Кондраков Иван. (1.)

Билет 10 Эллиптич. ур-ия, элемент. решения, потенциалы,

Эллипт. оператор

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

$B_i(x), A_{ij}(x)$ непр.-дифф. $B_i$

$$\mathcal{L}^* u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(B_i(x)u\right) + c(x)u$$

Сопряженный оператор

Существование решений линейного эллипт. ур-ния

$$a_{ij}(x) := \frac{\text{алг. доп. к } A_{ij}(x)}{\det |A_{ij}(x)|}$$ (элемент обратной матрицы)

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j) \qquad x,\xi \in D$$

Т.к. $\exists$ $\mathcal{L}u$ - равн. эллиптический.

т.е. Характеристическая форма

$$Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$$

равн. элл. - $\exists k_0, k_1$ : $k_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 \le Q(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \le k_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$

$\Rightarrow \sigma(x,\xi) \geq 0$

и $\exists k_0, k_1$ $\quad k_0|x-\xi|^2 \le \sigma(x,\xi) \le k_1|x-\xi|^2$.

$\exists$ в $D\cup S$ $A_{ij}, B, C$ им. непр. ч.п. 3-его, втор. го и первого пор-ка соотв.

Ф-ия Леви $\quad \psi(x,\xi) = \begin{cases} \sigma_0(\xi)\,\sigma^{\frac{2-n}{2}} & n>2 \\ -\sigma_0(\xi)\log\sigma^{1/2} & n=2 \end{cases}$

$$\sigma_0(\xi) = \frac{1}{\omega_n(n-2)\sqrt{\det|A_{ij}(\xi)|}}$$

Обобщенный объемный потенциал: масс, распр-ных по обл-ти $\mathcal{D}$ с плотностью $\mu$

$$u(x) = \int_{\mathcal{D}} \psi(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y$$

Обычный объемный потенциал:

$$u(x) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi} \frac{\mu(y)}{r_{xy}}\,d\tau_y$$

Если $x \in \mathcal{D}$, то $\Delta u = -\mu(x)$

Если $A_{ij}(x) = \delta_{ij}$ $\Rightarrow$ получим фунд. реш.

$$E(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}|x-y|^{2-n} & n>2 \\ -\ln|x-y| & n=2 \end{cases}$$

$\psi$ содержит инф-цию о старших производных

Нужен 2й этап: учет младших произв.

$n = 2$

$$\mathcal{L}u = u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + cu = f$$

Ищем $u$ в виде

$$u(x,y) = -\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|\,\mu(y)\,d\tau_y + \underbrace{\omega(x)}_{\text{нек. ф-ция}}$$

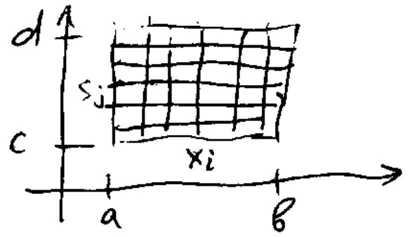
Подст. $u$ в $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}u = -\mu(x) + \int_{\mathcal{D}} K(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y + \mathcal{L}\omega(x) = f(x)$$

Ур-ние Фредгольма 2-го рода.

$$z(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\,z(s)\,ds = f(x)$$

Считаем численно. Переходим к интегр. сумме.



$$z(x_i) + \lambda \sum_{j=1}^{n} R(x_i, s_j)\,z_j\,\Delta s = f(x_i)$$

$$1 \le i \le m$$

Альтернатива Фредгольма:

либо однор. ур-ние имеет только трив. решение $\Rightarrow$
неодн. ур. разр. при $\forall$ правой части
либо однор. ур-ние им. нетрив. реш. $\Rightarrow$
неодн. ур-ние разр. при усл. ортогональности
правой части собств. ф-циям

получим ур-ние 2-го рода для $\mu(x)$
и возьмем $\omega(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$

Фунд. реш. $(n=2)$ $\quad \Omega(x,y) = \underbrace{-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|}_{\text{сингул. часть ф-ции}} - \frac{1}{2\pi}\int_D \ln|x-y|\,\mu(y)\,d\tau_y$

Оно имеет канонич. форму по старшим произв.
и сод-т произв. коэфф-ов по младшим произв.
Сначала ищем $\mu(x)$, потом строим фунд. реш.

$n>2$ делается ан-но.
Главная трудность: взять ф-цию Леви $\psi(x,y)$,
взять объемный пот-л и путем прямого
дифф-ния: $w(x) = \int_D \psi(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y$

уд. ур. Пуассона $\Delta w = -\mu$
Вырезать точку, дифф-ть 2 раза


Фунд. реш.: $\Omega(x,y) = \underbrace{\psi(x,y)}_{\text{ф-ия Леви}} + \int_D \psi(x,y)\,\mu(y)\,d\tau_y$

$O(|x-y|^{2-n})$ – пор-к сингул-ти.

## Принцип экстремума:

Если всюду в $\mathcal{D}$ $c(x) < 0$

то регулярное в этой обл-ти решение $u(x)$ однор. ур-ния

$Lu = 0$

ни в одной точке $x \in \mathcal{D}$ не может достигать ни отриц. относит. минимума, ни положс. относ. максимума

Д-во: $\exists\ u(x)$ в точке $x \in \mathcal{D}$ дост. ~~отн~~ относ min отриц.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \lambda_i \lambda_j \geq 0$$

Для пол. опр. формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \lambda_j = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{e=1}^{n} g_{ke} \lambda_e \right)^2$$

$$A_{ij} = \sum_{s=1}^{n} g_{si} g_{sj}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,s=1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} g_{si} g_{sj} \geq 0$$

Имеем $u(x) < 0$
отсюда ~~но~~ $Lu > 0$ противор. $Lu = 0$.

Q.E.D.

$$u_t + u u_x = 0$$

$$u_t + u u_x + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s)\, u_s(s, t)\, ds = 0$$

$\{v_n\}$ - полная система доп. ф-ций Решаем $L u = 0$

Ищем $u = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k$

Решаем алгебр. систему

$$\langle L(u), v_i \rangle = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

Находим $c_k$