$\boxed{T:}$ [ф. Кирхгофа] Если в з. Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0, \ x = (x_1, x_2, x_3) \in E^3, \ t > 0 \in E^1 \\ u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C^3$, $\psi(x) \in C^2$, то регулярное решение в т. $(x,t) \in E^4$ м. быть найдено по ФОРМУЛЕ КИРХГОФА:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\left(t M(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}[t M(\varphi)]\right),$$

где $M(\mu) = \frac{1}{t^2}\int\limits_S \mu(y)\, dS_y$, S – сфера с центром в т. x и радиусом t.

$\boxed{T:}$ [ф. Пуассона] Если в з. Коши для волнового ур-я

$$\begin{cases} \Delta u - u_{tt} = 0, \ x = (x_1, x_2) \in E^2, \ t > 0 \in E^1, \\ u(x_1, x_2, t)\big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x_1, x_2, t)\big|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C^3$, $\psi(x) \in C^2$, то рег. реш-е в т. $(x_1, x_2, t) \in E^3$ м. быть найдено по ФОРМУЛЕ ПУАССОНА:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_d \frac{\psi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - y_2)^2 - (y_2 - x_2)^2}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_d \frac{\varphi(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}},$$

где d – круг: $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 < t^2$

$\boxed{T:}$ [Iая ф-ла Грина] u – гарм. в $D \subset E^n$, $S = \partial D$ =>

$$\Rightarrow \int\limits_S u \frac{\partial u}{\partial n_S}\, dS = \int\limits_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$$

$\boxed{T:}$ [IIая ф-ла Грина] u, v – гарм. в $D \subset E^n$, $S = \partial D$ =>

$$\Rightarrow \int\limits_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n_S} - u \frac{\partial v}{\partial n_S}\right) dS = 0$$

[Т.] [интегральное представление гармонической функции]

u - гарм. в $D \subset E^n$, $S = \partial D$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left\{ E(x,y) \frac{\partial u}{\partial n_S} - u \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_S} \right\} dS,$$

где
$$E(x,y) = \begin{cases} -\ln|x-y|, & n=2, \\ \dfrac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, & n>2 \end{cases}, \quad \omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})};$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

[Т.] [теоремы о среднем для гармонической функции]

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{C_R} u \, dS_{C_R} \frac{1}{R^{n-1}} = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{C_R} u(y) \, dS_y$$ – т. о среднем по поверхности сферы

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{C_R} u(y) \, d\tau_y$$ – т. о среднем по шару

[Т.] [ф. Грина для эллиптич. опер-ра общего вида]

$u(x), v(x) \in C^2(D_0)$, $D \subset D_0$, $D_0 \subset E_n$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} e_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u,$$

где $A_{ij} = A_{ji}$, $A_{ij} \in C^1$, B_i, C - зад. в $D_0 \subset E^n$ действ. ф-ции,

$$e_i(x) = B_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1,n}, \quad e_i(x) \in C^1$$

$$L^* u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(e_i u) + cu$$

$$\Rightarrow \int_D (vLu - uL^*v) \, d\tau_x = \int_S \left[a\left(v \frac{du}{dN} - u \frac{dv}{dN}\right) + buv\right] dS_y$$

формула Грина,

где N - ед. вектор - конормаль в т. $y \in S$, напр. косинусами:

$$\cos\widehat{Ny_i} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos\widehat{\nu y_i}, \quad i = \overline{1,n}, \quad a^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cos\widehat{\nu y_i}\right)^2, \quad b = \sum_{i=1}^{n} e_i \cos\widehat{\nu y_i}$$

Опр.: Решение $v(\xi,\eta)$ сопряжённого уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv = 0$$

, удовл. на характеристиках $\xi=\xi_1$, $\eta=\eta_1$ условиям: $v(\xi_1,\eta) = e^{\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)d\eta_2}$, $v(\xi,\eta_1) = e^{\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)d\xi_2}$,

где (ξ_1,η_1) – произв. фиксир. точка области D задания уравнения $Lu=F$, наз. <u>ФУНКЦИЕЙ РИМАНА</u>.

[при доп. требовании непр-ти $\frac{\partial a}{\partial\xi}$, $\frac{\partial b}{\partial\eta}$ и c ф-я Римана $\exists$-ет]

Опр.: Канонический вид гиперб. ур-я общего вида:

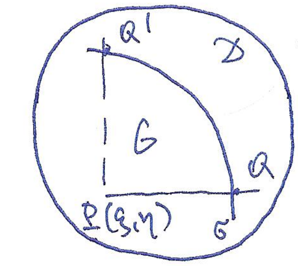
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = F(x,y)$$

$$\xi = x+y,\ \eta = x-y \Rightarrow Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = f,$$

где $4a = A+B$, $4b = A-B$, $4c = C$, $4f = F_1$

a, b – дифф. $\Rightarrow L^*$ – сопр. опер-р: $L^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv$

Опр.: Задача Коши для гиперболического ур-я общ. вида:



σ – разомкнутая дуга Жордана с непрерывной кривизной, не имеющая точек касания с характеристиками

Q', Q – точки пересечения характеристик с кривой

$$\begin{cases} Lu = f, \\ u(P) = \varphi(P) \\ \frac{\partial u(P)}{\partial e} = \psi(P) \end{cases}, P\in\sigma \quad \text{— з. Коши}$$

Опр.: Задача Гурса для гиперболического уравнения общ. вида:

$$\begin{cases} Lu = F, \\ u(\xi,\eta_0) = \varphi(\xi), \\ u(\xi_0,\eta) = \psi(\eta) \end{cases} \quad \text{— з. Гурса,}$$

где $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ – непр. дифф.

$\varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0)$

Опр.: Первая вариационная задача — это задача отыскания среди допустимых функций той функции, для которых интеграл Дирихле минимален:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in G \\ u(x,y) = \varphi(x,y), & (x,y) \in S, \quad \varphi(x,y) \text{ — непр. в } S \end{cases}$$

$$D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy \text{ — интеграл Дирихле}$$

$\boxed{T}$ [принцип Дирихле] Если заданная на S ф-я $u(x,y)$ такова, что класс допустимых функций не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны.

Опр.: Функции, непр. в $G \cup S$ и имеющие кус.-непр. производные первого порядка в G, т.ч. для них $\exists$-ет инт-л Дирихле $\uparrow$, и они удовл-ют краевому усл-ю, наз. <u>допустимыми</u> функциями.

Опр.: Вторая вариационная задача — это задача нахождения в классе допустимых ф-й минимума ф-ла $J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$, где $D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$, $H(u) = \int\limits_G u^2(x,y)\,dxdy$ и построения соответствующей минимизирующей функции.

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & (x,y) \in G, \ \lambda = const \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in S \end{cases}$$

— з. на собств. зн-я: найти λ, при кот $\exists$ нетрив. реш-е

$\boxed{\text{Утв.:}}$ При определённых доп. предположениях, при наличии решения второй вариац. задачи, если $u(x,y)$ — минимизирующая ф-я, то $\lambda = J(u)$ явл. наименьшим собственным числом задачи на собств. зн-я, а $u(x,y)$ — соотв. λ собств. ф-ей.

[Метод Бубнова - Галёркина]

[для 2ой вариац. задачи]

задача на собств. зн-я : $\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & в\ G, \\ u(x,y) = 0 & в\ S = \partial G \end{cases}$

Треб-ся минимиз-ть ф-ал $\mathcal{Y}(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$,

$D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$, $H(u) = \int\limits_G u^2(x,y)\,dxdy$, $H(u) = 1$

$\{v_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ — полная с-ма допуст. ф-й

u_n ищется в виде: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k$, $n = 1, 2, \ldots$, $c_k = const$

c_k находится из СЛАУ $\sum\limits_{k=1}^{n} H(\Delta v_k + \lambda v_k, v_m)\, c_k = 0$, $m = \overline{1,n}$

$\Rightarrow u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k$ → находим λ

[Метод Ритца для 1ой и 2ой вариационной задачи]

$\mathcal{Y}(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$ — треб-ся минимиз-ть ф-ал,

$D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$, $H(u) = \int\limits_G u^2(x,y)\,dxdy$, $H(u) = 1$

$\{u_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{l=1}^{n} c_{kl} \sin kx \sin ly\}$, $n, m = 1, 2$ — полная с-ма допустимых ф-й для ф-ла $\mathcal{Y}(u)$

[under construction]

Опр.: Функция $v = D^k u \in L_p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ - дост. гладкая, наз. ОБОБЩЁННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ порядка k от функции $u \in L_p(\Omega)$, если для $\forall\ \varphi \in C_0^l(\bar\Omega)$ выполнено равенство:

$$\int_\Omega D^k u \varphi \, d\Omega = (-1)^{|k|} \int_\Omega u D^k \varphi \, d\Omega$$

D^k - частн. произв. порядка k

Опр.: Пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ - дост. гладкая наз. пополнение пр-ва l раз непр. дифф. ф-й $C^l(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_p^l} = \left[\int_\Omega \left(|u|^p + \sum_{1 \le |\alpha| \le l} |D^\alpha u|^p \right) d\Omega \right]^{1/p}, \quad p \ge 1$$

D^α - частн. произв. порядка $|\alpha|$.

Опр.: Функция Леви:

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sigma(x,y)^{\frac{2-n}{n}}}{(n-2)\sqrt{A(y)}\,\omega_n}, & n > 2 \\ -\dfrac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}} \ln\sigma, & n = 2 \end{cases}$$

ω_n - площадь ед. сферы в E_n

$A = \det\|A_{ij}\|$

$\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$, $a_{ij} = \dfrac{\text{алгебр. доп-е к эл-ту } A_{ij}(x)}{\det\|A_{ij}\| = A}$

для эллиптич. ур-я: $Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u = f(x)$

$\boxed{T}$ [принцип экстремума] Если в области D всюду $c(x) < 0$, то регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного ур-я $Lu = 0$ ни в одной точке $x \in D$ не может достигать ни отрицательного минимума, ни положительного максимума.

Опр.: [обобщенные решения уравнений]

- эллиптич. типа: $Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i})+\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(x)$

$x\in G,\ G\subset E_n$ - огр, $S=\partial G\subset E^{n-1}$

∟ В предположении A_{ij}, e_i, c - огр., измеримые функции, $f\in L_2(G)$, под обобщ. решением з-чи Т $Lu=f$ в пр-ве W_2^1 понимается ф-я $u(x)\in \mathring{W}_2^1$, для которой справедливо:

$$\int_G\Big(-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+cuv-fv\Big)dx=0,\ \forall x\in\mathring{W}_2^1,$$

где $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ - обобщ. произв-ые $u(x)$ 1го порядка

- гиперболич. типа: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-Lu=f(x,t)$, $Lu=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}[A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}]+$
$+\sum_{i=1}^{n}e_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u$

$G\subset E_n$ - огр., $S=\{\partial G\times(0\le t\le T)\}$, $T=const>0$

$u(x,0)=\tau(x)$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\nu(x)$, $u|_S=0$

∟ В предположении A_{ij}, e_i, c - огр., измеримые функции, $f\in L_2(G)$, под обобщ. решением з-чи Т в пр-ве W_2^1 понимается ф-я $u(x,t)\in W_2^1$, удовл. нач. условиям Т и тождеству:

$$\int_Q\Big(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v-cuv\Big)dxdt=$$
$$=\int_G\nu(x)v(x,0)\,dx+\int_Q fv\,dxdt,\ \forall v(x,t)\in\mathring{W}_2^1(Q),\ v(x,T)=0,$$
$$Q=\{G\times(0<t<T)\}\subset\Omega\subset E_{n+1}$$

(!) L - равномерно эллиптичный оператор в $\Omega\subset E_{n+1}$

- параболич. типа: $\frac{\partial u}{\partial t}-Lu=f(x,t)$, L - равн. эллиптичн. в $\Omega\subset E_{n+1}$
$G\subset E_n$ - огр. область, $Q=\{G\times(0<t<T)\}\subset\Omega$, $S=\{\partial G\times(0\le t\le T)\}$, $T=const>0$, $u(x,0)=\varphi(x)\in G$, $u(x_0,t)=\Psi(t)$, $(x_0,t)\in S$.

L В предположении, что $\varphi \in L_2(Q)$, под **обобщённым решением** з-чи 1 понимается ф-ция $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$, т.е.

$$\int_Q \Big(-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\Big)\,dx\,dt =$$

$$= \int_G \varphi v(x,0)\,dx + \int_Q fv\,dx\,dt, \text{ для } \forall v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1,$$

$$v(x,T) = 0.$$

Опр.) Оператор $\mathcal{L}$ для ур-ния 2го порядка

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x),$$

по опр-ю, обладает свойством равномерной эллиптичности, если для соотв. ему квадратичной формы $Q(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ $\exists\, k_0, k_1 > 0$, т.е.: $k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq Q(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \leq k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

[пример Адамара некорректно поставленной задачи]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$$u(x,0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = v(x) = \frac{\sin nx}{n} \quad (2)$$

рассм. $u(x,y) = \frac{\operatorname{sh} ny \sin nx}{n^2}$ – решение (1), удовл. (2).

$\llcorner$ т.о. для дост. большого n ф-ю $v(x)$ можно сделать сколь-угодно малой, в то время как соотв. реш-е з. Коши для ур-я (1) неограничено при $n \to \infty$ => полученное решение – неустойчиво => данная задача НЕ является корректно поставленной.