Глава 3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ, РАЗРЕШИМЫЕ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Мы уже изложили (гл. 1, § 4 – 6) основные идеи метода решения некоторых классов нелинейных эволюционных уравнений с помощью спектрального преобразования. В данной главе снова пойдет речь об этих же вопросах, но теперь мы уже сможем доказать основные результаты, приведенные без доказательства в гл. 1. Вспомним, что самое главное – найти те временны́е эволюции функции $u(x, t)$, которым отвечает *простая* эволюция соответствующих спектральных данных $S(t)$. Это мы сделаем в § 1, пользуясь некоторыми формулами, приведенными в гл. 2, § 4, в частности теми, которые соотносят бесконечно малые изменения функции $u(x)$ с соответствующими изменениями связанных с ней спектральных данных. Тем самым мы определим класс нелинейных эволюционных уравнений, разрешимых с помощью спектрального преобразования для спектральной задачи Шредингера, и далее рассмотрим решение задачи Коши для данного класса эволюционных уравнений. При этом мы будем рассматривать здесь только уравнения, инвариантные относительно пространственных трансляций. Более широкий класс уравнений, не являющихся трансляционно-инвариантными, с коэффициентом, линейно зависящим от пространственной переменной x, тоже разрешим методом спектрального преобразования для спектральной задачи Шредингера, но рассмотрение его откладывается до гл. 6, § 2. Другие классы нелинейных эволюционных уравнений, разрешимые другими спектральными преобразованиями, будут рассмотрены в т. 2.

В § 2 анализируется (качественно и, где можно, количественно) поведение решений класса нелинейных эволюционных уравнений, введенного в § 1.

§ 1. Уравнение КдВ и высшие уравнения КдВ

Пусть u – функция двух действительных переменных x и t:

$$u \equiv u(x,t), \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Мы рассматриваем задачу Коши: функция u задается в некоторый начальный момент времени, например при $t = 0$:

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

а поведение ее в последующие моменты времени определяется неким эволюционным уравнением. Зависимость функции $u(x, t)$ от координаты x такова, что для заданного момента времени t функция u попадает в класс потенциалов, рассматривавшихся ранее, а именно $u(x, t)$ – регулярная функция, определенная при всех действительных значениях переменной x и достаточно быстро асимптотически обращающаяся в нуль со всеми своими производными:

$$0=u(\pm\infty,t)=u_x(\pm\infty,t)=u_{xx}(\pm\infty,t)=\cdots \tag{3}$$

Кроме того, класс рассматриваемых эволюционных уравнений таков, что если функция u обладает этими свойствами при $t=0$, то она будет обладать ими во все последующие моменты времени t, т.е. достаточно ограничиться рассмотрением начальной функции (задачи Коши) $u_0(x)$, являющейся BF-потенциалом, чтобы гарантировать, что функция $u(x, t)$ при $t \geqslant 0$ (или при $t \leqslant 0$) как функция аргумента x тоже будет BF-потенциалом. Таким образом, существуют спектральные данные

$$S(t)=\{R(k,t),-\infty<k<+\infty;\, p_n(t),\rho_n(t),n=1,2,\ldots,N(t)\}, \tag{4}$$

взаимно однозначно соответствующие функции $u(x, t)$, которые также изменяются во времени, начиная с исходных значений

$$\begin{aligned}S(0)=\{&R_0(k)\equiv R(k,0),-\infty<k<+\infty;\, p_n(0),\rho_n(0),\\ &n=1,2,\ldots,N(0)\},\end{aligned} \tag{5}$$

соответствующих начальной функции в задаче Коши $u_0(x)$

Рассмотрим теперь бесконечно малое изменение функции $u(x, t)$, отвечающее бесконечно малому приращению времени,

$$\delta u(x,t)=u_t(x,t)\,\mathrm{d}t, \tag{6а}$$

и соответствующее изменение спектральных данных

$$\begin{aligned}\delta S(t)=\{&R_t(k,t)\,\mathrm{d}t,-\infty<k<+\infty;\,\dot p_n(t)\,\mathrm{d}t,\dot\rho_n(t)\,\mathrm{d}t,\\ &n=1,2,\ldots,N(t)\}.\end{aligned} \tag{6б}$$

В последней формуле точкой сверху обозначается дифференцирование по времени; таким обозначением мы часто будем пользоваться впоследствии (но только для функций одной переменной t). Кроме того, здесь по нашему неявному предположению число N дискретных собственных значений не изменяется за бесконечно малый интервал времени dt (ниже мы увидим, что для класса рассматриваемых временны́х эволюций N вообще не меняется со временем).

Чтобы связать бесконечно малое изменение потенциала (6 а) с соответствующим изменением спектральных данных (6 б), мы можем теперь воспользоваться формулами гл. 2, § 4. Действительно, мы имеем право привлечь интегральные соотношения вронскиана (гл.2, § 4) или спектральные интегральные соотношения (гл. 2, § 4, п. 2); первые больше подходят для определения эволюции во времени спектральных данных, соответствующих заданной временно́й эволюции функции $u(x, t)$, а вторые – для определения временно́й эволюции функции $u(x, t)$, соответствующей заданной эволюции во времени спектральных данных. Хотя последний подход более компактен, мы начнем с первого, так как наш основной интерес на самом деле состоит в определении временной эволюции спектрального преобразования, соответствующего заданной эволюции во времени функции $u(x, t)$. Затем мы проверим непротиворечивость всех результатов, используя и второй подход.

Начнем с коэффициента отражения. Формулы (2.4.А.-12) дают

$$2ikg(-4k^2,t)R_t(k,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,[\psi(x,k,t)]^2 g(\boldsymbol{L},t)u_t(x,t). \qquad (7)$$

$$(2ik)^2h(-4k^2,t)R(k,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,[\psi(x,k,t)]^2 h(\boldsymbol{L},t)u_x(x,t). \qquad (8)$$

Здесь $g(z, t)$ и $h(z, t)$ – произвольные функции, от которых требуется только, чтобы они были целыми функциями первой переменной z; как показывают наши обозначения, они могут зависеть от t. Остальные обозначения совпадают с обозначениями предшествующих параграфов, за исключением того, что есть дополнительная переменная t. Для удобства читателей мы теперь перепишем, однако, определение интегро-дифференциального оператора $\boldsymbol{L}$, детально указав его воздействие на порождающую функцию $f(x)$:

$$\boldsymbol{L}f(x)=f_{xx}(x)-4u(x,t)f(x)+2u_x(x,t)\int_x^{+\infty}dy\,f(y) \qquad (9)$$

(конечно, функция f может зависеть и от времени t).

Из формул (7) и (8), очевидно, следует, что если функция $u(x, t)$ удовлетворяет нелинейному эволюционному уравнению

$$g(\boldsymbol{L},t)u_t(x,t)=h(\boldsymbol{L},t)u_x(x,t), \qquad (10)$$

то эволюция соответствующего коэффициента отражения $R(k, t)$ описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$g(-4k^2,t)R_t(k,t)=2ikh(-4k^2,t)R(k,t), \qquad (11)$$

которое может быть сразу же проинтегрировано:

$$R(k,t)=R(k,0)\exp\left\{2ik\int_0^t dt'\,[h(-4k^2,t')/g(-4k^2,t')]\right\}. \qquad (12)$$

Из этой формулы следует, что со временем меняется только фаза функции $R(k, t)$, а модуль ее не зависит от времени при всех действительных значениях k, т.е. при условии, что функции g и h действительны, т.е. действительно само нелинейное эволюционное уравнение (10) [это не обязательно означает, что действительна сама функция $u(x, t)$, хотя в общем случае мы ограничиваемся рассмотрением только такого случая].

Таким образом, мы определили класс нелинейных эволюционных уравнений (10), такой, что соответствующее изменение во времени коэффициента отражения $R(k, t)$ дается явной формулой (12). Следовательно, можно решить задачу Коши для уравнения (10), найдя сначала коэффициенты отражения $R(k, 0) = R_0(k)$, соответствующие начальному данному Коши (2), затем вычислив по формуле (12) функцию $R(k, t)$ при $t > 0$ и после этого восстановив функцию $u(x, t)$ по функции $R(k, t)$. Однако последний шаг при наличии дискретных собственных значений требует знания соответствующих параметров $p_n(t)$ и $\rho_n(t)$, а поэтому мы переходим к исследованию их эволюции во времени, когда эволюция функции $u(x, t)$ описывается уравнением (10).

Рассмотрим сначала эволюцию параметров $p_n(t)$. Тогда формула (6) вместе с (2.4.А.-55) и (2.4.А.-56) означает, что

$$-2p_n(t)g\left(4p_n^2(t), t\right)\dot{p}_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left[\varphi_n(x,t)\right]^2 g(\boldsymbol{L}, t)u_t(x,t), \tag{13}$$

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left[\varphi_n(x,t)\right]^2 h(\boldsymbol{L}, t)u_x(x,t). \tag{14}$$

Отсюда сразу же следует, что при эволюции функции $u(x, t)$, протекающей в соответствии с уравнением (10), дискретные собственные значения $p_n(t)$ остаются постоянными:

$$\dot{p}_n(t) = 0, \tag{15}$$

или, что эквивалентно,

$$p_n(t) = p_n(0) \equiv p_n. \tag{16}$$

Это весьма замечательное явление [заметим, что от описываемой уравнением (10) эволюции не требуется даже автономности, т.е. уравнение (10) может содержать явно зависящие от времени коэффициенты]; оно означает, что если эволюция функции $u(x, t)$ описывается уравнением (10), то оператор Шредингера

$$-\partial^2/\partial x^2 + u(x,t) \tag{17}$$

претерпевает *изоспектральную деформацию*. Из инвариантности во времени собственных значений следует, в частности, что число их с течением времени не меняется.

Перейдем теперь к временно́й эволюции нормировочного множителя $\rho_n(t)$, связанного с собственным значением p_n потенциала $u(x, t)$, когда изменение потенциала во времени описывается уравнением (10). Тогда формулы (6) вместе с (2.4.А.-69) и (2.4.А.-70) (теперь использование их оправданно, так как мы рассматриваем инфинитезимальные изменения функции u, которые меняют только нормировочные множители, но не дискретные собственные значения) дают

$$\begin{aligned} -p_n g\left(4p_n^2, t\right)\dot{\rho}_n(t)/\rho_n(t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \varphi_n(x,t)\varphi_p(x, p_n, t) g(\boldsymbol{L}, t)u_t(x,t), \end{aligned} \tag{18}$$

$$2p_n^2 h\left(4p_n^2, t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \varphi_n(x,t)\varphi_p(x, p_n, t) h(\boldsymbol{L}, t)u_x(x,t), \tag{19}$$

где, конечно,

$$\varphi_p(x, p_n, t) \equiv \{\partial/\partial_p[\varphi(x, p, t)]\}\big|_{p=p_n} \tag{20}$$

и функция $\varphi(x, p, t)$ определяется формулой (2.4.A.-61) (с соответствующим образом добавленной переменной t). Из формул (18) и (19) немедленно следует, что при эволюции функции $u(x, t)$, описываемой уравнением (10), соответствующая эволюция каждого из нормировочных множителей $\rho_n(t)$ описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$g(4p_n^2, t)\dot{\rho}_n(t) = -2p_n h(4p_n^2, t)\rho_n(t), \tag{21}$$

которое можно сразу же проинтегрировать:

$$\rho_n(t) = \rho_n(0)\exp\left\{-2p_n\int_0^t dt'\left[h(4p_n^2, t')/g(4p_n^2, t')\right]\right\}. \tag{22}$$

Прежде чем идти дальше, заметим, что эволюционные уравнения (15) и (21) для параметров дискретного спектра можно вывести непосредственно из эволюционного уравнения (11), которому удовлетворяет коэффициент отражения $R(k, t)$, если учесть соотношение

$$R(k, t) \approx i\rho_n(t)/[k - ip_n(t)] \tag{23}$$

[формула (2.1.-36)]. Соотношение (23) справедливо при $k \approx i p_n(t)$. Действительно, продифференцировав это соотношение по t, получим

$$R_t(k, t) \approx i\dot{\rho}_n(t)/[k - ip_n(t)] - \dot{p}_n(t)\rho_n(t)/[k - ip_n(t)]^2, \tag{24}$$

а подставив это выражение в уравнение (11) и затем приравняв коэффициенты при полюсах второго и первого порядка в точках $k = ip_n(t)$, мы действительно получим формулы (15) и (21). Такой вывод уравнений для параметров дискретного спектра из уравнения эволюции коэффициента отражения – удобный способ обойтись без соотношений типа вронскиана для этих величин. Поэтому в последующем мы будем иногда прибегать к такому маневру. Правда, это несколько сомнительная процедура, ибо, как мы знаем, соотношение (23) не является универсально справедливым и потому вывод эволюционных уравнений для параметров дискретного спектра был сначала здесь дан без использования соотношения (23). Однако эволюционные уравнения для параметров дискретного спектра, получающиеся из эволюционного уравнения для коэффициента отражения путем сокращенной процедуры на основе уравнений (23), вообще говоря, корректны не только в рассмотренном здесь относительно простом случае, но и в более сложных, о которых пойдет речь в дальнейшем.

В заключение отметим, что задача Коши для нелинейного эволюционного уравнения (10) [или, скорее, для класса нелинейных эволюционных уравнений (10), так как для каждого конкретного выбора функций g и h получаются различные эволюционные уравнения] решается теперь в три этапа: сначала находятся спектральные данные $S(0)$ для начального данного Коши $u(x, 0) = u_0(x)$, затем по явным формулам (12), (16) и (22) определяется эволюция спектральных данных от их начальных значений $S(0)$ до значений $S(t)$ в момент времени t и, наконец, по данным $S(t)$ восстанавливается функция $u(x, t)$. Об аналогии между такой процедурой и решением линейных эволюционных уравнений методом преобразования Фурье говорилось в гл. 1, § 4, и повторяться нет необходимости.

Рассмотрим теперь класс нелинейных эволюционных уравнений (10). Прежде всего отметим, что до сих пор наше рассмотрение было довольно формальным. В самом деле, каков смысл уравнения (10), если функции $g(z, t)$ и $h(z, t)$ не являются полиномами по z? Кроме того, даже если эти функции полиномиальны, каков смысл формулы (12), если входящая в знаменатель функция $g(z, t)$ обращается в нуль при некотором отрицательном значении z и положительном значении t? Или каков смысл формулы (22), если обращается в нуль функция $g(4p_n^2, t)$? В этом случае становится сомнительным даже вывод формулы (15) из формул (13) и (14).

Здесь мы не будем рассматривать эти вопросы за недостатком места; подчеркнем лишь основной вывод, к которому приводит только что изложенный метод решения, а именно что *временнáя эволюция в спектральном пространстве намного проще, чем в конфигурационном*. Это замечание в полной мере относится к упомянутым выше возможным особым случаям, которые могут показаться интересными читателю; оно относится также и к обычным случаям для более ограниченного класса уравнений, получающихся из уравнения (10) в предположении, что функция $g(z, t)$ равна единице, а функция $h(z, t)$ – полином по z. Такие случаи мы и будем преимущественно рассматривать далее. Но, прежде чем ограничить себя таким образом, приведем по крайней мере один пример более общего класса (10) при $g(z, t) \neq 1$, а именно рассмотрим случай, когда

$$g(z,t)=g_0+g_1 z, \qquad h(z,t)=h_0+h_1 z \tag{25}$$

(g_0, g_1, h_0 и h_1 могут быть функциями времени t, хотя для простоты мы эту зависимость не указываем). Имеем

$$g_0 u_t(x,t)+g_1\Big[u_{xxt}(x,t)-4u_t(x,t)u(x,t)+2u_x(x,t)\times$$
$$\times\int_x^{+\infty}\mathrm{d}y\,u_t(y,t)\Big]=\big\{h_0 u(x,t)+h_1\big[u_{xx}(x,t)-3u^2(x,t)\big]\big\}_x. \tag{26а}$$

Это довольно сложное интегро-дифференциальное уравнение можно свести к чисто дифференциальному уравнению

$$g_0 w_{xt}+g_1\big(w_{xxxt}+4w_{xt}w_x+2w_{xx}w_t\big)=\big[h_0 w_x+h_1\big(w_{xxx}+3w_x^2\big)\big]_x \tag{26б}$$

простой заменой зависимой переменной

$$w\equiv w(x,t)=\int_x^{+\infty}\mathrm{d}y\,u(y,t), \qquad w_x(x,t)=-u(x,t), \tag{27}$$

но даже после этого упрощения оно выглядит слишком сложным. К тому же это, строго говоря, не эволюционное уравнение, а потому едва ли есть какие-либо основания ожидать, что задача Коши для него имеет большой смысл (хотя если смотреть на эволюцию, рассматривая спектральные данные, то все выглядит чрезвычайно просто).

Читатель, которого заинтересует класс нелинейных дифференциальных уравнений (10), найдет некоторую дополнительную информацию в дополнении Д.18. Здесь же мы рассмотрим более важный класс эволюционных уравнений, получающихся, если в уравнении (10) положить $g(z, t) = 1$. Запишем уравнение в виде

$$u_t(x,t)=\alpha(\boldsymbol{L},t)u_x(x,t); \tag{28}$$

этот класс получается из уравнения (10), если, согласно обозначениям гл. 1 [формулы (1.2.-1) и (1.4.-2)], мы положим $h(z, t) = \alpha(z, t)$. Отметим, однако, что мы не исключаем здесь возможности явной зависимости функции $\alpha(z, t)$ от времени. Кроме того, в последующем мы, вообще говоря, предполагаем, что функция $\alpha(z, t)$ является ***полиномом*** по z:

$$\alpha(z,t)=\sum_{m=0}^{M}\alpha_m(t)z^m, \quad M<\infty, \tag{29}$$

хотя многое из того, что следует далее, будет применимо без изменения и в случае целой функции $\alpha(z, t)$ или отношения двух целых функций аргумента z; этим вновь вводится общий случай уравнения (10).

Как отмечалось в гл. 1, § 2, со структурой класса нелинейных эволюционных уравнений (28) [с учетом выражения (29)] связана формула

$$\boldsymbol{L}^m u_x(x,t)=g_x^{(m)}(x,t), \quad m=0,1,2,\ldots, \tag{30}$$

где g^m – ***полином*** степени $m+1$ от функции $u(x, t)$ и ее производных по x вплоть до порядка $2m$ [формула (1.2.-3) или (2.4.А.-27), доказательство см. в дополнении Д.9]. Из этой формулы следует, что уравнение (28) [вместе с выражением (29)] является чисто ***нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных*** (не интегро-дифференциальное уравнение), имеющим вид

$$u_t(x,t)=\left[\sum_{m=0}^{M}\alpha_m(t)g^{(m)}(x,t)\right]_x. \tag{31}$$

Приведем также выражения для нескольких первых полиномов $g^{(m)}$ [формулы (1.2.-3) и (2.4.А.-28)]:

$$g^{(0)}=u, \tag{32 а}$$

$$g^{(1)}=u_{xx}-3u^2, \tag{32 б}$$

$$g^{(2)}=u_{xxxx}-10u_{xx}u-5u_x^2+10u^3. \tag{32 в}$$

Таким образом, простейшее нетривиальное эволюционное уравнение, содержащееся в классе (28), соответствует случаю $\alpha(z) = -z$ и имеет вид

$$u_t(x,t)+\left[u_{xx}(x,t)-3u^2(x,t)\right]_x=0, \tag{33a}$$

или, что эквивалентно,

$$u_t(x,t)+u_{xxx}(x,t)-6u_x(x,t)u(x,t)=0. \tag{33б}$$

Как мы уже отмечали (гл. 1, § 2 и 8), это известное уравнение Кортевега – де Вриза (КдВ). Впервые введенное в 1895 г. для исследования "изменения формы длинных волн, распространяющихся в прямоугольном канале" [259], оно впоследствии появилось во многих приложениях, и даже имеются все основания изучать его с априорной математической точки зрения (см., например, работу [242]). Как отмечалось в гл. 1, § 8, перед каждым членом уравнения (33б) можно ввести произвольные постоянные путем тривиальной замены зависимых и независимых переменных. Из приведенного выше видно, что можно без труда рассмотреть случай, когда коэффициент перед первым членом в уравнении (33б), или, что эквивалентно, коэффициенты при двух последних членах, зависят от времени (это просто соответствует переопределению переменной времени), но такие зависящие от времени множители перед вторым и третьим членами уравнения (33б) должны быть одинаковы [иначе уравнение нельзя будет обратно преобразовать к классу (10)]. Кроме того, отметим, что путем преобразования к движущейся системе отсчета, а именно путем замены переменной $x' = x + vt$ можно устранить дополнительный член в уравнении (33б), пропорциональный функции $u_x(x, t)$, соответствующий члену $m = 0$ в правой части уравнения (31).

В случае $M > 1$ нелинейные эволюционные уравнения (31) называются "высшими уравнениями КдВ"; иногда более специфически это название используется только для нелинейных эволюционных уравнений, полученных из класса (31), когда все коэффициенты α_m, кроме одного, обращаются в нуль (без потери общности остающийся коэффициент можно положить равным единице), т.е. для уравнений

$$u_t(x,t)=g_x^{(m)}(x,t), \quad m=2,3,4,\dots . \tag{34}$$

В других случаях, менее конкретно, так называются все уравнения класса (10).

Самое простое уравнение класса (28) или (31) получается при $\alpha(z) = 1$. Это волновое уравнение первого порядка

$$u_t(x,t)=u_x(x,t), \tag{35}$$

общее решение которого имеет вид

$$u(x,t)=f(x+t). \tag{36}$$

Следовательно, для решения этого уравнения не нужно спектральное преобразование [но принадлежность простого волнового уравнения (35) к классу (28) будет использоваться впоследствии].