тонные и многосолитонные решения, у какого класса нелинейных уравнений они есть, как они связаны с наличием бесконечных серий законов сохранения и так называемых преобразований Бэклунда, пока отсутствует. Имеется лишь богатый экспериментальный материал, в котором следует разобраться. Слово «экспериментальный» здесь понимается в широком смысле, который включает прямые наблюдения, счет на ЭВМ и исследование отдельных интересных классов уравнений. Ясно также, что фундаментальную роль в понимании этих явлений должно играть проникновение в их структуру. Обманчивая простота записи первых примеров не должна порождать иллюзии об их частном характере. Нужна хорошая, в значительной мере алгебраическая и геометрическая теория, которую еще предстоит создать.

Опишем вкратце некоторые свойства уравнения Кортевега—де Фриза, сведения о которых помогут объяснить план этой статьи.

0.2. Вывод уравнения. Обычное линейное одномерное волновое уравнение пишется в виде $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$. Его общее решение есть сумма двух волн произвольной формы $u=f(x+ct)+g(x-ct)$, одна из которых движется влево, другая вправо с постоянной скоростью c. Рассмотрим уравнение $u_t+cu_x=0$, выделяющее правые волны. Среди его решений имеются гармонические волны $u=\exp i(\omega t-kx)$, где частота ω и волновое число k связаны соотношением $\omega=ck$, или, для волн обоих типов, $\omega^2=c^2k^2$, c — характеристика среды.

Если волновое уравнение остаётся линейным, но включает производные высших порядков, то связь между частотой и волновым числом гармонической волны может иметь более общий вид $\omega^2=f(k^2)$, где f — уже не обязательно линейная функция. В приближении длинных волн, т. е. малых k, мы можем ограничиться первыми двумя членами ряда Тейлора для f и написать $\omega^2\cong c^2k^2+\varepsilon k^4$, или $\omega\cong ck+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon k^3}{c}$. Волны с таким законом дисперсии (зависимости частоты от волнового числа) описываются уравнением $u_t+cu_x-\frac{\varepsilon}{2c}u_{xxx}=0$.

С другой стороны, простейшее включение нелинейности происходит, если считать скорость зависящей от амплитуды u. Для волн малой амплитуды можно считать зависимость линейной и написать уравнение в виде $u_t+(c+\alpha u)u_x=0$. Зависимость скорости от амплитуды при подходящем знаке α может вести к тому, что гребень волны движется быстрее основания, т. е. происходит укручение фронта, с последующим образованием «барашков» и распадом волны.

Одновременный учет дисперсии и нелинейности приводит к уравнению $u_t+cu_x-\alpha uu_x-\frac{\varepsilon}{2c}u_{xxx}=0$. Если перейти в систему

координат, движущуюся вправо со скоростью c, член cu_x пропадет, и мы придем к уравнению Кортевега — де Фриза с точностью до нормировки констант, которую можно менять масштабными преобразованиями u, x, t. (Пользуясь этим, в основном тексте мы часто будем писать это уравнение с разными коэффициентами).

Приведенный вывод хорош тем, что никак не апеллирует к гидродинамике и показывает универсальную применимость уравнения Кортевега—де Фриза к одномерным средам, где существен лишь учет слабой дисперсии и слабой нелинейности.

0.3. Кноидальные волны и солитон. Будем искать решение уравнения Кортевега—де Фриза $u_t=6uu'-u'''$ типа «бегущей волны»: $u(x,t)=U(x-vt)$, U — форма волны, v — постоянная скорость (напомним, что реально v есть превышение скорости бегущей волны над скоростью волны в простейшем приближении $u_t+cu_x=0$).

Для U получится уравнение $-vU'=6UU'-U'''$. Интегрируя получаем $-vU=3U^2-U''+a$, a — константа. Умножая на U' и интегрируя еще раз, находим $-v\frac{U^2}{2}=U^3-\frac{1}{2}U'^2+aU+b$, где b — новая константа, или $U'^2=2U^3+vU^2+aU+b$. Общее решение этого уравнения, с точностью до нормировки констант, задается $\wp$-функцией Вейерштрасса: $U(x-vt)=c_1\wp(x-vt)+c_2$, периоды которой суть периоды эллиптической кривой Г: $Y^2=2X^3+vX^2+aX+b$, а c_1, c_2 — подходящие постоянные. Это и есть цуг кноидальных волн, если дискриминант кривой отличен от нуля: период цуга есть вещественный период Г, т. е. $\int_\gamma\omega$, где $\omega=dX(2X^3+vX^2+aX+b)^{-\frac{1}{2}}$, γ — вещественный цикл на римановой поверхности Г.

Солитон получается для кривой с двойной точкой в начале координат: $Y^2=2X^3+vX^2$, $a=b=0$. Явная формула для него имеет вид $U(x-vt)=-\frac{v}{2}\operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt)\right)$. Это — уединенная волна (в данной нормировке скорее «уединенная яма»), экспоненциально стремящаяся к нулю на бесконечности, с дном в точке $x=vt$. Глубина ямы пропорциональна скорости ее движения, которая может быть любой. Солитон есть предел кноидального цуга, когда его период стремится к бесконечности.

0.4. Суперпозиция солитонов и квазипериодические решения. Так как солитоны убывают на бесконечности, а большие солитоны движутся быстрее маленьких, можно попытаться рассмотреть решение задачи Коши, для которого $u(x, 0)$ есть сумма двух далеко разнесенных солитонов, из которых левый больше правого и потому в первое время, двигаясь почти независимо от правого, стремится обогнать его. После этого начинается период существенно нелинейного взаимодействия, и интересно посмотреть, какой вид решение имеет еще позже. В некотором противоречии с обычными ожиданиями, численный эксперимент показал, что по истечении достаточно большого времени решение близко к сумме тех же двух солитонов, из которых больший уже обогнал меньшего, и результат столкновения сказывается лишь на их сдвиге по фазе, но не на форме и скорости.

Это вызвало попытки доказать существование суперпозиции солитонов аналитически. Лакс в статье [42], оказавшей большое влияние на последующее развитие теории, установил, в частности, существование двухсолитонного решения, однако почти одновременно были найдены явные формулы для суперпозиции любого количества N солитонов.

Эти формулы имеют вид $u(x, t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\det(E+A)$, где E — единичная матрица размера $N \times N$, а у матрицы A на месте ij стоит элемент $c_i c_j (\alpha_i+\alpha_j)^{-1}\exp\left[(\alpha_i^3+\alpha_j^3)\,t-(\alpha_i+\alpha_j)\,x\right]$, $\alpha_i > 0$, $i=1, \ldots, N$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Асимптотически при $|t| \to \infty$ такое решение распадается в сумму N солитонов, расположенных в порядке убывания (при $t \to -\infty$) или возрастания (при $t \to \infty$) их амплитуд и скоростей.

Через некоторое время были обнаружены решения, так же относящиеся к N-солитонным, как кноидальные волны относятся к одному солитону (по поводу истории открытия см. обзор Б. А. Дубровина, В. Б. Матвеева и С. П. Новикова [8]). Они оказались связанными с тэта-функциями Римана для гиперэллиптических кривых рода N (с уравнением $Y^2 = F(X)$, F — многочлен степени $2N+1$). Явные формулы имеют вид $u(x, t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\theta(x\alpha+t\beta+\gamma)+\mathrm{const}$, где α, β, γ — некоторые N-мерные комплексные векторы. (Детали см. в обзоре В. Б. Матвеева [44] и в § 7 главы 4 этой работы). N-солитонные решения получаются в пределе при вырождении гиперэллиптической кривой до рациональной с N двойными точками. Частичное вырождение (со снижением рода) приводит к «многосолитонному решению на фоне квазипериодического».

0.5. Законы сохранения. Закон сохранения для эволюционного уравнения $u_t = K(u, u', \ldots, u^{(N)})$ $\left(u^{(i)} = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right)$ — это соотношение вида $T_t + X_x = 0$, где T, X — функции от $u^{(j)}$, $j \geqslant 0$, формально следующее из уравнения. Если u — его решение, быстро убывающее на бесконечности, то $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} T\,dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} X_x\,dx = 0$, так что T есть плотность сохраняющейся во времени величины. Первые три закона сохранения для урав-

нения Кортевега — де Фриза получаются без труда: они имеют вид

$$u_t + (-3u^2 + u_{xx})_x = 0;$$

$$(u^2)_t + (-4u^3 + 2uu_x - u_x^2)_x = 0;$$

$$\left(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right)_t + \left(-\frac{9}{2}u^4 + 3u^2 u_{xx} - 6uu_x^2 + u_x u_{xx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2\right)_x = 0.$$

Их можно интерпретировать как законы сохранения массы, момента и энергии. Однако уравнение Кортевега—де Фриза имеет бесконечную серию законов сохранения, полиномиальных по $u^{(j)}$. Сначала их выписывали методом неопределенных коэффициентов; работа была доступной вплоть до девятого закона включительно. Согласно Миуре [47], «летом 1966 года распространился слух, что только девять законов и существует». Миура опроверг этот слух, потратив неделю летнего отпуска на вычисление десятого, после чего была написана машинная программа, вычислившая одиннадцатый закон, состоящий из 45 членов. (У предыдущей программы память переполнялась уже на шестом законе сохранения). Наиболее прозрачные доказательства теоремы о существовании бесконечной серии законов и результаты об их структуре были затем получены в связи с важным теоретическим прогрессом: открытием представления Лакса и применимости техники обратной задачи теории рассеяния.

0.6. Представление Лакса и обратная задача. Лакс [42] заметил, что уравнение Кортевега — де Фриза может быть записано в виде $L_t = [P, L]$, где $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$, $P = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3\left(u(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\circ u(x, t)\right)$. Здесь $[P, L]$ — коммутатор в кольце линейных дифференциальных операторов; L_t — покоэффициентная производная L по «параметру» t. Уравнения такого вида для потоков в алгебрах Ли были известны с давних времен; самое знаменитое из них — это уравнение Шрёдингера в представлении Гейзенберга, где P есть оператор энергии системы, а L — любая наблюдаемая. Аналогично пишутся классические гамильтоновы уравнения в алгебре Ли функций на фазовом пространстве со скобкой Пуассона, а также уравнения вращения твердого тела.

С такими уравнениями связан простой формализм законов сохранения: если имеется линейное представление φ алгебры Ли и функция «обобщенного следа» Tr на нем, равная нулю на коммутаторах, то $\mathrm{Tr}\varphi(L^n)$ для $n \geqslant 0$ сохраняется во времени, ибо $(\mathrm{Tr}\varphi(L^n))_t = \mathrm{Tr}\varphi([P, L^n]) = 0$.

Однако проведение этого формализма для алгебры Ли дифференциальных операторов далеко от очевидности. Его разработка привела к оформлению чрезвычайно важного метода об-