Пр-ва обобщенных производных 12.02.

Пр-ва Соболева

$V \subset R^N$, V - открытое мн-во

ф-ла Гаусса - Остроградского

$$\int\!\!\int_V \frac{\partial P}{\partial x_i} dx = \int_{\partial V = S} P \cos(n, x_i) dS \quad (0)$$

$i = 1 \ldots N$

направляющий cos внешней нормали к S

где $P \in C^1(\bar V)$

$v, u \in C_0^\infty(V)$ $\quad u, v|_S = 0$

$$\int_V v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int\!\!\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right] dx =$$

$$= \int_S \underbrace{\cos(n, x_i) uv}_{0} dx - \int_V u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1) \int_V u(x) \varphi_{x_i} dx = - \int_V \varphi \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$\exists\, u \in L_1^{loc}(V)$ $\forall$ открытого мн-ва V: $\bar V \subset U$

$V \Subset U$

Если $\exists\, v \in L_1^{loc}(V)$: $\forall \varphi \in C_0^\infty(V)$

пробные ф-ии

справедливо р-во $\int_V u(x)\varphi_{x_i} dx = -\int_V \varphi(x) v(x) dx$

Тогда $v(x)$ наз первой обобщенной производной ф-ии $u(x)$

α - мультииндекс : $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_N)$ $\alpha_i \geq 0$

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = D^{|\alpha|} u$$

$k \in N$, $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ $|\alpha| = k$

$$\int_U u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \varphi D^\alpha u \, dx \quad (2)$$

где $u \in C^k(U)$

Опр: $u, v \in L_1^{loc}(U)$ будем наз ф-ю v обобщенной частной производная $|\alpha|$, если $\forall \varphi \in C_0^\infty(U)$ справедлива ф-ла:

$$\int_U u D^{|\alpha|} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \varphi(x) v(x) dx \quad (3)$$

Св-во (лемма 1) если обобщенная частная производная существует, то она единственная

$f = g$ - рав-во как элементов
р-во всюду кроме мн-ва меры 0.

Док-во св-ва (лемма 1) (от противного):

$\exists$ $\exists$ еще одна частная производная $\tilde{v} \in L_1^{loc}(U)$: $\forall \varphi \in C_0^\infty(U)$ справедливо

$$\int_U u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U \varphi \tilde{v} dx \quad (4)$$

Вычтем из (3) р-во (4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varphi \in C_0^\infty(U)$

$$\int_U \varphi(v-\tilde{v})\,dx = 0 \quad (5)$$

Рассм: $\varphi(x) = \varphi_m(x) \in C_0^\infty(U)$

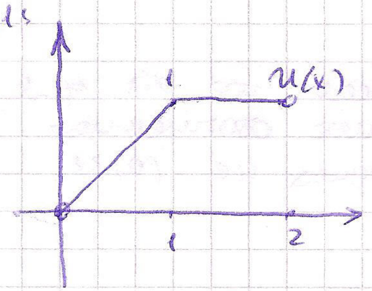
$$\varphi_m \longrightarrow (v-\tilde{v})$$

$$\Rightarrow (5) \int_U \varphi_m (v-\tilde{v})\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_U (v-\tilde{v})^2\,dx = 0 \Rightarrow v = \tilde{v} \text{ п.в.}$$

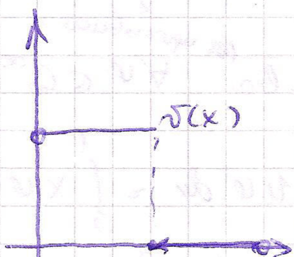
Из $\exists$ частн. произв n-ого порядка не следует $\exists$ частн произв меньшего порядка

Пример 1:



$U = (0,2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in [1,2) \end{cases}$$



$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 u\varphi' dx \overset{?}{=} -\int_0^2 \varphi v\, dx$$ ← докажем:

$$\int_0^2 u\varphi' dx = \int_0^1 x\varphi' dx + \int_1^2 \varphi' dx =$$

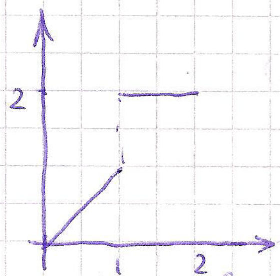
$$= x\varphi\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi\, dx + \overbrace{\int_1^2 \varphi' dx}^{\varphi(2)-\varphi(1)} =$$

$$= \varphi(1) + \varphi(2) - \varphi(1) - \int_0^1 \varphi\, dx = \varphi(2) - \int_0^1 \varphi\, dx =$$

$$= -\int_0^2 \varphi\, dx.$$

чтд

Пример 2: $u(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$



Докажем, что эта ф-я не имеет обобщенной производной на $(0, 2)$

(от противного)

Док-во: $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $\exists v(x) \in L_1^{loc}(\Omega)$

$$\int_0^2 u\varphi' dx = \int_0^1 x\varphi' dx + 2\int_1^2 \varphi' dx =$$

$$= x\varphi\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi' dx + 2[\varphi(2) - \varphi(1)] \quad (6)$$

$\exists \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \in C_0^{\infty}(U)$

1) $0 \le \varphi_m \le 1$

2) $\varphi_m(1) = 1$

3) $\varphi_m \to 0$, $x \ne 1$, $m \to \infty$

Подставим φ_m в р-во 6)

$$\Rightarrow \int_0^2 \varphi_m' u \, dx = -\varphi_m(1) - \int_0^1 \varphi_m \, dx$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \varphi_m(1) = 1 = \lim_{m\to\infty} \left[\int_0^2 u \varphi_m dx - \int_0^1 \varphi_m dx \right] = 0$$

X
?

Т.к. $\varphi(x) \in C_0^{\infty}(U)$, то $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} =$

$= \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_N^{\alpha_N} \dots \partial x_1^{\alpha_1}}$ (обобщенная производная не

зависит от порядка дифф-я)

Опр. $1 \le p \le \infty$, $k \ge 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$W_p^k(U) = \{ u \in L_p^{loc}(U) : D^{\alpha} u \in L_p^{loc}(U), |\alpha| \le k \}$$

$$\|u\|_{W_p^k} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_U |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \le k} \operatorname{ess\,sup} |D^{\alpha} u|, & p = \infty \end{cases}$$

Опр: $\{u_{m}\}$ сх-ся к u $u_m \xrightarrow{W_p^k} u$ при $m \to \infty$,
если $\exists \lim\limits_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W_p^k} = 0$

Опр: $\overset{\circ}{W}{}_p^k$ - замыкание C_0^∞ по норме W_p^k

$\overset{\circ}{W}{}_p^k(U) \subset W_p^k(U)$

$C_0^k(U) \subset \overset{\circ}{W}{}_p^k(U) \subset W_p^k(U)$

О.5: $H^k = W_2^k$

Т1: Если $u, v \in W_p^k(U)$ $|\alpha| \le k$,
то 1) $D^\alpha u \in W_p^{k-|\alpha|}(U)$

$D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$ $\forall \alpha, \beta$ $|\alpha|+|\beta| = k$

2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda u + \mu v \in W_p^k(U)$

3) Если V открытое подмн-во U, то
$u \in W_p^k(V)$

4) Если $\zeta \in C_0^\infty(U)$, то
$(\zeta u) \in W_p^k(U)$

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \frac{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}{\beta_1! \ldots \beta_n! (\alpha_1-\beta_1)! \ldots (\alpha_n-\beta_n)!}$$

Пример 3: $u = \frac{1}{|x|^\alpha}$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$

$x \neq 0$

α, p, N? $u \in W_p^\alpha(U)$

$U = B_0^1$ – ед шар

$$u_{x_i} = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}}$$

$$|u_{x_i}| = \frac{k_1}{|x|^{\alpha+1}}$$

$$\int\limits_{U \setminus B_\varepsilon^0} u \varphi_{x_i} dx = -\int\limits_{U \setminus B_\varepsilon^0} \varphi u_{x_i} dx + \int\limits_{\partial B_\varepsilon^0} u \varphi \cos(n, x_i) ds$$

$$\left| \int\limits_{\partial B_\varepsilon^0} u\varphi \cos(n, x_i) ds \right| \leq \frac{c}{\varepsilon^\alpha} \int\limits_{\partial B_\varepsilon^0} ds = c\,\omega_N \varepsilon^{N-1-\alpha} \to 0$$

при $N-1-\alpha > 0$

$\Rightarrow \alpha < N-1$

$\Rightarrow \exists$ обоб. производная при $\alpha < N-1$

$$|u_{x_i}| = \frac{k_1}{|x|^{\alpha+1}} \in L_p \qquad (\alpha+1)p < N$$

$\Rightarrow \alpha < \frac{N-p}{p} \to u \in W_p^\alpha$

Пример 4: $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ – счетное всюду плотное мн-во в $B_0^1 = \{|x| < 1\}$

$$u(x) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{1}{|x - r_k|^\alpha}$$

$\alpha < \frac{N-p}{p}$

12.02

$u, v \in L_1^{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ - открытая область

$v(x) \in V_1^{loc}(\Omega)$ наз. обобщенной производной порядка $\alpha = (\alpha_1 ... \alpha_N)$, если

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi v(x)\, dx$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$W_p^k = \{u : u \in L_p^{loc}(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq k \quad D^\alpha u \in L_p^{loc}(\Omega)\}$$

$$\|u\|_{W_p^k} = \Big[\sum_{|\alpha| \leq k} \int |D^\alpha u|^p dx\Big]^{1/p}$$

Т2: $W_p^k(\Omega)$ - банахово пр-во (полное, линейное, нормированное)

Док-во:

Проверим аксиомы нормы:

1) $\|\lambda u\|_{W_p^k} = |\lambda| \|u\|_{W_p^k(\Omega)}$

2) $\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = 0 \iff u \overset{п.в.}{=} 0$

3) $\|u+v\|_{W_p^k(\Omega)} = \Big[\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L_p(\Omega)}\Big]^{1/p} \leq$

$\le$ {нер-во Минковского} $\le$

$$\le \Big(\sum_{|\alpha|\le k}\big(\|D^\alpha u\|_{W_p^k} + \|D^\alpha v\|_{W_p^k}\big)^p\Big)^{1/p} \le$$

$$\le \Big(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|^p_{L_p}\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha v\|^p_{L_p}\Big)^{1/p} =$$

$$= \|u\|_{W_p^k} + \|v\|_{W_p^k}$$

$\Rightarrow$ пр-во линейно и корм., докажем полноту.

Пусть $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ - посл-ть Коши в $W_p^k(\Omega)$

то $\forall \alpha : |\alpha|\le k$ $\{D^\alpha u_m\}$ - посл-ть Коши в $L_p(\Omega)$

$L_p(\Omega)$ - полное пр-во $\Rightarrow \exists u_\alpha : D^\alpha u_m \xrightarrow{L_p} u_\alpha$

Докажем, что $u \in W_p^k$ и $D^\alpha u = u_\alpha$

Фиксируем $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi\, dx = \lim_{m\to\infty}\int_\Omega \varphi D^\alpha u_m dx = \int_\Omega u_\alpha \varphi\, dx$$

Замечание: т.к. $D^\alpha u_m \to D^\alpha u$ в $L_p(\Omega)$

то $\forall\alpha : |\alpha|\le k$ $u_m \to u$ в $W_p^k(\Omega)$

W_2^k – Гильбертово пр-во

Средние ф-ии и обобщенные производные

Ядром усреднения наз ф-я $w_h(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$: 1) $w_h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ $\forall h > 0$

2) $w_h(x) = 0$ при $|x| > h$

3) $w_h(x) \geq 0$ в $\mathbb{R}^N$

4) $\int_{\mathbb{R}^N} w_h(x)dx = 1$

Пример:
В качестве ядра усреднения часто берется:

$$w_h(x) = \begin{cases} c\, e^{\frac{h^2}{|x|^2 - h^2}}, & |x| < h \\ 0, & |x| \geq h \end{cases}$$

число c выбирается соответственно 4).

Применяя правило Лопиталя получим, что $w_h(x)$ имеет ноль бесконечного порядка на границе шара

$$c = \frac{1}{\int\limits_{|x| \leq h} e^{\frac{h^2}{|x|^2 - h^2}} dx}$$

С помощью ядра усреднения имеется усредненная ф-я:

$$u(x) \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^N) \Rightarrow u_h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y)\,u(y)\,dy$$

$\Rightarrow u_h$ – бесконечно дифф-ая, т.е усредненная ф-я „лучше" $u(x)$

~~Пусть~~

$u \in L_p(\Omega)$, $u \equiv 0$ при $x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$

Легко видеть $u(x) \in L_1(\Omega)$, $u_h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

ТЗ: Пусть Ω – огр. обл. в $\mathbb{R}^N$:

1) Если $u(x) \in L_p(\Omega)$ и $u = 0$ в $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_1$, где $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$, тогда $u_h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ $\forall h$: $h < \delta$, где $\delta = \rho(\Omega_1, \partial\Omega)$

2) Если $u(x) \in C(\overline{\Omega})$ и $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, тогда $u_h(x) \overset{\Omega}{\rightrightarrows} u(x)$ при $h \to 0$.

3) Если $u(x) \in L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, то $\|u_h\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)}$ и $\lim\limits_{h \to +0} \|u_h - u\|_{L_p(\Omega)} = 0$

Док-во:

$$u_h(x) = \int\limits_{|x-y|<h} u(y)\, w_h(x-y)\, dy$$

1) $\int (x, \partial\Omega) \leq \delta - h$, то $w_h = 0$ $|x| > h \Rightarrow$

$\Rightarrow u_h(x) = 0$, т.к. $w_h(x-y)\, u(y) = 0$

$\Omega_1 \Subset \Omega$

2) $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ и $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, тогда

$$u_h(x) - u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y)\, u(y)\, dy - u(x) \cdot 1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_N} w_h(x-y)\, (u(y) - u(x))\, dy$$

$$|u_h(x) - u(x)| \leq \sup\limits_{|x-y| \leq h} |u(y) - u(x)| \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y)\, dy}_{} =$$

(где $\int\limits_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y)\, dy = 1$)

$$= \sup\limits_{|x-y| \leq h} |u(y) - u(x)|$$

по Т. Кантора-Вейерштрасса данная ф-я равн. непр $\Rightarrow$ при $h \to 0$

$$\sup\limits_{|x-y| \leq h} |u(y) - u(x)| \to 0$$

3) $u \in L_p(\Omega)$ $u = 0$ вне Ω, тогда при $p \geq 1$ {при $p = 1$ все очевидно)

$$u_h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y)u(y)dy \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} (w_h(x-y))^{1/p + 1/q = 1} |u(y)| dy \leq$$

$\leq$ {нер-во Гельдера} $\leq$ { $f = |w_h|^{1/p}$, $g = |w_h|^{1/q} |u|$ } $\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{|w_h(x-y)|dy}_{1}\right]^{1/q} \times$

$$\times \left[\int_{\mathbb{R}_N} |u(y)|^p |w_h(x-y)| dy\right]^{1/p} =$$

$$= \left[\int_{\mathbb{R}_N} |u(y)|^p |w_h(x-y)| dy\right]^{1/p}$$

$$\Rightarrow |u_h(x)|^p \leq \left[\int_{\mathbb{R}_N} |u(y)|^p |w_h(x-y)| dy\right]^{1/p \cdot p}$$

умножим на dx и интегрируем

$$\Rightarrow \|u_h(x)\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)}$$

При $p = 1$ применим нер-во: модуль интеграла $\leq$ интеграла модуля.

$\forall u \in L_p,\ p > 1,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \sigma(x) \in C(\Omega):$

$\|u - \sigma\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\sigma(x) = 0$ в некоторой окр. $\partial\Omega$

$$\|u^h - u\|_{L_p(\Omega)} \le \underbrace{\|u^h - \sigma^h\|_{L_p(\Omega)}}_{\|(u-\sigma)^h\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\sigma^h - \sigma\|_{L_p(\Omega)}}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ из } (2)} + \underbrace{\|\sigma - u\|_{L_p(\Omega)}}_{< \varepsilon/3}$$

$\Rightarrow$ чтд

Th: Пусть K - компактное подмн-во в Ω, тогда $\exists\ \varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$: $0 \le \varphi \le 1$ и $\varphi(x) = 1$ в некоторой окр K

Док-во: $K_\eta = \{$ мн-во отстоящих от K точек не больше, чем на $\eta > 0\}$

~~$\varphi(x)$~~ $0 < 3\varepsilon < \delta$

$\delta = \rho(K, \partial\Omega)$

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_{2\varepsilon} \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus K_{2\varepsilon} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, w_\varepsilon(x-y)\, dy$$

пg

Пример: $u(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

где $f(x)$ – ф-я Вейерштрасса:

$f(x)$, $|x| \le 1$

непр. и не дифф-ая ни в одной точке

Докажем, что u имеет вторую смешанную производную

$D_{x_1} D_{x_2} u \overset{?}{=} 0$ в обобщенном смысле

$$\int_{\Pi} (f(x_1) + f(x_2))\, D_{x_1} D_{x_2} \varphi\, dx_1\, dx_2$$

$\{\varphi(x_1, x_2) \in C_0^\infty(\Pi)\}$

$$\int_{\Pi} f(x_1)\, D_{x_1} D_{x_2} \varphi\, dx_1\, dx_2 = \int_{-1}^{1} f(x_1) [\underbrace{D_{x_1}\varphi(x_1+1)}_{=0}$$

$$- \underbrace{D_{x_1}\varphi(x_1-1)}_{=0}]\, dx_1 = 0$$

$$\int_{\Pi} f(x_2)\, D_{x_1} D_{x_2} \varphi\, dx_1\, dx_2 = 0$$

пg

T5: Если $u(x) \in L_1(\Omega)$ и $\exists$ обобщенная производная $D^\alpha_x u \in L_1(\Omega)$, то $\forall \Omega_1 : \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ и $\forall h < \delta$, где $\delta = \rho(\Omega_1, \partial\Omega)$:

$$D^\alpha u^h(x) = (D^\alpha u(x))^h$$

Док-во:

$$D^\alpha_x u^h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} D^\alpha_x w_h(x-y)\, u(y)\, dy =$$

$$= \left\{ D^\alpha_x w_h(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_y w_h(x-y) \right\} =$$

радиальная ф-я

$$= \int_{\mathbb{R}^N} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_y w_h(x-y)\, u(y)\, dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} w_h(x-y)\, D^\alpha u(y)\, dy = (D^\alpha_x (u(x)))^h.$$

T6: Если $u \in L_1(\Omega)$ и $D_{x_i} u = 0$ $i = 1..N$ (обобщенная), то $u = const$.

Док-во: По T5 $\forall \Omega_1 : \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$

$$D_{x_j} u^h = (D_{x_j} u)^h = 0 \Rightarrow u^h = C_h$$

$\forall h < \delta = \rho(\Omega_1, \partial\Omega)$ $\Rightarrow$ по T2 $u^h \xrightarrow[h \to 0]{L_1(\Omega_1)} u$

$$\left.\begin{array}{l} c_h \to c \\ u^h \to c \end{array}\right\} \Rightarrow u = \text{const}$$

чтд

Пространства $W_2^1(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

$H^1(\Omega) \equiv W_2^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \equiv \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$W_2^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega)$ и все обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \}$

$\nabla u = \{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \}$

$\|u\|_0^2 = \int\limits_\Omega u^2(x)\,dx$, $(u, v) = \int\limits_\Omega u v\,dx$

$W_2^1(\Omega)$ – гильбертово пр-во

$$[u,u]_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u^2 dx + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx$$

$$[u,v]_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u v\,dx + \int\limits_\Omega (\nabla u, \nabla v)\,dx$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u\|_0 + \|\nabla u\|_0$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1$ – это замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $W_2^1(\Omega)$

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$$

Т7 (Нер-во Фридрихса — Стеклова):

$u(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда

$$\int_\Omega u^2 dx \le C(\Omega) \int_\Omega \nabla u^2 dx$$

$\Omega \subset \{x : |x_i| < R\}$

$u = 0$, при $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$.

$$u(x) = \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \qquad -R \le x_1^0 \le R$$

$$|u(x)|^2 = \left(\int_{-R}^{x_1^0} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 \right)^2 \overset{\text{К.Б.}}{\le} \left(\int_{-R}^{x_1^0} dx_1 \right) \times$$

$$\times \int_{-R}^{x_1^0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1 \le 2R \int_{-R}^{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx_1$$

$\times\, dx_2 \ldots dx_N$ и интегрируем

$$\int_{(x_1 = x_1^0) \cap \Omega'} u^2(x) dx \le 4R^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx \le$$

$$\le 4R^2 \int_\Omega (\nabla u)^2 dx$$

чтд

Замечание: Т7 справедлива в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

Дог мат уравнов 26.02

Нелинейные ур-ния

Пример:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 \text{ на } 0 < x < \pi, \ t \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Очевидно: при малых нач. усл темп-ра будет ↓, при больших ↑.

Положим $s(t) = \int_0^\pi (\sin x - u(t,x))\, dx$

$$\frac{ds}{dt} = \int_0^\pi \sin x\, u_t(t,x)\, dx = \int_0^\pi \sin x\, (u_{xx} + u^3)\, dx =$$

$$= -s + \int_0^\pi \sin x \cdot u^3(t,x)\, dx \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нер-во Гельдера, где $1/p + 1/q = 1$

$$\int_a^b x(t) y(t)\, dt \leq \left(\int_a^b |x|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |y|^q dt\right)^{1/q}$$

Выберем $p = 3/2$, $q = 3 \Rightarrow$

$$S(t) \geq 2^{2/3} \left(\int_0^\pi u^3 \sin x \, dx \right)^{1/3}$$

$$\frac{dS}{dt} \geq -S + \frac{1}{4} S^3, \quad t \geq 0$$

$$\frac{dS}{dt} = S \qquad e^t$$

$$\frac{dS}{dt} = S^2$$

$$-\frac{1}{S} = t - c$$

$$S = \frac{1}{c - t}$$

$$t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S(0)+2}{S(0)-2} \right)$$

Режимы с обострением

$u_t = (k(u)u_x)_x$

При каких k будет неограниченное возрастание температуры.

Будем искать $\xi = x - \lambda t$ $(\lambda > 0)$ в виде бегущей волны

Такое реш наз автомодельным

$$\frac{d}{d\xi}\left(k(f_A)\frac{df_A}{d\xi}\right) + \lambda \frac{df_A}{d\xi} = 0$$

$$k(f_A)\frac{df_A}{d\xi} + \lambda f_A = C$$

Для определенности $c = 0$.

$$\frac{k(f_A)}{f_A}\cdot\frac{df_A}{d\xi} = -\lambda \qquad \int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta}d\eta < \infty$$

Введем $\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta}d\eta \qquad u \geq 0$

$$\Phi(0) = 0$$

$$\Phi(f_A(\xi)) = -\lambda(\xi - \xi_0)$$

$$f_A(\xi) = \Phi^{-1}(-\lambda\xi)$$

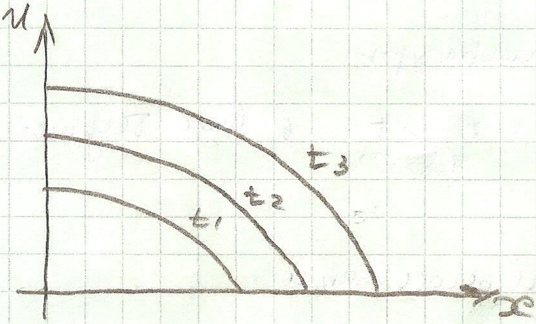
$$u_A(t, x) = \Phi^{-1}[\lambda(\lambda t - x)^*]$$

$$\left.\begin{matrix} \Phi \neq 0 & \lambda t - x \geq 0 \\ \Phi = 0 & \lambda t - x < 0 \end{matrix}\right\} \leftarrow \text{о.б. звездочка } (*)$$

Рассм $K(u) = u^{\sigma}$ $\sigma = const$

$\Phi^{-1}(u) = (\sigma u)^{1/\sigma}$

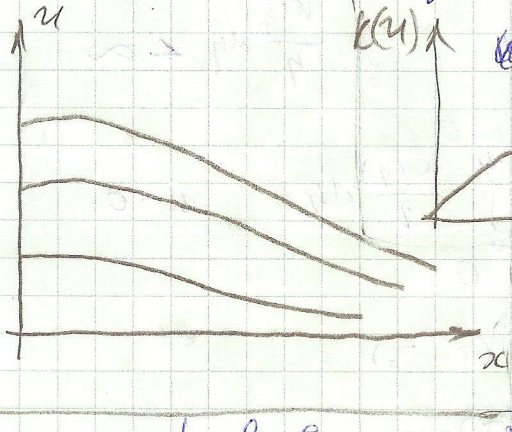
$u_A(t,x) = [\sigma \lambda (\lambda t - x)_+]^{1/\sigma}$

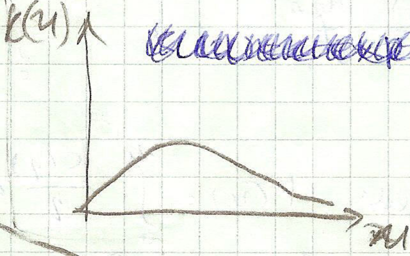


Рассм $K(u) = |\ln u|^{-1}$ $x \in (0, 1/2)$

$K(u) > 0$, $K(0) = 0$

В данном случае $\int_0^1 \frac{K(\eta)}{\eta} d\eta$

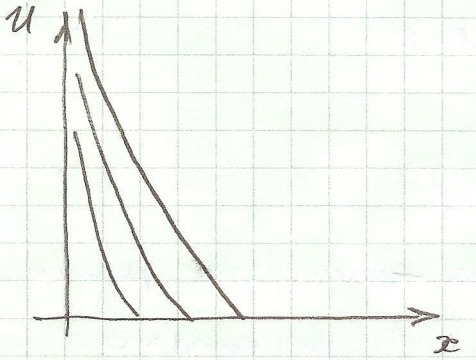




$$u_A(t,x) = \begin{cases} -\ln[1 - \lambda(\lambda t - x)] & 0 \le x \le \lambda t \\ 0 & x > \lambda t \end{cases}$$

$K(u) = u \exp(-u)$

$u_\theta\ (t, \theta) = -\ln(1 - \alpha t^2)$



05-03

$u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$

$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\,dx = E_0$

$u(t,x) = t^\alpha \theta(\xi) \qquad \xi = \frac{x}{t^\beta}$

$\alpha t^{\alpha-1}\theta - \beta t^{\alpha-1} \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial\theta}{\partial\xi_i}\xi_i = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta} \nabla_\xi(\theta^\sigma \nabla_\xi \theta)$

Можно сократить, если $\alpha - 1 = \alpha(\sigma+1) - 2\beta$

$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} t^\alpha \theta(\xi)\,dx = t^{\alpha+N\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \theta(\xi)\,d\xi$

$\Rightarrow \alpha + N\beta = 0$ (чтоб энергия сохранилась)

$\Rightarrow \xi^{N-1}\theta^\sigma\theta' + \frac{1}{N\sigma+2}\theta\xi^N = 0 \qquad \xi > 0$

$\theta^\sigma\theta'(0) = 0$

$u_t = (u^\sigma u_x)_x \quad \sigma = \mathrm{const} \quad t>0 \quad x>0$

$u(0,x) = u_0 \quad x>0$

$u_0^{\sigma+1} \in C^1(R_+)$

$u(t,0) = u_1(t) \quad t>0$

– Возьмем степенной граничный режим:

$u_1(t) = (1+t)^m \quad t>0 \quad m = \mathrm{const} > 0$

Будем искать автомодельное решение в виде:

$u_A(t,x) = (1+t)^m \theta_A(\xi)$,

где $\xi = x/(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}$

$t \to \frac{t}{\alpha}$, $x \to \alpha^{\frac{1+m\sigma}{2}} x$, $u \to \alpha^m u \quad t>0$

после такой замены ур-ние сохраняется

$(\theta_A^\sigma \theta_A')' + \frac{1+m\sigma}{2} \theta_A' \xi - m\theta_A = 0$

$\theta_A(0) = 1$, $\theta_A(\infty) = 0$

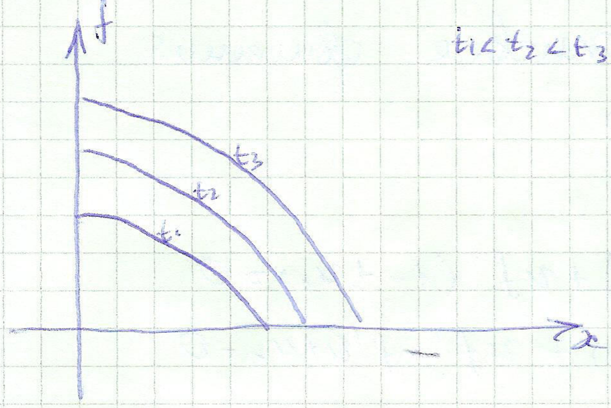
– Возьмем экспоненциальный граничный режим

$u_1(t) = e^t$, $t>0$

$u_A(t,x) = e^t f_A(\eta)$, $\eta = \frac{x}{\exp(\frac{\sigma t}{2})}$

$(f_A^\sigma f_A')' + \frac{\sigma}{2} f_A' \eta - f_A = 0 \quad \eta > 0$

$f_A(0) = 1$, $f_A(\infty) = 0$



$t_1 < t_2 < t_3$

Рассм $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta$ $\quad t>0$, $x \in R$
$\sigma > 0$ $\quad \beta > 1$

$$u_A(t,x) = (T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\,\theta_A(\xi)$$

$$\xi = \frac{x}{(T_0-t)^m} \in \mathbb{R} \qquad \theta_A(\xi) \geq 0$$

Возьмем $m = [\beta - (\sigma+1)]/[2(\beta-1)]$

Будем считать начальные условия четными:

$$u_0(-x) = u(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \theta(t,\xi) = (T_0 - t)^{1/(\beta-1)}\, u(t, \xi (T_0-t)^m)$$

$$\theta(t,\xi) \quad t \to T_0 \qquad\qquad t \in [0, T_0]$$

$$\Rightarrow (\theta_A^\sigma \theta_A')' - m\theta_A'\xi - \frac{1}{\beta-1}\theta_A = 0$$

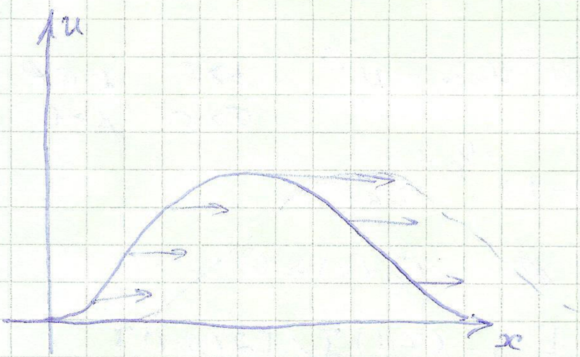
Волновые движения

$u_t + u u_x = 0$

$u = f(x - ut)$

$f'(-u - tu_t) + u f'(1 - t u_x) = 0$

$f'(-u + t u u_x) + u f' - f' u t u_x = 0$



$u_{tt} - u_{xx} = 0$

$f_1(x - at) + f_2(x + at)$

Уравнение КДФ

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla)\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f$$

$\operatorname{div} \bar{v} = 0$ (ур-ние неразрывности

$\bar{v}(r, t)\big|_{t=0} = \bar{v}_0(\xi)$

$\xi(r, t) = \bar{v}$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z}$$

$\bar{v}\,\bar{v}|_s = 0$ $\quad \bar{v}n|_s = 0$ усл непрерывности на поверхности $\quad p|_{s+} = p|_{s-}$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f \quad , \operatorname{div}\bar{v} = 0$$

$$f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$$

Умножим ур-ние Эйлера на $\rho\bar{v}$ и проинтегрируем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\bar{v}|^2\right) + \bar{v}\nabla p + \bar{v}\nabla U = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\bar{v}|^2 + U\right) + \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho|\bar{v}|^2 + U$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\bar{v}\nabla|\bar{v}|^2 + \bar{v}\nabla p + \bar{v}\nabla U = 0$$

$$\left\{\bar{a}\nabla\varphi = \operatorname{div}(a\varphi) - \varphi\operatorname{div}\bar{a}\right\}$$

$$\bar{\Pi} = \bar{v}\left(p + \frac{1}{2}\rho|\bar{v}|^2 + U\right)$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}\bar{\Pi}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \varepsilon\, d\tau + \int_s \bar{\Pi}\bar{n}\, ds = 0$$ — закон сохр энергии

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\bar{v}|^2 + U + p\right) = 0$$ — предположение о стационарности

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho|\bar{v}|^2 + U + p = const$$

интеграл Бернулли

Предположим, что движение потенциально

$\bar{v} = \nabla \varphi$ φ - потенциал скорости

$$\Rightarrow \nabla \frac{\partial}{\partial t}\varphi + \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + (\nabla\varphi\nabla)\nabla\varphi = f$$

$\exists\ f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$

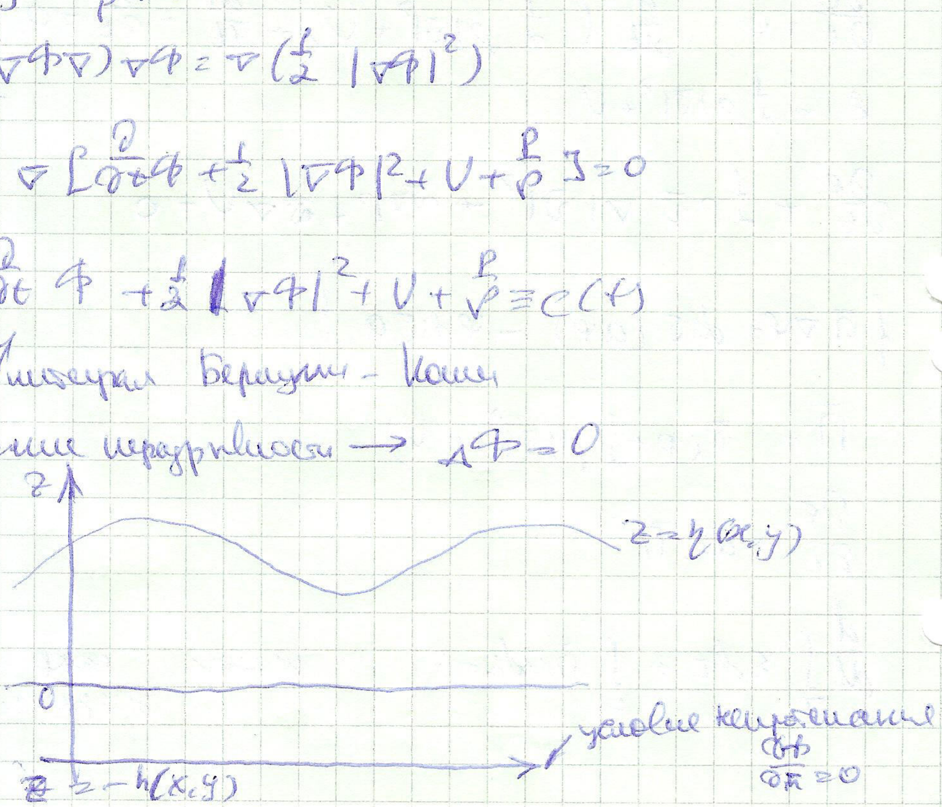
$(\nabla\varphi\nabla)\nabla\varphi = \nabla\left(\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right)$

$$\Rightarrow \nabla\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + U + \frac{p}{\rho}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + U + \frac{p}{\rho} \equiv c(t)$$

интеграл Бернулли - Коши

Уравнение неразрывности $\rightarrow \Delta\varphi = 0$



$$\Delta\varphi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + gz + p = 0$$

$$\zeta = \eta(x, y, t) - z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\eta + \varphi_x\eta_x + \varphi_y\eta_y - \varphi_z\Big|_{z=\eta(x,y,t)} = 0$$

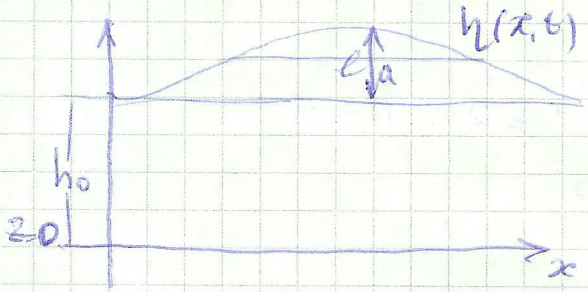
Запишем динамические условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + g\eta(x,y,t)\Big|_{z=\eta(x,y,t)} = p_0(x,y,t)$$

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y,z)$$

$$\eta\big|_{t=0} = \eta_0(x,y)$$

12.03 Теория мелкой воды.



Одномерное по координате движение

Вводятся безразмерные параметры:

$\alpha = \frac{a}{h_0}$ (в дальнейшем $\alpha < 1$)

a – характерная амплитуда волны (высота)
l – (на средней высоте длина отрезка // Ox)

$\beta = \frac{h_0^2}{l^2}$

$\frac{x}{l}$, $\frac{z}{h_0}$, $t\sqrt{gh_0}/l$, $(\eta - h_0)/a$, $\frac{\sqrt{gh_0}}{gla}\varphi$

ОБ x, z, t, η, φ

$\Rightarrow \beta \varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0$ (вместо ур-ние Лапласа)
$0 < z < 1 + \alpha\eta$

$\varphi_z \big|_{z=0} = 0$ (условие непротекания)

$$\left.\begin{aligned} &\eta_t + \alpha \varphi_x \eta_x - \frac{1}{\beta}\varphi_z = 0 \\ &\varphi_t + \eta + \frac{1}{2}\alpha \varphi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_z^2 = 0 \end{aligned}\right\} \text{при } z = 1 + \alpha\eta$$

$$\Phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \beta^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} f(x,t)$$

$$f_1(x,t) = f_0(x,t) \quad ?$$

$$\Rightarrow \eta_t + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha\eta) f_x\right] - \left\{\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} f + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha\eta)^2 \eta_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f\right\}\beta + O(\beta^2) = 0 \quad (*)$$

$$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 - \frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2 \left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} + \right.$$

$$\left. + \alpha f_x \frac{\partial^3}{\partial x^3} f - \alpha f_{xx}\right\}\beta + O(\beta^2) = 0$$

Будем считать, что $0 < \beta \ll 1$

$$\eta_t + \left[(1+\alpha\eta) f_x\right]_x = 0$$

$$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 = 0$$

$$f_x + \Phi_x = u$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &\eta_t + \left[(h_0+\eta)u\right]_x = 0 \\ &u_t + u u_x + g\eta_x = 0 \end{aligned}\right\} \text{ур-ния мелкой воды}$$

Пусть $\alpha \ll 1$

$$\eta_t + u_x = 0 \qquad f_x = u$$

$$u_t + \eta_x = 0$$

$$\eta_{tt} = c_0^2 \eta_{xx} \qquad c_0^2\ gh_0 \qquad \text{гармоническая волна}$$

Ур-ние KdV

$\exists\ \alpha = O(\beta)$

$$(*) \Rightarrow \quad \eta_t + [(1+\alpha\eta)u]_x - \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0$$

$$u_t + \alpha u u_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xxt} = 0$$

Только вправо

$$u = A_0(\eta) + \alpha A_1(\eta) + \beta B_1(\eta) + O(\alpha^2+\beta^2)$$

$$\eta_t + \eta_x = \alpha C_1(\eta) + \beta C_2(\eta) + O(\alpha^2+\beta^2)$$

Подставим в ур-ние:

$$\eta_t + [A_0]_x + \alpha[(\eta A_0)_x + (A_1)_x] +$$
$$+ \beta[(B_1)_x - \frac{1}{6}(A_0)_{xxx}] + O(\alpha^2+\beta^2) = 0$$

$$[A_0]_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + A_0 (A_0)_x] +$$
$$\beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}(A_0)_{xxt}] + O(\alpha^2+\beta^2) = 0$$

$$\Rightarrow \eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_x + 2\eta\eta_x] +$$
$$+ \beta[(B_1)_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}] = 0$$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + \eta\eta_x] +$$
$$+ \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}] = 0$$

$$\eta_x = -\eta_t + O(\alpha+\beta)$$

Ур-ние должны совпадать, $\Rightarrow$

$A_1 = \eta^2 \sigma$, $\sigma = -\frac{1}{4}$

$B_1 = \sigma \eta_{xt}$, $\sigma = \dots$

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha \eta \eta_x + \frac{1}{6} B \eta_{xxx} = 0$$

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{h_0}\right)\eta_x + \frac{1}{6} h_0^2 c_0 \eta_{xxx} = 0$$

$$\boxed{u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0} \qquad u|_{t=0} = \varphi(x)$$

$u(x,t) = 3\alpha^2 \operatorname{sech}^2 [\frac{1}{2}\alpha(x - \alpha^2 t)]$ ← солитонное решение

Ур-ние KDV (продолжение) 19.03

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = \text{const}$$ ← интеграл ур-ния

{ f - наз. быстроубывающей, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(1+|x|)\,dx < \infty \}$$

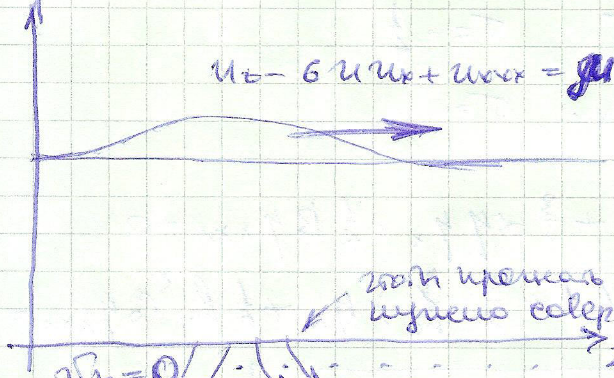
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = \text{const}$$

↑ отображает мощность солитона

Таких интегралов бесконечное число.

{Как организовать поток, чтоб солитон с течением времени уменьшал свою амплитуду?}

$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \mu F(u, u_x, u_t, t)$



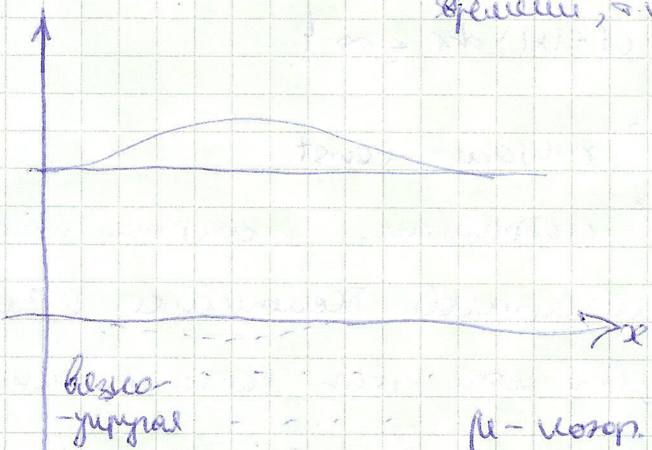
поток, который теряется, нужно совершить работу и ее совершает солитон

$v_n = 0$ условие непротекания (старое)

откажемся от него и рассм. фильтрующую среду и поставим задачу с коэффиц. фильтрации μ

$\Rightarrow \dot{I} = 0$ (старое)

$\Rightarrow \dot{I}_2 = O(\mu) \Rightarrow$ величина солитона убывает с течением времени, т.к. знак $\underline{<0}$

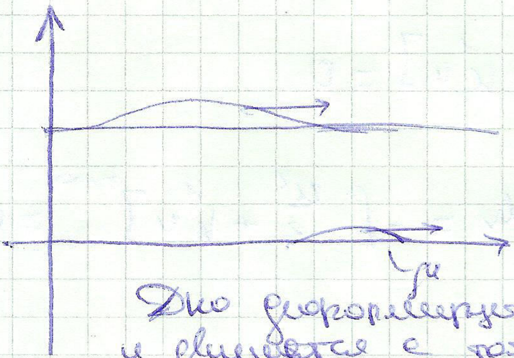


вязко-упругая

μ – коэфф. вязкости упругости

$\dot{I} = O(\mu)$ (отриц) $\Rightarrow$ солитон угасает

Это мат. модель импульса кибофизико



Дно деформируется перед солитоном и движется с той же скоростью $\Rightarrow$ опять необх. внешняя подача.

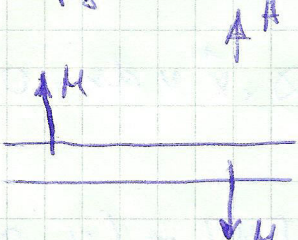
$\dot{I} = O(\mu) < 0$

Уравнение синус-Гордона.

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin u$

$u = f(x - \lambda t)$

$f'' = \dfrac{\sin f}{\lambda^2 - a^2}$



$$u_t + u u_x + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)\, u_s(s,t)\, ds = 0$$

Ур-ние Уизема

1) Рассм четные ядра: $K(x) = K(-x)$

$$\hat{K} v = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)\, v_s(s,t)\, ds$$

$(\hat{K}u, v) = (u, \hat{K}v)$

2) $\partial_x \hat{K} = \hat{K}\partial$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u^2}{2} + \hat{K}u\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = -\left[\frac{u^2}{2} + \hat{K}u\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\,dx = const = I_1$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}u^2(x,t)\,dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(\frac{u^3}{3}\right)dx}_{0} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} u\,\partial_x \hat{K}u\,dx = 0 \qquad // \; I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dt$$

$$\frac{d}{dt} I_2[u] + (u, \partial_x \hat{K}u) = 0$$

$$(u, \partial_x \hat{K}u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u\,\partial_x \hat{K}u\,dx =$$

$$= \underbrace{u\hat{K}u\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u\,\hat{K}u\,dx =$$

$$= -(\hat{K}u, \partial_x u) = -(u, \hat{K}\partial_x u) =$$

$$= -(u, \partial_x \hat{K}u) = 0$$

$\Rightarrow \quad I_2 = const$

$$u I_3[u] = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{u^3}{3} + u K^{-1} u \right] dx$$

26.03

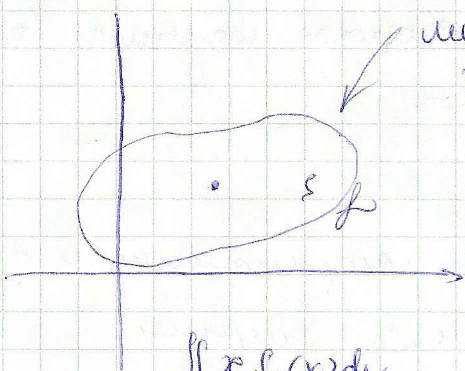
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x u(x,t)\, dx - t I_2[u] - C(0)\, t\, I_1[u] =$$

$= const$, где $C(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x)\, dx$ ← среднее значение ядра

коорд центра тяжести

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, u(x,t)\, dx = I_2 + C(0) I_1$$

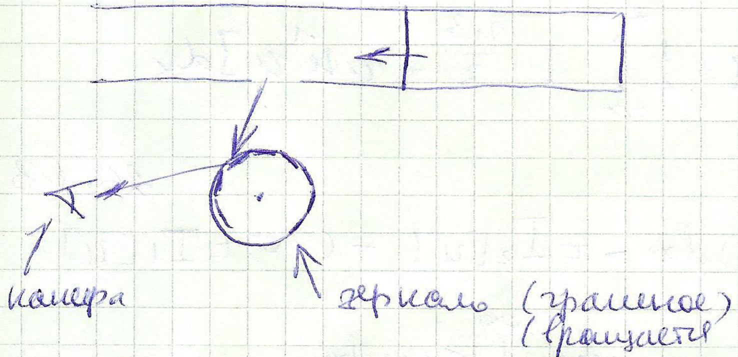
лист фанеры (коорд центра тяжести?)



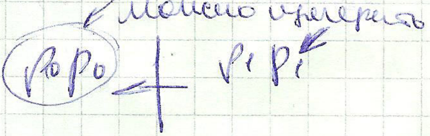
$$X_{цт} = \frac{\iint\limits_S x f(x)\, dx}{\iint\limits_S dx}$$

$$v_{цт.} = \frac{I_2[u]}{I_1[u]} + C(0)$$

Развитие решения УЧП.



Скорость подобрали так, чтобы луч отображался в камеру => на пленке с определенным расстоянием засветка => рассчитывается скорость ударной волны



Опирается на теорию газодинамики и на закон сохранения энергии.

Если волна , то засветки такие же

02.04

Адиабата Гюгонио

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$ (ур-ние неразрывности)

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$ (ур-ние движения)

$$p = f(\rho, T)$$ (ур-ние состояния газа)

$$E = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon$$

энергия ед. объема, ε – внутр. энергия ед. объема

Для идеального газа $\varepsilon = C_v T$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right)^{=\rho v\frac{\partial v}{\partial t}} =$$

$$= -\frac{v^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) - v\frac{\partial p}{\partial x} - \rho v^2\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= -\frac{v^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) - v\frac{\partial p}{\partial x} - \rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

$$dQ = d\varepsilon + p\,d\tau$$

изменение объема

Процесс адиабатический $\Rightarrow dQ = 0$

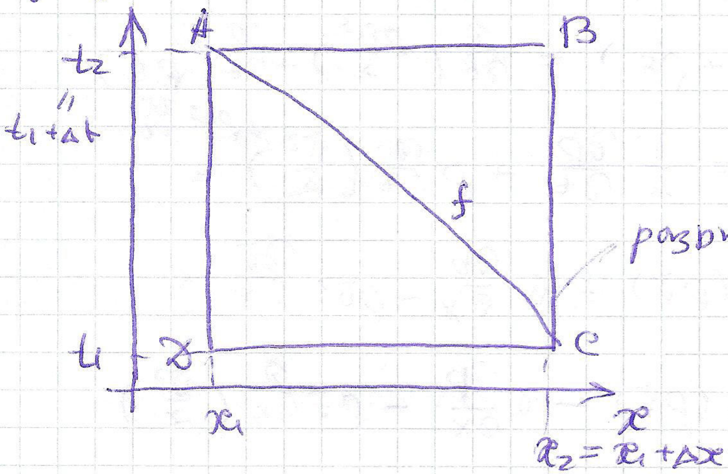
$$\Rightarrow d\varepsilon = -p\,d\tau = -p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = \varepsilon\,d\rho + \frac{p}{\rho}d\rho =$$

$$= \underbrace{\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)}_{w\text{ - потенциал}} d\rho$$

$$\rho v \frac{\partial w}{\partial x} = v \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \text{закон сохр энергии}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\dfrac{v^2}{2} + w\right)\right] \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v) \\ \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2 \end{cases}$$



Проинтегрируем по прямоугольнику второе ур-ние

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho_{t_2} - \rho_{t_1}] dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}] dt$$

$$[\rho_{t_2 \atop x = x^*} - \rho_{t_1 \atop x = x^{**}}] \frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{x_2 \atop t_2^*} + (\rho v)_{x_1 \atop t_1^*}$$

Перейдем к пределу при $\Delta x, \Delta t \to 0$

$$(\rho_2 - \rho_1) U = -(\rho v)_1 + (\rho v)_2$$

Перейдем в систему коорд связанную с разрывом

$$u_1 = U - v_1 \quad , \quad u_2 = U - v_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$$

Из других двух законов

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

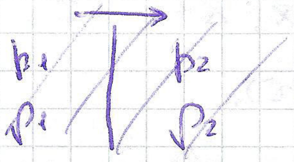
$$p = R\rho T \quad , \quad \varepsilon = c_v T$$

$$w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

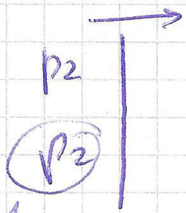
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_1}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2}$$



скачковый ход

$\gamma_{\text{двухатомного газа}} = 7/5$



нельзя измерить

Мощный взрыв $p_2 \gg p_1$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1 + (\gamma-1)\frac{p_1}{p_2}}{\gamma-1 + (\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}}$$

$$\Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \rho_1 \cdot 6$$

уплотнение

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\frac{p_2}{\rho_1}}$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)}\frac{p_2}{\rho_1}}$$

не поддаются измерению, их можно только посчитать

Если газ покоится $v_1 = 0 \Rightarrow$

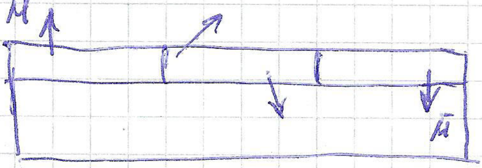
$$\Rightarrow U = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\,\frac{p_1}{\rho_2}}$$

Приближение к упругим состояниям, идеальный газ

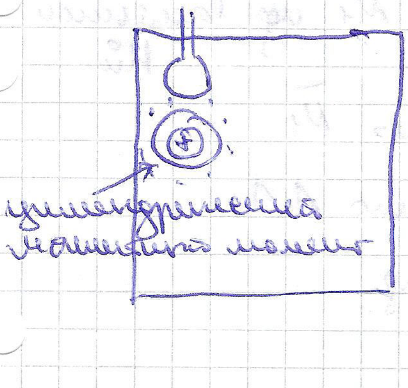
09.04

- Стационарное распределение намагниченности в магнетиках
- Динамические процессы в магнетиках

(1) Тонкие магнитные пленки



Область поворота – доменная граница



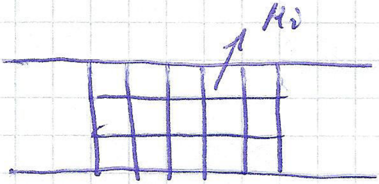
Чтобы повысить плотность записи нужно рассчитывать толщину доменной стенки полное поле

$$\int_{\Omega} \{ (\nabla M)^2 \alpha + (M_\perp)^2 A + (MH) \} d\tau$$

обменная энергия — энергия анизотропии — энергия взаимодействия

$$\frac{\partial \bar M}{\partial t} = \gamma[\bar M H] + \alpha[\bar M[\bar M H]]$$

Ландау – Лифшица



1. выбор $\bar M_0$
2. по M_0 сосчитать H_m^0
3. по ур-нию Л Л получ. $\bar M_1$ под влиянием H_m^0
4. Сосчитать H_m^1 от распр. $\bar M_1$
5. Сосчитать $\bar M_2$ по ур-нию Л Л.

и т.д.