Мат. модели, опис. УЧП.

1. Колебания мембраны

ρ - плотность мембраны

k - коэфф. натяжения

$(\overset{\text{кин.}}{T_к} - \overset{\text{потен.}}{T_р})$ - натяжение

$$L = \int_{t_1}^{t_2} (T_к - T_р)\, dt$$ - лагранжиан

Движение происходит так, что L достигает минимума

$u(x,y,t)$ - отклонение мембраны

$$T_к = \int_D \rho \frac{u_t^2}{2}\, d\sigma$$

$$T_р = \left(\int_D k \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, d\sigma - \int_D k\, d\sigma \right)$$

Будем предп., что $u_x^2, u_y^2 \ll 1$, т.е. деформации не велики

$$\Rightarrow T_р = \frac{k}{2} \int_D (u_x^2 + u_y^2)\, d\sigma$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_D \left(\rho u_t^2 - k(u_x^2 + u_y^2) \right) d\sigma\, dt$$

ищем минимум $\Rightarrow$

ур-ие Эйлера-Остроградского $\Rightarrow$

$$\left\{ \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = v[y] \right.$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$\int_{\Omega} F\Big(x, y, u, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{p}, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{q}\Big)\,d\sigma = v[y]$$

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0 \quad \Big\}$$

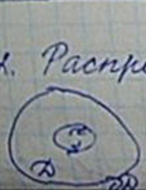
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(k u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(k u_y) = 0$$

/* при предп., что u имеет вторые произв. в этой области */

ρ и $k = const \Rightarrow \rho u_{tt} = k(u_{xx} + u_{yy})$

$$\boxed{u_{tt} = a^2 \Delta u} \qquad a^2 = \frac{k}{\rho}$$

2. Распространение тепла



$\dim x = 3$

$u(x, t)$ – температура

с - теплопроводность ①

ρ - плотность

k - коэфф. теплоты

Необходимо составить баланс тепла:

$$\int_S k \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \int_\tau c\rho u_t\, d\tau$$

по ф-ле Остр. - Гаусса:

$$\Rightarrow \int_\tau \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, d\tau = \int_\tau c\rho u_t\, d\tau$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = c\rho u_t$$

$\rceil$ $k = const \Rightarrow$ $\boxed{u_t = a^2 \Delta u}$

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

3. Ур-ие электростатики

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho$$

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -4\pi\rho \quad \text{в } \tau \\ \varphi \big|_\Sigma = g \end{cases}$$

если объёмные заряды отсут.,

то $\Delta\varphi = 0$

Основные ур-ия в ЧП

В задачах, к-рые моделируются в терминах ур-ий в ЧП, к искомым реш-ям данного ур-ия предъявл. доп. требования, т.е. для них ставятся задачи с определенными условиями на многообразиях, размерность к-рых на 1 меньше размерности области Д задания самого ур-ия, причём, эти многообразия, носящие названия носителей данных, лежат либо в области Д, либо на ее границе. Когда искомое решение, подчиненное этим условиям, ∃, ! и в опред. смысле устойчиво, то задача называется корректно поставленной. Корректность постановки задач для УЧП существенно зависит от типа * ур-ия.

1) Гиперболического типа

Волновое ур-ие:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u(x)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$ нач. усл.

граничн. усл.

а) $u(0,t) = \mu_1(t)$

/* условие закреп. конца */

б) $u_x(0,t) = \nu_1(t)$

/* задан. сила */

в) $\alpha_1 u_x(0,t) + \beta_1 u(0,t) = \chi_1(t)$

/* ∃ сила, заст. конец вернуться назад */

2) Эллиптического типа

ур-ие Лапласа:

$\Delta u(x,t) = 0$

а) Внутренние

$$\begin{cases} u - \text{огр. и непр. в } T+S \\ \Delta u = 0 \quad \text{в } T \\ u(M)\big|_S = f(M) \end{cases}$$ Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{в } T \\ \frac{\partial u}{\partial n}(M)\big|_S = f(M) \end{cases}$$ Неймана (реш $\nexists$)

$\iint\limits_S f(M)\,ds = 0$ – усл. $\exists$ зад. Нейм

б) Внешние

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{вне } T \\ u\big|_S = f(M) \\ u(M) \rightrightarrows 0 \text{ на } \infty \end{cases}$$ Дирихле (реш. !)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(M)\big|_S = f(M) \\ u(M) - \text{регулярная} \end{cases}$$ Неймана (реш. !)

3) параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x,t)$$

нач. усл. : $u(x,0) = \varphi(x)$

гран. усл. как и в гипер. типе.

(3)

Осн. классификации.

$D \subset E^n \quad n \geq 2$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

в обл. D будем $\not{}$

$F(x, \dots, p_{i_1 \dots i_n}, \dots)$

$x \in D, \quad i_1, \dots, i_n \quad i_j \geq 0 \quad i_j \in N$

$i_1 + \dots + i_n = k$, где $k = 0 \dots m$

пусть $\dfrac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_n}} \neq 0 \qquad i_1 + \dots + i_n = m$

тогда $F\left(x, \dots \dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \dots\right) = 0$

уравнение в ЧП;

Если F - линейная ф-ция по $p_{i_1} \dots p_{i_n}$,

то

$$Lu = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1 \dots i_n} A^k_{i_1 \dots i_n}(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = f(x)$$

Если ур-ие линейно по стар. производным, то оно квазилинейно.

Если $f(x) \equiv 0$, то ур-ие однородное

Решение однор. ур-ния обр. линейное пр-во: u_1 и u_2 – реш. $\Rightarrow \alpha u_1 + \beta u_2$ – тоже реш-ие

$Lu = f(x)$ $\forall$ решение

$u = u_r + u_0$

$\Rightarrow$ неодн. ур-ие имеет ! реш. $\Leftrightarrow$ реш. однор. ур-ия нулевое

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u = f(x) \quad (*)$$

сопоставим этому ур-ию ф-лу:

$$Q(\lambda_1 \dots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j$$

с помощью невырожд. преобр. коорд:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_1(\xi_1, \dots \xi_n) \\ \dots \\ \lambda_n = \lambda_n(\xi_1 \dots \xi_n) \end{cases}$$

$$\frac{D(\lambda_1 \dots \lambda_n)}{D(\xi_1 \dots \xi_n)} \neq 0$$

$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2$, где $\alpha_i = -1; 1; 0$

1) (*) – гиперб. в т. $x \in D$, если только один коэфф. $\alpha = -1$, а ост $(n-1)$ равны 1 (или наоборот)

2) (*) – эллипт. в т. $x \in D$, если все $\alpha_i = 1$ (или -1)

3) (*) – параб. в т. $x \in D$, если один из $\alpha_i = 0$, а ост одного знака

Ультра:

1) (*) – ультрапараб. в х, если ℓ $\alpha_i = 0$, а ост. одного знака $(\ell < n-1)$

2) (*) – ультраэллип. в х, если ℓ коэфф. α_i полож., а ост. $(n-\ell)$ отриц.

Опр Ур-ие (*) наз гипер. (эллипт., параб.) в D, если оно гипер. (эллип.) параб.) в $\forall$ точке D

Приведение дифф. ур. (*) во всей области возможно! в $2^{\text{черном}}$ случае.

] $F = (F_1, \dots, F_N)$

$F_i = F_i(x, \dots, p_{i_1 \dots i_n} \dots) \quad x \in E^n$

$p_{i_1 \dots i_n} = (p^1_{i_1 \dots i_n} \dots p^{N_1}_{i_1 \dots i_n})$

тогда равенство

$F(x, \dots p_{i_1 \dots i_n} \dots) = 0$,

где $u = (u_1 \dots u_{N_1})$

$$p_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial u_k^{i_1 + \dots + i_n}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \qquad \frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_n}} \neq 0$$

явл. сис-мой УЧП $N \times N_1$ порядка

$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu =$

$= f(x, y)$

$a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - ф-ции от (x, y)

$(x, y) \in D \subset E^2$

с помощью невыр. преобр.

$$\xi = \xi(x, y) \qquad \eta = \eta(x, y) \qquad \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

$u(x, y) \longleftrightarrow u(\xi(x, y), \eta(x, y))$

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + \\ + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

Аналог. для u_{yy} и u_{xy}

$$a_{11}(u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + \\ + u_\eta \eta_{xx}) + 2a_{12}(u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} \xi_x \eta_y + \\ + u_{\xi\eta} \xi_y \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}) + \\ + a_{22}(u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \eta_y \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + \\ + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}) + \ldots = 0$$

$$\overline{a_{11}} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2$$

$$\overline{a_{12}} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y$$

$$\overline{a_{22}} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2$$

Выберем ξ и η : $\overline{a_{11}} = 0$

т.е. $a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 = 0$

$\exists \quad z = \varphi(x, y) = \xi(x, y)$

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0 \qquad (1)$$

Лемма 1: Если $z=\varphi(x,y)$ явл. реш. ур-ия (1), то соот. $\varphi(x,y)=const$ предст. собой общий интеграл ОДУ: $a_{11}dy^2-2a_{12}dydx+a_{22}dx^2=0$

Док-во:

$z=\varphi(x,y)=C \Leftrightarrow \varphi_x dx+\varphi_y dy=0$

$\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=-\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)+a_{22}=0$

явл. тождеством

$\Rightarrow a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right)+a_{22}=0$

Лемма 2: обратное верно

Док-во:

$\varphi(x,y)=C$

берём $\forall\ (x_0,y_0)$ и проводим через неё интегр. кривую для ур-ия

$a_{11}dy^2-2a_{12}dydx+a_{22}dx^2=0$

полагая $\varphi(x_0\ y_0)=C_0$

Для всех точек этой кривой (3)

имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} \right]_{y=f(x,c_0)} = 0$$

т. к. (x_0, y_0) $\forall$, то это верно

для $\forall$ x и y.

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dy\,dx + a_{22}dx^2 = 0$$

– хар. ур-ие

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ гипер.

2) $= 0$ параб.

3) < 0 эллипт.

1) гиперб.

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$

$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ – 1ая канон.

$$\Phi = -\frac{F}{2a_{12}}$$

$$\exists \begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases}$$

$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1$ – 2ая канон.

$\Phi_1 = 4\Phi$

2) параб.

$a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$

$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$ $\quad \Phi = -\frac{F}{a_{22}}$

3) эллипт.

$\varphi(x,y) = c$ – общ. инт. 1го ур-ия

$\Rightarrow \varphi^*(x,y) = c$ – об. инт. 2го ур-ия

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \varphi^*(x,y) \end{cases}$$

$$u_{\xi\eta} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

$\tilde{\Phi}$ – компл.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} \\ \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2} \end{cases}$$

(3)

$\overline{a_{11}} = \overline{a_{22}}$ $\qquad \overline{a_{12}} = 0$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

$(\ \xi_x = \alpha_x + i\beta_x)$ $\qquad \Phi = -\dfrac{\overline{F}}{a_{22}}$

⑥ Ур-е Лапласа. Св. гарм. ф-ций

(1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ — ур-е Лапласа (эллипт. в E_n)

$u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ — регулярн. в обл. D реш-е (1) наз-ся гарм. ф-цией

Простейшие св-ва (из линейн. ур-я Лапласа):

а) u_k, $k=\overline{1,m}$ — гарм $\Rightarrow u(x) = \sum_{k=1}^{m} u_k(x) C_k$ — гарм. (C_k — const)

б) $u(x)$ — гарм. в $D \Rightarrow u(\lambda C x + h)$ — гарм. в D, где $\lambda = const$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ортогон.), $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. $x, \lambda C x + h \in D$.

Ф-лы Грина:

$$\int_S u \frac{\partial u}{\partial n_s} dS = \int_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\sigma \quad \text{— ф-лы Грина}$$

$$\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n_s} - u \frac{\partial v}{\partial n_s}\right) dS = 0.$$

Св-ва гарм. ф-ций:

① u — гарм. в D, $u(x)|_S = 0 \Rightarrow u(x)|_D = 0$ (из 1-ой ф-лы)

② $\int_S \frac{\partial u}{\partial n_s} dS = 0$ (из 2-ой ф-лы).

Фунд. реш-е $r = |x-y|$ $u(r)$ — реш-е (1) т. и т.т., когда

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{n} \frac{du}{dr} = 0$$

$u = 1$ — реш-е

$u = r^k$: $k(k-1)r^{k-2} + (n-1)k r^{k-2} = 0$

$-2k + k^2 + nk = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k = 2-n$

$$\Rightarrow u_2(r) = \begin{cases} -\log r & n=2 \\ \frac{1}{r^{n-2}} & n>2 \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} -\ln r & n=2 \\ \frac{1}{(n-2) r^{n-2}} & n>2 \end{cases}$$ — при $x \neq y$ явл. реш. (1) по x и по y.

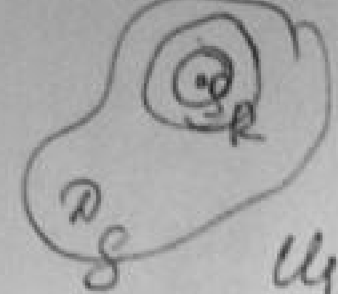
фунд. реш-е ур-я Лапласа

Интегр. представл.:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left\{ E(x,y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_s} dS - u(y) \frac{\partial E(x,y)}{\partial n_s} \right\} dS. \quad (2)$$

ω_n — площадь ед. сферы в E_n, $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Теорема о среднем:



$\{|y-x|\le R\}\in D$ $\quad \mathcal{E}(x,y) = \begin{cases} -\log R & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)R^{n-2}} & n>2 \end{cases}$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x,y)}{\partial n_x} = -\frac{1}{R^{n-1}},\ n>2$$

Из (2) и св-ва (2) $\Rightarrow \left(u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=R} u(y)\,dS \right.$

теорема о среднем по пов-ти сферы

$|y-x| = \rho \le R$ $\quad \rho^{n-1} u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|y-x|=\rho} u(y)\,dS \ \Big|\ \int_0^R d\rho$

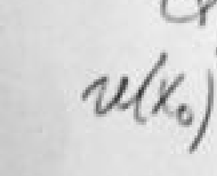
$\Rightarrow \boxed{u(x) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|<R} u(y)\,d\tau_y}$ — т. о среднем по шару

Принцип экстремума:

Внутри обл. гармоничности гарм. ф-ция не достигает ни своего наибольшего, ни наименьшего значения (если она не const)

Док-во:

M – max, m – min



$\exists\, u(x_0) = M$

Строим сферу, целиком леж. в D – $\Sigma_R^{x_0}$

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|<R} u(y)\,d\tau_y \le \frac{n}{\omega_n R^n} \int\limits_{|y-x|<R} u(x_0)\,d\tau_y = M$$

$\Rightarrow u(x_0) = M < M \Rightarrow$ всюду в $\{|y-x|<R, x_0\}$ $u(x) = M \Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие.

(7) Уравнение Лапласа.

Формула Грина.

(1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ – ур-е Лапласа (эллиптично в E_n)

$u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ – регулярн. в D реш-е (1) (гарм. ф-ция)

$\exists u(x), v(x)$ – гарм., $u, v \in C^1(D \cup S)$ и интегр. $2^{ых}$ произв в D.

1) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \underbrace{u \Delta u}_{0} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$.

2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\Delta u - u\Delta v = 0$.

Интегрируем 1) и 2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) d\tau = \int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$

$\int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) d\tau = 0$

Использ ф. Остроград. – Гаусса:

1) $\int_S u \frac{\partial u}{\partial n_S} dS = \int_D \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau$

– ф-лы Грина.

2) $\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n_S} - u \frac{\partial v}{\partial n_S}\right) dS = 0$

Фундаментальное реш-е:

$r = |x - y|$ $u(r)$ – реш-е (1) т. и т.т., когда

$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = 0$.

$u = 1$ – реш-е

Ищем в виде $u = r^k$: $k(k-1)r^{k-2} + (n-1)k r^{k-2} = 0$.

$-2k + k^2 + nk = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k = 2-n$

$\Rightarrow u_2(r) = \begin{cases} -\log r & n = 2 \\ \frac{1}{r^{n-2}} & n > 2 \end{cases}$

$E(r) = \begin{cases} -\ln r & n = 2 \\ \frac{1}{(n-2) r^{n-2}} & n > 2 \end{cases}$ – при $x \neq y$ явл. реш. (1) как по x, так и по y

$E(r)$ – фунд. реш-е.

Интегральное представление

$$v(y)=E(x,y)$$

2ая ф-ла Грина:

$$\int_S \left(E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_s} + u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_s}\right] dS_y =$$

$$= -\int_{|x-y|=\varepsilon}\underbrace{\left(E\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} - u\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}\right)}_{J_1 - J_2} dS_\varepsilon$$

$$E_\varepsilon(x,y)=\begin{cases}-\log\varepsilon & n=2\\ (n-2)\,\varepsilon^{n-2} & n>2\end{cases}$$

$$J_1=\int_{|x-y|=\varepsilon} E\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon = E_\varepsilon(x,y)\int_{|x-y|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon = 0$$ (по св. гарм. ф.)

$$J_2=\int_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon =$$

$\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ ~const

$$=\int_{|x-y|=\varepsilon} u(x)\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon + \int_{|x-y|=\varepsilon}[u(y)-u(x)]\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon}dS_\varepsilon =$$

$$=\left\{\frac{\partial E}{\partial n_\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon^{n-1}},\ n\geq 2;\ \int_{|y-x|=\varepsilon}\frac{dS_\varepsilon}{\varepsilon^{n-1}}=\omega_n\right\} = \omega_n u(x)$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial n} = -\frac{\partial E}{\partial r} = -\left(\frac{1}{(n-2)\varepsilon^{n-2}}\right)' = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S\left\{E(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_s} - u(y)\frac{\partial E(x,y)}{\partial n_s}\right\}dS}$$

где ω_n – площадь ед. сферы в E_n

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$ – гамма-ф-ция.

8) Ур-е Лапласа. Ф-ция Грина

$\Delta u = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} = 0 \right)$

Опр ф-цией Грина задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_S = \varphi(x), \quad u \in C^2(D) \cap C(D \cup S). \end{cases}$$

наз-ся определ. в $D \cup S$ ф-ция $G(x,y)$:

1) $G(x,y) = E(x,y) + g(x,y)$, где $E(x,y) = \begin{cases} -\log|x-y| & n=2 \\ -\frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}} & n>2 \end{cases}$

$g(x,y)$ – гарм. по $x, y \in D$.

2) $g(x,y)|_{x \in S} = -E(x,y)|_{x \in S}$, где $g(x,y)$ – реш-е зад. Дирихле

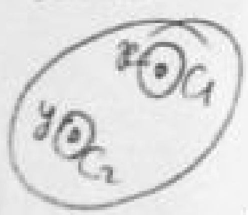
Св-ва ф-ции Грина.

1) $G|_S = 0$

2) $G(x,y) \geq 0$ в $D \cup S$ (из определ. и принципа экстремума для гарм. ф-ций)

3) $G(x,y) = G(y,x)$

Рассм.



$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) = 0$$

$v = G(z,x)$, $u = G(z,y)$

$G(z,x)|_S = G(z,y)|_S = 0.$

$$\iint_S \left\{ G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n} - G(z,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n} \right\} dS_z = 0.$$

$$\iint_{C_1} + \iint_{C_2} = 0.$$

$\varepsilon \to 0$: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_1} \left(G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n} - G(z,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n} \right) dS_z = -G(x,y)$

$E(z,x) = \frac{1}{(n-2)|z-x|^{n-2}}$

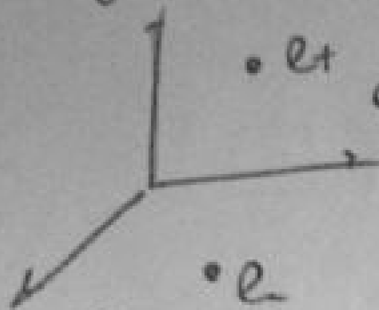
$dS = |x-z|^{-1} d\sigma \qquad \frac{|x-z|^{n-1}}{(n-2)|x-z|^{n-2}} = \frac{|x-z|}{n-2}.$

$\lim_{\varepsilon \to 0} |x-z| = 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_2} \left(G(z,x) \frac{\partial G(z,y)}{\partial n} - G(z,y) \frac{\partial G(z,x)}{\partial n} \right) dS = G(y,x).$$

$\Rightarrow G(x,y) = G(y,x).$

Физич. интерпретация ф-ции источника 8(продолж.)



эл. заряд $G(x,y)=\frac{e_+}{(n-2)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}}+$

$+\frac{e_-}{(n-2)\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+(x_i+y_i)^2}}$

Ф-ция источн. для един. сферы:

$G(x,y)=\mathcal{E}(x,y)-\mathcal{E}\left(|x|y,\frac{x}{|x|}\right)$.

$\left||x|y-\frac{x}{|x|}\right|=\left[|x|^2|y|^2-2xy+1\right]^{1/2}=\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|=|y|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\right|=|x|\left|y-\frac{x}{|x|^2}\right|$

$\Rightarrow g(x,y)=-\mathcal{E}\left(|x|y,\frac{x}{|x|}\right)$. при $|x|<1, |y|<1$ — гарм. по x, y.

$|x|=1 \vee |y|=1$: $|y-x|=\left[|x|^2-2xy+1\right]^{1/2}=\left||y|x-\frac{y}{|y|}\right|=\left||x|y-\frac{x}{|x|}\right|$

$\Rightarrow$ наша $G(x,y)$ удовл. требованиям ф-ции Грина

т.к. при $|y|=1$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i(y_i-x_i)}{|y-x|^n}-|x|\frac{y_i\left(|x|y_i-\frac{x_i}{|x|}\right)}{\left||x|y-\frac{x}{|x|}\right|^n}\right]=-\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}.$$

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_S\left(\cancel{G(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial n}}-u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\right)dy=$$

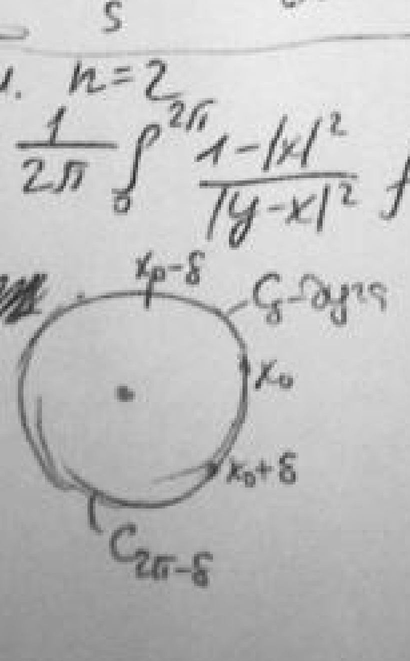
$$=-\frac{1}{\omega_n}\int_S u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}dS_y$$

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n}\int u(y)\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}dS_y$$

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_S u(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}dS_y$$ — интеграл Пуассона

Рассм. $n=2$

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|y-x|^2}f(y)\,d\varphi \quad (*)$$



$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{C_\delta}\frac{1-x^2}{|y-x|}ds$$

Рассм. $u(x)-f(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C}\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))ds=$

$$=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_\delta}\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))ds}_{I_1}+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_{2\pi-\delta}}\frac{1-x^2}{|y-x|}(f(y)-f(x_0))ds}_{I_2}$$

Фикс. $\varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon)$: $|I_1|\le \varepsilon/2$, $|I_2|\le\varepsilon/2$ $(x\to x_0)$

$\Rightarrow |u(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}u(x)=f(x_0)$, $|x|<1$, $|x_0|=1$.

$\Rightarrow$ ф-ла Пуассона $(*)$ даёт реш-е задачи Дирихле.
$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u(x)\big|_{x=x_0}=f(x_0) \quad |x_0|=1\end{cases}$$

Шар радиуса R:
$$u(x)=\frac{1}{\omega_n R}\int\limits_{R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^{n-2}}u(y)\,dS_y.$$

⑨ Эллиптич. ур-я общего вида.
Сопряжённый оператор. Формула Грина.

Лин. оператор в и.п. $2^{го}$ порядка имеет вид:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u \ , \ A_{ij} = A_{ji} \ ,$$

где A_{ij}, B_i, C – задан. в $D_0 \subset E_n$ действ. ф-ции.

Если $A_{ij} \in C^{1,0}(D_0) \Rightarrow Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^n l_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$ (1)

где $l_i(x) = B_i(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$. (2)

В случае $l_i(x) \in C^{1,0}(D)$ вводим понятие сопряжённого оператора:

$$L^* v \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i v) + Cv \quad (3)$$

Оператор самосопряж., когда $Lu = L^* u$.

Достаточное условие самосопряж. L: $l_i(x) = 0, \ x \in D_0, \ i = 1, \dots, n$. (4)

Это же условие является необходимым.

Док-во: Рассм. тождество $Lu = L^* u$. Примени:

$u = 1$ $\quad \sum_{i=1}^n 0 = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial l_i}{\partial x_i}$

$u = x_j$ $\quad 2l_j(x) + x_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial l_i}{\partial x_i} = 0 \quad j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow l_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Усл-е самосопряж. запис. в виде $B_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{ij}(x)}{\partial x_j}$ (из (2), (4)). $i = 1, \dots, n$

$u(x), v(x) \in C^{2,0}(D_0)$, по ф-лам (1), (3) имеем тождество:

$$vLu - uL^*v = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}v - \frac{\partial v}{\partial x_i}u\right)\right] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i u v) \quad (5)$$

всюду в D_0 задания этих операторов.

$\exists \ D \subset D_0$. Для $p_1(x), \dots, p_n(x) \in$ ~~[illegible]~~ $C^{2,0}(D \cup S)$ ф-ла Остроград.-Гаусса:

$$\int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_i} d\tau_x = \int_S \sum_{i=1}^n p_i(y) \cos \widehat{\nu y_i} \, dS_y \ ,$$

ν – ед. внешняя нормаль к $S = \partial D$ в т. $y \in S$

$(5) \left| \int_D \right. + $ ф. О.-Гаусса $\Rightarrow \int_D (vLu - uL^*v) d\tau_x = \int_S \left[a\left(v\frac{du}{dN} - u\frac{dv}{dN}\right) + buv\right] dS_y$

N – ед. вектор – конормаль в т. $y \in S$ с направл. косинусами:

$\cos\widehat{\nu y_i} = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cos\widehat{\nu y_i}$, $i=1,\dots,n$;

$a^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cos\widehat{\nu y_i}\right)^2$, $b = \sum_{i=1}^{n} l_i\cos\widehat{\nu y_i}$.

<u>Оператор L — эллиптичен</u>, т.е. соотв. ему хар-ая квадр. форма $a(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j$ полож. опр. всюду в D_0. Из этого требов. следует, что $a^2>0$.

Докажем это:

$a^2=0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\cos\widehat{\nu y_j}=0$ $i=1,\dots,n$.

$A=\det\|A_{ij}\|\neq 0$. относит. $\cos\widehat{\nu y_j}$, $j=1,\dots,n$, то: получаем, что: $\cos\widehat{\nu y_j}=0$, $y\in S$, $j=1,\dots,n$. А это противоречит требованию, что D — область класса $A^{1,h}$.

$y\in S$: $N\cdot\nu = \frac{1}{a}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\cos\widehat{\nu y_i}\cos\widehat{\nu y_j}$. $a(\lambda_1,\dots,\lambda_n)>0$.

$\Rightarrow N\cdot\nu>0 \Rightarrow$ конормаль N ни в одной точке S обл. D класса $A^{1,h}$ не выходит в касат. к S плоскость.

Гиперболические ур-ия общего вида.

Сопряженные операторы. Ф-ия Римана.

Канонич. вид:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + A(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + C(x,y)u_1 = F_1(x,y)$$

В характеристич. переменных $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ ур-е δ запишем

(*) $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F$, где $4a = A+B$; $4b = A-B$

$4c = C$, $4F = F_1$, $u(\xi,\eta) = u_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$

$\xi = const$, $\eta = const$ – характеристики ур-я (*)

В предположении дифференцируемости коэф-ов a и b ур-ия (*), вводится понятие оператора:

$$L^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv \quad (L^* - \text{сопряж. к } L)$$

Опр. Решение $v(\xi,\eta)$ сопряж. ур-ия $\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv = 0$, удовлетворяющее на характеристиках $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ усл-ям:
$v(\xi_1,\eta) = \exp\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)d\eta_2$, $v(\xi,\eta_1) = \exp\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)d\xi_2$, где (ξ_1,η_1) – произвольно фикс. точка области D задания ур-я (*), называется ф-ией Римана.

При дополнит. требовании непрерывности $\frac{\partial a}{\partial\xi}$, $\frac{\partial b}{\partial\eta}$ и c, ф-ия Римана существует!

Проинтегрируем сопряженное ур-ие:

$$v(\xi,\eta) - v(\xi,\eta_1) - v(\xi_1,\eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)d\xi_2 - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi,\eta_2)d\eta_2 +$$
$$+ \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)d\xi_2 + \quad (**)$$
$$+ \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 = 0$$

Из опр-я ф-ии Римана имеем: $v(\xi,\eta_1) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)d\xi_2 = 1$,
$v(\xi_1,\eta) - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 = 1$, $v(\xi_1,\eta_1) = 1$,

$\Rightarrow$ равенство $(**)$ можно записать в виде линейного интегрального ур-ия Вольтера II рода относит. $v(\xi,\eta)$:

$$v(\xi,\eta)-\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)d\xi_2-\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi,\eta_2)d\eta_2+$$

$$+\int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2\int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)d\eta_2=1.$$

(ур-е имеет единств. реш-е).

Обозначим ф-ю Римана $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ $(***)$.

Из опр-я ф-ии Римана имеем:

$$\frac{\partial R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}-a(\xi_1,\eta)R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)=0, \qquad (***)$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}-b(\xi,\eta_1)R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=0,\quad R(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=1$$

и

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1}+a(\xi,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi,\eta_1)=0 \qquad (****)$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1}+b(\xi_1,\eta)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta)=0,\quad R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1.$$

Для достаточно гладкой $u(\xi_1,\eta_1)$ имеет место тождество:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\eta_1}\left[u(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)-R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial\eta_1}-aR\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\eta_1}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial\xi_1}-bR\right)\right].$$

(ξ_0,η_0) - произвольн. точка в D.

Проинтегрируем по ξ_1 и η_1 в прямоуг. $\xi_0\le\xi_1\le\xi$, $\eta_0\le\eta_1\le\eta$ в силу $(***)$:

$$u(\xi,\eta)=u(\xi_0,\eta_0)R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)+\int_{\xi_0}^{\xi}R(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_1,\eta_0)}{\partial\xi_1}+b(\xi_1,\eta_0)u(\xi_1,\eta_0)\right]d\xi_1+$$

$$+\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_0,\eta_1;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_0,\eta_1)}{\partial\eta_1}+a(\xi_0,\eta_1)u(\xi_0,\eta_1)\right]d\eta_1+$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)d\eta_1$$

При $u(\xi,\eta)=R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)$ в силу $(****)$ из имеем:

$$\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)LR(\xi_0,\eta_0;\xi_1,\eta_1)d\eta_1=0\Rightarrow$$ ф-я Римана $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ относит. последней пары перем. ξ_1,η_1 явл-ся решением однородного ур-ия $LR(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0$

Аналогично при непр. правой части $F(\xi,\eta)$, ур-ия $Lu=F$ одним из его частн. реш. явл-ся ф-ия:

$$u_0(\xi,\eta)=\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)F(\xi_1,\eta_1)d\eta_1$$

Гиперболические ур-ия общего вида. Задача Коши.

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F;\quad L^*v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv$$

σ – разомкнутая дуга Жордана с непр. кривизной не имеющая точек касания с характеристиками

Q' и Q – точки пересеч. характеристик с кривой

Для произвольных дважды дифф-мых в обл G ф-ий $u(\xi_1,\eta_1)$ и $v(\xi_1,\eta_1)$ имеет место тожд-во:

$$2(vLu - uL^*v) = \frac{\partial}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v - \frac{\partial v}{\partial\xi_1}u + 2buv\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v - \frac{\partial v}{\partial\eta_1}u + 2auv\right)$$

Проинтегрируем по обл G и применим ф-лу Грина:

$\left\{\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \oint_{\partial G}(P\,dx + Q\,dy)\right\}$: имеем:

$$2\iint_G (vLu - uL^*v)\,d\xi\,d\eta = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}v - \frac{\partial v}{\partial\eta_1}u + 2auv\right)d\eta_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}v - \frac{\partial v}{\partial\xi_1}u + 2buv\right)d\xi_1 \quad (*)$$

(S – граница G)

∃ $u(\xi_1,\eta_1) = u(P')$ – реш-е ур-ия $Lu = F$,

$v(\xi_1,\eta_1) = v(P') = R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = R(P',P)$, $P = P(\xi,\eta)$

Из (*) находим

$$u(P) = \frac{1}{2}u(Q)R(Q,P) + \frac{1}{2}u(Q')R(Q',P) + \iint_G F(P')R(P',P)\,d\xi_1\,d\eta_1 - \frac{1}{2}\int_{QQ'}\left[\frac{\partial u(P')}{\partial N}R(P',P) - u(P')\frac{\partial R(P',P)}{\partial N}\right]d\sigma_{P'} - \int_{QQ'}\left[a(P')\frac{\partial\xi_1}{\partial N} + b(P')\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\right]R(P',P)u(P')\,d\sigma_{P'}, \quad (**)$$

где $\frac{\partial}{\partial N} = \frac{\partial\xi_1}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\xi_1}$, ν – внешняя нормаль дуги σ в точке P'

Если будем считать, что в правой части F, u и $\frac{\partial u}{\partial N}$ – произвольно заданные на σ достаточно гладкие ф-ии, то определённая этой формулой ф-ия $u(P)$ будет реш-ем ур-ия $Lu = F$.

Если искомое решение $u(P)$ ур-я $Lu = F$ и его производная $\frac{\partial u(P)}{\partial \ell}$ (где ℓ – заданный на σ вектор, который нигде не совпадает с касательной к σ) известны на σ: $u(P) = \varphi(P)$, $\frac{\partial u(P)}{\partial \ell} = \psi(P)$, $P \in \sigma$

где Φ и ~~Ψ~~ – дважды непрерывно дифф-мая, а
Ψ – один раз непр. дифф-ая,
то $\frac{\partial u}{\partial N}$ всегда можно определить однозначно.
$\Rightarrow$ ф-ла (**) дает решение задачи Коши
$Lu = F$ и $u(P) = \Phi(P)$, $\frac{\partial u(P)}{\partial \ell} = \Psi(P)$, $P \in \sigma$.

Из процесса получения (**) видно, что реш-е $\exists$ и $!$,
единственно и устойчиво

Гиперболические ур-ия общего вида. Задача Гурса.

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F$$

$$u(\xi,\eta) = u(\xi_0,\eta_0)R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta) +$$
$$+\int_{\xi_0}^{\xi} R(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_1,\eta_0)}{\partial\xi_1} + b(\xi_1,\eta_0)u(\xi_1,\eta_0)\right]d\xi_1 +$$
$$+\int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0,\eta_1;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_0,\eta_1)}{\partial\eta_1} + a(\xi_0,\eta_1)u(\xi_0,\eta_1)\right]d\eta_1 +$$
$$+\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta)\,Lu(\xi_1,\eta_1)\,d\eta_1 \quad (1)$$

← ~~получили после~~ [интегрир-я по частям] (предполагая, что $u(\xi,\eta)$ - реш-е ур-я $Lu=F$)

⇒ проинтегрируем по частям (предполагая, что $u(\xi,\eta)$ - решение $Lu = F$)

$$= u(\xi,\eta) = R(\xi,\eta_0;\xi,\eta)u(\xi,\eta_0) + R(\xi_0,\eta;\xi,\eta)u(\xi_0,\eta) -$$
$$-R(\xi_0,\eta_0,\xi,\eta)u(\xi_0,\eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t,\eta_0)R(t,\eta_0;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}R(t,\eta_0;\xi,\eta)\right]u(t,\eta_0)dt +$$
$$+\int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0,\tau)R(\xi_0,\tau;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial\tau}R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\right]u(\xi_0,\tau)d\tau +$$
$$+\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}R(t,\tau,\xi,\eta)F(t,\tau)d\tau$$

← Если в правой части заменить $u(\xi,\eta_0)$ и $u(\xi_0,\eta)$ на произвольные непр дифф-ые ф-ии, а $u(\xi_0,\eta_0)$ на const, то полученное $u(\xi,\eta)$ - регулярное решение $Lu = F$

$$\Rightarrow \begin{cases} Lu = F \\ u(\xi,\eta_0) = \varphi(\xi) \\ u(\xi_0,\eta) = \psi(\eta) \end{cases}$$

← задача Гурса, где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ - непр дифф-мые: $\varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0)$

⇒ такая задача имеет единственное устойчивое решение: $u(\xi,\eta)$:

$$u(\xi,\eta) = R(\xi,\eta_0;\xi,\eta)\varphi(\xi) + R(\xi_0,\eta;\xi,\eta)\psi(\eta) -$$
$$-R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\varphi(\xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t,\eta_0)R(t,\eta_0;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}R(t,\eta_0;\xi,\eta)\right]\varphi(t)dt +$$
$$+\int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0,\tau)R(\xi_0,\tau;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial\tau}R(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\right]\psi(\tau)d\tau +$$
$$+\int_{\xi_0}^{\xi}dt\int_{\eta_0}^{\eta}R(t,\tau;\xi,\eta)F(t,\tau)d\tau$$

Классические решения. Метод разделения переменных. Собственные функции и собственные значения.

Классическими называются регулярные решения уравнений в частных производных, удовлетворяющие соответствующим краевым, начальным и смешанным условиям рассматриваемой задачи в обычном смысле, т.е. в каждой точке носителя данных.

<u>Метод разделения переменных</u>

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = \alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)u$$

Будем искать решение в виде $u(x,t) = v(x)\cdot\omega(t)$

$$\Rightarrow \omega(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + C(x)v\right] =$$

$$= v(x)\left[\alpha(t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + \beta(t)\frac{d\omega}{dt} + \gamma(t)\omega\right]$$

Для того, чтобы равенство выполнялось $\forall x$ и t в области задания ур-ия необх. и дост-но вып-я 2-х равенств:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + [C(x)+\lambda]v = 0$$

где $\lambda = const$

$$\alpha(t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + \beta(t)\frac{d\omega}{dt} + [\gamma(t)+\lambda]\omega = 0$$

$\Rightarrow$ получим ОДУ и ур-ие в частных производных, в котором независимых переменных на 1 меньше.

<u>Пример</u>: Колебания упругой мембраны: $\in G$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y)$$

$$u(x,y,t) = 0, \; t > 0 \qquad (x,y) \in S = \partial G$$

$\Rightarrow$ Метод разд. перем.: $\Rightarrow$

$$\Delta v(x,y) + \lambda v(x,y) = 0 \qquad \text{и} \qquad \omega''(t) + \lambda\omega(t) = 0$$

$$v(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in S \qquad\qquad \lambda = const$$

Значение λ, для которого задача имеет нетривиальное решение, наз <u>собственным значением</u>, и $v(x,y)$ - соответствующей λ собственной функцией

Имеет место тождество

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \lambda v^2 \Rightarrow$$ интегрируем

и применяем ф-лу Остр-Гаусса. $\Rightarrow$

$$\int_G (v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy = \int_S v\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds + \lambda\int_G v^2\,dx\,dy = \lambda\int_G v^2\,dx\,dy \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda > 0$, т.к. $v(x,y) \neq 0$ и действительная

$\Rightarrow \lambda = \mu^2$, где $\mu = \mathrm{const} \in R$

$\Rightarrow \omega(t) = C_1\cos\mu t + C_2\sin\mu t$, где C_1, C_2 – const

Достаточно ограничиться $\mu > 0$

$\Rightarrow U_n(x,y,t) = V_n(x,y)(a_n\cos\mu_n t + b_n\sin\mu_n t)$ $n = 1, 2 \ldots$

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)(a_n\cos\mu_n t + b_n\sin\mu_n t)$$

и $\sum\limits_{n=1} a_n V_n(x,y) = \varphi(x,y)$; $\sum\limits_{n=1} \mu_n b_n V_n(x,y) = \psi(x,y)$

$(x,y) \in G$

$\{V_n\}$ – л.н.з. и $\int_G V_n V_m\,dx\,dy = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$

$\Rightarrow$ будем считать, что $\{V_n\}$ – ортонормированна

$$\Rightarrow a_n = \int_G \varphi(x,y) V_n(x,y)\,dx\,dy$$

$$b_n = \left[\int_G \psi(x,y) V_n(x,y)\,dx\,dy\right]\frac{1}{\mu_n}$$

Вариационные методы. Метод Ритца.

В вариационном исчислении имеются методы решения вариационных задач, в которых не используются ур-ия в частных производных. Эти методы применительно к задачам для ур-ий в частных производных принято называть вариационными или прямыми методами.

<u>Метод Ритца</u>: минимизация ф-ла $\Phi(u)$

$\{v_n\}$ $n=1,2\ldots$ – полная система допустимых ф-ций

Составим посл-ть $\{u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k\}$ $n=1,2\ldots$ $c_k = const$

Определим коэффициенты c_k, $k=1,\ldots n$, так, чтобы выражение $\varphi_n = \Phi(u_n)$ как ф-ия $c_1 \ldots c_n$ было минимальным

<u>Пример</u> $J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$, где $D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$

$H(u) = \int\limits_G u^2(x,y)\,dx\,dy$

где $G = \{0<x<\pi,\ 0<y<\pi\}$ и $H(u)=1$

Допустимые: $u(x,y)=0$ в $S=\partial G$ и непр $G \cup \varkappa$ с кусочно непр. произв. в G.

В кач-ве полной системы возьмем $\{\sin kx \cdot \sin ly\}$ где $k,l=1,2\ldots$

$\{u_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl} \sin kx \sin ly\}$ $n,m=1,2\ldots$

u_{mn} являются допустимыми для ф-ала $J(u)$ и

$d_{mn} = D(u_{mn}) = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}^2(k+l)$

$H(u_{mn}) = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2 = 1$

$\Rightarrow$ надо найти минимум d_{mn} при условии, что

$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2 = \frac{4}{\pi^2}$ $\Rightarrow$ получаем задачу на условный экстремум

$\Rightarrow$ решая, получаем, что $\forall m,n$ $c_{kl}=0$ при $k\neq 1$ и $l \neq 1$ одновременно

$c_{11} = \frac{2}{\pi}$; $d_{mn}=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} u_{mn} = u(x,y) = \frac{2}{\pi}\sin x \sin y$, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d_{mn} = D(x) = 2 = \lambda$

$\Rightarrow$ мы построили решение задачи о собств. значениях

$\Delta u + \lambda u = 0$ в G

$u(x,y)=0$ в $S=\partial G$

$\Rightarrow$ За решение задачи минимизации $J(u)$ при $H(u)=1$ можно принять ф-ю $u_n(x,y) =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k(x,y)$, где c_k $k=1,2..$ – определяются из задачи:

$$\begin{cases} J_n(c_1 \dots c_k) = D(u_n) = \min \\ h_n(c_1 \dots c_k) = H(u_n) = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow u_n$ – приближенное решение собств. ф-ии.

$\lambda_n = D(u_n)$ – приближенное собств. значение.

Метод Бубнова-Галеркина

Задача о собств. значениях $\begin{array}{l} \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в } G \\ u(x,y) = 0 \quad \text{в } S = \partial G \end{array}$

$\Rightarrow$ минимизация ф-ла $J(u) = \dfrac{D(u)}{H(u)}$

$D(u) = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$, $H(u) = \int\limits_G u^2(x,y)\,dx\,dy$, $H(u) = 1$

$\Rightarrow$ $\{v_n\}_{n=1,2..}^{\infty}$ - полная система допустимых ф-ий

$\{u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k\}_{n=1,2..}$ $c_k = const$

Коэффициенты c_k определяются из равенств:

$H(\Delta u_n + \lambda u_n, v_m) = 0 \quad m = \overline{1,n} \Leftrightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{n} H(\Delta v_k + \lambda v_k, v_m)c_k = 0 \quad m = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ получим однородную СЛАУ, в кот. число неизв. равно числу ур-ий

Такая система имеет нетривиальные решения $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{bmatrix} H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_1) & \dots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_1) \\ \dots & & \dots \\ H(\Delta v_1 + \lambda v_1, v_n) & \dots & H(\Delta v_n + \lambda v_n, v_n) \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ отсюда находим λ.

c_k, $k = \overline{1,n}$ - нетривиальные решения системы

$\Rightarrow$ $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k v_k$

Разрывные решения ур. ГД.

Законы сохр. на разрыве.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \qquad | \cdot v \\ \rho \dfrac{\partial v}{\partial t} + \rho v \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \dfrac{v^2}{2}\right) + \rho v \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon + \dfrac{v^2}{2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}(p v) = 0 \end{cases}$$

/* (1) · v + (2) */

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

/* (1) · $\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)$ + (3) */

$$\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) +$$

$$+ \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \rho v \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(p v) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\rho\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\rho v + p v\right) = 0$$

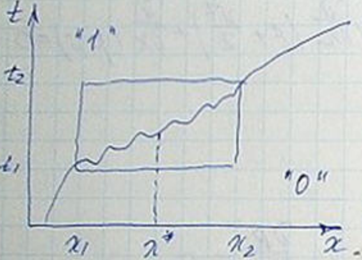
x_1 $\quad$ x_2

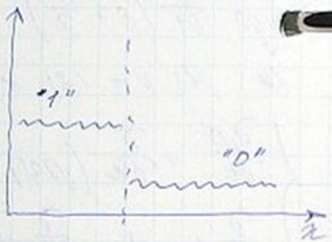
t_1 $\quad$ t_2

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{x_1}^{x_2} \rho v \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho v \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho v^2 + p) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \left(\rho v \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + p v\right) \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$$





каким условиям должны удовл. ф-ции справа и слева от разрыва?

при $\Delta t, \Delta x \to 0$ контур стянется в точку $\Rightarrow$ инт ур-ия превратятся в соотношения:

1) $\int_{x_1}^{x_2} \rho_{t_1} dx = \{$Th о средн.$\} = \Delta \cdot \rho^*$

$\int_{x_1}^{x_2} \rho_{t_2} dx = \Delta \rho^{****}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho v \Big|_{x_1} dt = \Delta t \, (\rho v)^{**}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho v \Big|_{x_2} dt = \Delta t \, (\rho v)^{***}$$

$$\Delta x \left(\rho^{****} - \rho^{*}\right) + \Delta t \left((\rho v)^{***} - (\rho v)^{**} \right) = 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \left(\ldots\ldots \right) + \left(\ldots\ldots \right) = 0$$

$$\Delta x, \ \Delta t \to 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to D \qquad \rho^{*} \to \rho_0, \quad \rho^{****} \to \rho_1$$

$$(\rho v)^{***} \to \rho_0 v_0 \qquad (\rho v)^{**} \to \rho_1 v_1$$

$$(\rho_1 - \rho_0) D + (\rho_0 v_0 - \rho_1 v_1) = 0$$

$$\boxed{\rho_0 (v_0 - D) = \rho_1 (v_1 - D)}$$

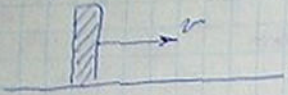
поток через разрыв должен сохраняться

D - скорость движения разрыва

аналогично для двух др. ур-ий:

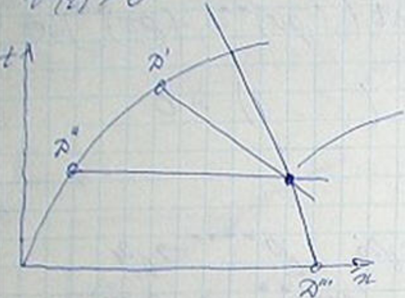
$$\begin{cases} \rho_0 (v_0 - D) = \rho_1 (v_1 - D) \\ \rho_0 (v_0 - D)^2 + p_0 = \rho_1 (v_1 - D)^2 + p_1 \\ \rho_0 (v_0 - D)\left(\varepsilon_0 + \dfrac{(v_0 - D)^2}{2} + \dfrac{p_0}{\rho_0}\right) = \rho_1 (v_1 - D)\left(\varepsilon_1 + \dfrac{(v_1 - D)^2}{2} + \dfrac{p_1}{\rho_1}\right) \end{cases}$$

Задача о поршне, вдв. в газ.



$\rho_0; p_0; c_0; v_0 = 0$

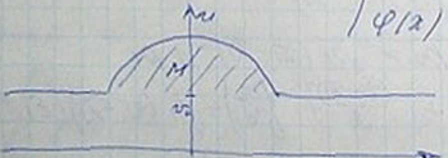
$v(t) > 0$



в какой-то момент времени возникает неоднор.

Движение холодного газа $T=0$ $p=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 & t>0 \quad -\infty < x < +\infty \\ v(+\infty) = v(-\infty) = v_0 > 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(+\infty) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(-\infty) = 0 \\ v(x,0) = v_0(x) = \begin{cases} v_0 = \text{const} \\ \varphi(x) & x \in [-1;1] \end{cases} \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = M$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dC} = 0$$

$$C: \quad \frac{dx}{dt} = v$$

$\Rightarrow v = const$ на хар-ке

$\Rightarrow v = const$ на $x - tv = const$

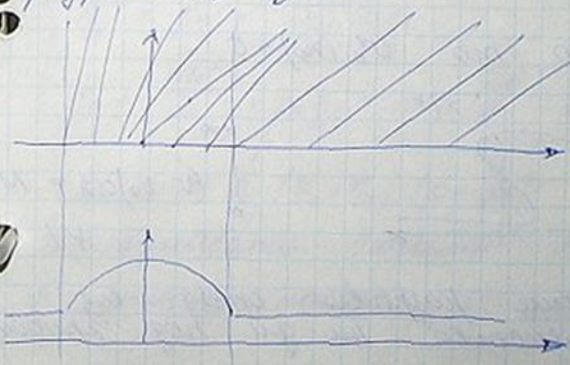
$\Rightarrow \forall$ дифф ф-ция вида $\varphi(x - tv)$ явл. реш. ур-ия

$v(x,t) = \varphi(x - tv)$

$\exists\ \varphi(z) = v_0(z)$

$\Rightarrow v(x,t) = v_0(x - t v(x,t))$ будет удовл. ур. и н.д.

!? но его не всегда удается разрешить !?



каждая точка профиля движется со своей скор. $\Rightarrow$ в какой момент времени появ. неоднозн.?

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v(x_0,t)\,t \\ x &= x_0 + \delta + v(x_0+\delta,t)\,t \end{aligned}\right\} \ominus$$

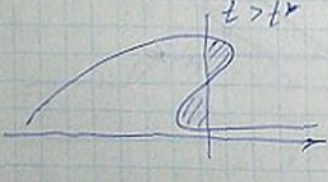
$$t = \frac{1}{\dfrac{v(x_0,t) - v(x_0+\delta,t)}{\delta}}$$

т.к. v - const на хар-ке то $v \to v_0$

$\delta \to 0$

$$t = -\frac{1}{v_0'(x_0)}$$

т.к. $t > 0$, то $v_0'(x_0) < 0$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} (v - v_0)\,dx = M \quad \forall t$$

положение разрыва опред. из постоянства пл-ди под кривой

Условие Гюгонио

$$\begin{cases} \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 \\ \rho_0 u_0^2 + p_0 = \rho_1 u_1^2 + p_1 \\ \rho_0 u_0 \left(\varepsilon_0 + \frac{u_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \right) = \rho_1 u_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \end{cases}$$

$u_0 = v_0 - D$

$u_1 = v_1 - D$

$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 = m \neq 0 \Rightarrow$ УВ

т.е. $\exists$ поток через разрыв

/* $= 0$ — конт. разрыв */

Обозн. $\eta_0 = \frac{1}{\rho_0}$ $\eta_1 = \frac{1}{\rho_1}$

$$\begin{cases} \frac{u_0}{\eta_0} = \frac{u_1}{\eta_1} \\ \frac{u_0^2}{\eta_0} + p_0 = \frac{u_1^2}{\eta_1} + p_1 \\ \varepsilon_0 + \frac{u_0^2}{2} + p_0 \eta_0 = \varepsilon_1 + \frac{u_1^2}{2} + p_1 \eta_1 \end{cases}$$

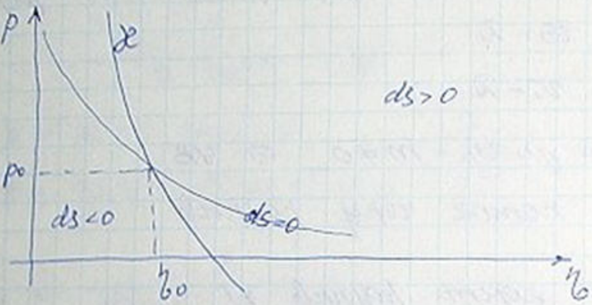
$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 = \frac{1}{2} (\eta_1 - \eta_0)(p_1 - p_0)$$

/* адиабата Гюгонио, получена в отсут. потока тепла */

для идеаль. газа: $p = \rho\varepsilon(\gamma-1)$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma+1)\eta_0 - (\gamma-1)\eta_1}{(\gamma+1)\eta_1 - (\gamma-1)\eta_0}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{(\gamma+1)p_0 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma+1)p_1 + (\gamma-1)p_0}$$



$\eta \to \infty \qquad \frac{p}{p_0} \to -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$

$p \to \infty \qquad \frac{\eta}{\eta_0} \to -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$

1) $p > p_0$ — УВ сжатия

$p < p_0$ — УВ разрежения

2) часть $\mathcal{H}$, соот УВ разр., недостижима, т.к. $dS \geq 0$

$\Rightarrow$ в отсут. работы вн. сил в замк. сис-ме УВ разр. $\nexists$

Th Цемплена */

3) В УВ ∃ max уровень сжатия

$$\tau > \tau_0 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \Rightarrow \rho < \rho_0 \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

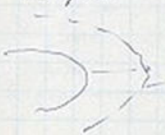
4) $$\frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{p_1}{p_0} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} > \frac{\gamma+1}{2\gamma} + \frac{\gamma-1}{2\gamma} = 1$$

(т.к. $p_1 > p_0$)

$$\frac{u_1^2}{c_1^2} < 1$$

т.е. газ "втекает" в разрыв со сверхзвук. скоростью, а "вытекает" с дозвуковой

/* исп. в авиации: самолёт со сверх летит в дозв. обл. */



УВ

Нелинейные ур-ия.

Решения типа бегущей волны.

(ур-ия Кортевега де Вриза и sin Гордона)

$$Lu = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1 \ldots i_n} A^k_{i_1 \ldots i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = f(x)$$

если $A^k_{i_1 \ldots i_n}$ завис. не только от $x = (x_1 \ldots x_n)$, то ур-ие наз. нелинейным

$u(x,t) = f(x - vt)$

решение типа "бегущей волны"

1) Ур-ие KdV

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} = 0$$

$\beta = const$

оно явл. модельным для

описания волн малой, но конечной амплитуды в средах, облад. дисперсией.

Это ур-ие имеет два типа решений (в зависим. от $\beta > 0$) — солитоны и период волны.

Солитоны (уедин волны)

$$u(s,t) = A\, ch^{-2}\left(\frac{s - At/3}{l}\right)$$

A - амплитуда солитона;

$l = \sqrt{\frac{12\beta}{A}}$ - эфф. ширина его основ.

Период волны

$$u(s,t) = 2\frac{a}{S}\, dn\left(\sqrt{\frac{\alpha}{6\beta}}\,\frac{s}{S}\right) + V$$

$dn\,x$ - эллип. ф-ция Якоби с модулем $0 \leq S \leq 1$

a, V - неком. const

Обезразмерим это ур-ие:

$\bar u = \frac{u}{A} \quad \bar s = \frac{s}{l} \quad \bar t = \frac{At}{l}$ (24)

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar u}{\partial \bar t} + \bar u \frac{\partial \bar u}{\partial \bar s} + \delta^{-2} \frac{\partial^3 \bar u}{\partial \bar s^3} = 0 \\ \bar u(\bar s, 0) = \bar v_0(\bar s) \end{cases}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{A l^2}{\beta}}$$

/* $\delta_* = \sqrt{12}$ */

$\delta \gg \delta_*$ (малое β) солитоны

$\delta \ll \delta_*$ период. волны

$\delta \sim \delta_*$ смеш. тип

2) sin Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u$$

$$u = f(x - \lambda t) = f(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda f'(\xi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda^2 f''(\xi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(\xi)$$

$$\lambda^2 f'' = a^2 f'' + \sin f$$

$$(\lambda^2 - a^2) f'' = \sin f$$

$$f'' = \frac{\sin f}{\lambda^2 - a^2} \quad \Big| \cdot 2f'$$

$$2f' f'' = 2f' \frac{\sin f}{\lambda^2 - a^2} \quad \Big| \int$$

$$(f')^2 = -\frac{2}{\lambda^2 - a^2} \left(\cos f - C \right)$$

$$f' = \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda^2 - a^2}} \sqrt{C - \cos f}$$

$$\frac{df}{\sqrt{C - \cos f}} = \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda^2 - a^2}}\, d\xi$$

$\exists \quad C = 1$

$$\frac{df}{\sqrt{1 - \cos f}} = \frac{df}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{f}{2}}} = \frac{2 d \frac{f}{2}}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{f}{2} \right|}$$

f:

$$\int_0^f \frac{df}{\sin \frac{f}{2}} = \pm \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - a^2}} \xi + C_1$$

Вывод ур-ия KdV
(мелкой воды и Буссинеска)

К ур-ия Буссинеска, опис. нелиней-ные волны в ряде диспергирующих сред - плазме, на поверх. жидкости небольшой глубины и др.

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla)\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f \\ \operatorname{div} \bar{v} = 0 \end{cases}$$

(мы к приближение в случае мелкой воды, когда дисперсия невелика)

Предположим, что движ. потен.:

$v = \operatorname{grad} \Phi$

Сис-му коорд. выберем так, чтобы пл-ть (x, y) совп. с пл-тью невозмущ. жидкости, а z - напр. вверх

Подставим $v = \operatorname{grad} \Phi$ в ур-ие Эйлера: $v_t + (v \cdot \nabla) v = -\frac{\nabla p}{\rho}$

$(\operatorname{grad}\Phi)_t + (\operatorname{grad}\Phi, \nabla)\operatorname{grad}\Phi = -\frac{\nabla p}{\rho}$

и проинтегрируем $\Rightarrow$

$\Phi_t = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p-p_0}{\rho} + gz = 0$

т.к. $\operatorname{div} v = 0$ и $v = \operatorname{grad}\Phi$, то

$\Delta\Phi = 0$

Дополним эти ур-ия гран. усл.:

1) Произв. по t от коорд. точек поверх. жидкости должны $=$ скоростям этих точек

($z = \eta(x, y, t)$ – ур-ие поверх. в момент времени t); продиф. его и учтем, что $\operatorname{div}\overline{v} = 0$)

$\eta_t + \eta_x\Phi_x + \eta_y\Phi_y - \Phi_z = 0$

2) Применим $\Phi_t = \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{p-p_0}{\rho} + gz = 0$ к точкам, леж. на границе, получим

$\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + g\eta = 0$

3) Нормальная сост. скорости у дна должна исчезать

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\Big|_{z=-h} = 0$$

Будем ↯ волны настолько малой амплитуды, что осн. ур-ие можно линеризовать ($\frac{a}{\lambda} \ll 1$, a - ампл. смещения; λ - длина волны)

$$\begin{cases} \Phi_t + g\eta = 0 & (z=0) \\ \eta_t - \Phi_z = 0 & (z=0) \end{cases}$$

<u>Случай мелкой воды</u>: длина волны велика по сравн. с глубиной ⇒ дисперсия ~~пренебрежимо мала~~ невелика;

Обезразмеривая эти ур-ия в случае мелкой воды, приходим к ур-ям Буссинеска.

∃ нелин. волны опис. ур-ием Буссинеска, при этом для простоты

$c^2(\rho) = c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = 1$

длина дисперсии

∃ $\frac{v}{c_0}$, $\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$, $\frac{\delta}{\lambda}$ явл. малыми первого порядка

Решение будем искать в виде:

$\rho(x,t) = \rho(v) + \varphi(x,t)$

величина второго пор. малости

$\Rightarrow \quad \varphi_t + c_0 \varphi_x = 0$

подст. $\rho(x,t)$ в ур-ие Буссинеска

/* исп. $c(v)\frac{d\rho}{dv} = \rho(v)$

$c(v) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} v$ */

$\varphi_t - c_0 \varphi_x = \frac{2\beta\rho_0}{c_0} v_{xxx}$

$v_t + v_x\left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v\right) + 2\beta v_{xxx} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\varphi_x = 0$

исключая φ из ур-ий получаем:

$v_t + \left(c_0 + \frac{\gamma+1}{2}\right) v_x + \beta v_{xxx} = 0$

Переходя к новым перем.:

$x' = x - c_0 t \qquad t' = t$

$$u = \frac{\gamma+1}{2} v$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0}$$

ур-ие KdV

// здесь $\beta = - \frac{2 c_0 \rho}{\rho_0} \nabla \Delta \rho$ //

Интегралы ур-ий КДВ.

Для ур-ия КдВ $\exists$ ∞ число законов сохранения

$$\begin{cases} u_t + u u_x + \beta u_{xxx} = 0 & (1) \\ u(x,0) = u_0(x) & (2) \\ u(0,t) = u(l,t) & (3) \end{cases}$$

проин. (1) ур-ие по простр. перем.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t \, dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u u_x \, dx}_{=0} + \beta \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} u_{xxx} \, dx}_{=0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) \, dx = const}$$

умножим (1) на $2u(x,t)$ и проинтегрируем по простр. перем.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2u \, u_t \, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 2\left(\frac{u^3}{3}\right)_x dx + \int_{-\infty}^{+\infty} 2u\beta \, u_{xxx} dx = 0$$

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} u\beta u_{xxx}\,dx = \beta u u_{xx}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \beta\int_{-\infty}^{+\infty} ((u_{xx})^2)_x\,dx$$

$\Rightarrow$ в силу краевых усл. все слагаемые кроме первого сокр.

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)\,dx = const}$$

Аналогично, умножая (1) на $(u^2 + 2\beta u_{xx})$

"уходят" из-за гр. усл.

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u^3}{3} - \beta(u_x)^2\right)dx + \underline{\frac{d}{dt} u u_x\Big|_{-\infty}^{+\infty}} +$$

$$+ \underline{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u^4}{4}\right)_x dx} + \cancel{2\beta\int_{-\infty}^{+\infty} u u_x u_{xx}\,dx} +$$

$$+ \cancel{\beta\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 u_{xxx}\,dx} + \beta^2\int_{-\infty}^{+\infty} (u_{xx})^2_x\,dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u^3(x,t)}{3} - \beta(u_x)^2\right)dx = 0$$

Автомодельные решения нелинейных ур-ий.

1)
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^3 & 0 < x < \pi \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что при малых нач. усл. температура будет $\downarrow$, при больших возрастать.

Положим

$$s(t) = \int_0^\pi (\sin x \cdot u(x,t))\, dx$$

$$\frac{ds}{dt} = \int_0^\pi \sin x \; u_t(x,t)\, dx =$$

$$= \int_0^\pi \sin x \; (u_{xx} + u^3)\, dx = -s +$$

$$+ \int_0^\pi u^3(x,t) \sin x \, dx$$

$\Rightarrow$ н-во Гельдера, где $1/p + 1/q = 1$

$$\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt \le \left(\int_a^b |x|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |y|^q dt\right)^{1/q}$$

Выберем $p = 3/2 \quad q = 3 \quad \Rightarrow$

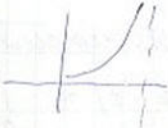
$$s(t) \le 2^{2/3} \left(\int_0^\pi u^3 \sin x \, dx\right)^{2/3}$$

$$\frac{ds}{dt} \geq -s + \frac{1}{4} s^3 \qquad t > 0$$

$$\frac{ds}{dt} = s \qquad e^t$$

$$\frac{ds}{dt} = s^2$$

$$-\frac{1}{s} = t - c \qquad s = \frac{1}{c-t}$$



$$t = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{s(0)+2}{s(0)-2}\right)$$

2) Режимы с обострением

$$u_t = (k(u)\,u_x)_x$$

при каких $k(u)$ будет неограниченное возрастание u?

Будем искать решение типа "бегущей волны"

$u(x,t) = f(\xi)$ – автомод. реш.-ие

27

$\xi = x - \lambda t \qquad \lambda > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda \frac{df}{d\xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(k(f)\frac{df}{d\xi}\right) = -\lambda \frac{df}{d\xi} \qquad \int$$

$$k(f)\frac{df}{d\xi} + \lambda f = c$$

$\exists$ для определенности $c = 0$

$$\frac{k(f)}{f}\frac{df}{d\xi} = -\lambda$$

добавим условие финитности решений (т.е. рассм. вырождающиеся ур-ия: $k(0)=0$)

$$\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta}\, d\eta < +\infty$$

/* т.е. процессы с конечной скоростью распростр. возмущений */

тогда

$$\int_0^{f(\xi)} \frac{k(\eta)}{\eta}\, d\eta = -\lambda(\xi - \xi_0)$$

обозн. $\begin{cases} \Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta \\ \Phi(0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(\xi) = \Phi^{-1}(-\lambda \xi)$

Итак, условие $\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta < \infty$ гарантирует $\exists$ конечного "фронта" тепловой волны, где может теряться необх. гладкость решения.

$u(x,t) = \Phi^{-1}(\lambda(\lambda t - x))$

$\begin{cases} \lambda t - x > 0 & \Phi \neq 0 \\ \lambda t - x < 0 & \Phi = 0 \end{cases}$

a) $\ast$ $\quad k(u) = k_0 u^\sigma \quad \sigma = const$

$\lambda u = k_0 u^\sigma u'$

$d\xi = \frac{k_0}{\lambda} u^{\sigma - 1} du$

$\xi = \frac{k_0}{\lambda \sigma} u^\sigma + c_1 \quad] \; c_1 = 0$

$u(\xi) = \left(\frac{\lambda \sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma} \xi^{1/\sigma}$ при $\xi \geq 0$

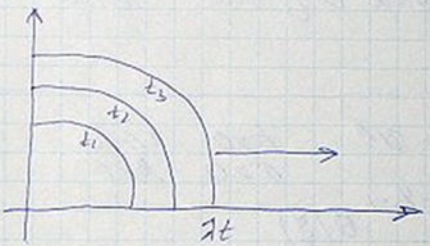
$u(\xi) = 0$ при $\xi < 0$

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 t^{1/\sigma} \left(1 - \dfrac{x}{\lambda t}\right)^{1/\sigma} & x < \lambda t \\ 0 & x > \lambda t \end{cases}$$

$$u_0 = \left(\frac{\lambda^2 \sigma}{k_0}\right)^{1/\sigma}$$

реш-ие удовл. след. св-вам:

$$\begin{cases} u(0,t) = u_0 t^{1/\sigma} \\ u(\infty,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \quad (x>0) \end{cases}$$



$\ast$ $\quad u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) \quad t>0 \quad x \in R^N$

$$\int_{R^N} u(x,t)\,dx = E_0$$

$$u(x,t) = t^\alpha \theta(\xi) \qquad \xi = \frac{x}{t^\beta}$$

$$\alpha t^{\alpha-1} \theta - \beta t^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \xi_i = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta} \cdot \nabla_\xi (\theta^\sigma \nabla_\xi \theta)$$

можно сократить, если

$$\alpha - 1 = \alpha(\sigma+1) - 2\beta$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} t^{\alpha}\,\theta(\xi)\,d\xi =$$

$$= t^{\alpha+N\beta} \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\xi)\,d\xi \quad \Rightarrow \quad \alpha + N\beta = 0$$

(чтобы энергия сохранялась)

$$\Rightarrow \eta^{N-1}\theta^{\sigma}\theta' + \frac{1}{N\sigma+2}\,\theta\,\eta^{N} = 0 \qquad \eta > 0$$

$$\theta^{\sigma}\theta'(0) = 0$$

$$\text{*} \quad u_t = (u^{\sigma}u_x)_x + u^{\beta} \qquad t > 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sigma > 0 \quad \beta > 1$$

$$u(x,t) = (T_0 - t)^{-1/\beta-1}\,\theta(\xi)$$

$$\xi = \frac{x}{(T_0 - t)^{m}} \in \mathbb{R} \qquad \theta(\xi) \geq 0$$

возьмём $m = \dfrac{\beta - (\sigma+1)}{2(\beta-1)}$

будем считать, что нач. усл. – чётные:

$$u_0(-x) = u_0(x)$$

$$\Rightarrow \theta(\xi, t) = (T_0 - t)^{\frac{1}{\beta-1}}\, u\left(t, \xi(T_0 - t)^{m}\right)$$

$$\theta(\xi, t) \qquad t \to T_0$$

$$\Rightarrow (\Theta^{\sigma}\Theta')' - m\,\Theta'\xi - \frac{1}{p-1}\Theta = 0$$