* u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i(x)v) +$$

$$+ C(x)v = 0 \qquad | \cdot u$$

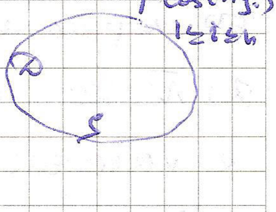
$$Lu\cdot v - L^* v u = \sum_{i,j=1}^{n}\left(v\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) -\right.$$

$$\left. - u\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(v\, l_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} +\right.$$

$$\left. + u\frac{\partial}{\partial x_i}(l_i(x)v)\right) = 0 \qquad (*)$$

$$a^2(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\cos(\bar{n}, y_j)\right)^2$$

$$\bar{N} = \left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x)\cos(n, y_j)}{a}\right\}_{1\le j\le n}$$



$\bar{N}$ — конормаль

Чтобы применить ф-лу надо проинтегрировать (*) на $\mathcal{D}$ по $d\tau$ и применить ф-лу Г-Остроград $\int\limits_{\mathcal{D}} (*) d\tau = 0$

$$\Rightarrow \int\limits_S a(x) \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds +$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial x_i} l_i(x)\, u, v\, d\tau = \int\limits_{\mathcal{D}} \operatorname{div} F d\tau = \int\limits_S (F, n) ds \right\}$$

$$+ \int\limits_S \sum_{i=1}^{n} l_i(x)\, v u \cos(n, y_i)\, ds = 0$$

1) $a > 0$ $\exists a = 0 \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}(x) \cos(\bar{n}, y_j) \equiv 0$

(можно д-ть, что $\neq 0$ только опираясь на опр. равномерной эллиптичности; можно расс. эти р-ва как систему, т.к. $\det\{A_{ij}\} \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos(n, y_i) = 0$, но так не бывает, что нормаль $\perp$ всем осям)

2) $\bar{N}$ ни в одной точке не совпадает с касательной к пов-ти S (тоже у равн. эллиптичности)

Форма $A_{ij}(x)$ наз равн. эллип., если ~~[illegible]~~

$\exists k_0 > 0,\ k_1 > 0 : k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \le$

$\le k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$

Для док-ва рассм $(\vec{N}, \vec{n}) \overset{?}{=} 0$

$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \cos(\vec{n}, y_i) \cos(\vec{n}, y_j) \le$

$\le k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \Rightarrow$ не обращается в 0 в силу равномерной эл. оператора

Фундаментальное решение

$\{A_{ij}(x)\}$ форм. соотв полож. опр.

$$\{a_{ij}\} = \frac{\text{алг. дополнение к эл-ту } A_{ij}(x)}{\det \|A_{ij}\| = A}$$

тоже полож. опр (без док-ва)

$\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$

Ф. Леви: $\Psi(x,y) = \dfrac{\sigma(x,y)^{\frac{2-n}{2}}}{(n-2)\sqrt{A(y)}\,\omega_n}$

$A_{ij}(x) = E$

Для Лапл. не есть фунд. решение, т.к. в нём не учтены коэф. при младших производных и самой ф-ии

Учтем коэф. при младших произв.:

Возьмем $n=2 \Rightarrow$ ф. решение $E(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$

Возьмем ур-ние вида:

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)\cdot u = 0$$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_D \ln|x-y|\,\mu(y)\,d\tau_y + \omega(x)$$

$u(x)$ подставим в ур-ние:

$$-\mu(x) + \frac{1}{2\pi}\int_D \sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{1}{2\pi}\frac{\mu(y)}{|x-y|^2}\left((x_1-y_1) + (x_2-y_2)\right) + \int_D C(x)\ln|x-y|\,\mu(y)\,d\tau$$

$$\mu(x) = \int_D K(x,y)\,\mu(y)\,d\tau + \lambda\,\omega(x) + f(x)$$

ядро, имеющее особенность при $x=y$

Лекция 10

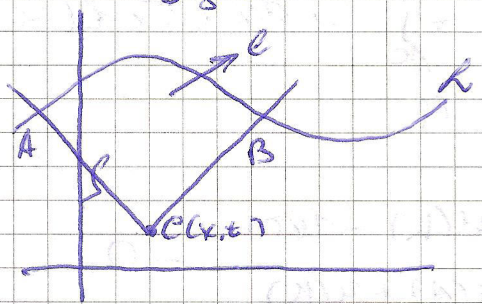
08.11.

$\Omega(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y| + \int\limits_{\partial\Omega}\mu(y)K(x,y)\,ds$

$\Delta u = 0$; $-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$

$u_{tt} - u_{xx} = 0$	$u_{tt} - u_{xx} = 0$
$u(x,0) = \varphi(x)$	$u(x,t)\Big\vert_{L} = \varphi(x^S, t)$
$u_t(x,0) = \psi(x)$	$\frac{\partial u}{\partial l}\Big\vert_{L} = \psi(x^S, t)$

Криволинейная постановка задачи Коши на кривой L



Характеристики этого ур-ния

$x+t = const$; $x-t = const$

Ограничения:

1) Хар-ки пересекают эту кривую в одной точке (A, B)

2) вектор $\vec{l}$ нигде не совпадает с касательной к кривой L

возьмем тождество:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

проинтегрируем его по обл $\mathcal{D}$:

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) dx\, dt =$$

$= \{$ф-ла Остроград — Гаусса, ф-ла Грина$\} =$

$$= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt =$$

$$= \int_{BA} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt + \int_{AC} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt +$$

$$+ \int_{CK} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

$$-(u(C) - u(A)) \quad u(K) - u(C)$$

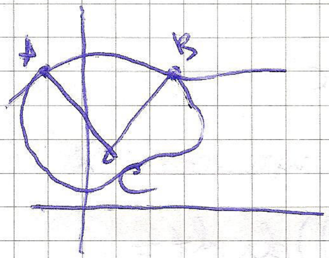
$$-2u(C) + u(A) + u(K) = 0$$

$$u(C) = \boxed{u(x,y) = \frac{1}{2} u(A) + \frac{1}{2} u(B) + \frac{1}{2}\int_{BA} \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt}$$

реш. получили в квадратурах

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial t} \cdot \dfrac{\partial t}{\partial s} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial n} + \dfrac{\partial u}{\partial t} \dfrac{\partial t}{\partial n} = \psi(s) \end{cases}$$

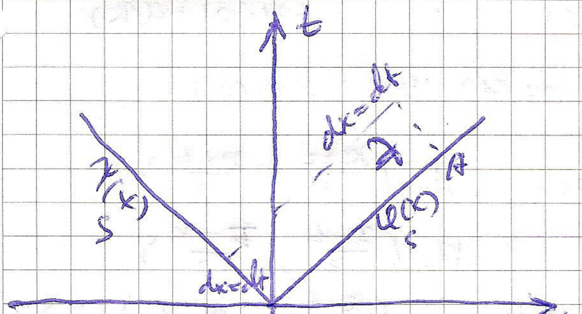
Коррект. задача Дирихле для гиперболического ур-ния: замкнем кривую



Краевая задача Дирихле для гипер-болического ур-ния некорр. Т.о. для гипербол. ур-ний характерны задачи Коши, а для эллиптических — краевые

Задача с данными на хар-ках
(задача Гурса)

$u_{tt} - u_{xx} = 0$



Проведем хар-ки $u_y = 0$ Для непр. $u(0) = \psi(0)$

$x + t = const$

$x - t = const$

и зададим усл. на хар-ках $\varphi(x)$, $\psi(x)$

Запишем тождество:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

проинтегрируем его по площади D

$$\int_D \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) dx\,dt =$$

применим ф-лу Остр. Г. или Грина

$$= \int_S \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dt = \left\{ \begin{matrix} \text{заменим} \\ \text{дифф-алы} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \underbrace{\int_{OA} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)}_{u(A) - u(O)} - \underbrace{\int_{AC} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx}_{-u(C) + u(A)} +$$

$$+ \underbrace{\int_{CB} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx}_{u(B) - u(C)} - \underbrace{\int_{BO} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx}_{-u(O) + u(B)} = 0$$

$$u(C) = u(x, y) = u(A) + u(B) - u(O)$$

Координаты точек: $A\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right)$

$B\left(\frac{x-t}{2}, \frac{t-x}{2}\right)$

$$\Rightarrow u(x, y) = -\psi(0) + \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right)$$

реш. получим в явном виде

Единственность решения задачи Коши

$u_{tt} - u_{xx} = 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$

$u_t(x,0) = \psi(x)$

$\exists$ 2 реш.: u_1, u_2

$u = u_1 - u_2 \Rightarrow$ задача для разности:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

требуется д-ть, что оно имеет нулевое решение

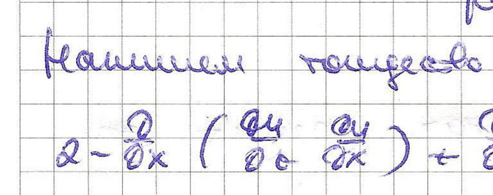
Напишем тождество:

$$-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= -2\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

Проинтегрируем по треугольнику:



и применим ф-лу Гаус-Остр, или Грина

$$\Rightarrow 0 = \int\limits_{AB+BC+CA} \left(+2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\,dt + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\right) =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx - \int\limits_{BC} \Big(-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\Big) dx + \int\limits_{CA} \Big(2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\Big) dx = 0$$

0 возможен только, если все величины $= 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

а на границе в нач момент эти величины нули

$\int\limits_{AB} = 0$, т.к. $u_t(x,0) = 0$

$\Rightarrow$ реш. задачи Коши единственно. ■

Непр. зависимость от нач. усл.

$\Rightarrow$ задача Коши для гиперболич. уравнения корректно поставлена

Лекция 11 15.11

Теорема единственности для класса Тихонова

(1) $Lu = \Delta u - u_t = 0$

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in R^n$

$\{0 < t < T\} \equiv \{x \in R^n, 0 < t < T\}$

Классическое решение:

$u(x,t) \in C^{2,1}\{0 < t < T\} \cap C^0\{0 \le t \le T\}$

$T_\sigma = \{u(x,t), \exists A > 0, a > 0 : \forall x \in \{0 \le t \le T\}:$

$|u(x,t)| \le A e^{a|x|^\sigma}\}$, $\sigma > 0$

$T_0 \equiv \{\varphi : |\varphi(x,t)| \le A\}$

$T_2 = \{|u(x,t)| \le A e^{a|x|^2}, \forall (x,t) \in$

$\in \{0 \le t \le T\}\}$

T (единственности Тихонова):

Задача (1), (2) не может иметь более одного решения и из T_2.

Лемма: $|u| \le A e^{a|x|^2}$ (3)

Если $u(x,t) \in \{0 < t < T\}$ – реш (1)-(2)-(3)

то $u \equiv 0$ для $\forall (x,t) \in \{0 < t < T_1\}$, где

$T_1 = \min\{T, \frac{1}{5a}\}$

Док-во: $\forall \varepsilon > 0$, $\{0 < t < T_1\}$:

$$w_I(x,t) = \pm u(x,t) + \varepsilon\left(t + \frac{e^{\frac{|x|^2}{4(T_1-t)}}}{(T_1-t)^{N/2}}\right)$$

$$\begin{cases} w_I(x,0) = \dfrac{\varepsilon}{T_1^{N/2}} e^{\frac{|x|^2}{4T_1}} \geq 0 \quad (4) \\ L w_I = \varepsilon > 0 \quad (5) \end{cases}$$

$$w_I(x,t)\Big|_{|x|=R} > 0$$

Зафиксируем $\forall (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t})$ и выберем $R > 0$

$$(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}) \in \{|x| < R_0 \;\; 0 < t < T\} = Z_R^T$$

$$w_I\Big|_{|x|=R} = \pm u\Big|_{|x|} + \varepsilon\left(t + (T_1-t)^{-N/2} e^{\frac{R^2}{4(T_1-t)}}\right) \geq$$

$$\geq -A e^{a^2R^2} + \varepsilon\, 15a^{N/2} e^{\frac{5aR^2}{4}} \xrightarrow[R\to\infty]{} +\infty$$

$R > 0 \Rightarrow (4, 5, 6)$ – доказано

Докажем, что если (5) удовл (3), то

$$\begin{cases} w \in C^{(2,1)}(|x| < R,\; 0 < t < T_1) \\ Lw > 0 \\ w_I(x,0) \geq 0 \\ w_I\Big|_{|x|=R} = k > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow W_I(x,t) \geq 0, \; |x| < R, \; 0 < t < T$

(из принципа максимума)

Т. о. $W_I(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}) \geq 0 \Leftrightarrow |u(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t})| \leq$

$$\leq \varepsilon \left(\overset{\circ}{t} + \frac{e^{\frac{|x|^2}{4(T_1 - \overset{\circ}{t})}}}{(T_1 - \overset{\circ}{t})^{n/2}} \right)$$

Из $\forall (\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t})$ и $\forall \varepsilon \Rightarrow u(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{t}) = 0$

ч.т.д.

Док-во (теоремы):

Пусть $\exists u_1$ и u_2, удовл. нер-ву (3),

$u_{1,2}|_{t=0} = \varphi(x)$

Рассм. $u = u_1 - u_2$; $Lu = 0$

$u|_{t=0} = 0$

В силу леммы $u \equiv 0$ $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t < T$

$T_1 = \min\{T, \frac{1}{\sqrt{a}}\}$

Т.о. если $T = T_1$, то ч.т.д.

Иначе, пусть $T_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} < T$

Т.к. $u(x,t) \in C\{0 \leq t < T\}$, то

$u|_{t = 1/\sqrt{a}} = 0 \Rightarrow v(x,t) = u(x, t + \frac{1}{\sqrt{a}})$

$\{x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t < T - 1/\sqrt{a}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ лемма $\Rightarrow$ $v \equiv 0$

$\{0 < t < T_2\}$, $T_2 = \min(T - 1/\sqrt{a},\ 1/\sqrt{a})$

и т.д. за конечное число шагов получим всю полосу

$\int\!\!\!\int$ пр

Теорема: если $\varphi(x) \le e^{ax^2} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $a > 0$, то в полосе $\{x \in \mathbb{R},\ 0 < t < 1/4a\}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi \quad (3)$$

Док-во: $K(x,t) = e^{-x^2/4t} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$ реш (1)

$L^1(\mathbb{R}) \ni g(x) = e^{-a^2x^2}\varphi(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x) = g(x)\, e^{ax^2}$

$\{|x| \le a,\ 0 < t_0 \le t \le t_1 < 1/4a\}$

$$|\varphi(\xi) K(x-\xi,t)| \le |g(\xi)|\, e^{\left|a\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4t}\right|} \le$$

$$\le \frac{|g(\xi)|}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{a\xi^2 - \frac{(|x|-|\xi|)^2}{4t}\right\} \le$$

$$\le \frac{g(\xi)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\left(\frac{1}{4t_1} - a\right)\xi^2 + \frac{a}{2t_1}|\xi|\right\} =$$

$$= |g(\xi)|\, e^{\xi^2/4a} \le |g(\xi)|\, e^{\frac{a^2}{4a(1-4ah)}}$$

$$+ e\ |u^k| \le |g(\xi)| \exp\left\{ -\left(\sqrt{A}\,|\xi|^2 - \frac{B}{e\sqrt{A}}|\xi| + \frac{B^2}{4a}\right) + \frac{B^2}{4a}\right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{a\xi^2} \left(K(x-h-\xi,t) - K(x-\xi,t)\right)\tfrac{1}{h}\, d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{a\xi^2} K_x(x+\theta h-\xi,t)\, d\xi$$

Совершенно аналогично предыдущему получим оценку:

$$g(\xi)\, e^{a\xi^2} u_x(x+h\theta-\xi,t) \in L^1(R)$$

Аналогично оценивается остальное

Если $\varphi(x) \le e^{ax^2} \in L^1(R)$, $\forall a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ решение $\exists$ везде

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & Z_T = \{x \in U, 0 < t < T\} \\ u|_S = 0, & S = \partial U \times (0,T) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in U \end{cases}$$

$u \in C^{2,1}(Z_T) \cap C(\overline{Z}_T)$

Пусть $\exists \bar{u}$ – реш. рассм. $w = u - \bar{u}$

$$\begin{cases} \Delta w - w_t = 0 \\ w|_S = 0 \\ w|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$e(t) = \int_U w^2(x,t)\,dx$$

$$\dot{e}(t) = 2\int_U w w_t'\,dx = 2\int_U w \Delta w\,dx =$$

$$= \{\text{по ф-ле О-Г}\} = -2\int_U (\nabla w)^2 dx \le 0,$$

но $e(t) \ge 0 \Rightarrow w = 0$

чтд

Лекция 12 22.11

Метод Римана решения гиперболических ур-ний

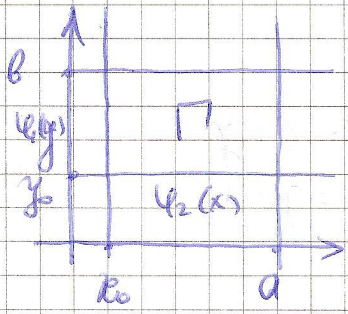
$u_{xx} = u_{tt}$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - t \\ \eta &= x + t \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$$

Рассм

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = F(x,y) \quad (1)$$

$x_0 < x < a \quad , \quad y_0 < y < b$



$$(2) \quad \begin{aligned} u\big|_{x=x_0} &= \varphi_1(y) \quad && y_0 \le y \le b \\ u\big|_{y=y_0} &= \varphi_2(x) \quad && x_0 \le x \le a \end{aligned}$$

Предположение: $a, b, c \in C(\overline{\Pi})$

$F \in C(\overline{\Pi})$

$\varphi_1 \in C^1[y_0, b] \quad , \quad \varphi_2 \in C^1[x_0, a]$

$\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0)$ – усл согласования

Сведем (1) - (2) к системе интегральных ур-ний Вольтерра 2^ого рода и решим методом последовательных приближений

$$v = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} = F - av - bw - cu \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = F - av - bw - cu \end{cases} \qquad (4)$$

Интегрируем систему:

первое ур-ние от y_0 до y

второе ур-ние от x_0 до x

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial y}\, dy = v(x, y) - v(x, y_0) =$$

$$= \int_{y_0}^{y} (F - av - bw - cu)\, dy$$

второе аналогично:

$$w(x,y) = w(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} (F - av - bw - cu)\,dx$$

$$u(x,y) = u(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} w(x,y)\,dy \qquad (5)$$

Учтем условие (2) $\Rightarrow$ из (5) $\Rightarrow$

$$(6)\begin{cases} v(x,y) = \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} (F - av - bw - cu)\,dy \\ w(x,y) = \varphi_1'(y) + \int_{x_0}^{x} (F - av - bw - cu)\,dx \\ u(x,y) = \varphi_2 + \int_{y_0}^{y} w(x,y)\,dy \end{cases}$$

Лемма:

Докажем, что из (6) $\Rightarrow$ (1), (2):

Дифф-ем посл ур-ние (5) по x

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial w}{\partial x}(x,y)\,dy =$$

$$= \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\,dy =$$

$$= \varphi_2'(x) + \int_{y_0}^{y} (F - av - bw - cu)\,dy = v$$

В (6) положим $y=y_0$, $x=x_0$

$$\Rightarrow u\Big|_{y=y_0} = \varphi_2(x)$$

$$u\Big|_{x=x_0} = \varphi_2(x_0) + \int_{y_0}^{y} w\Big|_{x=x_0} dy =$$

$$= \varphi_2(x_0) + \int_{y_0}^{y} \varphi_1'(y)\,dy =$$

$$= \varphi_2(x_0) + \varphi_1(y) - \varphi_1(y_0) = \varphi_1(y)$$

т.е. (6) $\Leftrightarrow$ (1), (2)

Решим (6):

$v_0 = \varphi_2'(x)$, $w_0 = \varphi_1'(y)$, $u_0 = \varphi_2(x)$

0 приближение

$$(7)\ \begin{cases} v_n = \varphi_2' + \int_{y_0}^{y} (F - a v_{n-1} - b w_{n-1} - c u_{n-1})\,dy \\ w_n = \varphi_1' + \int_{x_0}^{x} (F - a v_{n-1} - b w_{n-1} - c u_{n-1})\,dx \\ u_n = \varphi_2 + \int_{y_0}^{y} w_{n-1}\,dy \end{cases}$$

$\varphi_1(y)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_1'(y)$, $\varphi_2'(x)$, $F(x,y)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ сир. в $\bar{\Pi}$.

Докажем, что v_n, w_n и u_n — равн. сх-ся в $\overline{\Pi}$.

Вычислим для $(n+1)$ и вычтем

$\Rightarrow$

$$(8)\quad \begin{cases} v_{n+1} - v_n = -\displaystyle\int_{y_0}^{y} [a(v_n - v_{n-1}) + \\ \quad + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]\, dy \\ w_{n+1} - w_n = -\displaystyle\int_{x_0}^{x} [a(v_n - v_{n-1}) + \\ \quad + b(w_n - w_{n-1}) + c(u_n - u_{n-1})]\, dx \\ u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_{y_0}^{y} (w_n - w_{n-1})\, dy \end{cases}$$

Докажем, что $v_n \overset{\overline{\Pi}}{\rightrightarrows} v$, $w_n \overset{\overline{\Pi}}{\rightrightarrows} w$,

$u_n \overset{\overline{\Pi}}{\rightrightarrows} u$

Док-во: $|v_n - v_{n-1}| \le K^{n-1} A \dfrac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}$

Н.Д: (9) $|w_n - w_{n-1}| \le K^{n-1} A \dfrac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$|u_n - u_{n-1}| \le K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

где $K > (|a| + |b| + |c|)$

$const = A > 0$

При $n = 1$ нер-ва (9) выполн.

Пусть выполнены при $n-1$, докажем, что выполнены при n. Докажем только для v_n, для остальных аналогично.

$$|v_{n+1} - v_n| \leq \int_{y_0}^{y} (|a| + |b| + |c|) K^{n-1} A \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy <$$

$$< AK^n \int_{y_0}^{y} \frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} dy =$$

$$= AK^n \left[\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!} - \frac{(x-x_0)^n}{n!} \right] \leq$$

$$\leq AK^n \frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}$$

чтд

Из (9) $\Rightarrow$ абс и равн сх-ть рядов

$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n-1})$; $v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - v_{n-1})$

$w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - w_{n-1})$

т.к. слагаемые этих рядов по абс. величине меньше слагаемых равн. и абс. сх-ся ряда $A + A\sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} =$

$= A + A e^{-K(x+y-x_0-y_0)}$

$\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса

$\Rightarrow \exists$ предел $\Rightarrow$ переходим к пределу в соотношениях (7) и получим теорему существования.

$\Rightarrow \exists\ u, v, w$ – реш (6) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ реш (1) – (2).

Докажем единственность решения задачи (1) – (2) : (от противного)

Н.Д.:

Если $F = 0$, $\varphi_1(y) = \varphi_2(x) \equiv 0$, то система (6) имеет не более одного ограниченного решения: $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, $w \equiv 0$

Пусть это не так, т.е. $\exists$ какое-то решение $u: |u| < A$

$v: |v| < A$

$w: |w| < A$

Ф-ии u, v, w удовлетворяют нер-вам

$$\begin{cases} |u| \le A k^{n-1} \dfrac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\ |v| \le A k^{n-1} \dfrac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\ |w| \le A k^{n-1} \dfrac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases} \qquad (8')$$

единственность решения — тождественно нулю, т.к. u, v и w мажорируются членами сх-ся ряда, а они стремятся к 0.

$\Rightarrow$ ед. доказана

чтд

Метод Римана

$L(u) = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = F$ (1)

хар-ки: $x = const$, $y = const$

Введём понятие сопряжённого оператора $M(v)$ к $L(u)$

$M(v) = v_{xy} - av_x - bv_y + cv$ (2)

формально сопряжённый для $L(u)$

Легко д-ть, что

$$2(vLu - uMv) \equiv (u_x v - v_x u + 2buv)_y + (u_y v - v_y u + 2auv)_x \quad (3)$$

Проинтегрируем (3) по обл. на плоскости и применим ф-лу Грина:

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy)$$

Рассм $D \in \mathbb{R}^2$, $\partial D = \lambda$

$$\iint\limits_D 2\,(vLu - uMv)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \big((u_x v - v_x u + 2buv)_y +$$

$$+ (u_y v - v_y u + 2auv)_x\big)\,dx\,dy \qquad (4)$$

В результате вычисления получаем следующее р-во:

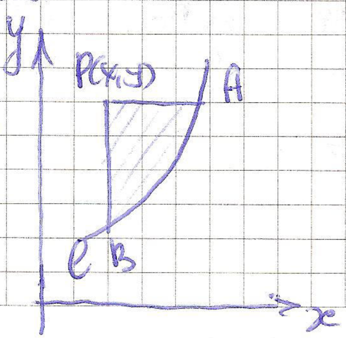
$$2\iint\limits_D (vLu - uMv)\,dx\,dy =$$

$$= \oint\limits_l -(u_x v - v_x u + 2buv)\,dx +$$

$$+ (u_y v - v_y u + 2auv)\,dy \qquad (5)$$

Пусть v — решение сопряженного ур-ния

D:



l несет данные Коши

u, u'_x, u'_y — заданы вдоль кривой

$du = u'_x dx + u'_y dy$

$v:\ M(v)=0$ в $\,^{P}_{B}\nabla^{A}$

$$\oint_{\lambda} = \int_A^B + \int_B^P + \int_P^A$$

нулевой легко вычисляются

$$2\iint_D vF\,dx\,dy = \int_{AB} + \int_{BP} + \int_{PA}$$

<u>на PA</u> $dy=0$ $\quad -\int_{PA}(u_x v - v_x u + 2buv)\,dx =$

$= \{\ u_x v - v_x u + 2buv \equiv (uv)'_x + 2u(bv - v_x)\} =$

$= (uv)_P - (uv)_A - \int_{PA} 2u(bv - v_x)\,dx$

на BP : $\int_{BP}(u_y v - v_y u + 2auv)\,dy =$

$= \{(uv)_y + 2u(av - v_y)\} = (uv)_P - (uv)_B +$

$+ \int_{BP} 2u(av - v_y)\,dy$

$\overset{(5)}{\Longrightarrow}$

$$2u(P)v(P) = \int\limits_{AB} \Big[(u_x v - v_x u + 2buv)\,dx -$$

$$- (u_y v - v_y u + 2auv)\,dy \Big] +$$

$$+ u(A)v(A) + u(B)v(B) +$$

$$+ \int\limits_{PA} 2u(bv - v_x)\,dx + \int\limits_{PB} 2u(av - v_y)\,dy +$$

$$+ 2\iint\limits_{\Delta} vF\,dx\,dy \qquad (6)$$

Потребуем, чтобы v: $bv - v_x = 0$ на PA

$av - v_y = 0$ на PB

$$\Rightarrow v(x, y_0) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} b(x, y_0)\,dx}$$

$P = (x_0, y_0)$

$$v(x_0, y) = e^{\int\limits_{y_0}^{y} a(x_0, y)\,dy}$$

И дополнительно потребуем, чтобы $v(P) = 1$

$$\begin{cases} Mv = 0 & \text{в } \square \\ v|_P = 1 \\ v_x = bv, \quad v_y = av \end{cases}$$

— такая ф-я наз ф-ей Римана