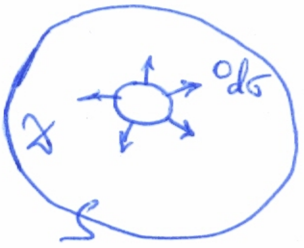
① Некоторые математические модели, описываемые уравнениями в частных производных.

1. Вывод уравнения колебания мембраны.



ρ - плотность мембраны
K - коэффициент натяжения
Tк - кинетическая энергия
Tp - потенциальная энергия

u - отклонение мембраны, $u = u(x,y,t)$

$T_к = \int_\gamma \rho \frac{u_t^2}{2} d\sigma$, $T_p = \left(\int_\gamma K\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,d\sigma - \int_\gamma K\,d\sigma\right) \approx$

$\approx \left(\int_\gamma K\left(1+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2\right)d\sigma - \int_\gamma K\,d\sigma\right)$

будем считать, что $u_x^2, u_y^2 \ll 1$, т.е деформации не велики

$\Rightarrow T_p = \int_\gamma \frac{K}{2}(u_x^2+u_y^2)\,d\sigma$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_\gamma \{\rho u_t^2 - K(u_x^2+u_y^2)\}\,d\sigma\,dt$ ↙ лагранжиан

ищем минимум => ур-ние Эйлера - Остроградского =>

$\Big\{ \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx = \delta(y)$ $y(x_0)=y_0$ $y(x_1)=y_1$ $\Rightarrow F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$

$\int_\gamma F(x,y,u,\underset{\overset{\shortparallel}{p}}{\frac{\partial u}{\partial x}},\underset{\overset{\shortparallel}{q}}{\frac{\partial u}{\partial y}})\,d\sigma = \delta[u] \Rightarrow F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_p - \frac{\partial}{\partial y}F_q = 0 \Big\}$

$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) - \frac{\partial}{\partial x}(K u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(K u_y) = 0$

при предположении, что u имеет вторые производные в этой области

ρ и K = const => $\rho u_{tt} = K(u_{xx}+u_{yy}) \Rightarrow \boxed{u_{tt} = a^2\Delta u}$

где $a^2 = K/\rho$

Край закреплен => $u|_S = 0$

Начальные условия => $u|_{t=0} = \varphi(x,y)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x,y)$

Имеет смысл и трехмерная задача: $u_{tt} = \Delta u$ для $x = 3$

2. Вывод уравнения распространения тепла.

$\dim x = 3$

c – удельная теплоемкость

ρ – плотность

k – коэффициент теплопроводности.

$u(x,t)$ – температура

Баланс тепла: $\int\limits_S k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds = \int\limits_T c\rho u_t dt$

=> по формуле Гаусса-Остроградского => $\int\limits_T \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) d\tau = \int\limits_T c\rho u_t d\tau$

=> $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = c\rho u_t$

Если $k = const$ => $\boxed{u_t = a^2 \Delta u}$, где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$

Начальные условия и граничные условия: $- u|_S = f(x)$

$-\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_S = \psi(x)$

$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u\Big|_S = h(x,t)$

④ Волновое уравнение, формула Кирхгофа

$\Delta u - u_{tt} = 0 \quad x = (x_1 - x_n) \in E^n,\ t \in E^1;\ u(x,0) = \varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$

↑ волновое ур-ние

Рассмотрим $n = 3$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

↑ гиперболическое ур-ние в E^{n+1}.

Лемма: $u(x,t) = \int_S \frac{\mu(y_1, y_2, y_3)}{|y-x|} dS_y$, где $|y-x| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2}$

S – сфера с центром в т. x и радиусом t, $S = \{|x-y|^2 = t^2\}$

$\mu(y_1, y_2, y_3) \in C^2$ на S по y_1, y_2, y_3. $u(x,t)$ – регулярное решение в E^4

Док-во: Сделаем замену переменных: $\underset{S}{y_i} = x_i + t\xi_i \quad i = 1,2,3$

$\Rightarrow |\xi| = 1 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$

$|y-x|^2 = t^2$, $dS_y = t^2 d\sigma_\xi$, где $d\sigma_\xi$ – элемент поверхности $|\xi| = 1$

$\Rightarrow u(x,t) = t\int_\sigma \mu(x + t\xi) d\sigma_\xi$

$\Rightarrow \Delta u = t\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} d\sigma_\xi$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_\sigma \mu(x+t\xi) d\sigma_\xi\right] = \int_\sigma \mu(x+t\xi) d\sigma_\xi + t\int_\sigma \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mu}{\partial y_i} \xi_i d\sigma_\xi =$

$= \frac{u}{t} + \frac{1}{t} I$, где $I = \int_S \left[\frac{\partial \mu}{\partial y_1} \nu_1 + \frac{\partial \mu}{\partial y_2} \nu_2 + \frac{\partial \mu}{\partial y_3} \nu_3\right] dS_y$, (ν_1, ν_2, ν_3) – внешняя нормаль к сфере

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{u}{t} + \frac{1}{t} I\right) - \frac{I}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} =$

$= \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t}$

По ф-ле Гаусса – Остроградского $I = \int_{|x-y| \le t} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \mu}{\partial y_i^2} dy = \int_D \Delta\mu\, dy$

Переходим от декартовых координат y_1, y_2, y_3 к сферическим ρ, φ, θ

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \rho\cos\varphi\sin\theta; & \theta \in [0, \pi] \\ y_2 = x_2 + \rho\sin\varphi\sin\theta; & \varphi \in [0, 2\pi] \\ y_3 = x_3 + \rho\cos\theta; \end{cases}$$

$\frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta$

$\Rightarrow dy = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$\Rightarrow I = \int_0^t \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \Delta\mu\, d\varphi$

$\Rightarrow \frac{\partial I}{\partial t} = t^2 \int_\sigma \Delta\mu\, d\sigma_\xi$, т.к. $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = d\sigma_\xi \Rightarrow \frac{1}{t}\frac{\partial I}{\partial t} = t\int_\sigma \Delta\mu\, d\sigma_\xi = \Delta u$ чтд

$$tM(\mu) = \frac{1}{4\pi t}\int_{\sigma} \mu(y)\, d\sigma_\zeta \Rightarrow M(\mu) = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma} \mu(y)\, d\sigma_\zeta$$

$$\Rightarrow M(\mu) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{S} \mu(y)\, dS_y$$

$tM(\psi)$ – регулярное решение

$\frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]$ – регулярное решение, т.к. ур-ние имеет постоянные коэффициенты, если $\varphi(x) \in C^3$, $\psi(x) \in C^2$

$\Rightarrow u(x,t) = tM(\psi) + \frac{\partial}{\partial t}[tM(\varphi)]$ ← регулярное решение

↑

<u>ф-ла Кирхгофа</u>

$$u(x,0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma} \varphi(x)\, d\sigma_\zeta = \varphi(x)$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma} \psi(x)\, d\sigma_\zeta = \psi(x)$$

⑤ Формула Пуассона, метод спуска.

$\Delta u = u_{tt}$ $\quad x = (x_1 \dots x_n) \in E^n$ $\quad t \in E^1$; $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$

Рассмотрим $n=2$. Решение может быть получено из ф-лы Кирхгофа методом спуска.

$$u(x,t) = u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{|y|^2=t^2} \psi(x_1+y_1, x_2+y_2)\,ds_y + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|y|^2=t^2} \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2)\,ds_y\right]$$

При вычислении поверхностных интегралов мы проектируем верхнюю и нижнюю полусферы на круг.

$$dy_1 dy_2 = \cos(\widehat{n_3, \nu}) = \frac{y_3}{|t|}\,ds_y$$

$$\Rightarrow ds_y = \frac{t\,dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\alpha} \frac{\psi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\alpha} \frac{\varphi(y_1, y_2)\,dy_1 dy_2}{\sqrt{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}}$$

где α = круг: $(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 < t^2$

↑ ф-ла Пуассона

⑩ Эллиптические уравнения, элементарные решения, потенциалы, принцип экстремума

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x) \qquad A_{ij} = A_{ji}$$

L удовлетворяет усл. равн. эллиптичности.

$$a_{ij} = \frac{\text{алгебраическое дополнение к эл-ту } A_{ij}(x)}{\det\|A_{ij}\| = A}$$

Введем ф-ю $\sigma(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$

Введем ф-ю Леви: $\psi(x,y) = \begin{cases} \frac{\sigma(x,y)^{\frac{2-n}{n}}}{(n-2)\sqrt{A(y)}\,\omega_n}, & n>2, \text{ где } \omega_n \text{ площадь ед. сферы в } E_n \\ -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(y)}}\ln\sigma, & n=2 \end{cases}$

Когда $A_{ij} = 0,\ i \neq j,\ A_{ii} = 1,\ i=1..n \Rightarrow \sigma(x,y) = |x-y|^2,\ A(y) = 1$

$\Rightarrow \omega_n\psi(x,y)$ - элементарное решение ур-ния Лапласа в пр-ве E_n

$$\omega_n\psi(x,y) = E(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}|x-y|^{2-n}, & n>2 \\ -\ln|x-y|, & n=2 \end{cases}$$

ф-я $u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_D E(x,y)\mu(y)d\tau_y$ наз ньютоновым потенциалом объемных масс, распределенных по области D с плотностью μ.

Рассм. $n=2 \Rightarrow Lu = \Delta u + \sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = f(x)$

Будем искать $u(x)$ в виде: $u(x) = \omega(x) + \frac{1}{2\pi}\int_D \ln|x-y|\mu(y)\,d\tau_y$

$\Rightarrow \mu(x) + \int_D K(x,y)\mu(y)d\tau_y = g(x)$, где $g(x) = L\omega(x) - f(x)$, а

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{i=1}^{2} B_i(x)\frac{x_i - y_i}{|x-y|^2} + C(x)\ln|x-y|\right]$$

Это интегральное ур-ние Фредгольма $2^{\text{го}}$ рода, ядро которого имеет особенность при $x=y$.

Принцип экстремума: если в области D всюду $C(x) < 0$, то регулярное в этой области решение $u(x)$ однородного ур-ния $Lu = 0$ ни в одной точке $x \in D$ не может достигать ни отрицательного минимума, ни положительного максимума.

Док-во: $\exists$ $u(x)$ в т. $x \in D$ достигает отрицательного минимума, тогда $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,\ i=1..n$; $\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\lambda_i\lambda_j \geq 0$ где $\lambda_1 .. \lambda_n$ - $\forall$ действ. параметры

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ki}\lambda_i\right)^2 \Rightarrow A_{ij} = \sum_{s=1}^{n} g_{si}g_{sj} \quad i,j=1..n$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,s=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} g_{si}g_{sj} \geq 0$$

$\Rightarrow \{u(x) < 0\} \Rightarrow Lu > 0 \nRightarrow Lu = 0$ чтд

⑪ Гиперболические уравнения общего вида, сопряжённые операторы, функция Римана.

Канонический вид: $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + A(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y} + C(x,y)u_1 = F_1(x,y)$

$\xi = x+y$, $\eta = x-y \Rightarrow Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F$, где

$4a = A+B$, $4b = A-B$, $4c = C$, $4F = F_1$

$u(\xi,\eta) = u_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$

Характеристиками уравнения являются $\xi = const$, $\eta = const$

В предположении дифференцируемости коэффициентов a и b можно ввести оператор: $L^* v = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv$, где L^* – сопряжённый к L

Опр: решение $v(\xi,\eta)$ сопряжённого уравнения:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\xi}(av) - \frac{\partial}{\partial\eta}(bv) + cv = 0,$$

удовлетворяющее на характеристиках $\xi = \xi_1$, $\eta = \eta_1$ условиям:

$$v(\xi_1,\eta) = e^{\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)d\eta_2}, \quad v(\xi,\eta_1) = e^{\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)d\xi_2},$$

где (ξ_1,η_1) – произвольно фиксированная точка области D задания уравнения $Lu = F$, наз. функцией Римана.

При дополнительном требовании непрерывности $\frac{\partial a}{\partial\xi}$, $\frac{\partial b}{\partial\eta}$ и c ф-я Римана существует.

Проинтегрируем сопряжённое уравнение:

$$v(\xi,\eta) + v(\xi_1,\eta_1) - v(\xi,\eta_1) - v(\xi_1,\eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)d\xi_2 - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2 \int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)d\eta_2 + \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)d\xi_2 + \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 = 0$$

Из определения следует: $v(\xi,\eta_1) - \int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta_1)v(\xi_2,\eta_1)d\xi_2 = 1$,

$v(\xi_1,\eta) - \int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi_1,\eta_2)v(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 = 1$, $v(\xi_1,\eta_1) = 1$

=> полученное равенство можно записать в виде линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно $v(\xi,\eta)$

$$v(\xi,\eta)-\int_{\xi_1}^{\xi} b(\xi_2,\eta)v(\xi_2,\eta)d\xi_2-\int_{\eta_1}^{\eta} a(\xi,\eta_2)v(\xi,\eta_2)d\eta_2+\int_{\xi_1}^{\xi} d\xi_2\int_{\eta_1}^{\eta} c(\xi_2,\eta_2)v(\xi_2,\eta_2)d\eta_2=1$$

$\uparrow$ такое уравнение имеет единственное решение

$v=R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$: Из определения =>

$$\frac{\partial R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)}{\partial\eta}-a(\xi_1,\eta)R(\xi_1,\eta;\xi_1,\eta_1)=0$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)}{\partial\xi}-b(\xi,\eta_1)R(\xi,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=0 \qquad R(\xi_1,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=1$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1}+a(\xi,\eta_1)R(\xi,\eta;\xi,\eta_1)=0$$

$$\frac{\partial R(\xi,\eta;\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1}+b(\xi_1,\eta)R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0 \qquad R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1$$

Очевидно, что $\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\eta_1}[u(\xi_1,\eta_1)R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)-R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)]=$

$=\frac{\partial}{\partial\xi_1}[u(\frac{\partial R}{\partial\eta_1}-aR)]+\frac{\partial}{\partial\eta_1}[u(\frac{\partial R}{\partial\xi_1}-bR)]\leftarrow$ интегрируем по ξ_1 и η_1 в промежутках $\xi_0\le\xi_1\le\xi$, $\eta_0\le\eta_1\le$

$$\Rightarrow u(\xi,\eta)=u(\xi_0,\eta_0)R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)+\int_{\xi_0}^{\xi}R(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_1,\eta_0)}{\partial\xi_1}+b(\xi_1,\eta_0)u(\xi,\eta_0)\right]d\xi_1+$$
$$+\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_0,\eta_1;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_0,\eta_1)}{\partial\eta_1}+a(\xi_0,\eta_1)u(\xi_0,\eta_1)\right]d\eta_1+\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)Lu(\xi_1,\eta_1)d\eta_1$$

При $u(\xi,\eta)=R(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\Rightarrow\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)LR(\xi_0,\eta_0;\xi_1,\eta_1)d\eta_1=0$

=> ф-я Римана $R(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)$ относительно последних пары переменных ξ_1,η_1 является решением однородного ур-ния $LR(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)=0$.

Аналогично при непрерывной правой части $F(\xi,\eta)$ ур-ния $Lu=F$ одним из его частных решений является ф-я

$$u_0(\xi,\eta)=\int_{\xi_0}^{\xi}d\xi_1\int_{\eta_0}^{\eta}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)F(\xi_1,\eta_1)d\eta_1$$

⑫ Гиперболические уравнения общего вида, задача Коши.

$$Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=F;\ L^*\vartheta=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}(a\vartheta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(b\vartheta)+c\vartheta$$

σ − разомкнутая дуга Жордана с непр. кривизной, не имеющая точек касания с характеристиками

Q' и Q − точки пересечения характеристик с кривой

$\forall$ функций дифференцируемых в обл G ф-ий $u(\xi_1,\eta_1)$ и $\vartheta(\xi_1,\eta_1)$ верно тождество:

$$2(\vartheta Lu-uL^*\vartheta)=\frac{\partial}{\partial\eta_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\vartheta-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi_1}u+2bu\vartheta\right)+\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\vartheta-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta_1}u+2au\vartheta\right)$$

Проинтегрируем по обл G тождество и применим ф-лу Грина:

$$\left\{\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\oint_{\partial G}(P\,dx+Q\,dy)\right\}$$

$$\Rightarrow 2\iint_G(\vartheta Lu-uL^*\vartheta)d\xi\,d\eta=\int_{\partial G}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\vartheta-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta_1}u+2au\vartheta\right)d\eta_1-\left(\frac{\partial u}{\partial\xi_1}\vartheta-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi_1}u+2bu\vartheta\right)d\xi_1\right]$$

$\exists\, u(\xi_1,\eta_1)=u(P')$ − решение ур-ния $Lu=F$

$\vartheta(\xi_1,\eta_1)=\vartheta(P')=R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=R(P',P)$

$$\Rightarrow u(P)=\frac{1}{2}u(Q)R(Q,P)+\frac{1}{2}u(Q')R(Q',P)+\int_G F(P')R(P',P)d\xi_1,d\eta_1-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{QQ'}\left[\frac{\partial u(P')}{\partial N}R(P',P)-u(P')\frac{\partial R(P',P)}{\partial N}\right]d\sigma_{P'}-\int_{QQ'}\left[a(P')\frac{\partial\xi_1}{\partial\nu}+b(P')\frac{\partial\eta_1}{\partial\nu}\right]R(P',P)u(P')d\sigma_{P'}$$

где $\frac{\partial}{\partial N}=\frac{\partial\xi_1}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial\nu}\frac{\partial}{\partial\xi_1}$, ν − внешняя нормаль дуги σ в точке P'

Если в правой части будем считать, что u и $\frac{\partial u}{\partial N}$ − произвольно заданные на σ достаточно гладкие ф-ии, то $u(P)$ − решение $Lu=F$

Если искомое решение $u(P)$ и $\frac{\partial u(P)}{\partial l}$, где l − заданный на σ вектор, который нигде не совпадает с касательной к σ, известны на σ:

$$u(P)=\varphi(P),\quad \frac{\partial u(P)}{\partial l}=\psi(P),\quad P\in\sigma,$$

где φ и ψ − соотв. функции и один раз непр. диф-мые, $\frac{\partial u}{\partial N}$ всегда можно определить однозначно.

$\Rightarrow$ полученная ф-ла дает решение задачи Коши $Lu=F$ и $u(P)=\varphi(P)$, $\frac{\partial u(P)}{\partial l}=\psi(P)$ $P\in\sigma$

Из процесса получения ф-лы $\Rightarrow$ решение единственно и устойчиво

⑬ Гиперболические уравнения общего вида, задача Гурса

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = F$$

$$u(\xi,\eta) = u(\xi_0,\eta_0)k(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} k(\xi_1,\eta_0;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_1,\eta_0)}{\partial\xi_1} + b(\xi_1,\eta_0)u(\xi_1,\eta_0)\right]d\xi_1 +$$

$$+\int_{\eta_0}^{\eta} K(\xi_0,\eta_1;\xi,\eta)\left[\frac{\partial u(\xi_0,\eta_1)}{\partial\eta_1} + a(\xi_0,\eta_1)u(\xi_0,\eta_0)\right]d\eta_1 +$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi_1 \int_{\eta_0}^{\eta} K(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)\, Lu(\xi_1,\eta_1)d\eta_1$$ ← $u(\xi,\eta)$ - решение $Lu=F$

проинтегрируем по частям

$$\Rightarrow u(\xi,\eta) = K(\xi,\eta_0;\xi,\eta)u(\xi,\eta_0) + K(\xi_0,\eta;\xi,\eta)u(\xi_0,\eta) -$$

$$- K(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)u(\xi_0,\eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t,\eta_0)K(t,\eta_0;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}k(t,\eta_0;\xi,\eta)\right]u(t,\eta_0)dt$$

$$+\int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0,\tau)k(\xi_0,\tau;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial\tau}k(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\right]u(\xi_0,\tau)d\tau +$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi} dt\int_{\eta_0}^{\eta} K(t,\tau,\xi,\eta)F(t,\tau)d\tau$$ ← если в правой части заменить $u(\xi,\eta_0)$ и $u(\xi_0,\eta)$ на произвольные непр. дифф-мые ф-ции, а $u(\xi_0,\eta_0)$ на const, то полученное $u(\xi,\eta)$ - регулярное решение $Lu=F$.

$$\Rightarrow \begin{cases} Lu = F \\ u(\xi,\eta_0) = \varphi(\xi) \\ u(\xi_0,\eta) = \psi(\eta) \end{cases}$$ ↙ задача Гурса

где $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ - непр. дифф-мые: $\varphi(\xi_0) = \psi(\eta_0)$

⇒ такая задача имеет ед. устойчивое решение $u(\xi,\eta)$:

$$u(\xi,\eta) = K(\xi,\eta_0;\xi,\eta)\varphi(\xi) + K(\xi_0,\eta;\xi,\eta)\psi(\eta) - K(\xi_0,\eta_0;\xi,\eta)\varphi(\xi_0) +$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi}\left[b(t,\eta_0)k(t,\eta_0;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial t}k(t,\eta_0;\xi,\eta)\right]\varphi(t)dt +$$

$$+\int_{\eta_0}^{\eta}\left[a(\xi_0,\tau)K(\xi_0,\tau;\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial\tau}k(\xi_0,\tau;\xi,\eta)\right]\psi(\tau)d\tau +$$

$$+\int_{\xi_0}^{\xi} dt\int_{\eta_0}^{\eta} k(t,\tau;\xi,\eta)F(t,\tau)d\tau$$

⑭ Классические решения, метод разделения переменных, собственные ф-ции и собственные значения

Классическими наз регулярные решения уравнений в частных производных, удовлетворяющие соотв. краевым, начальным, смешанным и т.д условиям рассматриваемой задачи в обычном смысле, т.е в каждой точке носителя данных

Метод разделения переменных:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)u = \alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(t)u$$

Будем искать решение в виде: $u(x,t) = v(x)w(t)$

$$\Rightarrow \omega(t)\left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + C(x)v\right] = v(x)\left[\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2} + \beta(t)\frac{dw}{dt} + \gamma(t)w\right]$$

Для того, чтобы равенство выполнялось для $\forall x$ и t в обл задания ур-ния необх. и дост. выполнения двух равенств:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + [C(x)+\lambda]v = 0$$

$$\alpha(t)\frac{d^2 w}{dt^2} + \beta(t)\frac{dw}{dt} + [\gamma(t)+\lambda]\omega = 0 \qquad \text{где } \lambda = \text{const}$$

$\Rightarrow$ получим ОДУ и ур-ние в частных производных, в которых независимых переменных на единицу меньше

Пример: колебания упругой мембраны.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y) \quad \text{в } G$$

$$u(x,y,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (x,y) \in S = \partial G$$

$\Rightarrow$ метод разделения переменных $\Rightarrow$

$$\Delta v(x,y) + \lambda v(x,y) = 0 \qquad \text{и} \qquad w''(t) + \lambda w(t) = 0 \qquad \lambda = \text{const}$$

$$v(x,y) = 0 \quad (x,y) \in S$$

$\nearrow$

Значения λ, для которого задача имеет нетривиальное решение, наз собственным значением, а $v(x,y)$ – соответствующей λ собственной ф-ей.

Имеет место тождество. $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \lambda v^2$

$\Rightarrow$ интегрируем и применяем ф-лу Остр Гаусса $\Rightarrow$

$$\int_G (v_x^2 + v_y^2)dxdy = \int_S v\frac{\partial v}{\partial \nu}ds + \lambda\int_G v^2 dxdy = \lambda\int_G v^2 dxdy \Rightarrow \lambda > 0, \text{ т.к } v(x,y) \neq 0 \text{ и действительная}$$

$\Rightarrow \lambda = \mu^2$, где $\mu = \text{const} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \tilde{w}(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t$, где $c_1, c_2 = const$

Достаточно ограничиться $\mu > 0$.

$\Rightarrow u_n(x,y,t) = \vartheta_n(x,y)(a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t)$ $n = 1, 2 \ldots$

$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x,y)(a_n \cos \mu_n t + b_n \sin \mu_n t)$

и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vartheta_n(x,y) = \varphi(x,y)$; $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n \vartheta_n(x,y) = \psi(x,y)$ $(x,y) \in G$

$\{\vartheta_n\}$ - ЛНЗ и $\int_G \vartheta_n \vartheta_m \, dxdy = 0$ при $\lambda_n \neq \lambda_m$

$\Rightarrow$ будем считать, что $\{\vartheta_n\}$ - ортонормированна

$\Rightarrow a_n = \int_G \varphi(x,y) \vartheta_n(x,y) dxdy$, $b_n = \left[\int_G \psi(x,y) \vartheta_n(x,y_2) dxdy\right] \frac{1}{\mu_n}$

⑮ Вариационные методы. Метод Ритца.

В вариационном исчислении имеются методы решения вариационных задач, в которых не используются ур-ния в частных производных. Эти методы применительно к задачам для ур-ний в частных производных принято называть вариационными или прямыми методами.

Метод Ритца: минимизация ф-ала $\Phi(u)$

$\{v_n\}$ $n=1,2\ldots$ – полная система допустимых ф-ий

Составим последовательность $\{u_n=\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\}$ $n=1,2\ldots$ $c_k=const$

Определим коэффициенты c_k, $k=1,\ldots n$ так, чтобы выражение $\varphi_n=\Phi(u_n)$ как ф-я $c_1\ldots c_n$ было минимальным

Пример: $I(u)=\frac{D(u)}{H(u)}$, где $D(u)=\int_G (u_x^2+u_y^2)\,dxdy$

где $G=\{0<x<\pi, 0<y<\pi\}$ и $H(u)=1$ $H(u)=\int_G u^2(x,y)\,dxdy$

Допустимые: $u(x,y)=0$ в $S=\partial G$ и непр. в $G\cup\partial G$ кус.-непр. произв. в G

В качестве полной системы возьмем $\{\sin kx \sin ly\}$ $k,l=1,2\ldots$

$\{u_{mn}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}\sin kx \sin ly\}$ $n,m=1,2\ldots$

u_{mn} являются допустимыми для ф-ала $I(u)$. и

$d_{mn}=D(u_{mn})=\frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2(k^2+l^2)$

$H(u_{mn})=\frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2=1$

=> надо найти минимум d_{mn} при условии, что $\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} c_{kl}^2=\frac{4}{\pi^2}$

=> получаем задачу на условный экстремум

=> решая, получаем, что $\forall m,n$ $c_{kl}=0$ при $k\neq 1$ и $l\neq 1$ одновременно

$c_{11}=\frac{2}{\pi}$; $d_{mn}=2$

=> $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} u_{mn}=u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sin x\sin y$, $\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} d_{mn}=D(x)=2=\lambda$

=> мы построили решение задачи о собственных значениях

$\Delta u+\lambda u=0$ в G

$u(x,y)=0$ в $S=\partial G$

⇒ за решение задачи минимизации $I(u)$ при $H(u)=1$ можно принять ф-ю $u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x,y)$ где c_k $k=1,2\dots$ определяются из задачи:

$$\begin{cases} d_n(c_1 \_ c_k) = D(u_n) = \min \\ h_n(c_1 \_ c_k) = H(u_n) = 1 \end{cases}$$

⇒ u_n - приближенное решение собственной ф-ии

$\lambda_n = D(u_n)$ - приближенное собственное значение

⑯ Метод Бубнова – Галеркина

Задача о собст. значениях $\Delta u + \lambda u = 0$ в G

$u(x,y) = 0$ в $S = \partial G$

=> минимизация ф-ала $J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$

$D(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2)dxdy$, $H(u) = \int_G u^2(x,y)\,dxdy$, $H(u) = 1$

=> $\{\delta_n\}_{n=1,2\ldots}$ – полная система допустимых ф-ий

$\{u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_k\}_{n=1,2\ldots}$ $c_k = const$

Коэффициенты c_k определяются из равенств:

$H(\Delta u_n + \lambda u_n, \delta_m) = 0$ $m = \overline{1,n}$ <=> $\sum_{k=1}^{n} H(\Delta\delta_k + \lambda\delta_k, \delta_m)c_k = 0$, $m = \overline{1,n}$

=> получим однородную СЛАУ, в которой число неизвестных равно числу ур-ний.

Такая система имеет нетривиальные решения <=>

$$\det\begin{bmatrix} H(\Delta\delta_1 + \lambda\delta_1, \delta_1) & \ldots & H(\Delta\delta_n + \lambda\delta_n, \delta_1) \\ \vdots & & \vdots \\ H(\Delta\delta_1 + \lambda\delta_1, \delta_n) & \ldots & H(\Delta\delta_n + \lambda\delta_n, \delta_n) \end{bmatrix} = 0$$

=> отсюда находим λ.

c_k, $k = \overline{1,n}$ – нетривиальные решения системы

=> $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_k$

⑰ Обобщенные решения классических задач для уравнения эллиптического типа.

$$Lu=\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^n l_i \frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f(x) \quad x\in G$$

где $G \subset E_n$ – обл и $S=\partial G$ – $(n-1)$-мерная поверхность

$u(x)=g(x)$, $x\in S$, $g(x)$ – действ непр ф-я.

Понятие решения задачи Дирихле будет обобщено для однородного краевого условия $u(x)=0$, $x\in S$.

Опр: В предположении, что A_{ij}, l_i, c – ограниченные измеримые ф-ии и $f\in L_2(G)$, под обобщенным решением [illegible] в пр-ве W^1_2 задачи $\underset{x\in G}{Lu=f}$, $\underset{x\in S}{u(x)=0}$ понимается ф-я $u(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_2$, для которой имеет место тождество:

$$\int_G\left(-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^n l_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+cuv-fv\right)dx=0 \quad \forall v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2$$

причем под $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ понимаются обобщенные производные ф-ии $u(x)$ первого порядка

{говорят, что ф-я $v(x)$ является обобщенной производной порядка m ф-ии $u(x)$, если имеет место тождество:

$$\int_G u D^m \varphi\, dx = (-1)^m\int_G v\varphi\, dx$$

∀ финитной φ с компактным носителем в G}

Если обобщенное решение $u(x)\in C^{2,0}(G)$ и ф-ии A_{ij} достаточно гладкие, то тождество из определения можно переписать:

$\int_G (Lu-f)v\,dx=0$. Откуда, требуя непр Lu и f =>, что $u(x)$ явл классическим решением задачи.

J $\exists L^*$: $L^*w=\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i w)+cw$.

Опр: обобщенным решением сопряженного ур-ния $L^*w=0$, [illegible] $w(x)=0$, $x\in S$, наз ф-я $w(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_2$:

$$\int_G \left(-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i w)\, v + c w v\right) dx = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2$$

Задача $L^* w = 0$, $w(x) = 0$ $x \in S$, наз. сопряженной с задачей $Lu = f$, $u(x) = 0$ $x \in S$.

Аналогично: обобщенное решение $w(x)$ из $C^{2,0}(G)$ является классическим решением.

Утверждения: ① Однородная задача Дирихле для однородного ур-ния $Lu = 0$ и сопряженная с ней задача имеют одинаковое, не более чем конечное число ЛНЗ решений.

② Для разрешимости задачи $Lu = f$, $u(x) = 0$ $x \in S$ необх. и достаточно, чтобы ф-я $f(x)$ удовлетворяла условиям

$\int_G f w_i dx = 0$, где $w_i, i = \overline{1,l}$ – все ЛНЗ решения сопряженной задачи

③ В области достаточно малой меры однородная задача $Lu = 0$, $u(x) = 0$, $x \in S$, имеет только тривиальное решение.

$\Rightarrow$ Теорема: Задача $Lu = f$ в G, $u(x) = 0$ в S $\forall f$ разрешима и притом однозначно $\Longleftrightarrow$ когда её однородная задача $Lu = 0$ в G, $u(x) = 0$ в S не имеет нетривиальных решений.

Из Т. и ⑤ $\Rightarrow$ в области достаточно малой меры $\exists!$ решение

Пример: $u(x, 0) = 0$, $x \in G$; $\Delta u = -f(x)$, $f \in L_2$

$\int_G f v\, dx = F(v) = \{$Т. Рисса$\} = (u, v) = \int_G \nabla u \nabla v\, dx \quad \forall v$

$\Rightarrow$ $\exists$ обобщенное решение $u(x)$: $\int_G (\nabla u \nabla v - f v) dx = 0$

Если $f(x) \equiv 0$ $\Rightarrow$ u_0 – обобщенное решение: $\int_G (\nabla u_0)^2 dx = 0$

$\Rightarrow u_0(x) \overset{\text{п.в.}}{\equiv} 0$ в G $\Rightarrow$ имеет место единственность.

⑱ Обобщенные решения классических задач для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Lu = f(x,t), \text{где } Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{n} l_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c_{(x,t)}u$$

L - равномерно эллиптический в $\Omega \subset E_{n+1}$

$G \subset E_n$ - огр обл., $Q = \{G \times (0<t<T)\} \subset \Omega$

$S = \{\partial G \times (0 \le t \le T)\}$, $T = \text{const} > 0$.

$u(x,0) = I(x)$, $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \partial(x)$, $u/_S = 0$.

Опр: обобщенным решением данной задачи в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)$ наз ф-я $u(x,t) \in W^1_2$, удовлетворяющая нач. условиям и тождеству:

$$\int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\vartheta - cu\vartheta\right)dxdt =$$

$$= \int_G \partial(x)\vartheta(x,0)\,dx + \int_Q f\vartheta\,dxdt \quad \forall \vartheta(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(Q) \text{ и } \vartheta(x,T) = 0$$

Чтобы тождество имело смысл, достаточно потребовать, чтобы A_{ij}, l_i, c - ограничены и измеримы, а $f \in L_2(Q)$, $\partial \in L_2(G)$

При $I(x) \equiv 0$ накладываются доп. условия относительно гладкости коэффициентов, ф-ии $\partial(x)$ и границы обл. Q. для классического решения задачи

{Изначально было другое определение:

$\{f_k(x,t)\}$ $k=1,2\dots$ - огр посл-ть, $f_k(x,t) \in L_2(G)$.

$f_k(x,t) \to f(x,t)$ $\forall$ фиксированного $t \in (0,T)$

Если $\forall k$ задача при $f = f_k$ имеет единственное классическое решение $u_k(x,t) \in L_2(Q)$, и для $u(x,t)$ - предел $\{u_k(x,t)\}$ в $L_2(G)$ при $\forall$ фикс $t \in (0,T)$, то эту ф-ю наз. обобщенным решением задачи}

Рассм. пример:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(x,t) \text{ в } Q$$

$u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$ $x\in G$, $u|_S = 0$.

Будем использовать определение через предел последовательности.

$$E_k^2(t) = \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right]dx = \int_0^t dt_1 \int_G \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t_1} f_k(x,t_1)dx$$

1 Докажем последнее равенство: $u_k(x,0) = u_{k_t}(x,0) = 0$ $x\in G$, $u_k|_S = 0$

$$\frac{\partial^2 u_k(x,t)}{\partial t_1^2} - \Delta u_k(x,t_1) = f_k(x,t) \text{ в } Q \;\Big|\times \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t_1} \text{ и инт. по } Q \Rightarrow$$

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1)\frac{\partial u_k(x,t_1)}{\partial t_1}dx = \int_0^t dt_1 \int_G \left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 + \nabla u_k \nabla \frac{\partial u_k}{\partial t_1} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial x}\right)dx\right.$$

Поменяем порядок интегрирования и применим ф-лу Г-Остр:

$$\int_0^t dt_1 \int_G f_k(x,t_1)\frac{\partial u_k(x,t_1)}{\partial t_1}dx = \frac{1}{2}\int_G \left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial t_1}\right)^2 + (\nabla u_k)^2\right]_{t_1=0}^{t_1=t} dx - \int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x}dS$$

где N_x - ед вектор внешней нормали к ∂G в т. x.

Из усл $\Rightarrow$ $\frac{\partial u_k}{\partial t_1} = 0$, $\nabla u_k = 0$, $x\in G$. и

$$\int_0^t dt_1 \int_{\partial G} \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x}dS_x = \int_S \frac{\partial u_k}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial N_x}dS_x = 0 \Rightarrow \text{чтд}$$

$$\frac{d}{dt}[E_k^2(t)] = 2E_k(t)\frac{d}{dt}E_k(t) = \int_G \frac{\partial u_k(x,t)}{\partial t} f_k(x,t)dx$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 2E_k\frac{d}{dt}E_k(t) \le \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\|\|f_k\| \\ \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \le \sqrt{2}E_k(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dE_k(t)}{dt} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_k\|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow E_k(t) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t \|f_k(t_1)\|dt_1 \Rightarrow \left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \le \int_0^t \|f_k(t_1)\|dt_1 \\ 2\|u_k\|\frac{d}{dt}\|u_k\| = 2\int_G u_k\frac{\partial u_k}{\partial t}dx \le 2\|u_k\|\left\|\frac{\partial u_k}{\partial t}\right\| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\|u_k\| \le \int_0^t \|f_k(t_1)\|dt_1 \Rightarrow \|u_k\| \le \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} \|f_k(t_2)\|dt_2 = \int_0^t (t-t_1)\|f_k(t_2)\|dt_2$$

$\Rightarrow$ из огр. $\{f_k\}$ следует огр $\{u_k\}$ в $L_2(G)$ $\forall t\in[0,T]$

Т.к. $\{f_k\}$ сх-ся $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N>0: \|f_{N+p} - f_N\| < \varepsilon$ $\forall p>0$

$\Rightarrow \|u_{N+p}(x,t) - u_N(x,t)\| \le \frac{\varepsilon}{2}t^2$ $\forall t\in[0,T]$

$\Rightarrow \{u_k\}$ - фунд $\Rightarrow$ сх-ся в $L_2(G) \Rightarrow \{u_k\} \to u \in L_2(G)$.

$\Rightarrow \exists!$ обобщенное решение

⑲ Обобщенные решения классических задач для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(x,t)$$

L - равн эллиптический в $\Omega \subset E_{n+1}$

$G \subset E_n$ - огр обл, $Q = \{G \times (0 < t < T)\} \subset \Omega$

$S = \{\partial G \times (0 \leq t \leq T)\}$ $T = const > 0$

$u(x,0) = \varphi(x) \in G$, $u(x_0,t) = \psi(t)$, $(x_0,t) \in S$

Опр: под обобщенным решением задачи при $\psi(t) \equiv 0$ в W_2^1 в предположении, что $\varphi \in L_2(Q)$, понимается ф-я $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$:

$$\int_Q \left(-u\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv\right) dx dt =$$

$$= \int_G \varphi v(x,0) dx + \int_Q f v \, dx dt \quad \forall v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 \text{ и } v(x,T) = 0$$

Классическое решение задачи $u(x,t)$ при $\psi(t) \equiv 0$ также удовлетворяет тождеству.

{аналогично гиперболическому типу обобщенное решение можно ввести через последовательности}

Пример: $\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = f_k(x,t)$ $(x,t) \in Q$

$u_k(x,0) = 0$, $x \in G$; $u_k|_S = 0$

] ∃! класс. решение u_k.

Справедлива оценка $|u_k(x,t)| \leq TM_k$, если $\max\limits_{(x,t) \in Q \cup \partial Q} |f_k(x,t)| \leq M_k$

{Докажем оценку:] $\exists (x_0,t_0)$: $u_k(x_0,t_0) > TM_k$

$\Rightarrow v(x,t) = u_k(x,t) + M_k(T-t)$ достигает макс в $Q \cup \partial Q$ ↯ с тем, что $\Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} = -f(x,t) + M_k > 0$

Если $u_k(x,t) < -TM_k$ ↯. }

$\{f_k\}$ - фундаментальна $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0: |f_{N+p} - f_N| < \varepsilon \ \forall p > 0$

$$\left.\begin{aligned} &(\partial_t - \Delta)(u_{N+p} - u_N) = f_{N+p} - f_N \\ &u_{N+p}(x,0) - u_N(x,0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |u_{N+p} - u_N| \leq T\varepsilon$$

$\Rightarrow \{u_k\}$ - фунд $\Rightarrow \exists\, u(x,t): \{u_k\} \xrightarrow{\text{равн}} u(x,t).$

$u(x,t)$ - обобщенное решение.

⑳ Вариационные методы, первая вариационная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad (x,y) \in G$$

$u(x,y) = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in S = \partial G$, $\varphi(x,y)$ – непр в S.

$D(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy$ – интеграл Дирихле

Опр: ф-ии, непр в $G \cup S$ и имеющие кус-непр производные первого порядка в G, такие что для них существует интеграл Дирихле и они удовлетворяют краевому условию, наз. допустимыми ф-ями.

Опр: первая вариационная задача – задача отыскания среди допустимых функций той ф-ии, для которой интеграл Дирихле минимален.

принцип Дирихле

Теорема: Если заданная на S ф-я $\varphi(x,y)$ такова, что класс допустимых ф-ий не является пустым, то задача Дирихле и первая вариационная задача эквивалентны.

{Справедливость этого утверждения будет доказана при дополнительных предположениях}

Док-во: $\boxed{\Rightarrow}$ $u(x,y)$ – решение $1^{ой}$ вариационной задачи $\Rightarrow$

класс допустимых ф-ий: $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$, где $\varepsilon = const$,

$h(x,y)$ – допустимая ф-я: $h(x,y) = 0 \quad (x,y) \in S$

$D(u+\varepsilon h) = D(u) + 2\varepsilon D(u,h) + \varepsilon^2 D(h) = \psi(\varepsilon)$, где $D(u,h) = \int_G (u_x h_x + u_y h_y)dxdy$

$\Rightarrow$ необходимое условие экстремума $\Rightarrow \psi' = 2D(u,h) + 2\varepsilon D(h)$

$\psi'|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow D(u,h) = 0.$

Ǝ $u(x,y)$ и $h(x,y)$ и S являются настолько гладкими, что

$u_x h_x + u_y h_y = (u_x h)_x + (u_y h)_y - h\Delta u$

$$\underbrace{\int_G ((u_x h)_x + (u_y h)_y)dxdy}_{\oint_S h\frac{\partial u}{\partial \nu}ds} = \int_G \Delta u h\, dxdy + \underbrace{\int_G (u_x h_x + u_y h_y)dxdy}_{0} \quad \Rightarrow$$

где ν – внешняя нормаль к S

$\oint_S h\frac{\partial u}{\partial \nu}ds = 0$ т.к. $h|_S = 0$

$\Rightarrow \int\limits_G h \Delta u \, dx dy = 0$

$\Rightarrow$ при предположении, что Δu – непр ф-я в G, в силу произвольности h $\Rightarrow$ $\Delta u(x,y) = 0$.

$\Leftarrow$ $u(x,y)$ – решение задачи Дирихле

$u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$ – класс допустимых ф-ий

и $D(u,h) = \int\limits_S h \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int\limits_G h \Delta u \, dx dy = 0$

$D(u)$ [illegible] $\leq D(u+\varepsilon h) = D(u) + \alpha^2 D(h)$

$\Rightarrow u$ – минимизирует интеграл Дирихле чтд.

㉑ Вариационные методы, вторая вариационная задача

$\Delta u + \lambda u = 0$, $(x,y)\in G$, $\lambda = const$

$u(x,y) = 0$, $(x,y) \in S$

Задача на собственные значения: Найти λ, при которых имеются нетривиальные решения.

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}, \text{ где } D(u) = \int_G (u_x^2 + u_y^2)dxdy$$

$$H(u) = \int_G u^2(x,y)dxdy$$

Опр: Допустимыми для ф-ала $J(u)$ ф-ями будем считать отличные от постоянных, удовлетворяющие краевому условию, непрерывные в $G \cup S$ действ. ф-ии с кусочно-непр. в G производными первого порядка, для которых интеграл Дирихле существует.

Опр: вторая вариационная задача – задача нахождения в классе допустимых ф-ий минимума ф-ала $J(u)$ и построения соотв. минимизирующей ф-ии.

Хв: При определенных доп. предположениях при наличии решения второй вариационной задачи, если $u(x,y)$ – минимизирующая ф-я, то $\lambda = J(u)$ явл наименьшим собств. числом задачи на собственные значения, а $u(x,y)$ – соотв. λ собств ф-ия.

Док-во: $u(x,y)$ – мин. ф-я; $\lambda = J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}$

Класс допустимых ф-ий $u(x,y) + \varepsilon h(x,y)$, $\varepsilon = const$,

$h(x,y)$ – допустимая ф-я

$$F(\varepsilon) = \frac{D(u+\varepsilon h)}{H(u+\varepsilon h)} = \frac{D(u) + 2\varepsilon D(u,h) + \varepsilon^2 D(h)}{H(u) + 2\varepsilon H(u,h) + \varepsilon^2 H(h)},$$

где $D(u,h) = \int_G (u_x h_x + u_y h_y)dxdy$, $H(u,h) = \int_G uh dxdy$

$\Rightarrow$ необх усл экстремума $\Rightarrow F'(0) = 0$, те

$$F'(0) = 2\frac{H(u)D(u,h) - D(u)H(u,h)}{H^2(u)} = 0 \Rightarrow H(u)D(u,h) - D(u)H(u,h) = 0$$

$\Rightarrow H(u)[\mathcal{D}(u,h) - \lambda H(u,h)] = 0 \Rightarrow \mathcal{D}(u,h) - \lambda H(u,h) = 0$

$$\mathcal{D}(u,h) = -\int_G \Delta u h\,dxdy$$

{т.к $\int_G ((u_x h)_x + (u_y h)_y)dxdy = \int_G \Delta u h\,dxdy + \int_G (u_x h_x + u_y h_y)dxdy$

$$\underset{\underset{0}{\parallel}}{\overset{\parallel}{\int_S h \frac{\partial u}{\partial \nu} ds}}$$, где ν − внешняя нормаль к S

, т.к $h|_S = 0$

При дополнительных условиях гладкости на ф-ии $u(x,y)$, $h(x,y)$ и контур S области G}

$\Rightarrow \int_G [\Delta u h + \lambda u h]dxdy = 0 \Rightarrow$ при дополнительном требовании непрерывности $\Delta u \Rightarrow \Delta u + \lambda u = 0$.

λ^* − отличное от 0 собств значение, u^* − соотв. λ^* собств ф-я

$\Rightarrow H(\Delta u^* + \lambda^* u^*, u^*) = -\mathcal{D}(u^*) + \lambda^* H(u^*) = 0 \Rightarrow \lambda^* = \frac{\mathcal{D}(u^*)}{H(u^*)} \geq \frac{\mathcal{D}(u)}{H(u)} = \lambda$

$\Rightarrow \lambda$ наименьшее. чтд

$\exists\ \lambda_1$ − наименьшее, u_1 − соотв λ_1 собств ф-я $\Rightarrow c u_1(x,y)$ − собств ф-я

$\Rightarrow$ без ограничения общности можно считать, что $H(u_1) = 1$, $\mathcal{D}(u_1) = \lambda_1$

$\Rightarrow \lambda_2$ можно найти из: $\min J(u) = J(u_2) = \lambda_2$, $H(u, u_1) = 0$

аналогично док-ву $\Rightarrow \mathcal{D}(u_2, \zeta) - \lambda_2 H(u_2, \zeta) = 0\ \forall \zeta : H(\zeta, u_1) = 0$

Это же верно $\forall \eta$. $\zeta(x,y) = \eta(x,y) - H(\eta, u_1)u_1$

$\Rightarrow \mathcal{D}(u_2, \zeta) - \lambda_2 H(u_2, \zeta) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{D}(u_2, \eta) - \lambda H(u_2, \eta) = 0$

аналогично

$\Rightarrow H(\Delta u_2 + \lambda_2 u_2, h) = 0 \Rightarrow \Delta u_2 + \lambda u_2 = 0$ чтд

Аналогично $\forall n$: $\lambda_n = J(u_n) = \min J(u)$
$H(u) = 1$, $H(u, u_i) = 0$ $i = 1 \_ n-1$

㉒ Разрывное решение в уравнениях газовой динамики, законы сохранения на разрыве

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \rho v \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(pv) = 0 \end{cases}$$

← ур-ние неразрывности

← ур-ние движения

← ур-ние состояния газа

ε – внутренняя энергия ед. объема

$(1) * v + (2) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

$(1) * (\varepsilon + \frac{v^2}{2}) + (3) \Rightarrow (\varepsilon + \frac{v^2}{2})\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\varepsilon + \frac{v^2}{2})\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) + \rho \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) +$

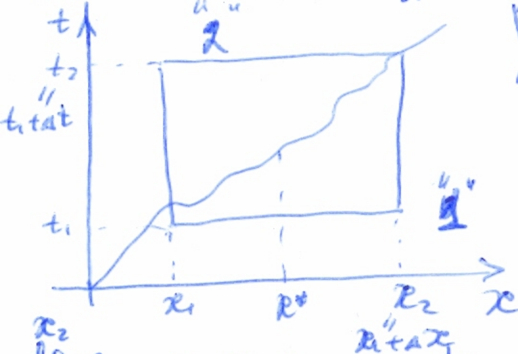
$+ \rho v \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) + \frac{\partial}{\partial x}(pv) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}((\varepsilon + \frac{v^2}{2})\rho) + \frac{\partial}{\partial x}((\varepsilon + \frac{v^2}{2})\rho v + pv) = 0$

Проинтегрируем от x_1 до x_2, от t_1 до t_2

$\int_{x_1}^{x_2} \rho \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} \rho v \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0; \int_{x_1}^{x_2} \rho v \Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho v^2 + p)\Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$

$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\varepsilon + \frac{v^2}{2})\Big|_{t_1}^{t_2} dx + \int_{t_1}^{t_2} (\rho v(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) + pv)\Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0$



Вопрос: какими условиями должны удовлетворять ф-ии справа и слева от разрыва?

При $\Delta t, \Delta x \to 0$ контур стянется в точку $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ интегральные ур-ния превратятся:

$\int_{x_1}^{x_2} [\rho_{t_2} - \rho_{t_1}] dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}] dt \Rightarrow$

$\Rightarrow [\rho_{t_2 \atop x=x^*} - \rho_{t_1 \atop x=x^{**}}]\frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{x_2 \atop t_1^*} + (\rho v)_{x_1 \atop t_2^{**}} \Rightarrow \left\{ {\Delta x \to 0 \atop \Delta t \to 0} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\rho_2 - \rho_1)U = -(\rho v)_2 + (\rho v)_1 \Rightarrow$ переходим в систему координат, связанную с разрывом: $u_1 = U - v_1$, $u_2 = U - v_2 \Rightarrow \boxed{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$

Аналогично из двух других ур-ний $\Rightarrow \boxed{p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2}$

$\rho_1 u_1 (\varepsilon_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}) = \rho_2 u_2 (\varepsilon_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2})$

㉓ Условия Гюгонио.

Закон сохранения на разрыве:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}$$, где $W = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$

потенциал

внутренняя энергия ед объема

{ Ур-ния:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right]$$ }

Процесс адиабатический => нет потока тепла

$$dQ = d\varepsilon + p\,d\tau \Rightarrow d\varepsilon = -p\,d\tau = -p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2}d\rho$$

$$\Rightarrow d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \varepsilon d\rho + \frac{p}{\rho}d\rho = w\,d\rho .$$

$$p = R\rho T , \quad \varepsilon = c_v T$$

$$w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \Rightarrow W = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1}{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_1} ; \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1)\rho_2 - (\gamma-1)\rho_1}{(\gamma+1)\rho_1 - (\gamma-1)\rho_2}$$

{Например $\gamma_{\text{двухатомного газа}} = 7/5$)

Если мощный взрыв : $p_2 \gg p_1$

$$\Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1 + (\gamma-1)\frac{p_1}{p_2}}{\gamma-1 + (\gamma+1)\frac{p_1}{p_2}} \Rightarrow \rho_2 = \rho_1 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \rho_1 \cdot 6$$

уплотнение

$$\Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\frac{p_2}{\rho_1}} , \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{2(\gamma+1)}\frac{p_1}{\rho_2}}$$

не поддаются измерению, их можно только посчитать.

Если газ покоится $\Rightarrow v_1 = 0 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}\frac{p_1}{\rho_2}}$

㉕ Вывод ур-ния КдВ. (уравнение мелких вод и Буссинеска)

$$\frac{\partial \bar v}{\partial t} + (\bar v \nabla)\bar v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f$$

$\operatorname{div} \bar v = 0$ ← ур-ние неразрывности

$v(r,t)\big|_{t=0} = v_0(r)$ $\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\dot x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\dot y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\dot z$

$\bar\eta v\big|_s = 0$, $v_n\big|_s = 0$ ← условия непротекания

На поверхности $p\big|_{s^+} = p\big|_{s^-}$

Ур-ние Эйлера: $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + f$, $\operatorname{div}\bar v = 0$

$f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$ — потенциальная сила

Умножим ур-ние Эйлера на $\rho \bar v$ и проинтегрируем:

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\bar v|^2\right) + \bar v\nabla p + v\nabla U = 0$

Считаем, что поле стационарно, т.е. $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|\bar v|^2 + U\right) + \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = 0$

Энергия $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho|\bar v|^2 + U \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\bar v\nabla|\bar v|^2 + \bar v\nabla p + \bar v\nabla U = 0$

$\{\bar a\nabla\varphi = \operatorname{div}(a\varphi) - \varphi\operatorname{div}\bar a\}$

$\bar\Pi = \bar v\left(p + \frac{1}{2}\rho|v|^2 + U\right)$ ↙ вектор Умова-Пойнтинга

$\Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}\bar\Pi$ Закон сохранения энергии: $\frac{d}{dt}\int_\tau \varepsilon\, d\tau + \int_s \bar\Pi \bar n\, ds = 0$

Пусть движение жидкости стационарно

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho|v|^2 + U + p\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho|v|^2 + U + p = const$ ↙ интеграл Бернулли.

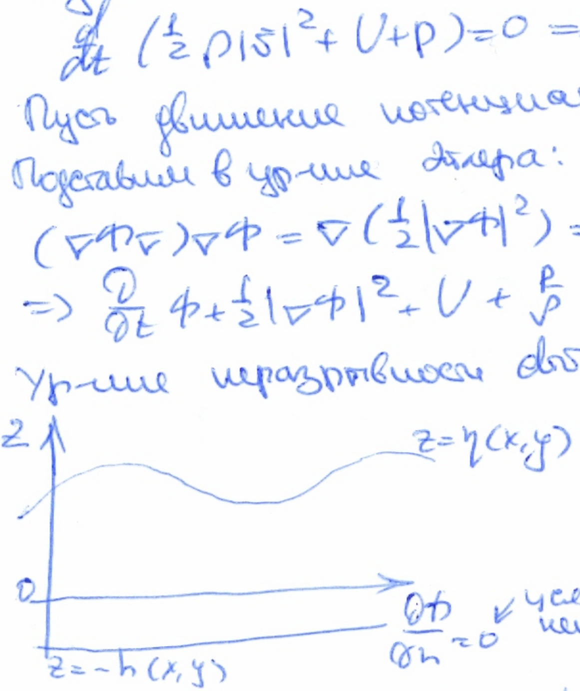
Пусть движение потенциально: $\bar v = \nabla\Phi$, Φ — потенциал скорости

Подставим в ур-ние Эйлера: $\nabla\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + (\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi = f$, $f = -\frac{1}{\rho}\nabla U$

$(\nabla\Phi\nabla)\nabla\Phi = \nabla\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right) \Rightarrow \nabla\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho}\right] = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + U + \frac{p}{\rho} = C(t)$ — интеграл Бернулли-Коши

Ур-ние неразрывности $\operatorname{div}\nabla\Phi = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0$.



$\Delta\Phi = 0$. Интеграл Бернулли $\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz + p = 0$

$\xi = \eta(x,y,t) - z$

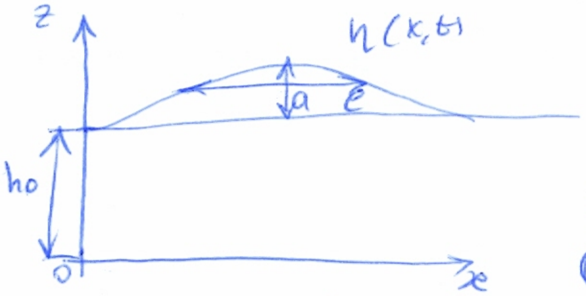
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\eta + \Phi_x\eta_x + \Phi_y\eta_y - \Phi_z\big|_z = \eta(x,y,t) = 0$

Интеграл Бернулли-Коши:

$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ ↙ усл. непротекания $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + g\eta(x,y,z)\Big|_{z=\eta(x,y,t)} = -p_0(x,y,t)$

Начальные скорости: $\Phi\big|_{t=0} = \Phi_0(x,y,z)$, $\eta\big|_{t=0} = \eta_0(x,y)$

Теория мелкой воды: переход к одномерному по координате движению.



Вводятся безразмерные параметры:

$\alpha = \frac{a}{h_0}$ (в дальнейшем $\alpha \ll 1$); $\beta = \frac{h_0^2}{\ell^2}$

a – характерная амплитуда волн.

ℓ – длина волн

Безразмерные величины: $\frac{x}{\ell}, \frac{z}{h_0}, \frac{t\sqrt{g h_0}}{\ell}, \frac{(\eta-h_0)}{a}, \frac{\sqrt{gh_0}}{g\ell a}\varphi$

ОБ: x, z, t, η, φ.

Вместо ур-ния Лапласа: $\beta\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad 0<z<1+\alpha\eta$; $\varphi_z\big|_{z=0} = 0 \leftarrow$ усл. непротекания

При $z = 1+\alpha\eta$: $\eta_t + \alpha\varphi_x\eta_x - \frac{1}{\beta}\varphi_z = 0$; $\varphi_t + \eta + \frac{1}{2}\alpha\varphi_x^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\varphi_z^2 = 0$

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\beta^m\frac{z^{2m}}{(2m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}f(x,t)$$

$$\Rightarrow (*)\begin{cases}\eta_t + \frac{\partial}{\partial x}[(1+\alpha\eta)f_x] - \{\frac{1}{6}(1+\alpha\eta)^3\frac{\partial^4}{\partial x^4}f + \frac{1}{2}\alpha(1+\alpha\eta)^2\eta_x\frac{\partial^3}{\partial x^3}f\}\beta + O(\beta^2) = 0\\ \eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 - \frac{1}{2}(1+\alpha\eta)^2\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial t} + \alpha f_x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \alpha f_{xx}^2\}\beta + O(\beta^2) = 0\end{cases}$$

Считаем, что $0<\beta\ll 1$ (волна сильно размазана). Опустим члены более высокого порядка: $\eta_t + [(1+\alpha\eta)f_x]_x = 0$

$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 = 0$

О.Б. $u = f_x + \phi_x$, Дифференцируем 2ое ур-ние по x и возвращаемся к размерным переменным:

$$\left.\begin{aligned}&\eta_t + [(h_0+\eta)u]_x = 0\\ &u_t + uu_x + g\eta_x = 0\end{aligned}\right\}$$ ур-ния мелкой воды

Пусть $\alpha \ll 1$, т.е. амплитуда мала $\Rightarrow \eta_t + u_x = 0$, $u_t + \eta_x = 0$ $\quad f_x = u \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta_{tt} = c_0^2\eta_{xx}$, где $c_0^2 = gh_0$ получились обычные волны.

Пусть $\alpha = O(\beta)$. Из (*) получим:

$$\begin{cases}\eta_t + [(1+\alpha\eta)u]_x - \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0\\ u_t + 2uu_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xxt} = 0\end{cases}$$ ур-ние Буссинеска

↖ порождает уединенную волну

Они описывают волны малой амплитуды на мелкой воде. Если выделить волны, бегущие только вправо, то получим ур-ние КдВ.

Ищем решение в виде: $u = A_0(\eta) + \alpha A_1(\eta) + \beta B_1(\eta) + O(\alpha^2+\beta^2)$, а η в виде $\eta_t + \eta_x = \alpha C_1(\eta) + \beta C_2(\eta) + O(\alpha^2+\beta^2) \Rightarrow$ подставим в ур-ния

$\eta_t + [A_0]_x + \alpha[(\eta A_0)_x + (A_1)_x] + \beta[(B_1)_x + \frac{1}{6}(A_0)_{xxx}] + O(\alpha^2+\beta^2) = 0$

$[A_0]_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + A_0(A_0)_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}(A_0)_{xxt}] + O(\alpha^2+\beta^2) = 0$

$\eta_t = -\eta_x + O(\alpha+\beta) \Rightarrow$ все производные по t можно заменить на производные по x с другим знаком и $A_0(\eta) = \eta$.

$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_x + 2\eta\eta_x] + \beta[(B_1)_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx}] = 0$

$\eta_t + \eta_x + \alpha[(A_1)_t + \eta\eta_x] + \beta[(B_1)_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}] = 0$

$A_1 = \eta^2\sigma \Rightarrow B_1 = \sigma\eta_{xx} \Rightarrow \eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0$

$\Downarrow \sigma = -\frac{1}{4} \quad \Downarrow \sigma = \frac{1}{6}$

$\eta_t + c_0(1 + \frac{3}{2}\frac{\eta}{h_0})\eta_x + \frac{1}{6}h_0^2 c_0\eta_{xxx} = 0$

В каноническом виде: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \leftarrow$ ур-ние KDV.

㉗ Автомодельные решения нелинейных уравнений.

$u_t = (k(u)u_x)_x$. При каких k будет неограниченное возрастание температуры. Будем искать решение типа бегущей волны

$u(x,t) = f(x-\lambda t) = f(\zeta)$ ← автомодельное решение

$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda \frac{df}{d\zeta}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\zeta} \Rightarrow \frac{d}{d\zeta}\left(k(f)\frac{df}{d\zeta}\right) = -\lambda\frac{df}{d\zeta}$

$\Rightarrow k(f)\frac{df}{d\zeta} + \lambda f = C$, Пусть для определенности $C=0$.

$\Rightarrow \frac{k(f)}{f}\frac{df}{d\zeta} = -\lambda$. Добавим условие финитности решения $\int_0^1 \frac{k(\eta)}{\eta}d\eta < \infty$

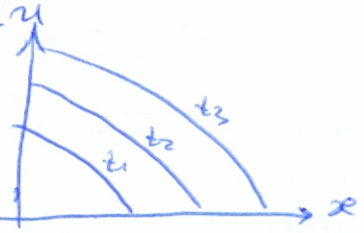
Введем $\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta}d\eta$ $u \geq 0$, $\Phi(0) = 0$

$\Rightarrow \int_0^{f(\zeta)} \frac{k(\eta)}{\eta}d\eta = -\lambda(\zeta - \zeta_0) \Rightarrow \Phi(f(\zeta)) = -\lambda(\zeta-\zeta_0) \Rightarrow f(\zeta) = \Phi^{-1}(-\lambda\zeta)$

$\Rightarrow u_A(t,x) = \Phi^{-1}[\lambda(\lambda t - x)^*]$ (О.Б*: $\Phi \neq 0$ $\lambda t - x > 0$; $\Phi = 0$ $\lambda t - x < 0$)

Пусть $k(u) = k_0 u^\sigma$, $\sigma = const \Rightarrow \Phi^{-1}(u) = (\sigma u)^{1/\sigma}$

$\Rightarrow u_A(t,x) = [\sigma\lambda(\lambda t - x)^*]^{1/\sigma}$



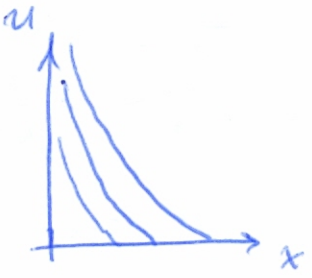
Пусть $k(u) = |\ln u|^{-1}$, $x \in (0, 1/2)$, $k(u) > 0$, $k(0) = 0$

$\int_0 \frac{k(\eta)}{\eta}d\eta$ ← расх-ся

$\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta}d\eta =$ [illegible] $\int_0^u \frac{d\eta}{\ln|\eta|\eta}$

Пусть $k(u) = u\exp(-u)$, $u > 0$.

$u_A(t,x) = \begin{cases} -\ln[1-\lambda(\lambda t - x)] & 0 \leq x \leq \lambda t \\ 0, & x > \lambda t \end{cases}$



Рассм. $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$

$\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)dx = E_0$, $u(t,x) = t^\alpha \theta(\zeta)$, $\zeta = \frac{x}{t^\beta}$ ← автомодельное решение

Подставим $\Rightarrow \alpha t^{\alpha-1}\theta - \beta t^{\alpha-1}\sum_{i=1}^N \frac{\partial\theta}{\partial\zeta_i}\zeta_i = t^{\alpha(\sigma+1)-2\beta}\nabla_\zeta(\theta^\sigma\nabla_\zeta\theta)$

Можно сократить, если $\alpha - 1 = \alpha(\sigma+1) - 2\beta$

$\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} t^\alpha\theta(\zeta)dx = t^{\alpha+N\beta}\int_{\mathbb{R}^N}\theta(\zeta)d\zeta \Rightarrow \alpha + N\beta = 0$, чтобы энергия сохранялась

$\Rightarrow \eta^{N-1}\theta^\sigma\theta' + \frac{1}{N\sigma+2}\theta\eta^N = 0$, $\eta > 0$, $\theta^\sigma\theta'(0) = 0$

↑ подбирается автомодельная переменная.

Рассм. $u_t = (u^\sigma u)_x$ $\sigma = const$ $t > 0$, $x > 0$, $u(0,x) = u_0$ $x > 0$

$u_0^{\sigma+1} \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $u(t,0) = u_1(t)$ $t > 0$

Возьмем степенное граничное решение: $u_1(t)=(1+t)^m$ $t>0$ $m=const$

Будем искать автомодельное решение в виде: $u_A(t,x)=(1+t)^m\theta_A(\xi)$

где $\xi=\frac{x}{(1+t)^{\frac{1+m\sigma}{2}}}$. Сделаем замену $t\to\frac{t}{\alpha}$, $x\to\frac{x}{\alpha^{\frac{1+m\sigma}{2}}}$, $u\to\alpha^m u$

$\Rightarrow$ автомодельное ур-ние: $(\theta_A^\sigma\theta_A')'+\frac{1+m\sigma}{2}\theta_A'\xi-m\theta_A=0$

$\theta_A(0)=1$, $\theta_A(\infty)=0$ ОДУ.

Возьмем экспоненциальное граничное решение: $u_2(t)=e^t$ $t>0$

$u_A(t,x)=e^t f_A(\eta)$, $\eta=\frac{x}{\exp(\frac{\sigma t}{2})}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow(f_A^\sigma f_A')'+\frac{\sigma}{2}f_A'\eta-f_A=0$ $\eta>0$; $f_A(0)=1$, $f_A(\infty)=0$

Рассмотрим задачу с внешним источником: $u_t=(u^\sigma u_x)_x+u^\beta$

$t>0$, $x\in R$, $\sigma>0$, $\beta>1$

$u_A(t,x)=(T_0-t)^{\frac{-1}{\beta-1}}\theta_A(\xi)$, $\xi=\frac{x}{(T_0-t)^m}\in R$ $\theta_A(\xi)\geq0$

Возьмем $m=[\beta-(\sigma+1)]/[2(\beta-1)]$.

Будем считать начальные условия четными: $u_0(-x)=u_0(x)$ $x\in R$

$\Rightarrow$ $\theta(t,\xi)=(T_0-t)^{1/(\beta-1)}u(t,\xi(T_0-t)^m)$ $t\in[0,T_0]$

· $(\theta_A^\sigma\theta_A')'-m\theta_A'\xi-\frac{1}{\beta-1}\theta_A=0.$

Одно дело найти автомодельное решение, но важно исследовать устойчивость