1

Теория игр.

§1. Введение.

3.09.2007

1. Антагонистич. игры
   (з-чи с неопр-тью)
2. Неантагонистич.
   2 игрока, стремящиеся
   оптимизир. прибыль
3. Многокритер. задачи

Лит-ра:

Владимир Викторович

1. А.А Васин, В.В.Морозов
   "Теория игр и модели мат
   экономики
   М. Макс Пресс. 2005"
   648 13-17

Вера Васильевна

2. В.В. Морозов А.Г Сухарев
   В.В. Федоров
   "Исследование операций в
   з-чах и упражнениях М.: ВШ 1986

! Будет к/р в середине ноября!

Глава I Антагонистические игры

§2 Седловые точки и решения антагонистич. игр.

$F(x,y)$ $x \in X, y \in Y$ $X \times Y$ - мн-ва стратегий

Опр $(x^0, y^0) \in X \times Y$ наз. седловой точкой ф-ции F на $X \times Y$, если

$$F(x, y^0) \leq F(x^0 y^0) \leq F(x^0, y) \quad \forall x \in X, \ y \in Y \qquad (1)$$

Игра: два игрока 1 и 2
↙ стратегия 1 ↘ стратегия 2

Выборы стратегий и/з (нормальная форма игры)

$F(x,y)$ - ф-я выигрыша 1ого игрока:
1ый игрок ее максимиз.
2ой игрок ее минимиз

=> Антагонист. игра!

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$

игра, набор объектов

$$(x^0, y^0): \ \max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0 y^0) = \min_{y \in Y} F(x^0, y) \qquad (1)$$

(такая точка, это стратегие)

Опр Решением антагонистич. игры Γ наз-ся следующая тройка $(x^0 y^0 v)$: (x^0, y^0) - седловая точка F, $v = F(x^0, y^0)$

x^0, y^0 - опт. стратегии игроков
v - значение игры (цена)

Корректность о-ния:
м.б. несколько седловых точек
=> необх. д-ть лемму

Лемма 1 (x^0, y^0) и $(x^* y^*)$ - с.т. ф-ции F на $X \times Y$

Тогда, $F(x^0 y^0) = F(x^* y^*)$

(если это д-м ⇒ корректно)

Д-во:

тк $(x^* y^*)$ с.т ⇒

$$F(x y^*) \le F(x^* y^*) \le F(x^* y) \quad (2)$$

$\forall x \in X$

$\forall y \in Y$

$$\Rightarrow F(x^0, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0 y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^* y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^* y^0) \underset{(1)}{\le} F(x^0 y^0)$$

чтд

Опр Антаг. игра Г наз-ся матричной игрой, если X, Y - мн-ва стратегий - конечные, т.е. $X = \{1, 2 .. m\}$

$Y = \{1, \ldots n\}$

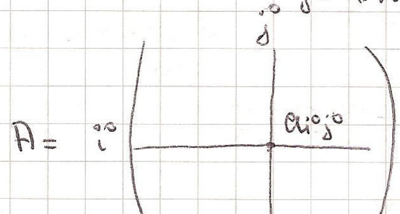
$\Rightarrow i \in X, j \in Y$ - выбор игроков

$F(ij) = a_{ij} \Rightarrow$ матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Опр (i^0, j^0)-ст, A - в терминах матр. игры с этой м-цей

$a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}$ $\quad i = 1 .. m$

$j = 1. n$



Примеры 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ⇒ утв-ние:

$(x^0 y^0): F(x^0 y^0) = v$

$\not\Rightarrow (x^0 y^0)$ с.т.

ст. $(1,1)$ $(2,1)$

$v = 0$

$a_{12} = v = 0$

2. $A = \begin{array}{c|cc} & о & р \\ \hline о & -1 & 1 \\ р & 1 & -1 \end{array}$ ⇒ смешанные

Орлянка

$F(x,y)$ на $X \times Y$

необх. и дост условие С.Т

Пусть 1ый игрок выбрал x

$\Rightarrow \underset{w(x)}{\underset{=}{\inf_{y \in Y}}} F(x,y)$ - гарант. результат (т.е меньше он не получит)

$$\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x,y)$$

нижнее значение игры.

Опр Стратегию 1ого игр $x^0 \in X$ наз. максиминной если для нее $\inf_{y \in Y} F(x^0 y) = \underline{v}$

$y \in Y$

$M(y) = \sup_{x \in X} F(x,y)$ гарантир. проигрыш

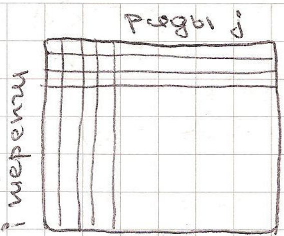
$\bar{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y)$ Верхнее значение игры

Опр $y^0 \in Y$ наз. минимаксной, если для нее $\sup_{x \in X} F(xy^0) = \bar{v}$

Лемма 2 В $\forall$ антагонист. игре $\underline{v} \leq \bar{v}$

$$\bar{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y)$$

$$\underline{v} = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(xy)$$



a_{ij} - рост

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Док-во:
$$\underset{\substack{\parallel\\ W(x)}}{\inf_{y\in Y} F(x,y)} \le F(xy) \le \sup_{x\in X} F(xy) \;{}^{\parallel} M(y)$$

$$\underline{v} = \sup_{x\in X} W(x) \le M(y)$$

$$\underline{v} \le \bar{v} = \inf_{y\in Y} M(y)$$

Теорема 1.1.

1) Для того, чтобы F имела на X×Y с.т. необходимо и достаточно, чтобы

$$\max_{x\in X} \inf_{y\in Y} F(xy) = \min_{y\in Y} \sup_{x\in X} F(xy) \quad (\alpha)$$

Г: $\underline{v} = \bar{v} = v$

2) (α) и (x^0y^0) с.т. ⇔ $\begin{cases} \inf F(x^0y) = \underline{v} \\ \sup F(xy^0) = \bar{v} \end{cases}$ (β)

Д-во: Необх Д-м (x^0y^0) с.т. ⇒ (α), (β)

$$\bar{v} = \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} F(xy) \le \sup_{x\in X} F(x,y^0) \overset{(1)}{=} F(x^0y^0) \overset{(1)}{=}$$

$$= \inf_{y\in Y} F(x^0y) \le \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} F(xy) = \underline{v}$$

$$\bar{v} \le \underline{v} \overset{12}{\le} \bar{v}$$

⇒ условие (β) вып.
и усл. (α) тоже вып.

Дост (α) вып, x^0, y^0: β ⇒ (x^0y^0) с.т.

$$F(x^0y^0) \le \sup_{x\in X} F(xy^0) \underset{(\beta)}{=} \bar{v} \overset{(\alpha)}{=} \underline{v} \overset{(\beta)}{=} \inf_{y\in Y} F(x^0y) \le$$

$$\le F(x^0y^0)$$

т.е. $\sup\limits_{x\in X} F(xy^0) = F(x^0y^0) = \inf\limits_{y\in Y} F(x^0y)$

zũg

$X^0 = \{x^0 \in X \mid (\beta)\}$ $Y^0 = \{y^0 \in Y \mid (\beta)\}$

$X^0 \times Y^0$ - мн. во всех седловых точек

Пример 1. $F(xy) = xy$ $X = Y = (-\infty, \infty)$

$(0,0)$ $0\cdot y = 0\cdot 0 = x\cdot 0$

$v = 0$ $\inf\limits_{y\in Y} xy = -\infty$ $x \neq 0$

$\sup\limits_{x\in X} xy = +\infty$ $y \neq 0$

2\.

$$A = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{array}\right)_{4\times 4}\end{array} \qquad \begin{array}{c} W(i) = \min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij} \\ -4 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{array}$$

$M(j) = \max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}$ 7 2 7 2

$\underline{v} = \max\limits_{1\le i\le 4} \min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$ $\Rightarrow$ по т-ме с.т. существует

$\underline{v} = 2$ $X^0 = \{2, 3\}$

$\overline{v} = \min\limits_{1\le j\le 4} \max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}$ мн. во с.т.:

$(2,2)$ $(2,4)$ $(3,2)$ $(3,4)$

$\overline{v} = 2$ $Y^0 = \{2,4\}$

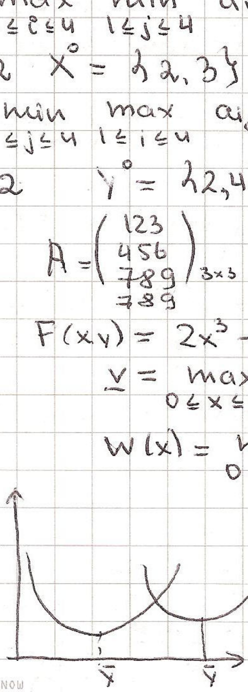
D/z $A = \begin{pmatrix} 123 \\ 456 \\ 789 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ $\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 7 \end{array}$ $\underline{v} = 7$ $\{3\}$ $\Rightarrow \{3,1\}$ с.т

789 $\overline{v} = 7$ $\{1\}$

3\. $F(xy) = 2x^3 - 3xy + y^2$ $X = Y = [0,1]$

$\underline{v} = \max\limits_{0\le x\le 1} \min\limits_{0\le y\le 1} F(x,y)$

$W(x) = \min\limits_{0\le y\le 1} F(x,y) = F(x, y(x))$



$F'_y = -3x + 2y = 0$

$0 \le \bar{y} = \frac{3x}{2} \le 1$

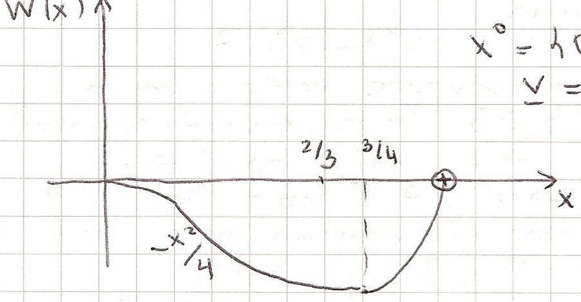
$y(x) = \bar{y}$

$0 \le x \le \frac{2}{3}$

$+\frac{2}{3} < x \le 1$ $y(x) = 1$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & , 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 1 & 2/3 < x \le 1 \end{cases} \Rightarrow W(x) = F(x, y(x)) =$$

$$= \begin{cases} -x^2/4 & , 0 \le x \le 2/3 \\ 2x^2 - 3x + 1 & , 2/3 < x \le 1 \end{cases}$$



$x^0 = \{0, 1\}$

$\underline{v} = 0$

$X = Y = [0, 1]$

$\bar{v} = \min\limits_{0 \le y \le 1} \max\limits_{0 \le x \le 1} F(x, y)$

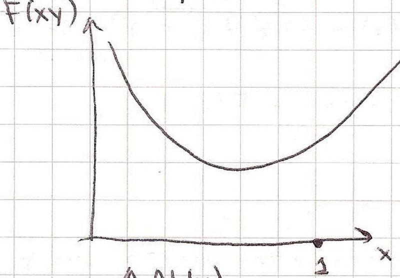
$M(y) = \max\limits_{0 \le x \le 1} F(xy) = F(x(y)y)$

$= \max[F(0y), F(1, y)] =$

$= \max[y^2, 2 - 3y + y^2]$

$y^2 \le \underbrace{2 - 3y + y^2}_{y \le 2/3}$

$$M(y) = \begin{cases} 2 - 3y + y^2 & 0 \le y \le 2/3 \\ y^2 & 2/3 < y \le 1 \end{cases}$$



$y^0 = 2/3$

$\bar{v} = 4/9 > 0 = \underline{v}$

Опр мн-во Z в метр. пр-ве наз-ся компактным $\forall z^k$, $k = 1, 2 \dots$ $z^k \in Z$ можно выделить сх-ся подпосл-ть к элементу этого мн-ва.

$\exists z^{k_\ell}$, $\ell = 1, 2 \dots$: $z^{k_\ell} \to z^0 \in Z$

Утв Z компактное метриз. пр-во $\{z^k\} \subset Z$. Тогда, если z^0 - единств пред. точка $\{z^k\}$, то $z^k \to z^0$

Д-во: $z^k \not\to z^0$; $\exists$ V окр-ть в-т z^0, вне которой бесконечно много эл-в z^k

$\Rightarrow z^{k_\ell} \in Z \setminus V$ $\ell = 1, 2 \dots$

$\Rightarrow \{z^{k_\ell}\} \subset Z \setminus V$ $z' \in Z \setminus V$ пред. (.) $\{z^{k_\ell}\}$

$z' \neq z^0$, но z' - пред. (.) $\{z^k\}$ чтд (от прот)

$Z, h(z)$ $\quad \text{Argmax}\, h(z) = \{z' \in Z \mid h(z') = \max\limits_{z \in Z} h(z)\}$

$F(x, y), X \times Y$ $\quad Y(x) = \text{Argmin}\limits_{y \in Y} F(x, y)$

Теорема 1.2 $F(x, y)$ $X \times Y$, где X, Y - компакты метр. пр-в.

Тогда 1) $W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$ непр. на X

2) Предположим, что $Y(x)$ состоит из единств. эл-та для $\forall x$ $Y(x) = \{y(x)\}$

Тогда $y(x)$ - отображение $X \to Y$

$\Rightarrow y(x)$ - непрерывно

Д-во: 1) $W(x)$ непр. и $\exists$ет ?

$$\max_{x \in X, y \in Y} F(x y) \geq W(x) \geq \min_{x \in X, y \in Y} F(x, y)$$

$x^0 \in X$ $\quad Y(x) = \operatorname{Argmin} F(x,y)$

$\forall x^k \to x^0 \quad W(x^k) \to \overset{\in Y}{W}_{(x^0)}$

(по опр-нию непр-ти по Гейне)

∢ п-ть $\{W(x^k)\}$ и д-м, что у нее единств предельная точка.

∃ W' - ее пред. точка

Д-м, что $W' = W(x)$

∃ $\{x^{kl}\}$ $W(x^{kl}) \to W'$ $\quad$ ∢ $y^{kl} \in Y(x^{kl})$

$y^{kl} \in Y$

считаем, что $y^{kl} \to y' \in Y(x^0)$

(из о-ния компактности)

в самом деле $F(x^{kl}, y^{kl}) \leq F(x^{kl}, y)$

$\forall y \in Y,\ l = 1,2$

$l \to \infty$, y - фиксируем

$F(x^0, y') \leq F(x^0, y) \quad \forall y \in Y$

$y' \in Y(x^0)$

$$\underset{\substack{\swarrow \\ W'}}{W(x^{kl})} = F(x^{kl}, y^{kl}) \to F(x^0, y') = \min_{y \in Y} F(x^0 y) = \\ = W(x^0)$$

$\Rightarrow W' = W(x^0)$

$\Rightarrow$ из утв $\Rightarrow W(x^k) \to W(x^0)$

2) $x^0 \in X \quad \forall x^k \to x^0 \quad y(x^k) \to y(x^0)$ - необх. д-ть

Д-м, что $y' = y(x^0)$

$y' : \exists \{x^{kl}\} : \underset{\substack{\| \\ y^{kl}}}{y(x^{kl})} \to y' \in Y(x^0) = \{y(x^0)\}$

<u>чтд</u>

<u>Опр</u> $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ наз. непрерывной, если $F(x,y)$ непр. на $X \times Y$ где X и Y - - парам. евклид пр-ва $X \subset E^m \quad Y \in E^n$

<u>Следствие</u> в ∀ непр. игре F у игроков ∃ максиминное и минимаксная стратегию.

<u>Пример</u> $F(xy) = (1+y^2)(xy-1)^2$

$X = [-1,1] \quad Y = (-\infty, +\infty)$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

<u>Опр</u> Мн-во Z наз. выпуклым, если для $\forall z' \neq z''$, $z', z'' \in Z$ и для $\forall \lambda \in (0,1)$

$$\lambda z' + (1-\lambda) z'' \in Z$$

$h(z)$, Z

<u>Опр</u> $h(z)$ выпуклая, если $\forall z' \neq z''$, $\forall \lambda \in (0,1)$

$$h(\lambda z' + (1-\lambda) z'') \leq \lambda h(z') + (1-\lambda) h(z'')$$

(если нер-во строгое, то "строговыпуклое")

<u>Опр</u> $h(z)$ вогнутая, если —"— $\geq$ (строго "$>$") —"—

$\boxed{\text{Д/з}}$

1. $h(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i^2 = |z|^2$ Д! строговып

2. $h(z)$ непр Z - вып. компакт
   $h(z)$ строговып.
   Д! ее мин. достигается в единств. (·)

<u>Теорема 1.3</u> $F(x,y)$ непр $X \times Y$ $X \subset E^m$ - вып. компакт

$\forall y \in Y$ $F(x,y)$ вогн. по x $Y \subseteq E^n$ - вып. компакт

$\forall x \in X$ $F(xy)$ вып по y

$\Rightarrow$ F имеет на $X \times Y$ седл. точку

Д-во: I. $F(x,y)$ строго вып. по y

$$W(x) = \min_{y \in Y} F(xy) = F(x\, y(x))$$

$$y(x) = \operatorname{Argmin}_{y \in Y} F(x,y) = \{y(x)\}$$

из T1.2 $\Rightarrow y(x)$ - непр.

$$x^*: W(x^*) = \max_{x \in X} W(x)$$

Д-м, что $(x^*, y(x^*))$ - седловая точка

$\forall x \in X \ \forall t \in (0,1)$

$$(1-t)x^* + tx \in X \ ; \ \tilde{y} \overset{\det}{=} y((1-t)x^* + tx)$$

$$W(x^*) \geq W((1-t)x^* + tx) = F((1-t)x^* + tx, \tilde{y}) \geq$$

$\geq \{F$ вып. по 1ому арг-ту$\} \geq$

$$(1-t)F(x^* \tilde{y}) + tF(x\tilde{y}) \geq (1-t)W(x^*) + tF(x\tilde{y})$$

$t > 0 \ \Rightarrow \cancel{t}F(x\tilde{y}) \leq \cancel{t}W(x^*)$

$t \to 0+ \ \Rightarrow \tilde{y} \to y(x^*)$

$$F(x, y(x^*)) \leq W(x^*) = F(x^*, y(x^*)) \leq F(x^* y) \ \forall x \in X \ \forall y \in Y$$

$(x^*, y(x^*))$

$$F_\varepsilon(x,y) = F(xy) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \quad \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow (x^\varepsilon y^\varepsilon), F_\varepsilon(xy)$$

Берем $\varepsilon_k \to 0+$ (посл-ть сходящаяся к 0)

$(x^{\varepsilon_k} y^{\varepsilon_k}) \ F_{\varepsilon_k}(xy)$

посл-ть седловых точек

$$(x^{\varepsilon_k} y^{\varepsilon_k}) \to (x^0 y^0)$$

$$F_{\varepsilon_k}(x y^{\varepsilon_k}) \leq F_{\varepsilon_k}(x^{\varepsilon_k} y^{\varepsilon_k}) \leq F_{\varepsilon_k}(x^{\varepsilon_k} y) \quad \begin{matrix} \forall x \in X \\ \forall y \in Y \end{matrix}$$

$k \to \infty \Rightarrow$ нер-во из опр-я ст

$$F(xy^0) \leq F(x^0 y^0) \leq F(x^0 y)$$

<u>чтд</u>

$\boxed{10.09.2007}$

мн-во $Y(x)$ состоит из 1ого эл-та.
если $x^*,\ y^* \in Y(x^*) \Rightarrow (x^* y^*)$ может не быть с.т

<u>Пример</u>: $F(xy) = xy$

$X^0 = [0,1] \qquad X^0 \times Y^0$

$Y^0 = \{0\}$

$x^* = 0 \quad Y(0) = [0,1]$

$y^* = 1$

$\Rightarrow (0,1)$ не является с.т.

Если F строго вогнута по X, то

$$X(y) = \underset{x \in X}{\mathrm{Argmax}}\, F(x,y) = \{x(y)\}$$

y^* - минимаксная стратегия
$(x(y^*), y^*)$ с.т

<u>Пример</u> $\measuredangle\ F(x,y) = -x^2 + y^3 + y^2 x - 4y + 3$

$X = Y = [0,1]$

$F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow$ вогн. по x строго

$F''_{yy} = +6y + 2x \geq 0$

$F'_x = -2x + y^2 = 0$

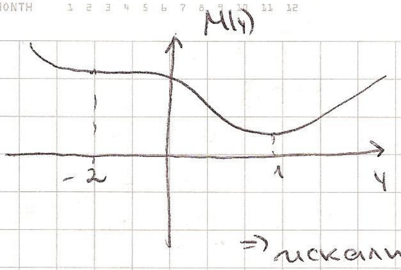
$\Rightarrow$ наилучший ответ 1ого игрока $\frac{y^2}{2} = x(y) \in [0,1]$

ф-ция максимума

$$M(y) = \max_{x \in X} F(xy) = F(x(y), y) = \frac{y^4}{4} + y^3 + 3 - 4y$$

$M'(y) = y^3 + 3y^2 - 4 \qquad y_1 = 1$

$y_{2,3} = -2$



$\Rightarrow y^* = 1$

$x(y^*) = \frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2}, 1)$

⇒ искали только минимаксную стратегию, а не максиминную

§3. Смешанные расширения антагонистических игр.

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ менять стратегии, чтобы противник не до

Опр Смешанной стратегией 1ого игрока наз. вероятностное распределение φ на мн-ве X

Опр Применить смеш. стратегию означает выбрать x как сл.в. с распределением φ, $x \in X$

1. $X = \{1 .. m\}$

$p = (p_1 .. p_m)$: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \geq 0$ $i = 1..m$

вер. вектор p ти m

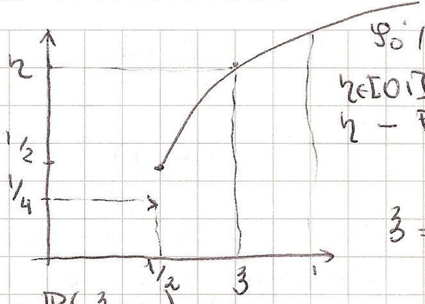
$i \in X$, p_i

2. $X = [a, b]$

φ - функция распределения

ф-я р-ния $\varphi(x) = \mathbb{P}(\xi \leq x)$

С-ва: $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \text{неуб. ф. ю. непр. справа} & x \in [ab] \\ 1, & x \geq b \end{cases}$



$\varphi_0'(x) > 0$

$\eta \in [0\ 1]$

η — Р/м р-на на $[0\ 1]$

$$\zeta = \begin{cases} 0 & 0 \leq \eta < \frac{1}{4} \\ 1/2 & 1/4 \leq \eta < \frac{1}{2} \\ \varphi_0^{-1}(\eta) & \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1 \end{cases}$$

$\varphi(x) = \mathbb{P}(\zeta \leq x)$

$\mathbb{P}(\zeta \leq x) = P(\eta \leq \varphi_0(x)) = \varphi_0(x)$

$h(x)$

$$\int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x) = \frac{1}{4} h(0) + \frac{1}{4} h(\tfrac{1}{2}) + \int_{1/2}^{1} h(x) \varphi_0'(x)\, dx$$

3. X - выпуклый компакт

$x_0 \in X$

$$I_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

мера, опр. на одноточечн. мн-ве

$x^{(i)} \in X$, $i = 1..m$

$\varphi = \sum_{i=1}^{m} p_i I_{x^{(i)}}$ $p = (p_1 \dots p_m)$

/* $\int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x) = \frac{1}{4} h(0)$ */

с вер-ю p_i выбир. x_i

обобщение случая 1

$h(x)$, X

$$\int_X h(x)\, d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i h(x^{(i)})$$

смешанная стратегия

X, $\{\varphi\}$

X - чистые стратегии

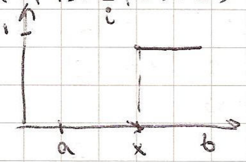
φ - смешанные стратегии

$X \subset \{\varphi\}$ - такое включение имеет место т.к.

(покажем на примерах)

1. $X, i \quad p = (0, \ldots \underset{i}{1}, 0 \ldots 0)$

2. $X = [a, b]$



3. x, I_x

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ - антагон. игра

$\{\varphi\}$ $\{\psi\}$ - см. стр. 2ого игрока

смеш. стратегии 1ого игрока

$$F(\varphi, \psi) = \int_X \int_Y F(x y) \, d\varphi(x) \, d\psi(y)$$

интеграл Стильтьеса

$\Rightarrow \bar{F} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi, \psi) \rangle$

смешанное расширение

Опр Если есть игра Γ, то она имеет решение $\Leftrightarrow \bar{F}$, причем они совпадают

(φ^0, ψ^0, v)

$(\varphi^0, \psi]$ с.т. $F(\varphi, \psi)$ $v = F(\varphi^0, \psi^0)$

Матричная игра

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

$p \in P = \{p \in E^m \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, p_i \geq 0, i = \overline{1,m}\}$

$q \in Q = \{q \in E^m \mid \sum q_j = 1, q_j \geq 0 \ j = \overline{1,n}\}$

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

игроки выбирают стратегию 4/3
друг от друга

$\Rightarrow (a_{ij})$ появл. с вер-ю $p_i q_j$
тк $p_i \Leftarrow$ с вер $\leftarrow i$
j с вер p_j
$A(p,q)$ м.о

Таким образом $\overline{F} = \langle P, Q, A(p,q) \rangle$

Теорема 1.4 (основная т-ма матричных игр)
$\forall$ матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях

Д-во: $A = (a_{ij})_{n \times n}$
необх. д-ть, что $A(p,q)$ имеет СТ на $P \times Q$
опираемся на Т1.3
P, Q - замкнутые, огр. $\Rightarrow$ компакты
выпуклые (опр-со по опр)
$A(p,q)$ непр, вогн. p, вып по q

$\Rightarrow \exists\, (p^\circ, q^\circ) : A(p, q^\circ) \le A(p^\circ q^\circ) = v \le A(p^\circ q)$
$\forall p \in P, q \in Q$ чтд

Применение смеш. стратегий
1. Г
2. Один раз сыграно $\Rightarrow$
игрок действ в условии риска

$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ имеет смысл не риск, а полезность риска

$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$

?, полезность
a

10 с вер. a $0<a<1$

0 с вер. $1-a$

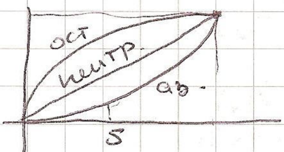
если игрок имеет нейтр. отнош к риску

$a = \frac{1}{2}$

при каком a выигрыш S экв. лотереи ?

если осторожен $\Rightarrow a > \frac{1}{2}$

если нет $\Rightarrow < \frac{1}{2}$



$\Rightarrow$ если один раз, то необ. преобр в ф-цу полезности

3. реализацию в виде "физической" смеси

Пусть имеет фермер.

У него 3 вида культур с-х $i = 1,2,3$

Против него - природа $j = 1,2,3$

$j=1$ засуха

$j=2$ норм

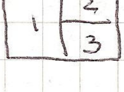
$j=3$ дожди

a_i - по какой цене продать

$H = (h_{ij})$ м-ца урожайности

$A = (a_i h_{ij})$ м-ца выигрыша

У него есть участок



4. непрерывную игру

$\Gamma = \langle X, Y, F(xy) \rangle$

$X = [a,b]$ $Y = [cd]$ $F(xy)$

Необходимо н-ть смеш. стратегию этой игры

$\{\varphi\}$, $\{\psi\}$
1ый игр 2ой игр

$$F(\varphi,\psi) = \int_a^b \int_c^d F(xy)\, d\varphi(x)\, d\psi(y)$$

инт. Стилтьеса
∃ для непр. ф-ции +
+ спр-ва т Фубини

$$F(x,\psi) = \int_c^d F(xy)\, d\psi(y)$$
$$F(\varphi,y) = \int_a^b F(xy)\, d\psi(x)$$

2ойной интеграл = повторному

$$F(\varphi,\psi) = \int_a^b F(x\psi)\, d\varphi(x) = \int_c^d F(\varphi y)\, d\psi(y)$$

$$\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\} \{\psi\}, F(\varphi,\psi) \}$$

Утв (без док-ва)
Мн-во $\{\varphi\}$ является слабым компактом.

Это означает, что для ∀ п-ти φ_k $k = 1,2\ldots$
∃ φ_{k_ℓ}, $\ell = 1,2\ldots$ которая $\varphi_{k_\ell} \xrightarrow{\text{слабо}} \varphi_0 \in \{\varphi\}$

: ∀ непр $h(x)$ на $[a,b]$ $\int_a^b h(x)\, d\varphi_{k_\ell}(x) \to \int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x)$

Лемма 3 в непр. игре Γ на прямоугольнике у игроков существует максим. и минимакс. смеш стратегии

◁ $\overline{\Gamma}$

$\underline{v} = \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi)$ ⇒ необх. д-ть что мин. и максим достигаются и равны

$\overline{v} =$ ~~sup~~ $\inf\limits_{\psi\in\{\psi\}} \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi)$

Д-во: Д-м для максиминной
(для минимаксной аналогично)

$\varepsilon_k \to 0+ \Rightarrow \exists$ н-ть $\{\varphi_k\}$: $\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi_{k_\ell} \psi) \geq \underline{v} - \varepsilon_{k_\ell}$

по опр. верхней грани

тк мн-во смеш. стратегий - сл. компакт, то можно выделить $\varphi_{k\ell} \xrightarrow{\text{слабо}} \varphi_0$

$F(\varphi_{k\ell} \psi) = \int_a^b \underset{\text{непр. по } x}{F(x,\psi)}\, d\varphi_{k\ell}(x) \geq \underline{v} - \varepsilon_k$

перейдем к пределу при $\ell \to \infty$

$\Rightarrow$ из слабой сходимости

лим $\longrightarrow \int_a^b F(x\psi)\, d\varphi_0(x) \geq \underline{v}$

Это значает, что $F(\varphi_0 \psi) \geq \underline{v} \ \forall \psi \in \{\psi\}$

раз для $\forall \psi \Rightarrow \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi_0 \psi) \geq \underline{v}$

из о-ния строго нер-ва быть не может $\Rightarrow \inf F(\varphi_0 \psi) = \underline{v} \Rightarrow$ нижн. грань достигается

чтд

Лемма 4 $\Gamma = \langle X, Y, F(xy) \rangle$
$\Gamma' = \langle X, Y, F'(xy) \rangle$

Γ, Γ' - ограничены

$$|F(xy) - F'(xy)| \leq \varepsilon \quad \forall (xy) \in X \times Y \quad (A)$$

Тогда $|\underline{v} - \underline{v}'| \leq \varepsilon$
$|\bar{v} - \bar{v}'| \leq \varepsilon$

Д-во: д-м 1ое нер-во, остальное аналогично

Д-ть, что $\forall x \in X \quad |\inf\limits_{y \in Y} F(xy) - \inf\limits_{y \in Y} F'(xy)| \leq \varepsilon$ (1)

$$\inf_{y \in Y} F(xy) - \inf_{y \in Y} F'(xy) \geq \inf (F(xy) - F'(xy)) \underset{\text{из } A}{\geq} -\varepsilon$$

из элемент. нер-во для нижних граней

аналогично если поменяем местами

$$\Big|\underset{x\in X}{\sup} W(x) - \underset{x\in X}{\sup} W'(x)\Big| \le \varepsilon$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ \underline{v} & & \underline{v}' \end{matrix}$$

1ое д-ли <u>чтд</u>

Теорема 1.5 (Основная теорема непрерывных игр)

Всякая непрерывная игра Γ на прям-ке имеет решение в смешанных стратегиях

Д-во: $\bar{\Gamma}$, $F(\varphi,\psi)$, Д-м ∃ние ст

по т1.1. необх д-ть, что

$$\underline{v} = \max_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi)$$

$$\|$$

$$\bar{v} = \min_{\psi\in\{\psi\}} \sup_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi,\psi)$$

по лемме они достигаются

$F(xy)$ - непр. на $X\times Y$

$X=[a,b]$ $Y=[c,d]$

она Р/но непр-на $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists$

разбиение $[a,b]$ на X^i $i=\overline{1..n}$

$[a\,][\ ][\ ][\ ]b$

$\exists$ разбиение $[c,d]$ на Y^j $j=\overline{1.k}$

$c[\ ][\ ][\ ]\ldots]d$

что вып. нер-во

$$|F(xy) - F(x'y')| \le \varepsilon \qquad (1)$$

$$\forall (xy)(x'y') \in X^i \times Y^j$$

$$i=1.m$$

$$j=1..n$$

Возьмем в каждом $X^i \ni x_i$, $Y^j \ni y_j$

и определим ступенчатую ф-ю:

$F_1(xy) = F(x_i y_j)$, если $x_i y_j \in X^i \times Y^j$

на мал кусочке F приним пост. зн-е

из нер-ва (1) $\Rightarrow$

$$|F(xy) - F_1(xy)| \le \varepsilon \qquad \forall (xy) \in X \times Y \qquad (2)$$

аппроксимацию ступенчатой ф-ей

$\Rightarrow$ сведем к матричной игре

$a_{ji} = F(x^i y^j)$

$A = (a_{ij})_{n \times m}$

Сопоставим смеш. стратегию 1ого игрока с аналогичной в матричной игре

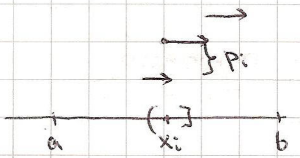
$\varphi \to p = (p_1 .. p_m)$

$$p_i = \int_{X^i} d\varphi(x) \ge 0 \quad , \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

$\Rightarrow$ построим отображение $\{\varphi\} \xrightarrow{на} P$

$\forall p \in P \; \exists \varphi \to p$

Вер-ть попадание в X^i: p_i равна величине скачка p_i



Аналогично $\{\psi\} \xrightarrow{на} Q$

$$F_1(\varphi, \psi) = \int_a^b \overset{X^i}{\int_c^d} F_1(xy)\, d\varphi(x)\, d\psi(y) = \{\text{он по оп-нию через ступенчатые ф-ии}\} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i \underset{F(x^i y^j)}{\underset{\parallel}{a_{ij}}} q^j = A(pq) \qquad (3)$$

$X^i \times Y^j$ $F(x^i y^j) = a_{ij}$

p_i q_j

в-ти попадания в мн-ва

Еще есть $F(\varphi\psi)$: отличается от F_1 не более чем на ε $\Rightarrow$

соответ. м.о отличаются не более чем на ε

$$|F(\varphi\psi) - F_1(\varphi\psi)| = \left|\int_a^b\int_c^d (F(xy) - F_1(xy))\,d\varphi(x)\,d\psi(y)\right|$$

$$\le \int_a^b\int_c^d |F(xy) - F_1(xy)|\,d\varphi(x)\,d\psi(y) \overset{(2)}{\le} \varepsilon$$

при $\forall\ \varphi\in\{\varphi\},\ \psi\in\{\psi\}$

а это есть условие A

тк они близки $\Rightarrow$ восп. Л4

$$\Big|\max_{\varphi\in\{\varphi\}}\ \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi,\psi) - \max_{\varphi\in\{\varphi\}}\ \overset{\min}{\cancel{\inf}}_{\psi\in\{\psi\}} F_1(\varphi,\psi)\Big| \le \varepsilon$$

$$\overset{\parallel}{\underline{v}} \qquad\qquad \overset{\parallel}{\max_{p\in P}\min_{q\in Q} A(pq)}$$

ф-я $A(pq)$ имеет с.т. $\Rightarrow \overset{\parallel}{v}(A)$

$\Rightarrow |\underline{v} - v(A)| \le \varepsilon$

аналогично $|\bar{v} - v(A)| \le \varepsilon$

$|\underline{v} - \bar{v}| \le 2\varepsilon\quad \forall\varepsilon>0$, значит $\underline{v} = \bar{v}$

ч.т.д.

§4 Свойства решений смешанных стратегий.

Теорема 1.6 для того чтобы $(\varphi^\circ, \psi^\circ, v)$ была решением смеш. стратегий непрерывной игры Γ на прямоуг. необходимо и достаточно выполнение нер-ва

$$F(x\psi^\circ) \le v \le F(\varphi^\circ y) \quad \forall x\in X\ \ \forall y\in Y \qquad (4)$$

Д-во: чтобы проверить: $\max_{x\in X} F(x\psi^\circ) \le v \le \min_{y\in Y} F(\varphi^\circ y)$

те необх. решить эти экстрим. задачи

Необх. $(\varphi^0 \psi^0 v)$ – реш. в смеш. страт.
$(\varphi^0 \psi^0)$ $F(\varphi, \psi)$ $\Rightarrow (*)$

$$F(\varphi, \psi^0) \le F(\varphi^0 \psi^0) \le F(\varphi^0 \psi) \quad \forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \forall \psi \in \{\psi\}$$

$$\Downarrow$$

Возьмем чистую стратегию

$F(x \psi) \le v \le F(\varphi^0 y)$ $\forall x \in X$
$y \in Y$ $\Rightarrow (*)$

Дост. $(*) \Rightarrow (\varphi^0 \psi^0 v)$ реш. в смеш. стратегиях игры Г

Возьмем $\forall$ см. стр. $\varphi \in \{\varphi\}$ $\overset{(*)}{\le} v$

$$F(\varphi, \psi^0) = \int_a^b F(x, \psi^0)\, d\varphi(x) \le v \le$$

Д-ся аналогично $\le F(\varphi^0, \psi)$

Ост. д-ть, что $v = F(\varphi^0, \psi^0)$

Для этого возьмем $\varphi = \varphi^0$, $\psi = \psi^0 \Rightarrow$

$F(\varphi^0 \psi^0) \le v \le F(\varphi^0 \psi^0)$ те $v = F(\varphi^0 \psi^0)$

те $(\varphi^0 \psi^0)$ с.т., значение в с.т. это v

$\Rightarrow (\varphi^0 \psi^0 v)$ решение см. стр Г

чтд

Замечание не важно на промеж. или нет мы р-сем, верно для $\forall$ непр. игры для кот. $\exists$ смешанное расширение и справедлива т. Фубини

Теорема 1.6' Пусть имеет игра с матрицей A, тогда $(p^0 q^0 v)$ решение смеш. стр. $\Leftrightarrow$ $A(i q^0) \le v \le A(p^0 j)$ $(*)$

$i = 1..m$
$j = 1..n$

$$A(iq^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0$$

$$A = {}_i\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right)_{\underset{j}{}} \qquad A(p^0 j) = \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ a_n a_1 \dots a_{n-1} \\ \\ a_2 \dots a_n a_1 \end{pmatrix} \qquad p^0 = \left(\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n}\right) = q^0$$

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

$$A(p^0 j) = v = A(iq^0)$$

$\Rightarrow$ усл-е (*) вып. как ра-во

те v - значение игры

Теорема 1.7 непр. игра Γ на пр-ке спр-во

1) $\forall \varphi \in \{\varphi\} \quad \inf\limits_{\Psi \in \{\Psi\}} F(\varphi \Psi) = \min\limits_{y \in Y} F(\varphi y)$

2) $\forall \Psi \in \{\Psi\} \quad \sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi \Psi) = \max\limits_{x \in X} F(x \Psi)$

Д-во: 1) $\inf\limits_{\Psi \in \{\Psi\}} F(\varphi \Psi) \leq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi y)$ (I)

$Y \subset \{\Psi\} \Rightarrow$ ф-но берется нижняя грань по более широкому мн-ву

Теперь д-м $\geq$

$$F(\varphi\Psi) = \int_c^d F(\varphi, y)\, d\Psi(y) \geq \min_{y \in Y} F(\varphi y)$$

$\geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi y)$ - конст

Поэтому и $\inf\limits_{\Psi \in \{\Psi\}} F(\varphi\Psi) \geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi y)$ (II)

(I) (II) $\Rightarrow$ чтд

2) д-во аналогично

Следствие1 непр. игре Γ на прямоугольнике значение v можно записать

$$v = \max_{\varphi\in\{\varphi\}} \min_{y\in Y} F(\varphi y) = \min_{\psi\in\{\psi\}} \max_{x\in X} F(x\psi)$$

Д-во:

T1.1 $$\vartheta = \max_{\varphi\in\{\varphi\}} \inf_{\psi\in\{\psi\}} F(\varphi\psi) = \min_{\psi\in\{\psi\}} \sup_{\varphi\in\{\varphi\}} F(\varphi.\psi)$$

по T1.7 $$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$\min_{y\in Y} F(\varphi y) \qquad \max_{x\in X} F(x\psi)$$

$\boxed{Д/з}$ Д! $$\underline{v} = \max_x \min_y F(xy) \le v \le \min_y \max_x F(xy) = \overline{v}$$ чтд

Теорема 1.7' Имеется игра с матрицей A. Справедливы утв-ия

1) $\forall p\in P \ \min_{q\in Q} A(pq) = \min_{1\le j\le n} A(p,j)$

2) $\forall q\in Q \ \max_{p\in P} A(pq) = \max_{1\le i\le n} A(iq)$

Следствие 2

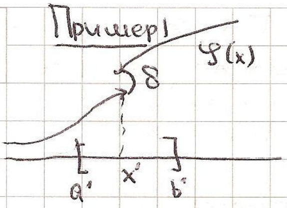
$$\vartheta = \max_{p\in P} \min_{1\le j\le n} A(pj) = \min_{q\in Q} \max_{1\le i\le n} A(iq)$$

/* **Опр**| φ смеш. стратегия 1ого игрока на $[ab]$
Спектром */

Опр Б. т. $x'\in S_p(\varphi)$ - спектру см. стр φ
если $\forall\varepsilon>0 \ \exists[a'b'] : x'\in[a'b']$
$b'-a'<\varepsilon$ и разность $\varphi(b')-\varphi(a')>0$
(Вероятность попадания в $[a'.b']>0$)
(·) спектра - (·) роста

Утв Мн-во (·) спектра - замкнут. мн-во

Пример1



$\varepsilon > 0$

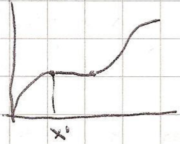
$\varphi(b') - \varphi(a') > \delta$

$b' - a' < \varepsilon$

Пример2 $x' : \varphi'(x') > 0$

Д! это точка спектра

м.б. $\varphi'(x') = 0$, но x' - т. спектра



17.09.07

Теорема 1.8 (св-во дополняющей нежесткости)

Пусть $(\varphi^0, \psi^0, v)^0$ решение в смеш стратегиях непр. игры Γ на прям-ке => спр-во:

1) $\forall x \in S_p(\varphi^0) \Rightarrow F(x, \psi^0) = v$

2) $y \in S_p(\psi^0) \Rightarrow F(\varphi^0, y) = v$

Д-во: $F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y)$ $\forall x \in X$ $\forall y \in Y$ (*)

д-м 1) $\exists x' \in S_p(\varphi^0) : F(x' \varphi^0) < v$

$F(x, \varphi^0)$ непр. по x =>

=> $\exists a', b', \varepsilon : F(x, \psi^0) \le v_1 < v$ $\forall x \in [a'b']$

для остальных x $F(x \psi^0) \le v$

т.е. $\forall x$ $F(x, \psi^0) \le v$

Возьмем м.о. т.е. интеграл:

$$F(\varphi^0, \psi^0) = \int_a^b F(x \psi^0) d\varphi^0(x) < v = F(\varphi^0, \psi^0)$$

=> противоречие

2) д-со аналогично чтд

Следствие $\exists(\varphi^\circ \psi^\circ v)$ в Γ

1) $F(x, \psi^\circ) < v \Rightarrow x \notin Sp(x^\circ)$

2) $F(\varphi^\circ, y) > v \Rightarrow y \notin Sp(\psi^\circ)$

Δ матр. случай

Теорема 1.8' Пусть $(p^\circ q^\circ v)$ - реш. в матр. стратегиях игры A

Тогда

1) $p_i^\circ > 0 \Rightarrow A(iq^\circ) = v$

2) $q_j^\circ > 0 \Rightarrow A(p^\circ j) = v$

Д-во: для реш матр игры с-во (*)

$A(iq^\circ) \le v \le A(p^\circ j)$ $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ (*) по Т.1.6'

далее аналогично
(можем провести самостоят.)

Следствие $(p^\circ q^\circ v)$ реш. .. A Тогда

1) $A(iq^\circ) < v \Rightarrow p_i^\circ = 0$

2) $A(p^\circ j) > v \Rightarrow q_j^\circ = 0$

Замечание: $A(iq^\circ) = v \not\Rightarrow p_i^\circ > 0$

Доп. нежесткость: если в одном месте нежестко $\Rightarrow$ в другом жестко

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_i > 0,\ i = \overline{1,n} \\ 1.2 \ldots n \\ 1 > a_i > 0 \end{matrix}$$

$p^\circ q^\circ$ $p_i^\circ > 0$

Упр П-ть, что в чист. стр. не имеет реш,

$\underline{v} = \max \min a_{ij} = 0$ $\overline{v} = \min a_{ii} > 0$

$\Rightarrow$ решили в смеш. стратегиях

$p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = v \quad i = 1..n$

Мент ищет преступн. в n местах и может его там найти с вер $a_i > 0$

$$\begin{cases} a_i q_i^0 = v & i = \overline{1.n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 = 1 \end{cases}$$

$n+1$ неизв. и ур-ние

$$q_i^0 = \frac{v}{a_i} \quad i = 1..n$$

$$v = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \qquad \underset{p_i^0}{\overset{\shortparallel}{q_i^0}} = \frac{1}{a_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \quad i = \overline{1.n}$$

$$q_j > 0 \Rightarrow a_j p_j^0 = v$$

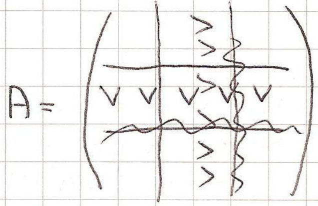
$$v \xRightarrow{C1.7'} \max_{p \in P} \min_{1 \le i \le n} A(p.i) = \max_{p \in P} \min_{i = \overline{1.n}} a_i p_i =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

§5. Методы решения матричных игр.

Нахождение хотя бы 1 решения (p^0, q^0, v) с м-цей A

$\boxed{I}$ Доминирование строк и столбцов



больше

меньше => убираем

аналогично для столбцов

∆ 2 вектора: $a = (a_1 .. a_\ell)$
$b = (b_1 .. b_\ell)$

Опр Б.г. что вектор a доминирует вектор b если $a_i \geq b_i$ $i = 1..\ell$

Опр a строго доминир b если $a_i > b_i$ $i = 1..\ell$

Опр ∆ $a^{(i)}, i = 1..m$ в некот. евклид. пр-ве
Вып. комбинацией в-ров $a^{(i)}$ наз лин. комб
$\sum_{i=1}^{m} p_i a^{(i)}$: $p_i \geq 0$ $i = 1..m$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

Теорема 1.9 (о доминировании строк)
Пусть в м-це A некот. строка доминир. некоторой комбинацией ост. строк матрицы. Тогда эта строка входит с 0 вер-ю в некот. оптим смеш стратегию 1ого игрока.
(и ее можно выкинуть)
Если доминир. строгое, то эта строка входит с 0 вер-ю в ∀ оптим см. стр. 1ого игрока

30 **Д-во**: 1. A, i_1

$$p_i \geq 0 \quad i \neq i_1 \quad \sum_{i \neq i_1} p_i = 1$$

$$a_{i_1 j} \leq \sum_{i \neq i_1} p_i a_{ij} \quad j = 1..n$$

$A = \left(\cancel{\sim\sim\sim\sim} \right) i_1 \Rightarrow \hat{A}$ доп. у $\hat{A}$ есть решение в смеш. страт. $(\hat{p}\, q^0\, v)$ — (*)

(вычеркнем i_1-ую строку)

⇒ вставим вместо 0 строки i_1

$$p^0 = (\hat{p}_1 \ldots \hat{p}_{i_1-1}, 0, \hat{p}_{i_1+1} \ldots \hat{p}_m)$$

Д-м, что (p^0, q^0, v) — реш. $\hat{A}$

⇒ обобщим м-д вычеркивания и 1 утв. т-мы

$$A(p^0, j) = \hat{A}(\hat{p}, j) \overset{(*)\hat{A}}{\geq} v, \ j = 1..n$$

$A(i\, q^0) \leq v$ — проверим

Возьмем $i \neq i_1 \Rightarrow A(i q^0) = \hat{A}(i q^0) \overset{(*)\text{ для } \hat{A}}{\leq} v$

Теперь возьмем $i = i_1$

$$A(i_1 q^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} q^0_j \leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i \neq i_1} p_i a_{ij}\Big) q_j \ ⊜$$

Возможно тк $q^0_j \geq 0$

⊜ $\{p' = (p_i, i \neq i_1)\} = \hat{A}(p' q^0) \leq v$

из нер-ва для с.т., тк q^0 — опт. смеш. стратегия 2ого игрока с $\hat{A}$

2. Если нер-ва строгие ⇒ все то же самое +

$$A(i q^0) = \sum a_{ij} q^0_j < \sum \Big(\sum p_i a_{ij}\Big) q^0_j$$

Δ p^* — $\forall$ опт. смеш. стр 1ого игрока с м-цей A

⇒ $(p^*\, q^0\, v)$ — реш. A

Восп. сл-вием из Т 1.8'

$A(i, q^0) < v \Rightarrow p^*_i = 0$

<u>чтд</u>

Сформулируем такую же теорему для столбцов. Д-во ее аналогичное.

<u>Теорема 1.9'</u> (о доминир. столбцов)

Пусть некот. столб. А доминирует вып. комб. ост. столбц.
Тогда он входит с 0 вер. в некот стр опт. см. 2ого игрока и его можно выкинуть
Если строгое, то он входит с 0 вер-ю в $\forall$ оптим смеш. страт. 2ого игрока

<u>Пример</u> (в контр. будет похожий!)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \cancel{5} & \cancel{5} \\ 1 & 3 & \cancel{3} & \cancel{3} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{pmatrix}$$

4 столбцы
4ый домин. 3ий
3ья стр < 2ой
$\frac{1}{2}\underline{I} + \frac{1}{2}\underline{II} \geqslant \underline{III}$ стр.
$\underline{III}$ сто > ост. ⇒ вычерк.

$$\Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\hat{p} = \hat{q} = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$ $v = 2$
делали в прошл. раз

$p^0 = q^0 = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0\ 0)$ $v = 2$ - решение

$\boxed{\text{II}}$

Графический м-д решения с матрицами вида 2×n, m×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix}$$

$p = (p_1 \; 1-p_1) \quad 0 \le p_1 \le 1$

$$\upsilon = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p\,j) = \max_{0 \le p_1 \le 1} \min_{1 \le j \le n} \underbrace{\left[a_{1j} p_1 + a_{2j}(1-p_1)\right]}_{\ell_j(p_1)}$$

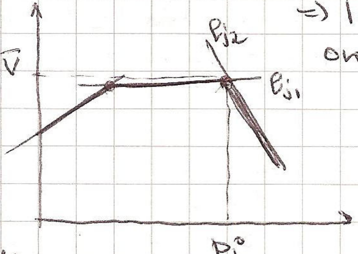
Восп. ф-лой с-вию т. 1.6

$\ell_j(p_1) = a_{1j} p_1 + a_{2j}(1-p_1)$

линейна по p_1, прямая

наклон $k_j = a_{1j} - a_{2j}$

⇒ строим ℓ_j на $[0,1]$, ф-ю min (нижнюю огибающую)



⇒ 1ый игрок имеет оптим. см. стр-ю

$p^0 = (p_1^0, 1-p_1^0)$

Найдем о. см. стр 2ого игрока

1) $0 < p_1^0 < 1$

$\ell_{j_1}(p_1^0) = \upsilon \quad k_{j_1} \ge 0$

$\ell_{j_2}(p_1^0) = \upsilon \quad k_{j_2} \le 0$

Ищем о. см. стр 2игр. в таком виде:

$$q^0 = (0 \dots \underset{j_1}{q^*} \dots 0 \dots \underset{j_2}{1-q^*} \dots 0)$$

$k_{j_1} q^* + k_{j_2}(1-q^*) = 0$ ⇒

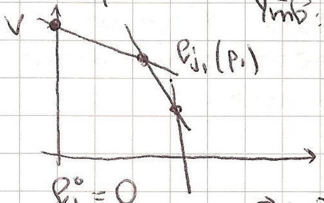
находим q^* ⇒ получим q^0

Обоснуем, что q^0 о. см. стр 2игр

$$A(p, q^0) = \underset{k_{j_1}}{\ell_{j_1}(p_1)} q^* + \underset{k_{j_2}}{\ell_{j_2}(p_1)}(1-q^*) \equiv V$$

⇒ q^0 - о. см. стр. 2игр

2) $p_1^0 = 0$



$\ell_1^0 = 0$

Утв: $\exists j_1 : \ell_{j_1}(0) = v$

$k_{j_1} \le 0$ – угл. коэф. наклона

Тогда $\ell_{j_1}(p_1) \le v$

$A(p j_1) \le v$ при $\forall p \in P$

⇒ у 2 игр. есть о. см. стр j_1 ⇒ (2_{j_1}) – ст.

3) $p_1^0 = 1$ – аналогично

Совершенно аналогичный способ ∃ для m×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \; a_{m2} \end{pmatrix}$$

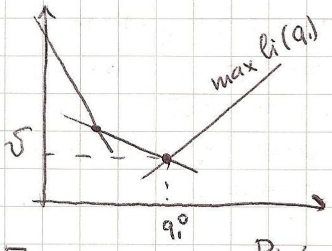
$q = (q_1 \; 1-q_1)$, $0 \le q_1 \le 1$

Опять восп. ф-ей для v

$$v = \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i q) =$$

$$= \min_{0 \le q \le 1} \max_{1 \le i \le m} \ell i(q_i)$$

$$k_{i1} p^* + k_{i2}(1-p^*) = 0$$



можно ещё её транспон. и решить со знаком "−"

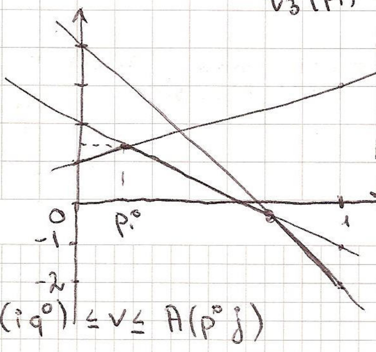
<u>Пример</u>

$$A = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\ell_1(p_1) = (-1)p_1 + 2(1-p_1)$
$\ell_2(p_2) = (-2)p_1 + 4(1-p_1)$
$\ell_3(p_1) = 3p_1 + 1 - p_1$

⇒ $\ell_1(p_1) = 2 - 3p_1$
$\ell_2(p_1) = 4 - 6p_1$
$\ell_3(p_1) = 1 + 2p_1$

$2 - 3p = 1 + 2p$
$5p = 1 \quad p = \frac{1}{5}$
$v = 1\frac{2}{5}$



⇒ $p^0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ о. см. стр 1ого игрока
$v = 1\frac{2}{5}$

$q^0 = (q^*, 1-q^*)$

$q^0 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$
о. см. стр 2 игр

$(-3)q^* + 2(1-q^*) = 0$

$q^* = \frac{2}{5}$ Проверим (*) $A(i q^0) \le v \le A(p^0 j)$

$\boxed{III}$

Сведение решения двойств. игры к паре задач линейного программирования.

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ $\quad v>0$

$B = (a_{ij} + C)$ $\quad v(B) = v(A) + C$

$$v \overset{\text{сл Т1.7}}{=} \max_{p\in P} \underbrace{\min_{1\le j\le n} A(p,j)}_{u} = \max_{p,u:\, p\in P} u =$$

$$u = \min_{1\le j\le n} A(p\,j)$$

эти задачи экв-ны!

$$= \max_{\substack{p,u:\, p\in P,\\ A(p,j)=\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \ge u,\ j=\overline{1,n}}} u = \left[z:\ z_i = \frac{p_i \geq 0}{u},\ \text{тк } u>0,\ \text{макс зн-е} >0\right] \textcircled{=}$$

$$\left\{\sum_{i=1}^m z_i = \frac{\sum p_i}{u} = \frac{1}{u}\right\}$$

$$\textcircled{=} \max \frac{1}{\sum z_i} \quad \textcircled{=} \frac{1}{\min\limits_{z:} \sum_{i=1}^m z_i}$$

I з. Л.П

$$\sum_{i=1}^m z_i a_{ij} \ge 1 \quad j=1..n$$

$$z_i \ge 0 \quad i=1..m$$

Это з-ча ЛП. Она имеет решение тк экв исходной, которая заведомо имеет решение

$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^m z^0}$ - зн-е игры получим

$p_i^0 = z_i^0 \cdot v$ $\quad i=1..m$

II з. Л.П

$$v = \min_{q\in Q} \max_{1\le i\le m} A(i\,q) = \frac{1}{\max\limits_{w:} \sum_{j=1}^n w_j}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \le 1,\ i=1..m$$

$$w_j \ge 0 \quad j=1..n$$

ІІ ЗЛП и І ЗЛП - взаимодвойственны

$\boxed{IV}$ Необходимые условия для крайних максимальных смешанных стратегий игры

Z

<u>Опр</u> $z^0 \in Z$ - крайняя точка, если
$\nexists\, z' \neq z'' \in Z$, $\lambda \in (0,1)$, такие что
$z^0 = \lambda z' + (1-\lambda) z''$

<u>Упр</u> Z - вып. компакт E^m. Д! что у него есть хотя бы 1 крайняя точка

$\measuredangle$ $P^0 = \{p \in P \mid \overset{= A(pj)}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij}} \geq v, j = 1..n\}$
мн-во всех $\underbrace{\text{опт. см. стр}}_{\text{условие } (*)}$ 1ого игрока - многогранник

<u>Опр</u> Крайняя опт. см. стратегия$|_{\text{стр}}$ крайняя точка многогранника P^0 - то есть его вершина

Аналогично: $Q^0 = \{q \in Q \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ij} q_j \leq v, i = 1 m\}$

<u>Теорема 1.10</u>

$A, v \neq 0$ $p^0 q^0$ - кр. опт. см. стр. Тогда
$\exists\, B = (a_{i_\ell j_t})_{k \times k}$, $|B| \neq 0$ такая что справедливы

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^{k} p^0_{i_\ell} a_{i_\ell j_t} = v & t = 1..k \\ \sum_{\ell=1}^{k} p^0_{i_\ell} = 1 \end{cases} (1) \qquad \begin{cases} \sum_{t=1}^{k} a_{i_\ell j_t} q^0_{j_t} = v & \ell = 1..k \\ \sum_{t=1}^{k} q^0_{j_t} = 1 \end{cases} (2)$$

<u>Д-во:</u> p^0, q^0
$I_1 = \{i \mid p_i > 0\}$ $I_2 = \{i \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q^0_j = v\}$
по св-ву доп. нежестк. $I_1 \leq I_2$

$J_1 = \{ j \mid q_j^0 > 0 \}$ T18'

$J_1 \le J_2$

$J_2 = \{ j \mid \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij} = \delta \}$

$I_1 = \{1 .. r\}$ $I_2 = \{1 .. r .. d\}$

можно добиться пер. строк

Аналогично перест. строк

$J_1 = \{1 .. s\}$ $J_2 = \{1 .. s .. h\}$

=> разбиение A

$$A = \begin{array}{cc} r & \\ d & \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_4 & A_5 & A_6 \\ \hline A_7 & A_8 & A_9 \end{array}\right) \\ & \quad s \quad\quad h \end{array} \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_4 & A_5 \end{array}\right)_{d \times h}$$

подматрица B внутри $\tilde{A}$

Д-м. что 1ые r строк $\tilde{A}$ лнз

Предположим противное =>

$$\exists\, \alpha_1 .. \alpha_r : \sum_{i=1} \alpha_i a_{ij} = 0 \quad j = \overline{1.h} \qquad (3)$$

Д-м. что $\sum_{i=1}^{r} \alpha_r = 0$

$$0 = \sum_{j=1}^{h} q_j^0 \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{h} a_{ij} q_j^0\right) =$$

ост. = 0
по опр
мн B

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{h} a_{ij} q_j^0\right) = v \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$$

$$A''(i, q^0) = v \ne 0$$

$i \le r \le d$, по опр I_2

Определим $p^\varepsilon = p^0 + \varepsilon\alpha$

вспомогательные смеш. стратегии

$$\alpha = (\alpha_1 .. \alpha_r, 0, .. 0) \in E^m$$

$$p_i^\varepsilon = \begin{cases} \overset{>0}{p_i^0} + \varepsilon \overset{>0}{\alpha_i}, & i = 1..r \\ 0, & i = r+1 .. \end{cases}$$

Если ε малое, то $p_i^\varepsilon \geqslant 0$ ⇒ это вероятн. вектор

Д-м, что при мал. ε это о.см стр Iигр.

$$A(p^\varepsilon j) \geqslant v$$

$$A(p^\varepsilon j) = A(p^0 j) + \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ij}}_{\overset{\parallel (3)}{0}} = v, \; j = 1..h$$

$$\underset{j>h}{A(p^0 j) > v} \qquad > v \text{ при } j > h$$

вышли из J_2 ⇒ уменьшая ε можно строгое нер-во сохр.

⇒ p^ε - о.см. стр. Iигр

$$p^0 = \frac{p^\varepsilon + p^{-\varepsilon}}{2}, \; p^\varepsilon \neq p^{-\varepsilon} \text{ тк } \alpha \neq 0$$

⇒ p^0 не явл кр. точкой ⇒ противоречие

⇒ 1ые r строк $\tilde{A}$ лнз

Аналогично 1ые s столбцов лнз

Пусть $k = \text{rang}(\tilde{A}) \geqslant \max[r\ s]$

не огр. общности, пусть 1 k строк и k столбцов лнз

В стоит на 1ых k стр и столбцов (то есть станет ей если верн. в исх. нумерацию)

$|B| \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^0 a_{ij} = v \quad j = 1..k \leq h, \; k \geqslant r \quad \Rightarrow \text{ мы внутри } J_2$$

начиная с r+1 комп. = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} p_i^0 a_{ij} = v = A(p^0 j) \\ \sum_{i=1}^{k} p_i^0 = 1 \end{cases}$

$k \leq h$ по опр J_2

$$A(i, q^0) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} q_j^0 = v & i = 1..k \\ & d \geqslant k \geqslant s \\ \sum_{j=1}^{k} q_j^0 = 1 \end{cases}$$

Вернемся к исходной нумерации ⇒ (1), (2)

чтд

38 Алгоритм:

$$B = (a_{i_\ell j_t})_{k\times k}$$
$k = 2, 3 \ldots$

(1) $k+1$ ур-ние, $k+1$ неизв
$\overset{\circ}{p}_{i_\ell}$ $\ell = 1..k$
не всегда имеет реш:

Упр $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. при каких имеет реш?

Δ $\overset{\circ}{p}_{i_\ell} \geq 0$ $\overset{\circ}{q}_{j_t} \geq 0$
Если не вып $\Rightarrow$ другая подм.
Если вып $\Rightarrow$
$$p^\circ = (\underset{i_\ell}{\ldots \overset{\circ}{p}_{i_\ell}}, \underset{i \neq i_\ell}{0 \ldots})$$
$$q^\circ = (\underset{j_t}{\ldots \overset{\circ}{q}_{j_t}} \underset{j \neq j_t}{0 \ldots 0})$$
Проверяем (*)
$$A(i q^\circ) \leq v \leq A(p^\circ j)$$

В итоге приходим к подматрице, отвечающ. кр. опт. см. стр

Пример
$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & \textcircled{0} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \textcircled{0} & 0 & 1 & 1 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$
игра $a_{ij} \geq v'$ 1
$< v'$ 0

примен. ал-м $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{48} & a_{45} \end{pmatrix}$

$$p^\circ = (\tfrac{1}{2}\, 0\, 0\, \tfrac{1}{2})$$
$$q^\circ = (\tfrac{1}{2}\, 0\, 0\, 0\, \tfrac{1}{2})$$
$$v = \frac{1}{2}$$

$\boxed{V}$ Метод Брауна

$\boxed{24.09.2007}$

$\varepsilon > 0$

определить значение игры Γ с точностью до ε

$p^{\varepsilon} : \min\limits_{1 \le j \le n} A(p^{\varepsilon}, j) \ge v - \varepsilon$

для второго игрока:

$q^{\varepsilon} : \max\limits_{1 \le i \le m} A(i, q^{\varepsilon}) \le v + \varepsilon$

второй проиграет не меньше, чем $(v + \varepsilon)$

$A = (a_{ij})_{n \times m}$

k раз повторяется игра

r_i - выбрана i-ая чистая стратегия : $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i = k$

$p(k) = \left(\frac{r_1}{k} \dots \frac{r_n}{k}\right)$ вектор частот

$p(k) \in P$ - явл. вер. вектором.

l_j - ск. выбирал 2-ой игрок j-ю чистую стратегию

$\sum\limits_{j=1}^{n} l_j = k$

$q(k) = \left(\frac{l_1}{k} \dots \frac{l_n}{k}\right) \in Q$

Алгоритм:

- шаг 1:

i_1 j_1

Иным образом игроки выбирают чистые стратегии

- шаг k: $\underbrace{i_1 \dots i_k}_{p(k)}$ $\underbrace{j_1 \dots j_k}_{q(k)}$

- шаг k+1

i_{k+1} выбирается : $A(i_{k+1}, q(k)) = \max\limits_{1 \le i \le m} A(i, q(k)) = v_1(k)$

j_{k+1} — " — : $A(p(k), j_{k+1}) = \max\limits_{1 \le j \le n} A(p(k), j) = v_2($

минимизирует выигрыш 1ого игрока, анализирует его поведение - знач. матр. игры

Утв $v_1(k) \geq v^{\alpha} \geq v_2(k) \quad k = 1, 2..$ (1)

Д-во: $v_1(k) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} A(i, q(k)) \geq \min\limits_{q \in Q} \max\limits_{1 \leq i \leq m} A(iq) =$

$= \{$сл Т1.7'$\} = \nu = \max\limits_{p \in P} \min\limits_{1 \leq j \leq n} \geq$

$\geq \min\limits_{1 \leq j \leq n} A(p(k)\, j) = v_2(k)$ чтд

Теорема 1.11

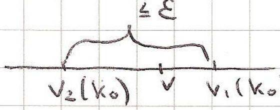
В методе Брауна $\exists$ предел:

$$\lim_{k \to \infty} v_1(k) = \lim_{k \to \infty} v_2(k) = v$$

$\exists p^0$ - $\forall$ пред точка $\{p(k)\}$
q^0 - $\forall$ -//- $\{q(k)\}$

p^0 - опт. смеш. стратегия $1^{ого}$ игрока
q^0 - опт. см. стр. $2^{ого}$ игрока
$\Rightarrow$ из теоремы вытекают правила остановки

Останавливаемся на шаге k_0: $v_1(k_0) - v_2(k_0) - \varepsilon$



$\Rightarrow |v - v_1(k_0)| \leq \varepsilon$
$|v - v_2(k_0)| \leq \varepsilon$ (2)

$\Rightarrow v_1, v_2$ - приближ. знач. v с точностью ε

$\min\limits_{1 \leq j \leq n} A(p(k_0), j) = v_2(k_0) \overset{(2)}{\geq} v - \varepsilon$

скорость сх-ти v_1 и v_2 к v:
теоретически ск-ть сх-ти $\underline{O}\left(\frac{1}{k^{m+n-2}}\right) \rightarrow$ медлен.
на практике $\underline{O}\left(\frac{1}{k}\right)$
$\Rightarrow$ для ускорения модифицируем метод:

Модификация:

$v_1^*(k) := \min\limits_{1 \leq t \leq k} v_1(t)$ (min всех верхних границ) $\overset{(1)}{\geq} v \geq$

$\geq v_2^*(k) := \max\limits_{1 \leq t \leq k} v_2(t)$ (max среди всех нижних границ)

останов: k_0 : $v_1^*(k_0) - v_2^*(k_0) \leq \varepsilon$

$|v_1 - v_1^*(k_0)| \le \varepsilon, \ |v - v_2^*(k_0)| \le \varepsilon$ (3)

$v_1^*(k_0) \overset{def}{=} \min_{1\le t\le k_0} v_1(t) = v_1(t_1)$

на t_1 верхняя граница была наилучшей

$v_2^*(k_0) = \max_{1\le t\le k_0} v_2(t) = v_2(t_2)$

<u>Утв</u> $p(t_2)$ – max min смеш. стр.
$q(t_1)$ – min max

<u>Д-во:</u>

$$\min_{1\le j\le k} A(p(t_2),j) = v_2(t_2) = V_2^*(k_0) \overset{(3)}{\ge} v-\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow p(t_2)$ – ε-макс. см. стр, $q(t_1)$ док-ся аналог. <u>чтд</u>

J k повторений. Определим вектор $c(k) \in E^m$:

$$c_i(k) = k\cdot A(i,q(k))^{0} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\ell_i}{k} = \sum_{t=1}^{k} a_{ij_t}, \ j_t = j - \ell_j \text{ раз}$$

$\Rightarrow$ вектор $c(k)$ – сумма столбцов м-цы A с ном. j_t

Аналогично опред в-р $d(k) \in E^n$: $d_j(k) = kA(p(k),j) =$
$= k\cdot\sum_{i=1}^{m}\frac{r_i}{k}a_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{i_t j}$; $i_t = i - r_i$ раз

$d(k)$ – сумма строк A с номерами $i_t : t = 1..k$

$i_{k+1}: \max_{1\le i\le m}\frac{c_i(k)}{k} = \frac{c_{i_{k+1}}(k)}{k} = v_1(k)$

$j_{k+1}: \min_{1\le j\le n}\frac{d_j(k)}{k} = v_2(k)$

<u>Пример</u> $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

		сумма столб.				сумма строк			
k	i_k	$c_1(k)$	$c_2(k)$	$v_1(k)$	j_k	$d_1(k)$	$d_2(k)$	$v_2(k)$	ε
1	1	0	4	4	1	0	2	0	4
2	2	0	8	4	1	4	3	3/2	5/2
3	2	2	9	3	2	8	4	4/3	3/2
4	2	4	10	5/2	2	12	5	5/4	1
5	2	6	11	11/5	2	16	6	6/5	7/10
6	2	8	12	2	2	20	7	7/6	1/2 = 2 − 3/2
7	2	10	13	13/7	2	24	8	8/7	5/14
8	2	12	14	7/4	2	28	9	9/8	7/4 − 3/2 = 1/4
9	2	14	15	5/3	2	32	10	10/9	1/6
10	2	16	16	8/5	2	36	11	11/10	1/10 ок!

дост. точности: $1/10 = \varepsilon$

$v_1^*(10) = 8/5$ $v_2^*(10) = 3/2$ $t_2 = 2$
"$v_2^*(2)$

Нужно: $p(t_2) = p(2) = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$
$q(t_1) = q(10) = (\frac{2}{10}\ \frac{4}{5})$
2 раза был "1", 8 раз – "2"

§6 Реш-я игр с вогнутыми и выпуклыми функциями выигрыша

$\Gamma = \langle X, Y, F(xy) \rangle$

$F: \underset{x}{\cap}, \underset{y}{\cup} \Rightarrow$ с.т.

Теперь ∠ когда одного из условий нет

Опр Γ с вогнутой ф-ей выигрыша, если $F(x,y)$ - непр. на $X \times Y$, $X \subset E^m$, $Y \subset E^n$ - вып. компакты

$\forall y \in Y$ $F(x,y)$ вогн. по x

$\forall x \in X$ $F(xy)$ вып. по y

Теорема 1.12 Пусть в E^m имеется семейство D_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ - вып. компактов, $\forall \alpha_1 \dots \alpha_{m+1} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m+1} D_{\alpha_i} \neq 0$

Тогда $\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} D_\alpha \neq \emptyset$. (без док-ва)

Теорема 1.13 Пусть Γ - игра с вогнутой ф-ей выигрыша.

Тогда $\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(xy) = \min_{y^j \in Y} \overline{\max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(x, y^j)}$

$y^j \in Y \subset E^n$, по $(m+1) \cdot n$ переменным $1 \le j \le m+1$

Д-во: Все max и min достигаются. Док-м, что $\omega \ge \underline{v}$

∠ ∀ набор $y^1 \dots y^{m+1} \Rightarrow \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(xy^j) \ge \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(xy) = \underline{v} \Rightarrow w \ge \underline{v}$

Док. что $\underline{v} \ge w$: $y \in Y$; $D_y = \{x \in X \mid F(xy) \ge \omega\}$

$\boxed{Д/з}$ проверить, что D_y - вып. мн.-во для сем-ва ($y \in Y$). Если $\bigcap_{j=1}^{m+1} D_{y^j} \neq \emptyset \Rightarrow$ у сл. т. вып

$\overset{\to x^*}{\max_x} \min_{1 \le j \le n+1} F(x, y^j) \ge \omega \Rightarrow \min_{1 \le j \le n+1} F(x^*, y^j) \ge \omega \Rightarrow F(x^*, y^j) \ge \omega, j = \overline{1, m+1}$

$\Rightarrow x^* \in \bigcap$ этих множеств $\Rightarrow$ оно непусто.

$\exists x^0 \in \bigcap_{y \in Y} D_y \Rightarrow$ это знач. что $F(x^0, y) \ge \omega$ $\forall y \in Y \Rightarrow \bar{v} \ge \min_{y \in Y} F(x^0 y) \ge \omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{v} \ge \omega \Rightarrow \bar{v} = \omega$

чтд

$\bar{y}^1 \dots \bar{y}^{m+1}$: набор такой, что: $\max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(x, \bar{y}^j) = \omega$

$Q = \{q = (q_1 \dots q_{m+1}) \mid \sum_{j=1}^{m+1} q_j = 1, q_j \ge 0, j = 1..m+1\}$

$\Phi(xq) = \sum_{j=1}^{m+1} F(x, \bar{y}^j) q_j$: $\underset{x}{\cap}$, линейна по q

Теорема 1.14 В Γ с вогн. ф-ей выигрыша, где $(x^0 \psi^0 \underline{v})$ - реш в см. ср

x^0 - максим стр. $1^{ого}$ игр, ψ^0 - см. стр. $2^{ого}$, $\psi^0 = \sum_{j=1}^{m+1} q_j^0 I_{\bar{y}^j}$

$q^0 = (q_1^0 \dots q_{m+1}^0)$, $\max_{x \in X} \Phi(xq^0) = \min_{q \in Q} \max_{x \in X} \Phi(xq)$

Д-во: $\underline{v} \overset{T1.13}{=} \omega = \max_{x \in X} \min_{1 \le j \le m+1} F(\bar{x}, \bar{y}^j) = \max_{x \in X} \min_{q \in Q} \sum_{j=1}^{m+1} F(x, \bar{y}^j) = \max_{x \in X} \min_{q \in Q} \Phi(x,q) =$

$\overset{T1.3}{=} \min_{q \in Q} \max_{x \in X} \Phi(x,q) = \max_{x \in X} \sum_{1}^{m+1} F(x, \bar{y}^j) q_j^0 =$

$= \max_{x \in X} \int_Y F(xy)\, d\psi^0(y) = \max_{x \in X} F(x\psi^0)$;

$\max_{x \in X} F(x\psi^0) = \underline{v} = \min_{y \in Y} F(x^0 y)$

WAŻNE $F(x, \psi^0) \le \underline{v} \le F(x^0, y)$ $\forall x \in X, y \in Y$ (*)

чтд

Замечание Не исп. то, что Y - вып. => теорема верна если Y - ∀ компакт метр. пр-ва

Пусть все-таки Y - вып. компакт евкл. пр-ва.
Y^0 - мн-во кр. точек.
F(xy) ∩ (вогнуто) по x, ∩ по y

$$\underline{v} = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} F(xy) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y^0} F(xy)$$

=> реш. см. стр игры $\Gamma^0 = \langle X, Y^0, F(x,y)\rangle$ совпадает с реш в см. стратегиях Γ

Теорема 1.13' Пусть в игре Γ с вып. ф-ей F по y. Тогда спр-во след. утв-ние:

$$\bar{v} = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F(xy) = \max_{x^i\in X}\min_{y\in Y}\max_{1\le i\le n+1} F(x^i y) = W^1$$

Определим набор $\bar{x}^i$, $i = 1 .. n+1$: $\min_{y\in Y}\max_{1\le i\le n+1} F(\bar{x}^i, y) = \vartheta^1$

$$P^1(p, y) = \sum_{i=1}^{n+1} p_i F(\bar{x}^i y)\ ;\ p\in P = \{p\in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1, p_i \ge 0\}$$

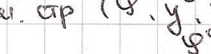
Теорема 1.15 Γ - игра с вып. ф-ей Γ по y, ∀y => ∃ реш в см. стр $(\varphi^0, y^0, \bar{v})$, y^0 - минимаксная страт

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^0 I_{\bar{x}^i}$$

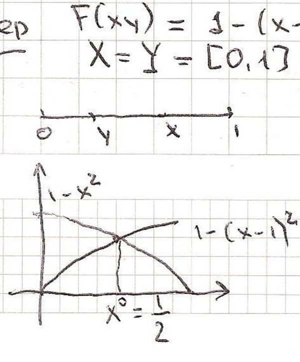
$$P^0 :\ \max_{p\in P}\min_{y\in Y}\Phi^1(py) = \min_{y\in Y}\Phi^1(p^0 y)$$

Пример $F(xy) = 1-(x-y)^2$ $\quad F''_{xx} = -2$
$X = Y = [0,1]$

$$\underline{v} = \max_{0\le x\le 1}\min_{0\le y\le 1}[1-(x-y)^2] =$$

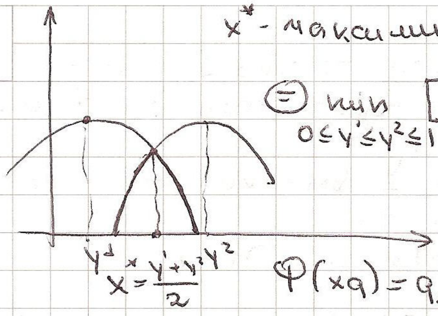


$$= \max_{0\le x\le 1}\min[1-x^2, 1-(x-1)^2] = \frac{3}{4}$$



$$\vartheta = \min_{0\le y^1\le y^2\le 1}\ \max_{0\le x\le 1}\min[1-(x-y^1)^2, 1-(x-y^2)$$

⑮



x^* - максимизирующая

$$\textcircled{=} \min_{0 \leq y^1 \leq y^2 \leq 1} \left[1 - \left(\frac{y^1 - y^2}{2}\right)^2\right]$$

Достигается, когда $\bar{y}^1 = 0,\ \bar{y}^2 = 1$

$$\varphi(x q) = q_1 F(x, \bar{y}^1) + (1-q_1) F(x \bar{y}^2) =$$

$$= q_1 [1 - x^2] + (1-q_1)[1-(x-1)^2]$$

$$\varphi'(x q) = 0 = 2q_1 x + 2(1-q_1)(x-1) \Rightarrow x(q) = 1 - q_1$$

максимизирующ. x

$\Rightarrow$ получим ф-ю максимума

$$M(q_1) = \varphi(x(q_1) q) = q_1(1-(1-q_1)^2) + (1-q_1)(1-q_1^2) =$$

$$= 1 - q_1(1-q_1) \longrightarrow \min_{0 \leq q_1 \leq 1}$$

$$q_1^0 = \frac{1}{2}$$

$$x^0 = \frac{1}{2},\ v = \underline{v} = \frac{3}{4},\ \varphi^0 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1$$

$\boxed{\text{Упр}}$ $F(x_1 x_2 y_1 y_2) = 1 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$

$$\left.\begin{aligned} &0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1.2 \\ &0 \leq y_i \leq 1 \quad i = 1.2 \end{aligned}\right. \qquad (*)$$

§7. Исследование игровых моделей.

"нападение - оборона"

$A > 0$

$\overset{\circ}{1} \qquad \dot{2} \qquad \dot{n} \qquad B$

$$x = (x_1 .. x_n) \in X = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \geq 0,\ i = 1..n\}$$

x_i $\quad y = (y_1 .. y_n) \in Y = \{y \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B,\ y_i \geq 0,\ i = 1..n\}$

$\mu_i > 0$ – кол-во средств нападения, кот. может уничтожить 1 ср-во защиты

$x_i > \mu_i y_i$ $\quad x_i - \mu_i y_i$ – прорыв ср-в напад.
$x_i \le \mu_i y_i$ $\quad 0$ – дост. ср-в защиты

$\max[x_i - \mu_i y_i, 0]$

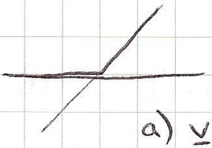
$$F(xy) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, 0]$$

по всем позициям

– вып. ф-я по x и по y $\Rightarrow \bar{v} = \underline{v}$

$\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots \ge \mu_n > 0$

n – слабейший пункт (наим. эф-ть)



а) $\underline{v} = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(xy) = \max[A - \mu_n B, 0]$

$x^0 = x^{(n)} = (0, 0 .. 0, A)$

$\forall x \in X \quad \min_{y\in Y} F(xy) \le \min_{y\in Y} F(x^{(n)}, y)$

$$\min_{y\in Y} F(x,y) = \left[\bar{y} : \bar{y}_i = \left(\frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k}}\right) \frac{x_i}{\mu_i}\right] \le F(x, \bar{y}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \underset{\overset{\wedge}{0}}{\mu_i y_i}, 0] = \begin{cases} 0, \text{ если } B \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \Rightarrow y_i \ge \frac{x_i}{\mu_i} \\ \Rightarrow \max = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i \bar{y}_i), \text{ если } B < \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \end{cases}$$

$\textcircled{\le}$

$x_i - \mu_i \bar{y}_i \le 0$

$\bar{y}_i \le \frac{x_i}{\mu_i}$ $\qquad x_i - \mu_i \bar{y}_i > 0$

$$\textcircled{\scriptsize\leq}\ A-\sum_{i=1}^{n}\mu_i y_i \leq A-\sum_{i=1}^{n}\mu_n y_i = A-\mu_n B \leq$$

$$\leq \max\left[A-\mu_n B, 0\right] =$$

$$= \min_{y\in Y}\max\left[A-\mu_n y_n, 0\right] = \min_{y\in Y} F(x^{(n)}, y)$$

б) $\bar{v} = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F(x,y) = \max\left[A-\frac{B}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}}, 0\right]$

$y^0 : y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}}$

надо направл - на тот пункт, кот меньше всего защищен.

$x^{(i)} = (0 \ldots A, 0 \ldots 0)$

$\max_{x\in X} F(xy) = \max_{1\leq i\leq n} F(x^{(i)}, y) \quad \forall y\in Y$ (1)

$\max_{x\in X} F(xy) \geq \max_{1\leq i\leq n} F(x^{(i)}, y)$ (I)

$\forall x\in X \quad x = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{x_i}{A}}_{\lambda_i} x^{(i)}$

$\lambda_i = \frac{x_i}{A} \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$

Восп. тем, что ф-я вып. по x

$$F(x,y) = F\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{A}x^{(i)}, y\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{A}F(x^{(i)}, y) \leq$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n} F(x^{(i)}, y) \quad \forall x, \forall y$$

тк считаем, что y фикс ⇒

$\Rightarrow \max_{x\in X} F(xy) \leq \max_{1\leq i\leq n} F(x^{(i)}, y)$ (II)

Вычисляем $\bar{v} = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} F(xy) \overset{(1)}{=} \min_{y\in Y}\max_{1\leq i\leq n} F(x^{(i)} y) =$

$= \min_{y\in Y}\max_{1\leq i\leq n}\left[A-\mu_i y_i, 0\right] =$

$$= \min_{y\in Y} \max [A - \min_{1\le i\le n} \mu_i y_i , 0] =$$

$$= \max [A - \max_{y\in Y} \min_{1\le i\le n} \mu_i y_i , 0] =$$

$$= \{\text{З.п. } \bar{p}: p_i = \frac{y_i}{B},\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i \ge 0,\ p\in P\} =$$

$$= \max [A - B \max_{p\in P} \min_{1\le i\le n} \mu_i p_i , 0] \circleddash$$

Δ игру: $\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ Значение игры было равно такому максимину

$$\circleddash \max [A - B \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0]$$

Опт. стр. $p_i^0 = \frac{1}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$ $i = 1..n$

Возвращ. к перем. y $\Rightarrow$ $y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$

Сравним максимин и минимакс:

$$\underline{v} = \max [A - \mu_n B, 0]$$

$$\bar{v} = \max [A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0]$$

Необх. выполн. СТ

$\boxed{1\ 10.2007}$

$$x\in X = \{x\in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A, x_i \ge 0, i = 1..n\}$$

$$y\in Y = \{y\in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B, y_i \ge 0, i = 1..n\}$$

$$F(xy) = \sum_{i=1}^{n} \max [x_i - \mu_i y_i , 0]$$

а) $\underline{v} = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(xy) = \max [A - \mu_n B, 0]$ $x^{(0)} = x^{(n)} = (0.0A)$

б) $\bar{v} = \min_{y\in Y} \max_{x\in X} F(xy) = \max [A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}}, 0]$ $y^0: y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$ $i = \overline{1,n}$

48 $B \geq A\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k} \Rightarrow \bar{v} = 0 \geq \underline{v} \geq 0 \Rightarrow \bar{v} = \underline{v}$

$B < A\sum \frac{1}{\mu_k} \Rightarrow \bar{v} = A - \frac{B}{\sum\frac{1}{\mu_k}} > A - \frac{B}{1/\mu_n} = A - \mu_n B$

$\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$

$F(xy) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, 0]$

$\bar{v} > \max[A - \mu_n B, 0] = \underline{v}$

по Т.1.15 $v = \bar{v}$

$\Rightarrow$ выпишем опт. см. стр. 1ого игрока:

$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{x^{(i)}}$

д-м, что φ^0 - опт. см стратегию для нападения

1. $F(\varphi^0, y) \geq \bar{v} \quad \forall y \in Y$

(нападение гарант. что выигрыш $> \bar{v}$)

& элементарное нер-во:

$a_i\ b_i \quad i = 1..n$

$\sum_{i=1}^{n} \max[a_i\, b_i] \geq \max[\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i]$ (2)

$F(\varphi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) =$

$= \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max[A - \mu_i y, 0] = \sum_{i=1}^{n} \max[\overset{a_i}{\underline{p_i^0 A}} - p_i^0 \mu_i y_i, \overset{b_i}{0}] \overset{(2)}{\geq}$

$\geq \max[\sum_{i=1}^{n} p_i^0 A - p_i^0 \mu_i y_i, 0] =$

$= |$ учитывая, что $p_i^0 \mu_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}}$ $| =$

$= \max[A - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}} \sum_{i=1}^{n} y_i, 0] = \max[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu_k}}, 0] = \bar{v}$

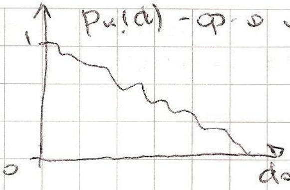
т.о. для $(\varphi^0 y^0 \bar{v})$ вып. нер-во

$F(\varphi^0 y) \geq \bar{v} = \max_{x \in X} F(x y^0) \geq F(x y^0)$

Модель дуэли

$p_k(d)$, $k = 1.2$

$d \in [0, d_0] \quad p_k(0) = 1 \quad p_k(d_0) = 0 \quad k = 1.2$



$P_k(d)$ - ф-я меткости ∀ дуэлянта
ф-ции убыв. монотонно

$x \in X = [0, d_0]$
$y \in Y = [0, d_0]$

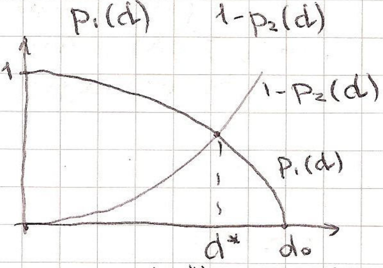
2 вида дуэли: • шумная (выстрелы слышны)
• бесшумная

• Сначала ∠ шумную. Тогда

$$F(xy) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ 1 - p_2(y), & x < y \end{cases}$$

У первого дуэлянта: $f(y) = \begin{cases} x, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$

Вдоль диагонали она разрывна, но имеет ст



Перес. в одной точке: d^*
где d^* решение
$1 - p_2(d) = p_1(d)$

=> Оптимальная
стратегия:
$(d^*, d^*, v = p_1(d^*))$

1. $F(d^* d^*) = p_1(d^*)$
2. Д-м нер-во из определения с.т.
∀ стратегии x $y := d^*$
$F(x, d^*) \leq p_1(d^*) = F(d^* d^*)$

$$F(xd^*) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq d^* \\ 1 - p_2(d^*), & x < d^* \end{cases} \leq p_1(d^*) \text{ тк } p_1(\cdot)$$
убывающая
$\overset{\shortparallel}{p_1(d^*)}$

Так же просто д-ся второе нер-во
$x = d^* \; \forall y \Rightarrow F(d^* y) \geq p_1(d^*)$

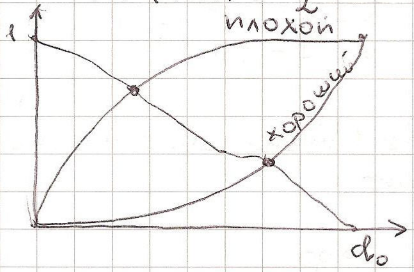
$$F(d^* y) = \begin{cases} p_1(d^*), & d^* \geq y \\ 1 - p_2(y), & d^* < y \end{cases}$$

$1 - p_2(y) > 1 - p_2(d^*) = p_1(d^*)$
возр. ф-я
=> нер-во из о-ния д-но

Интересно отметить частные случаи:

$p_1(d) = p_2(d) \Rightarrow p_1(d) = 1 - p_1(d)$

$d^*: p_1(d) = \frac{1}{2} = v$



- Теперь ∡ бесшумную игру

$$\underline{v} = \sup_{0 \le x \le d_0} \inf_{0 \le y \le d_0} F(xy) = \max_{0 \le x \le d_0} p_1(x)(1-p_2(x))$$

$0 \le x < d_0$

$$W(x) = \inf_{0 \le y \le d_0} F(xy) = \min\left[\inf_{0 \le y \le x} p_1(x), \inf_{x < y \le d_0} p_1(x)(1-p_2(y))\right]$$

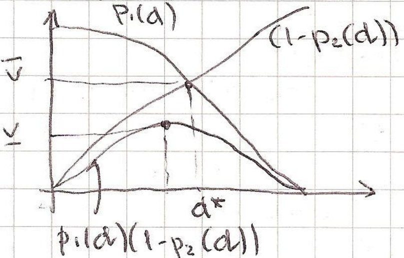
$$= \min\left[p_1(x), p_1(x)(1-p_2(x))\right]$$

$$F(xy) = \begin{cases} p_1(x), & x > y \\ p_1(x)(1-p_2(y)) & x < y \end{cases} \qquad = p_1(x)(1-p_2(x))$$

$$f(y) = \begin{cases} x, & x > y \\ 0, & x < y \end{cases} \sim x$$

$$\bar{v} = \inf_{0 \le y \le d_0} \sup_{0 \le x \le d_0} F(xy) = p_1(d^*)$$

Теперь покажем: $\underline{v} < \bar{v}$



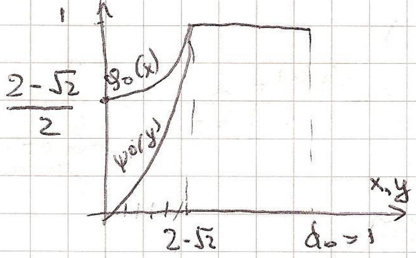
$\Rightarrow$ чистого решения нет $\Rightarrow$ ищем в смеш. стратегиях

Пример $d_0 = 1,\ p_1(d) = p_2(d) = 1-d$

$v = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$

см. стр
1ого функ. $\varphi^0(x) = \begin{cases} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{1}{(x-1)^2} + 1\right) & , 0 \le x < 2-\sqrt{2} \\ 1 & , 2-\sqrt{2} \le x \le 1 \end{cases}$

см. стр
2ого функ. $\psi^0(y) = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(\frac{1}{(y-1)^2} - 1\right) & , 0 \le y < 2-\sqrt{2} \\ 1 & , 2-\sqrt{2} \le y \end{cases}$



§8. Многошаговые антагонистические игры с полной информацией.

(φ^0, ψ^0, v)

T – кол-во шагов

$t = 1 \ldots T$

x_t, y_t

(это опр. не игры в нормальной форме)

выбор значения ≡ выбор альтернативы

Шаг 1 $x_1 \in U_1,\ y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\cdot)$

Шаг t-1 $x_1 \ldots x_{t-1}\ y_1 \ldots y_{t-1}$ $\bar{x}_t = (x_1 \ldots x_t)$

$\bar{y}_t = (y_1 \ldots y_t)$

Шаг t $x_t \in U_t(\bar{x}_{t-1}\ \bar{y}_{t-1}) = U_t(\cdot)$ $y_t \in V_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}) =$
$= V_t(\cdot)$

$\Rightarrow T$: $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ – партия игры

Ф-ия ∀ партии игры о-но $F(\bar{x}_T\ \bar{y}_T)$

GODZINA TIME 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
DZIEŃ DAY 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
MIESIĄC MONTH 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

52 Стратегия - "план игры", кот. готовится до игры

$t \qquad x_t = \tilde{x}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$

$\tilde{x}_t \in \tilde{U}_t \underline{\in} U_t(\cdot)$

⇒ мн-во стратегий (1ого игрока)

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_t, t = \overline{1,T}) \in \tilde{X} = \times \prod_{t=1}^{T} \tilde{U}_t$$

2 игрок:

$y_t = \tilde{y}_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$

$\tilde{y}_t \in \tilde{V}_t \underline{\in} V_t(\cdot)$

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_t, t = \overline{1,T}) \in \tilde{Y} = \times \prod_{t=1}^{T} \tilde{V}_t$$

$\tilde{x}, \tilde{y}$ до игры, н/з друг от друга

Осталось опр-ть $F(\tilde{x}, \tilde{y})$

$(\tilde{x}\tilde{y}) \longrightarrow (\bar{x}_T \bar{y}_T)$

$\tilde{x}_1 = x_1 \quad y_1 = \tilde{y}_1(x_1)$

$\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(x_1 y_1)$

⇒ подстановками опр-ем партию игры

$F(\tilde{x}\tilde{y}) = F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$

⇒ опр. многош. игру в норм. форме

$\Gamma = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle$

Γ' $U_t(\cdot), V_t(\cdot)$ конечные

Γ'' $U_t(\cdot) \equiv U_t, \ V_t(\cdot) \equiv V_t \qquad t = 1..T$

компакты метр. пр-ва зависящие только от t

$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T) \qquad (\times \prod_{t=1}^{T} U_t) \times (\times \prod_{t=1}^{T} V_t)$

$\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_t^0 \quad t = 1..T)$

$\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_t^0 \quad t = 1..T)$

$\tilde{y}_T^0, \tilde{x}_T^0, \tilde{y}_{T-1}^0, \ldots$

$$\tilde{y}_T^0 : \tilde{y}_T^0(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}) \overset{def}{=} y_T^0 : F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T^0) = \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}, y_T) := F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1})$$

одна из ф-ий Беллмана

WAŻNE NOW

Фикс. любое значение аргументов

53

$$(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}) : \tilde{x}^o_T(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}) \overset{def}{=} x_T^o :$$

$$F(\bar{x}_{T-1}, x^o_T, \bar{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\bar{x}_{T-1}\ x_T\ \bar{y}_{T-1}) = F(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1})$$

Доп. уже определены: $\tilde{y}^o_T\ \tilde{x}^o_T\ \tilde{y}^o_{T-1}\ ..\ \tilde{y}^o_{T+1}\ \tilde{x}^o_{T+1}$

$\Rightarrow$ по ходу опр. ли $F(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$

$\tilde{y}^o_t, \tilde{x}^o_t$

$t \leftrightarrow T$

$$\tilde{x}^o_1 = x^o_1 : F(x^o_1) = \max_{x_1 \in U_1} F(x_1)$$

$$\tilde{v} = \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \max_{x_1 \in U_1} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(x_1, y_1) = \ldots =$$

последов максимин

$$= \max_{x_1 \in U_1(\cdot)} \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} \ldots \max_{x_T \in U_T(\cdot)} \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\bar{x}_T \bar{y}_T)$$

использ

<u>Теорема 1.16</u> (Цермело) Всякая многошаговая игра с полной информацией Γ' имеет решение след. вида $(\tilde{x}^o, \tilde{y}^o, \tilde{v})$

<u>Док-во</u>: 1. Д-м, что $(\tilde{x}^o, \tilde{y}^o)$ образует с.т. $F(\tilde{x}, \tilde{y})$ на $\tilde{X} \times \tilde{Y}$

1) $F(\tilde{x}^o \tilde{y}) \geq \tilde{v} \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{Y}$

2) $F(\tilde{x} \tilde{y}^o) \leq \tilde{v} \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$

Докажем 1) $\forall \tilde{y} \in \tilde{Y} \quad F(\tilde{x}^o, \tilde{y}) = F(\tilde{x}^o \tilde{y}_1 .. \tilde{y}_{T-1} \tilde{y}_T) \geq$

$$\geq \min_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\tilde{x}^o_T \tilde{y}_1 .. \tilde{y}_{T-1} y_T) = F(\tilde{x}^o_T \tilde{y}_1 .. \tilde{y}_{T-1}) \overset{def\, \tilde{x}^o_T}{=}$$

$$= F(\tilde{x}^o_1 .. \tilde{x}^o_{T-1}, \tilde{x}^o_T, \tilde{y}_1 .. \tilde{y}_{T-1}) = \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\tilde{x}^o_1 .. \tilde{x}^o_{T-1} x_T \tilde{y}_1 .. \tilde{y}_{T-1})$$

$$= F(\tilde{x}^o_1 .. \tilde{x}^o_{T-1} \tilde{y}_1 .. \tilde{y}_{T-1}) \geq F(\tilde{x}^o_1 \tilde{y}_1) \geq \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(\tilde{x}^o_1 y_1) =$$

$$= F(\tilde{x}^o_1) \overset{def}{=} \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \tilde{v}$$ д-но

2) д-во аналогично

<u>чтд</u>

54 **Пример** Шахматы

считаем, что партия продолж. T
(можно добавить фиктивные ходы)

белые игрок 1
черные игрок 2

$\mathcal{V}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$
$V_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$ все возм. ходы на данной позиции

$$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T) = \begin{cases} 1 & \text{белые выигр} \\ 1/2 & \text{ничья} \\ 0 & \text{белые проигр} \end{cases}$$

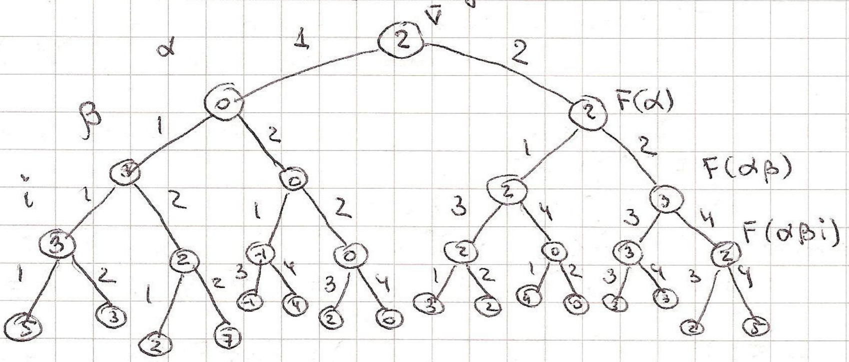
Пример

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$M_1 = \{1,2\}$ $M_2 = \{3,4\}$ строки
$N_1 = \{1,2\}$ $N_2 = \{3,4\}$
M_α $\alpha = 1,2$ столбцы
N_β $\beta = 1,2$

шаг 1: $\alpha \in \{1,2\}$ $\beta \in \{1,2\}$
шаг 2: $i \in M_\alpha$ $j \in N_\beta$

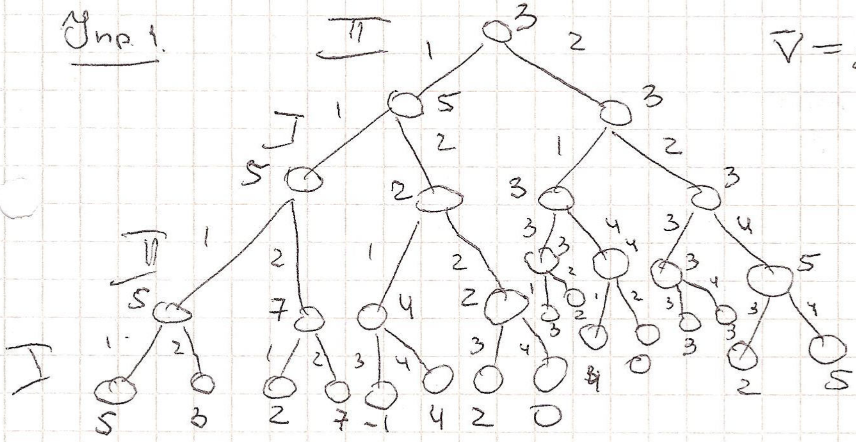
$$F(\alpha\beta i j) = a_{ij}$$



$$F(\alpha\beta i j) = a_{ij}$$

$$\begin{cases} F(\alpha\beta i) = \min\limits_{j \in N_\beta} a_{ij} \\ F(\alpha\beta) = \max\limits_{i \in M_\alpha} F(\alpha\beta i) \\ F(\alpha) = \min\limits_{\beta = 1,2} F(\alpha\beta) \\ \bar{v} = \max\limits_{\alpha = 1,2} F(\alpha) \end{cases}$$

Упр 1.



$\bar{V} = 3$

Опт. стратегии

β^0 $\tilde{j}^0(\alpha,\beta)$ $\beta^0 = 2$ $j^0(1,2) = 4$

$j^0(2,2) = 4,3$

$\alpha^0(\beta)$ $\tilde{i}(\alpha,\beta,j)$ $\alpha^0(1) = 1$ $i(1,1,1) = 1,2$

$\mathring{i}(1,1,2) = 2$

$\alpha^0(2) = 1,2$

$\mathring{i}(1,2,1) = 4$

$\mathring{i}(1,2,2) = 3,4$

$\mathring{i}(2,2,3) = 3,4$

$\mathring{i}(2,2,4) = 4$

Упр 2 $F(xy) = -(x-y)^2 = -(x^2-2xy+y^2) =$

$= -x^2+2xy-y^2$ – макс в верху

$F'_x = -2x+2y = 0$ $x = y$.

$F(y) = -\cancel{y^2}+\cancel{2y^2}-y^2 = 0 \Rightarrow$

$V = 0$

$x = 0 \Rightarrow -y^2 = F(y)$

$F(y) \to \min$

$V = -1$

$x = 1 = -y^2+2y-1 =$

$= (y-1)^2$

α^0, $\tilde{i}^0(\alpha,\beta)$ – необх. выбрать

$\alpha^0 = 2$ $\tilde{i}^0(2,1) = 3$ Стратегия 1ого

$\tilde{i}^0(2,2) = 3, 4$ игрока

$\tilde{\beta}^0(\alpha)$ $\tilde{j}^0(\alpha,\beta,i)$ – необходимо выбрать

$\tilde{\beta}^0(1) = 2$ $\tilde{\beta}^0(2) = 1$

$\tilde{j}^0(1,2,1) = 3$

$\tilde{j}^0(1,2,2) = 4, 3$ – не наил. но не ошибочный

$\tilde{j}^0(2,1,3) = 2$

$\tilde{j}^0(2,1,2) = 2$ Стратегии 2ого игрока

Упр шаг 1 $\beta \in \{1 2\}$ $\alpha \in \{1 2\}$ Матрица

шаг 2 $j \in N_\beta$ $i \in M_\alpha$ такая же

Пример $F(xy) = -(x-y)^2$

$X = [0.1]$ $Y = [0.1]$

шаг 1 $x \in X$ $y \in Y$

Найти: знач. игры, оптим. стратегии

$\bar{v} = \underline{v}$ – зн. е максимин

$x^0, y(x)$

Глава II Неантагонистические игры

Определим игру такого вида:

$$\Gamma = \langle X, Y, F(xy)\ G(xy) \rangle$$

$x \in X$ 1ый игрок макс-т F

$y \in Y$ 2ой макс. G

Если $F \equiv -G \Rightarrow$ игра антагонист.

Это игра в н.ф (н/з друг от друга)

Опр (x^0y^0) – ситуация равновесия (равновесие по Нэшу), если $\begin{cases} F(xy^0) \le F(x^0y^0) & \forall x \in X \\ G(x^0y) \le G(x^0y^0) & \forall y \in Y \end{cases}$

$F = -G$ – с.т.

Опр игра Γ наз. биматричной, если мн-ва стратегий $X = \{1..m\}$ и $Y = \{1..n\}$ конечные

$i \in X, j \in Y$ $A = (a_{ij})_{m \times n}$

$F(ij) = a_{ij}$ $G(ij) = b_{ij}$ $B = (b_{ij})_{m \times n}$

Опр Равновесие биматричной игры в чистых стратегиях

$(i^0 j^0)$

$$\begin{cases} a_{ij^0} \le a_{i^0j^0} & i=1..m \\ b_{i^0j} \le b_{i^0j^0} & j=1..n \end{cases}$$

Недостатки ситуаций равновесия

Пример 1 Семейный спор

$$A = \begin{array}{c|cc} & Ф & Т \\ \hline Ф & 1 & 0 \\ Т & 0 & 2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc|c} Ф & Т & \\ \hline 2 & 0 & Ф \\ 0 & 1 & Т \end{array}$$

с.р. (1.1)
(2.2)

Пример 2 Дилемма заключенного

$$A = \begin{array}{c|cc} & & \\ нет & -2 & -10 \\ да & -1 & -5 \\ & нет & да \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc} & & \\ нет & -2 & -1 \\ да & -10 & -5 \\ & нет & да \end{array}$$

ситуация р-сия: $(-5,-5)$
по всем лучше $(-2,-2)$

$\boxed{8.10.2007}$

Опр $(x^* y^*)$ - оптим. по Парето, если $\nexists (x,y)$:

$$\begin{cases} F(x,y) \ge F(x^* y^*) \\ G(x,y) \ge G(x^* y^*) \end{cases}$$ ← тр. хотя бы 1 нер-во вып. как строгое

В ант. играх $\forall$ ситуация равновесия является оптимальной по Парето

Пример 3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Покажем, что $\exists!$ ситуация равновесия (1,1)
[см стрелочки]

$W_1(1) = 0 = \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{1j}$ $\quad W_1(2) = \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{2j} = 2$

2 стратегия max min (для 1 игр)
аналогично, 2 стратегия maxmin (для 2 игр)
Равнов (1,1) но max min (2,2)

Пусть $s \geq 2$, $I = \{1..s\}$ - мн-во игроков

Δ кого игрока: $k \in I$, стратегии $x_k \in X_k$

$x = (x_1 \dots x_s)$ - ситуация (набор стратегий)

$$\overset{\uparrow}{X} = \times \prod_{k=1}^{s} X_k$$

Ф-ция выигрыша кого игрока: $F_k(x) \to \max$

$\Rightarrow \Gamma = \langle X_k, F_k(x), k \in I \rangle$ игра s лиц

(игроки выбирают свои стратегии н/з-но - игра в нормальной форме)

$x \in X$

y_k - н/з стратегии k-ого игрока

$\underbrace{x \| y_k}_{\uparrow} = (x_1 \dots x_{k-1}\ y_k\ x_{k+1} \dots x_s)$

те $x_k \to y_k$

нов. ситуация

<u>Опр</u> Ситуация $x^0 \in X$ - сит. равновесия (р-сия по Нэшу) если вып.

$$F_k(x^0) = \max_{x_k \in X_k} F_k(x^0 \| x_k), \ k = 1..s$$

те $\overset{\circ}{x}_k$ - максим по x_k эту ф-ю

Можно записать: $F_k(x^0 \| x^k) \leq F_k(x^0)$

$\forall x_k \in X_k, \ k = 1..s$

Когда ∃ ситуация равновесия?

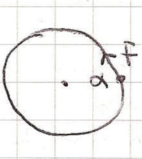
<u>Теорема</u> (Брауэра о неподв. точке)

Пусть X - вып. компакт евклидова пр-ва, задано отображение $f: X \to X$ - непр.

Тогда $\exists x^0 \in X : f(x^0) = x^0$

(без док-ва)

<u>Упр</u> Док-ть для случая $X = [a, b]$



X-вып: если отказаться то

X - окружность

f - поворот окр-ти на угол α

$\Rightarrow$ не будет неподв. точки

Придумать контрпримеры:

1. $X = (0; 1]$
2. $X = [0; +\infty)$
3. $X = [0; 1]$ f - разрывна

58 **Теорема 2.1** Пусть в игре Г множ. лиц вып:
X_k, $k = 1..s$ - вып. комп. евкл. пр. в
Пусть $F_k(x)$ - непр. на X, вогнута по x_k при фиксир. ост. перем.
Тогда в игре Г ∃ ситуация равновесия

Д-во:

I. Пусть $F_k(x)$ - строго вогнута по x_k

1) $\max\limits_{x_k \in X_k} F_k(x \| x_k) = F_k(x \| f_k(x_l, l \neq k))$, $f_k(x_l, l \neq k) \in X_k$
ф-ция f_k - ф-ция наилучш. ответа для ∀ игрока
$f_k : \prod\limits_{l \neq k} X_k \to X_k$
Т.1.2 ⇒ f_k непр

2) $X = \times \prod\limits_{k=1}^{s} X_k$
построим отобр: $X \to X$:
$\forall x \in X: f(x) = (f_k(x_l, l \neq k), k = 1..s)$ $\exists x^0 \in X : f(x^0) = x^0$
$\Rightarrow f_k(x_l^0, l \neq k) = x_k^0 \ \forall k = 1..s$
x_k^0 - лучш. ответ ⇒ x^0 - с.т. равнов
Те доказали в частном случае

II. Пусть $F_k(x)$ - вогн. по x_k (общ. случай)

1) Рассм. $F_k^{\varepsilon}(x) = F_k(x) - \varepsilon |x_k|^2$, $\varepsilon > 0$
строго вогнута по x_k (т.к. $|x_k|^2$ - строго вогн.)
⇒ $\exists x^{\varepsilon}$ - ситуация равнов. $F_k^{\varepsilon}(x)$

2) ∆ п-ть $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0+$ ⇒ $\{x^{\varepsilon_n}\}$, $x^{\varepsilon_n} \in X$ - компакт
⇒ можно выдел. сходящ. п-ть, запишем $x^{\varepsilon_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} x^0$

3) Ситуация равновесия ⇒
$F_k^{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n} \| x_k) \leq F_k^{\varepsilon_n}(x^{\varepsilon_n})$, $\forall x_k \in X_k$, $k = 1..s$
Фикс $x_k, k \xRightarrow[n \to \infty]{} F_k(x^0 \| x_k) \leq F_k(x^0)$ $\forall x_k \in X_k$, $k = 1..s$
⇒ x^0 - ситуация равнов.

чтд

Метод поиска ситуац. равновесия с помощью множеств наилучших ответов:

k игроков, фиксир. $\forall x_l, l \neq k$
$X_k(x_l, l \neq k) = \operatorname{Argmax}\limits_{x_k \in X_k} F_k(x)$ - мн-во наилучших ответов
x^0 - ситуация равновесия, если $x_k^0 \in X_k(x_l^0, l \neq k)$, $k = 1..s$
система включений

Если $X_k(x_l, l \neq k) = \{f_k(x_l, l \neq k)\}$, то получ. система уравнений вида: $f_k(x_l^0, l \neq k) = x_k^0$, $k = 1..s$

Пример ① к/р!

$$A=\begin{pmatrix} \textcircled{4} & \textcircled{3} & \textcircled{5} & -1 \\ \textcircled{4} & -2 & 3 & \textcircled{4} \\ 2 & 1 & \textcircled{5} & \textcircled{4} \\ -1 & 2 & \textcircled{5} & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} \textcircled{7} & 5 & 4 & \textcircled{7} \\ 4 & \textcircled{5} & \textcircled{5} & 4 \\ -3 & \textcircled{6} & \textcircled{6} & 2 \\ \textcircled{8} & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Построим мн-ва наил. ответов:

$X(j)$ для 1 игрока

$X(1)=\{1,2\}$ в ∀ столбце max эл-т

...

Аналогично, для 2 игрока : $Y(i)$

В ∀ строке max эл-т : $Y(1)=\{1,4\}$

Ситуация равновесия: (i^0, j^0), $i^0 \in X(j^0)$
$j^0 \in Y(i^0)$

Смотрим "общие кружочки" ⇒ сит. равнов $(1,1)$, $(3,3)$

② (к/р!)

$$\begin{cases} F(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 2xy - 5y^2 + 3x \\ G(xy) = x^2 + 4xy - y^2 - y \end{cases} \qquad X=[-1;2];\ Y=[-2,1]$$

F - вогн. по x (строго) $F_{xx}<0$

G - вогн по y (строго) ⇒ $G_{yy}<0$ ⇒ ∃ сит. равновесия

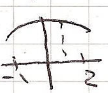
строго вогн ⇒ мн-во наил. ответов - единичн. элемент

$$x(y):\ \max_{-1\le x\le 2} F(x,y) = F(x(y),y) \qquad \Rightarrow \begin{cases} x(y)=x \\ y(x)=y \end{cases} \to (x^0 y^0)$$
$$y(x):\ \max_{-2\le y\le 1} G(x,y) = G(x,y(x))$$

Построим $x(y)$: $F'_x = -x+2y+3=0 \Rightarrow \bar{x} = 2y+3$
(тк ф-я вогнута)

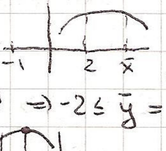
при каких y $\bar{x} \in [-1,2]$

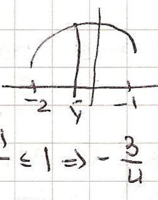
$\Rightarrow -1 \le \bar{x} = 2y+3 \le 2 \Rightarrow -2 \le y \le -\frac{1}{2}$



ф-ция наил. ответа для 1 игр →

$$x(y) = \begin{cases} 2y+3, & -2 \le y \le -3/2 \\ 2, & -1/2 < y \le 1 \end{cases} \leftarrow$$

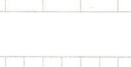




Построим $y(x)$:

$G'_y = 4x-2y-1=0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{4x-1}{2} \Rightarrow -2 \le \bar{y} = \frac{4x-1}{2} \le 1 \Rightarrow -\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$

$$y(x) = \begin{cases} -2, & -1 \le x \le -3/4 \\ \frac{4x-1}{2}, & -3/4 \le x \le 3/4 \\ 1, & 3/4 \le x \le 2 \end{cases}$$

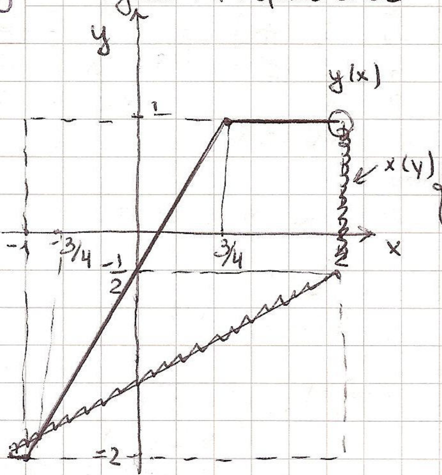


Найдем т. пересечения $x(y)$ и $y(x)$:

$(x^0 y^0) = (-1,-2)$

$(2,1)$

$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{11}{6}\right)$



$$\begin{cases} x = 2y+3 \\ 2y = 4x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -2/3 \\ y = -11/6 \end{matrix}$$

ситуация равновесия

Ситуации равновесия в смешанных стратегиях биматричной игры.

$$\Gamma: \begin{cases} A = (a_{ij})_{m\times n} \\ B = (b_{ij})_{m\times n} \end{cases}$$

Если $B = -A$, то антаг. игра $\Rightarrow$ может не быть с.т. $\Rightarrow$ может не быть ситуации равновесия в чистых стратегиях

1 игрок: $p = (p_1 .. p_m) \in P$

2 игрок: $q = (q_1 ... q_n) \in Q$

Выигрыши игроков - ожидаемый выигрыш:

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j \quad ; \quad B(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j$$

$\bar{\Gamma} = \langle P, Q, A(p,q), B(p,q) \rangle$ - смешанное расширение

$(p^0 q^0)$ - ситуация равновесия игры $\bar{\Gamma}$ - это сит. равнов. в смеш. страт. игры Γ

Опр $A(p,q^0) \le A(p^0q^0)\ \forall p \in P$
$B(p^0q) \le B(p^0q^0)\ \forall q \in Q$ $\Rightarrow$ (p^0q^0) ситуация равновесия 61 в смеш. стратегиях

T2.1 ⇒ ∃ ситуация равнов. в Γ, тк вып. усл. T2.1
P, Q − вып. комп евкл пр-в
$A(pq)$ − лин по p ⇒ вогн по p
$B(pq)$ − лин по q ⇒ вогн по q

Свойства:

Лемма 1 (p^0q^0) − ситуация равновесия в смеш. стратегиях биматричной игры ⟺

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A(iq^0) \le A(p^0q^0) & i=\overline{1,m} \\ B(p^0j) \le B(p^0q^0) & j=\overline{1,n} \end{cases} \quad (*)$$

(ср. с T1.6')

Док-во: 1) $\boxed{\Rightarrow}$ (p^0q^0) − с.р. в смеш. страт. очевидна
$p=(0 \dots 1, 0, \dots 0) \Rightarrow$ 1 н-ва

2) $\boxed{\Leftarrow}$ (p^0q^0) − вып $(*)$
1 н-во: $A(iq^0) \le A(p^0q^0)$ $i=1..m$
$\angle\ \forall p \in P$: $p_i A(iq^i) \le p^i A(p^0q^0) \Rightarrow \sum_i$
$A(pq^0) \le A(p^0q^0)\ \forall p \in P$

Аналогично для q чтд

Теорема 2.2 (св-во доп. нежесткости)
(p^0q^0) − с.р. в см стр ⇒ 1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(iq^0) = A(p^0q^0)$
2) $q_j^0 > 0 \Rightarrow B(p^0j) = B(p^0q^0)$

Д-во: 1) Пусть $\exists i_1 : p^0_{i_1} > 0$ и $A(i_1q^0) < A(p^0q^0)$ $\Big|\ \times p^0_{i_1}$ $\oplus$ ср с T1.8'
$\forall i \ne i_1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} A(iq^0) \le A(p^0q^0)$ $\Big|\ \times p_i^0$

$$\Rightarrow \oplus \begin{cases} p^0_{i_1} A(i_1q^0) < A(p^0q^0) p^0_{i_1} \\ p^0_{i_1} A(iq^0) \le A(p^0q^0) p_i^0 \end{cases} \Rightarrow A(p^0q^0) < A(p^0q^0) \Rightarrow \text{против.}$$

2) 2ое док. аналогично чтд

Следствие (p^0q^0) − с.р. в см. стр ⇒
1) $A(iq_0) < A(p^0q^0) \Rightarrow p_i^0 = 0$
2) $B(p^0j) < B(p^0q^0) \Rightarrow q_j^0 = 0$

62

Теорема 2.3 $(p^0 q^0)$ - с.р. в см. стр.
$X = \{1..m\}$. $Y = \{1..n\}$ - мн-ва чист. стр
Тогда $\exists X^0 \subset X$, $Y^0 \subset Y$; $\exists v_1 v_2$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in Y^0} a_{ij} q_j^0 = v_1, \forall i \in X^0 \\ \sum\limits_{j\in Y^0} q_j^0 = 1 \end{cases} (1) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i\in X^0} p_i^0 b_{ij} = v_2, \forall j \in Y^0 \\ \sum\limits_{i\in X^0} p_i^0 = 1 \end{cases} (2)$$

$\bar{A} = (a_{ij})_{i\in X^0, j\in Y^0}$; $\bar{B} = (b_{ij})_{i\in X^0, j\in Y^0}$
не обязательно $\bar{A}$ и $\bar{B}$ обя-со квадр (см. T1.10)

<u>Д-во:</u>
1) Пусть $X^0 = Sp(p^0) = \{i \mid p_i^0 > 0\}$
$Y^0 = Sp(q^0) = \{j \mid q_j^0 > 0\}$

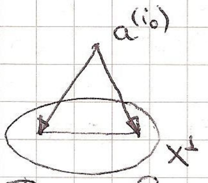
$v_1 = A(p^0 q^0)$, $v_2 = B(p^0 q^0)$
Тогда спр во (1) и (2) (ТК).
2) $p_i^0 > 0$, $i \in X^0 \Rightarrow$ ⟨ св во доп. нежестк. ⟩ $\Rightarrow$
$A(i q^0) = A(p^0 q^0) = v_1 \Rightarrow$ ур-е из сист. (1) ...
$" \sum\limits_{j\in Y_0} a_{ij} q_j^0$

чтд

∢ сист. векторов:
$a^{(i)} \in E^m$, $i \in X^0$, $|X^0| \geq m+1$

<u>Опр</u> Эта система векторов имеет макс. аффинный ранг, если вып: $\exists i_0 \in X^0$, $\exists X^1 \subset X^0$: $i_0 \in X^1$, $|X^1| = m \Rightarrow$
$[a^{(i)} - a^{(i_0)}]$, $i \in X_1$ - лин. н/з

Поясним определение на плоскости:
$m = 2$, $a^{(i)}$ - точки



∃ максимальный аффинный ранг: точки не лежат на одной прямой:
векг ЛНЗ

<u>Опр</u> B нах. в общем положении, если вып.
$\forall \bar{B} = (b_{ij})_{i\in X^0, j\in Y^0}$: $|X^0| < |Y^0| \Rightarrow$ сист. столбцов имеет максим. аф ранг

A - в общ. положении
A' - близка к A $\Rightarrow$ A' - в общ. положении

Теорема 2.4 В биматричной игре A, B – в общ положении $\Rightarrow$ $\forall (p^0 q^0)$ – с.р. в см. стр верно: $\exists X^0 \subseteq X, Y^0 \subseteq Y$; $\exists v_1 v_2$: справ (1) и (2) и $|X^0| = |Y^0|$

Д-во: 1) ∠ $\forall$ с.р. $(p^0 q^0) \Rightarrow$ {Т 2,3} справ {1} и {2}

2) Пусть $|X^0| > |Y^0|$

$$A = \left(X^0 \{ \overbrace{\boxed{\bar{A}}}^{Y^0} \; {}^{j^0} \}\, X^1 \right) - \bar{A} \text{ из } (1)$$

Общ. полож $\Rightarrow$ строки $\bar{A}$ имеют макс. ар. ранг $\Rightarrow$ $|X^1| = |Y^0|$

$(a_{ij} - a_{i^0 j})$, $i \in X^1$, $j \in Y^0$ – невырожд. м-ца

$\Rightarrow \sum\limits_{j \in Y_0} (a_{ij} - a_{i^0 j}) q^0_j = 0$, $i \in X^1$; $|Y^0|$ ур-ний, неизв

$\Rightarrow q^0_j = 0 \;\; \forall j \in Y^0 \Rightarrow$ против. 2 ур-ю из (1)

3) Аналогично для $|X^0| < |Y^0|$

Теорема 2.4' В $\forall$ биматричной игре $\exists!$ $\overline{\text{с.р. в}}^{\text{чтд}}$ см. стр $(p^0 q^0)$: $\exists X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$, $\exists v_1 v_2 \Rightarrow$ вып (1), (2) $|X^0| = |Y^0|$

Д-во: 1) $A^k \to A$, A^k – в общ. пол., $B^k \to B$, B^k в общ пол, $k \to \infty$

2) ∠ биматр. игру с $A^k, B^k \Rightarrow$ {Т2.4} $\forall (p^k q^k)$ $\exists X^k \subseteq X$, $Y^k \subseteq Y$, $\exists v_1^k, v_k^2$: вып (1), (2) для X^k, Y^k, q^k, p^k

3) пусть $X^k = X^0$, $Y^k = Y^0$ – подп-ть возьмем $|X^k| = |Y^k|$

$p^k \to p^0$; $q^k \to q^0 \Rightarrow$ сист (1) и (2)

4) Докажем: $(p^0 q^0)$ – с.р. в см. стр

(*) $\Rightarrow$ $A^k(i q^k) \le A^k(p^k q^k)$, $i = 1..m$

$B^k(p^k j) \le B^k(p^k q^k)$

$A^k \to A$, $p^k \to p^0$, $q^k \to q^0 \to$ (*) для $(p^0 q^0)$, A, B

чтд

X^0, Y^0 : $|X^0| = |Y^0|$

$X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$

$\bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$

$\bar{B} = (b_{ij})_{i \in X_0, j \in Y^0}$ ↔ квадр. подматрицы

Решаем систему (1) и (2)

$q_j^0, j \in Y^0, \vartheta_1 \leftarrow$ из (1) по A

$p_i^0 \ i \in X^0, \vartheta_2 \leftarrow$ из (2) по B

если $\exists p_i^0$ или $q_j^0 < 0$, то др. м., иначе

$$p^0 = (\overset{i \in X^0}{0 \ldots}, \underset{i \in X^0}{p_i^0}, 0, \ldots)$$

$$q^0 = (\underset{j \notin Y^0}{0 \ldots}, \underset{j \in Y^0}{q_j}, 0 \ldots)$$

Проверим (*) : $A(i q^0) \le v_1 = A(p^0 q^0) \quad \forall i$

$A(p^0 j) \le \vartheta_2 = B(p^0 q^0) \quad \forall j$

Покажем : $\vartheta_1 = A(p^0 q^0) \to$ i-ое ур-е $\times p_i^0$

$$\underbrace{\sum_{i \in X^0} \sum_{j \in Y^0} p_i^0 a_{ij} q_j^0}_{\overset{\shortparallel}{A(p^0 q^0)}} = \vartheta_1$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} \ldots b_{1n} \\ b_{21} \ldots b_{2n} \end{pmatrix}$

Найти ситуации равновесия в смеш. стр:

$p = (p_1, 1 - p_1)$ – 2 стратегии всего

p^0 – из (2) по $\bar{B}$

$j_1 j_2 \Rightarrow \bar{B} = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{2j_2} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} \end{pmatrix}$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} p_1^0 \cdot b_{1j_1} + (1 - p_1^0) b_{2j_1} = \vartheta_2 \\ p_1^0 \cdot b_{1j_2} + (1 - p_1^0) b_{2j_2} = \vartheta_2 \end{cases} \leftarrow \text{реш.}$$

если $0 \le p_1^0 \le 1$, то $B(p^0 j) \le v^2, j \ne j_1, j_2 \leftarrow$ провер (*)

$\Rightarrow p_1 b_{1j} + (1 - p_1) b_{2j} \le \vartheta_2, \forall j \ne j_1 j_2$

если не выполн., то переходим к др. подматрице

иначе ищем q^0; $q^0 = (0, \ldots \underset{j_1 \uparrow}{q^*}, 0, \ldots 0, \underset{\uparrow j_2}{1 - q^*}, 0 \ldots 0)$

по м. $A \Rightarrow \bar{A} = \begin{array}{cc} q^* & 1-q^* \end{array} \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} q^* a_{1j_1} + (1 - q^*) a_{1j_2} = \vartheta_1 \\ q^* a_{2j_1} + (1 - q^*) a_{2j_2} = \vartheta_1 \end{cases} \text{ – это решение}$$

$0 \le q^* \le 1 \Rightarrow$ нашли С.Р

графическая иллюстрация:

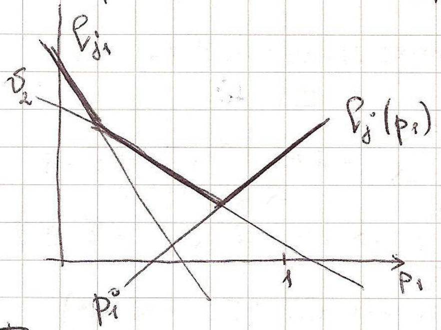
$\measuredangle$ линейная функцию $\ell_j(p_1) = p_1 b_{1j} + (1 - p_1) b_{2j}$

$$(2) \Rightarrow \ell_{j_1}(p_1^0) = \ell_{j_2}(p_1^0) = \vartheta_2$$

Свойство доп. нежесткости (*)

$$\Rightarrow \ell_j(p_1^0) \le \vartheta_2, j \ne j_1, j_2$$

Строим семейство прямых:



берем верхнюю огибающую и точки излома

Пример:

① „Семейный спор"

$$A = \begin{array}{c|cc} & \text{Ф} & \text{Т} \\ \hline \text{Ф} & 1 & 0 \\ \text{Т} & 0 & 2 \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем решение в смеш. стр

для B: $2p_1^0 = 1 - p_1^0 = \upsilon_2$ (по столбу)

$\Rightarrow p_1^0 = 1/3 \Rightarrow p^0 = (1/3, 2/3)$; $\upsilon_2 = 2/3$

для A: $q_1^0 = 2(1 - q_1^0) = \upsilon_1 \Rightarrow q_1^0 = 2/3 \Rightarrow q^0 = (2/3, 1/3)$

(по строкам) $\upsilon_1 = 2/3$

* * *

случ. п-ть Ф и Т в тех соотношениях если Ф, Ф или Т, Т, то идут (к/р)!

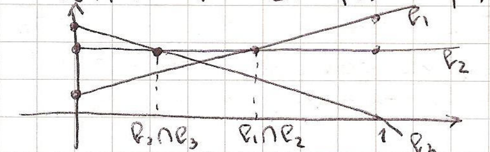
② $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Строим прямые $\ell_i(p_1)$ (по столбцу B)

$\ell_1(p_1) = 3p_1 + 1 - p_1 = 1 + 2p_1$

$\ell_2(p_1) = 2p_1 + 3(1 - p_1) = 3 - p_1$

$\ell_3(p_1) = 4 - 4p_1$



$\underline{\ell_2 \cap \ell_3}$: $3 - p_1 = 4 - 4p_1 = \upsilon_2$

$\Rightarrow p_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$p^0 = (\frac{1}{3}\ \frac{2}{3})$

см A: $\left(\begin{array}{ccc} 0 & q^* & 1-q^* \\ 1 & \boxed{4} & \boxed{5} \\ 3 & \boxed{2} & \boxed{1} \end{array}\right)$

расш.

$\begin{cases} 4q^* + 5(1 - q^*) = \upsilon_1 \\ 2q^* + 1 - q^* = \upsilon_1 \end{cases}$ $\Rightarrow 2q^* + 4(1 - q^*) = 0$

$\Rightarrow q^* = 2$ - за пределами

$\Rightarrow$ 1т. не годится

$\ell_1 \cap \ell_2$: $1 + 2p_1 = 3 - p_1 \Rightarrow p_1^0 = 2/3 \Rightarrow p^0 = (\frac{2}{3}\ \frac{1}{3})$

см A: $\left(\begin{array}{ccc} \boxed{1} & \boxed{4} & 5 \\ \boxed{3} & \boxed{2} & 1 \\ q^* & 1-q^* & 0 \end{array}\right)$ по строкам: $\begin{cases} q^* + 4(1 - q^*) = \upsilon_1 \\ 3q^* + 2(1 - q^*) = \upsilon_1 \end{cases}$ $\Rightarrow q^* = \frac{1}{2}$

$q^0 = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0)$

Ситуация равновесия: $p^0 = (\frac{2}{3}\ \frac{1}{3})$

$q^0 = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0)$

66 $\boxed{15.10.2007}$

③ (Алгоритм нахождения не всех с.р.)

$$A = \begin{array}{cc} q_1^0 & 1-q_1^0 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

для B по столбцам

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} 2p_1^0 - 3(1-p_1^0) = v_2 \\ 2p_1^0 + 4(1-p_1^0) = v_2 \end{cases} \Rightarrow -7(1-p_1^0) = 0 \Rightarrow p_1^0 = 1$$

$$\Rightarrow p^0 = (1,0)$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} q_1^0 - (1-q_1^0) = v_1 \\ -2q_1^0 + 4(1-q_1^0) = v_1 \end{cases} \Rightarrow q_1^0 = \frac{5}{8} \Rightarrow q^0 = \left(\frac{5}{8}\ \frac{3}{8}\right)$$

для A по строкам

если реш: $\begin{cases} q_1^0 - (1-q_1^0) = v \text{ (т.к } p_1^0 > 0) \\ -2q_1^0 + 4(1-q_1^0) \le v_1 \text{ усл } (*) \end{cases} \Rightarrow$

$$5(1-q_1^0) \le 3q_1^0 \Rightarrow 1 \ge q_1^0 \ge \frac{5}{8}$$

$$\underbrace{p^0 = (1,0),\ q^0 = (q_1^0, 1-q_1^0)}, \ \frac{5}{8} \le q_1^0 \le 1$$

ситуации равновесия

$m \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} \end{pmatrix}$$

$q = (q_1, 1-q_1)$

$0 \le q_1 \le 1$

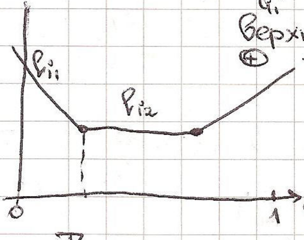
Постр с-му крив

$\ell_i(q_1) = a_{i1} q_1 + a_{i2}(1-q_1)$

$q_1^0 \quad 1-q_1^0$

верхн. огибающая

⊕ точки излома



$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \ell_{i_1}(q_1^0) = v_1 \\ \ell_{i_2}(q_1^0) = v_1 \end{cases}$$

$$p^0 = (0, \ldots 0, \overset{i_1}{p^*}, \ldots \overset{i_2}{1-p^*}, 0 \ldots 0)$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} p^* b_{i_1 1} + (1-p^*) b_{i_2 1} = v_2 \\ b_{i_1 2} p^* + (1-p^*) b_{i_2 2} = v_2 \end{cases}$$

Теорема 2.5 (ср с т 1.9)

Игра A, B. Нез строка м. A доминируется вып. комбинацией ост. строк матрицы A. Тогда эта строка входит с 0 вер. в нез. равнов. см. стр. 1ого игрока. Если строка доминир. строго, то с 0 вер. входит в ∀ равнов. стратегию 1ого игрока

Теорема 2.5' — // —, но про B и столбец 2ого игрока

Пример 1 (в чистых стр. осторожно)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad (1.1)\ !\ \text{с.р}$$

(!) ∫ В столбцы 2 ≥ 1 ⇒ вычеркн. ⇒ нет с.р

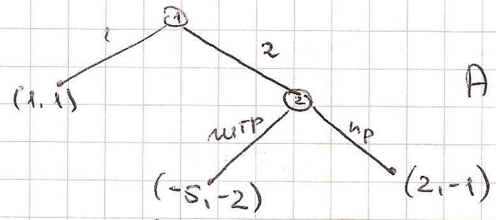
Пример 2 Доминир. в чист. стр. м.б. выделить одну с.р.

"Игра экологического контроля"

Игрок 1 – предприятие; 1 стратег: пр-во "чистым" способом; 2 стратег: пр-во "грязным" способом

игра с полной инф-ей

Игрок 2 – контрол. орган: 1 страт: штрафует; 2 страт: пропуск пр.



$$A = \begin{array}{c|cc} & ш & пр \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc} & ш & пр \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{array}$$

с.р.: (1, Ш); (2, Пр)

м. B: 2 столбец > 1 столб ⇒ 1 столб. вычерк.

м. A: аналог 1 строка

⇒ (2, Пр) – с.р.

§10. Иерархические игры 2х лиц

$x \in X$

$y \in Y$

$\Gamma = \langle X, Y, F(xy), G(xy) \rangle$ – игра 2х лиц в норм. форме

Считаем, что X, Y – компакты метр. пр-в,
F, G – непр на $X \times Y$

Игра Γ_1:

1 игрок – выбир $x \in X$, сообщ. x 2ому

2 игрок – выбир $y \in Y$, зная x

$x \xrightarrow{2} y$

(это одношаговая игра с полн. инф., $F \not\equiv -G$)

$x \in X$ – мн-во стратегий 1ого игрока

$g: X \to Y$ – стратегия 2ого игрока; $y = g(x)$

$\{g\}$ – мн-во стр. 2 игрока

$$(xy): \quad F(x,g) \overset{def}{=} F(x,g(x))$$
$$G(x,g) = G(x,g(x))$$

$\Gamma_1 = \langle X, \{g\}, F(x,g), G(x,g) \rangle$ – игра в норм. форме

68 Будем искать наилучш. гарант. результат 1ого игрока

$\overset{x}{y} \in Y(x) = \operatorname{Arg}\max_{y \in Y} G(x,y) \leftarrow$ считаем

$Y(x) \neq \emptyset$, тк G - непр, Y - компакт, $Y(x) \subseteq Y$

Гарантируем выигрыш 1ого игрока:

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x y)$$

$$F_1 = \sup_{x \in X} W(x) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x,y)$$

Решить игру: найти F_1 и x^ε. Пусть $\varepsilon > 0$

Опр Стратегия x^ε - ε-оптимальна, если $W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$

Экономическая интерпр. Γ_1:

1игр. - центр → x - цена на продукцию

2игр. - произв. продукции → y - кол. во произв. продукции

Равновесие по Штакельбергу:

пусть 2игр - благожелат. по отнош. к 1игр

$$\Rightarrow W'(x) = \max_{y \in Y(x)} F(x,y)$$

$Y^*(x) = \operatorname{Arg}\max_{y \in Y(x)} F(x,y)$ - множество наил. ответов 2ого игрока

Опр (x^0, y^0) - равновесие по Штакельбергу, если

$x^0 : W'(x^0) = \max_{x \in X} W'(x) = F'$

$y^0 \in Y^*(x^0)$

Существует ли $\max_{x \in X}$?

Лемма В сделанных предположениях в игре Γ_1, $\exists$ равновесие по Штакельбергу

Д-во: 1) $F' = \sup_{x \in X} W'(x) \Rightarrow \exists$ п-ть $\{x^k\}$: $\underset{F' \xleftarrow{k \to \infty}}{W'(x^k)} = \max_{y \in Y(x^k)} F(x^k y)$

2) $\exists$ соотв. п-ть $\{y^k\}$, $y^k \in Y^*(x^k)$

3) Пусть $\begin{matrix} x_k \to x^0 \\ y^k \to y^0 \end{matrix}$ (иначе выделим сход под-ть)

4) Докажем: $y^0 \in Y(x^0)$

$G(x^k y^k) \geq G(x^k y)$, $\forall y \in Y$, $\forall k = 1, 2 \ldots$

$\Rightarrow$ фикс. $y \Rightarrow G(x^0 y^0) \geq G(x^0 y)$, $\forall y \in Y \Rightarrow y^0 \in Y(x^0)$

5) $F(x^k y^k) = W'(x^k) \to F'$, $k \to \infty \Rightarrow \{F$ непр$\}$ $F' = F(x^0 y^0)$

6) Док-м: $F(x^0, y^0) = W'(x^0)$, т.е $y^0 \in Y^*(X^0)$

$y^0 \in Y(x^0)$.

Пусть $y^0 \notin Y^*(x^0) \Rightarrow \exists y' \in Y(x^0)$: $F(x^0 y') > F(x^0 y^0)$

$\max\limits_{y \in Y(x^0)} F(xy) \geq$ $\qquad$ $= F'$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow y^0 \in Y^*(x^0)$

<u>ч.т.д</u>

Пример:

① (к/р!)

$$\Gamma: \; A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решить Γ_1

$F_1 = \max\limits_{1 \leq i \leq 3} \min\limits_{j \in Y(i)} a_{ij}$ $\qquad$ $Y(i) = \operatorname{Arg}\max\limits_{1 \leq j \leq 3} b_{ij}$, $W(i) = \min\limits_{y \in Y(i)} a_{ij}$

$i = 1 \Rightarrow Y(1) = \{1\}$ $\qquad$ $W(1) = 3$ $\qquad$ $i^0 = 1, 2$ оптим.

$i = 2 \Rightarrow Y(2) = \{1, 2\}$ $\Rightarrow W(2) = 3 \Rightarrow F_1 = 3$ стратегии

$i = 3 \Rightarrow Y(3) = \{2, 3\}$ $\qquad$ $W(3) = -5$

Найдем равновесие по Штакельбергу:

$W'(i) = \max\limits_{j \in Y(i)} a_{ij}$ $\qquad$ $W'(1) = 3$

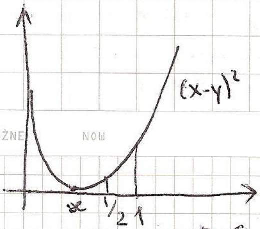
$W'(2) = 4 \Rightarrow F' = 4$

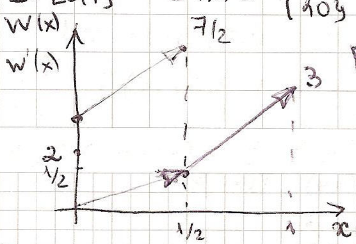
$W'(3) = 4$

Рав-ие по Шт: $(i^0 j^0) = \begin{matrix}(2, 1) \\ (3, 3)\end{matrix}$

② $\begin{cases} F(x, y) = 3x + 2y \\ G(xy) = (x - y)^2 \\ X = [0, 1], \; Y = [0, 1] \end{cases}$ $\qquad$ $W(x) = \min\limits_{y \in Y(x)} (3x + 2y)$

$Y(x) = \begin{cases} \{1\} & 0 \leq x < 1/2 \\ \{0, 1\} & x = 1/2 \\ \{0\} & 1/2 < x \leq \cancel{1/2}\ 1 \end{cases}$





$F_1 = \frac{7}{2}$

sup не дост

$\Rightarrow x^\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow W(x^\varepsilon) = 3x^\varepsilon + 2 =$

$= \frac{7}{2} - \varepsilon$

Равнов. по Шт: $(x^0 y^0) = (\frac{1}{2}, 1)$

70 Игра Γ_2: 1 игрок – выбир. x, зная y

1 игрок исп. ф-ю ответа: $f: Y \to X$, $x = f(y)$

Лидер по прежнему 1 игрок:

$$f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$$

Экономическая интерпр.:

1 игр: центр, x – размер премии

2 игр: произв. продукции, y - объем выпускаемой продукции

Гарант. выигрыш 1 игрока:

$G(f(y), y) \to \max$ – 2 игрок

$y \in$ $Y(f) = \underset{y \in Y}{\mathrm{Argmax}}\, G(f(y), y)$

$f(y)$ - как правило, разрывная $\Rightarrow$ может $Y(f) = \emptyset$

если $Y(f) = \emptyset$, то 2 игрок выбир. $\forall y$, те нельзя предугадать его повед.

$$\Rightarrow \tilde{Y}(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \emptyset \\ Y, & Y(f) = \emptyset \end{cases}, \quad W(f) = \inf_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y), \quad F_2 = \sup_{f \in \{f\}} W(f) -$$

– наил. гарант. рез 1 игр в игре Γ_2

<u>Опр</u> $\varepsilon > 0$, f^ε – <u>ε-опт. стратегия</u>, если $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$

Если $\varepsilon = 0$, то это просто оптим. страт. Избавимся от $\sup\limits_{f \in \{f\}}$...

$X(y) = \underset{x \in X}{\mathrm{Argmax}}\, F(xy)$ – мн-во наил. ответов 1 игр

$X^*(y) = \mathrm{Argmax}\, F(xy)$ – –"– по отношению ко 2 игр

$\angle$ стратегию 1 игр: f^*: $f^*(y) \in X^*(y)$, $\forall y \in Y$

$G(f^*(y), y)$ – достиг $\max\limits_{y \in Y}$ (тк Лемма 2)

$$G_2 = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y)$$

<u>Опр</u> $f^н$ – страт. наказания, если $G(f^н(y), y) = \min\limits_{x \in X} G(x, y)$

$E = \underset{y \in Y}{\mathrm{Argmax}} \left[\min\limits_{x \in X} G(xy) \right]$ – все maxmin стат. 2 игр, при исп. наказ

WAŻNE $D = \{(x, y) \in X \times Y \mid G(xy) > G_2\}$

$$K = \begin{cases} \sup\limits_{(xy) \in D} F(xy), & D \neq \emptyset \\ -\infty, & D = \emptyset \end{cases}$$

Если $G \equiv \mathrm{const} \Rightarrow D = \emptyset$ $\qquad M = \min\limits_{y \in E} \max\limits_{x \in X} F(xy)$

Теорема 2.6 (Гермейер)

Наилучший гарантированный рез-т 1 игрока в игре Γ_2 при сделанных предположениях: $F_2 = \max[K, M]$
(будут получ. оптимальные стратегии)

$$\exists (x^0 y^0) \in D \cap \underset{(xy)\in X\times Y}{\mathrm{Argmax}} F(xy) \Rightarrow K = \max_{(xy)\in X\times Y} F(xy) = F_2$$

абсолютный максимум

Д-во: I) Укажем ε опт стратегии, ϑ гарантирует получ. $W(f^\varepsilon) \geq \max[K, M]$
II) Покажем $\forall f \in \{f\} \Rightarrow W(f) \leq \max[K, M]$

Ⓘ 1) $K > M \Rightarrow D \neq \emptyset$: $\forall \varepsilon > 0$ f^ε : $W(f^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$ – надо н-ть
$K = \sup_{(xy)\in D} F(xy)$.

$\measuredangle (x^\varepsilon y^\varepsilon) \in D$: $F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$

построим f^ε : $f^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon, & \text{если } y = y^\varepsilon \\ f^н(y), & \text{если } y \neq y^\varepsilon \end{cases}$

Покажем: $W(f^\varepsilon) \geq k - \varepsilon$.

2игр: $f^\varepsilon(y) \rightarrow$ в G, если $y = y^\varepsilon$, то $G(x^\varepsilon y^\varepsilon) > G_2$ – выигр 2игр
если $y \neq y^\varepsilon$, то $G(f^н(y), y) = \min_{x\in X} G(xy) \leq G_2$

$\Rightarrow \max G(f^\varepsilon(y), y)$ достиг. в $y = y^\varepsilon \Rightarrow Y(f^\varepsilon) = \{y^\varepsilon\}$

гар выигр 1игр: $W(f^\varepsilon) = \inf_{y\in Y(f^\varepsilon)} F(f^\varepsilon(y), y) = F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq k - \varepsilon$

2) $M \geq K$

Постр. f^0: $W(f^0) \geq M$ $\quad f^0 = \begin{cases} f^v(y), & \text{если } y \in E \\ f^н(y), & \text{если } y \notin E \end{cases}$

2игр: $G(f^0(y), y)$

если $y \notin E$, то $G(f^н(y), y) = \min_{x\in X} G(xy) < G_2$

если $\underline{y \in E}$, то $G(f^v(y), y) \geq \min_{x\in X} G(xy) = G_2$ $\quad$ y· maxmin страт. 2игр

E-конеч., из Л2 G достиг. max

$\Rightarrow Y(f_0) = \underset{y\in E}{\mathrm{Argmax}}\, G(f^v(y), y) \subseteq E$

$W(f^0) = \inf_{y\in Y(f^0)} F(f^0(y), y) \geq \inf_{y\in E} F(f^v(y), y) = \min_{y\in E} \max_{x\in X} F(xy) = M$ $\quad$ ⊕ д-но

Ⅱ $\forall f$ покажем: $W(f) \leq \max[K M]$

$\sup_{y\in Y} G(f(y), y) \geq \max_{y\in Y} \min_{x\in X} G(xy) = G_2$

72

1) $\sup\limits_{y \in Y} G(f(y), y) > G_2$

Док-м : $\exists y^0 \in \tilde{Y}(f) : (f(y^0), y^0) \in D$.

Если sup не достигается, то $\tilde{Y}(f) = Y \Rightarrow \exists y^0$ из опр.

sup: $G(f(y^0), y^0) > G_2 \Rightarrow (f(y^0), y^0) \in D$

Если sup достигается, то берем $y^0 \in Y(f) \Rightarrow$

$G(f(y^0), y^0) > G_2 \Rightarrow (f(y^0), y^0) \in D$

Тогда $W(f) = \inf F(f(y), y) \le F\underbrace{(f(y^0), y^0)}_{\in D} \le K \le \max[K, M]$

2) $\sup\limits_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$

$\forall y \in E$. Покажем : $y \in Y(f)$, те $E \subseteq Y(f)$

$G_2 = \min\limits_{x \in X} G(xy) \le G(f(y), y) \le \sup\limits_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$

$\Rightarrow$ sup дост $\forall y \in E$

$W(f) = \inf\limits_{y \in Y(f)} F(f(y), y) \le \inf\limits_{y \in E} F(f(y), y) \le \min\limits_{y \in E} \max\limits_{x \in X} F(xy) = M \le \max[K, M]$

<u>чтд</u>

<u>Замечание</u> f^ε, f^0 - оптим. стратегии

Пример:

① (к/р!) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & \textcircled{8} \end{pmatrix}$ D

$\max\limits_{1 \le i \le 3} a_{ij}$ 7 6

$\min\limits_{1 \le i \le 3} b_{ij}$ 4 4 3

Решить игру Γ_2. $G_2 = \max\limits_{1 \le j \le 3} \min\limits_{1 \le i \le 3} b_{ij} = 4$

$E = \{1, 2\}$, $D = \{(ij) \mid b_{ij} > G_2 > 4\}$ см матрицу B

$K = \max\limits_{(ij) \in D} a_{ij} = 4$; $M = \min\limits_{j \in E} \max\limits_{1 \le i \le 3} a_{ij} = 6 > K = 4 \Rightarrow$

те min max для м. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ см м-цу A $\boxed{F_2 = 6}$

Выпишем оптим. страт : $M \geq K$ - 2) случай из т-мы

$f^0(j) = \begin{cases} 3 & \text{если } j = 1 \in E \\ 1 & \text{если } j = 2 \in E \\ 1(2) & \text{если } j = 3 \notin E \end{cases}$ 3 строка в 1 ст A, 1 стр во 2 ст A, min в 3 ст B $\Rightarrow$ 1 или 2

Если $A = \left(\begin{smallmatrix} = & 6 & = \\ 1 & -''- & 1 \end{smallmatrix}\right)$ тоже самое, но $M = 3 < K = 4 = F_2$

Реал. F_2 в a_{33} : $(i^0 j^0) : a_{i^0 j^0} = \max\limits_{(i,j) \in D} a_{ij} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^0(j) = \begin{cases} 3 & \text{если } j = 3 \\ 3 & \text{если } j = 1 \\ 1 & \text{если } j = 2 \end{cases}$ наим в 1 ст B, наим в 2 ст B

$B = \begin{pmatrix} \vdots & \textcircled{4} & \vdots \\ \textcircled{4} & \vdots & \textcircled{6} \end{pmatrix}$

$\max\limits_{1 \le j \le 3} b_{f^0(j)j}$

$\Rightarrow j = 3$

Найти $W(f_0)$: $Y(f^0) = \{3\} \Rightarrow W(f^0) = 4$

см 1 строку стр $f^0(j)$

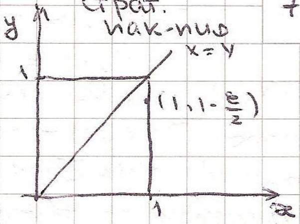
$4 = a_{33}$

② $F(xy) = 3x + 2y$

$G(xy) = (x-y)^2$

$X = Y = [0,1]$

$f^y(y) = y$ - страт. нак-ния



Решите игру Γ_2.

$$G_2 = \max_{0\le y\le 1} \underbrace{\min_{0\le x\le 1} (x-y)^2}_{\text{дост при } y=x\equiv 0} = 0$$

$$D = \{(x,y) \mid \underset{G(xy)}{(x-y)^2} > 0 = G_2\} = \{(xy) \mid x \neq y\}$$

т.к. абсол максим

$$K = \sup_{(xy)\in D} (3x+2y) = 5 = F_2 \quad ; \ \varepsilon > 0, \ (x^\varepsilon y^\varepsilon) = (1, 1-\frac{\varepsilon}{2})$$

$$F(x^\varepsilon y^\varepsilon) = 3 + 2(1-\frac{\varepsilon}{2}) = 5 - \varepsilon$$

$$\Rightarrow f^\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 & y = 1-\varepsilon/2 \\ y & y \neq 1-\frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \leftarrow \text{стр. наказания}$$

Игра Γ_2 - распр в политике

22.10.2007

Глава III Теория принятия решений.

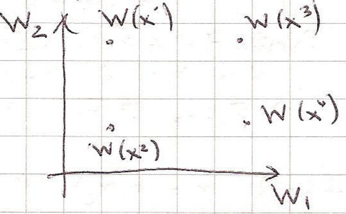
ЛПР - лицо, принимающее решения $x \in X$ - стратегию x из мн-ва стратегий X

§11. Задачи многокритериальной оптимизации.

$W(x) = (W_1(x) .. W_s(x))$ - векторн. ф-я ; $W_i(x)$ - частн. критерий

Желательно максимиз. ∀ частный критерий

Как правило $\nexists x^0 \in X : x^0 \in \operatorname{Argmax}_{x\in X} W_i(x) \quad i = 1..s$



Пример: $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$

$s = 2$

$W(x^1) = (W_1(x^1), W_2(x^2))$

$\operatorname{Argmax}_{x\in X} W_1(x) = \{x^3 \ x^4\}$

$\operatorname{Argmax}_{x\in X} W_2(x) = \{x^1\}$

74 <u>Опр</u> $x^0 \in X$ опт по Парето, если $\not\exists x \in X$:
$W_i(x) \geq W_i(x^0)$ $i = 1..s$
$W(x) \neq W(x^0)$

$f(X, W)$ - мн. во всех стратегий, опт. по П

В примере $P(X, W) = \{x^1 x^3\}$

Проверим x^1: $\{W \in E^s \mid w_i \geq W_i(x^1), i = 1..s\}$. Если внутри нет др. в-ных оценок, то такая опт по П.

<u>Опр</u> $x^0 \in X$ опт. по Слейтеру, если $\not\exists x \in X$: $W_i(x) > W_i(x^0)$ $i = 1..s$

$S(X, W)$ - мн. во всех стр, опт. по Слейтеру

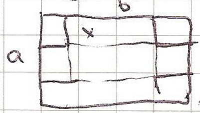
В примере: $S(X, W) = \{x^1, x^3, x^4\}$

Очевидно, что $P(X, W) \leq S(X, W)$

Задачи многокрит. опт. возникают в экономике, в проектировании сложн. техн. объектов

<u>Пример</u> ① самолет, констр-ция - стр, хар-ки - в-р критериев

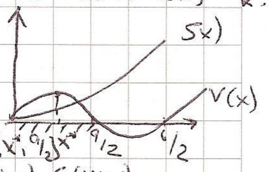
② пр-ние коробки



$a < b$; $x \in X = (0, \frac{a}{2})$ $V(x) = x(a - 2x)(b - 2x)$ - объем к.

$S(x) = 4x^2$ - сэкономл. материал

$x < x^*$ → это не опт. стр., тк увелич. оба критерия



$\Rightarrow x^* < x \rightarrow \forall$ точка опт. по П $\Rightarrow P(X, W) = [x^*, a/2]$

<u>Опр</u> решение з-чи многокр. опт-ции: найти $P(XW)$, $S(XW)$

нужно сузить эти мн-ва: $P' \subset P$, $S' \subset S$

<u>Теорема 3.1</u> Пусть X - компакт метр пр-ва, $W_i(x)$ $i = 1..s$ - непр на X. Тогда $P(X, W) = \emptyset$

<u>Док-во:</u> $\measuredangle$ $F_1(\lambda x) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x)$, $\lambda = (\lambda_1 .. \lambda_s) \in \Lambda = \{\lambda \in E^s \mid \sum \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \; i = 1..s\}$

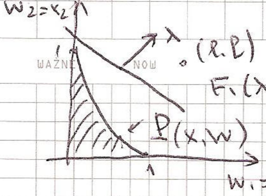
$X_1(\lambda) = \mathrm{Argmax}_{x \in X} F_1(\lambda, x)$. Д-м, что $X_1 \leq P(X, W)$

Пусть $\exists x' \in X_1(\lambda) \setminus P(X, W)$, $] \exists x' \in X_1(\lambda) \setminus P(X, W) \Rightarrow \exists x \in X$:

$W_i(x) \geq W_i(x') \; \forall i = 1..s \mid \times \lambda_i$; $W(x) \neq W(x') \Rightarrow$

$\Rightarrow F_1(\lambda x) > F_1(\lambda x')$ прот. $x' \in X'(\lambda)$ <u>чтд</u>

$\measuredangle s = 2$ $x = (x_1, x_2)$ $W(x) = (W_1(x), W_2(x)) = (x_1, x_2) = x \}$



Дуга окр. с центром в т $(1, 1)$ и $R = 1$

$F_1(\lambda x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

$X_1(\lambda) \in \{(1, 0), (0, 1)\} \Rightarrow$ все ост. т-ки пропадают

$\measuredangle$ свертку 2-ого уровня: $F_2(\lambda x) = \min_{1 \leq i \leq s} \lambda_i W_i(x)$

$\lambda \in \Lambda$, $W_i(x) > 0 \; \forall x \in X \; \forall i = 1..s$

$\measuredangle$ $w_i(x) + c_i = W_i^P(x)$ и. Тогда $P(XW) = P(XW')$

$X_2(\lambda) = \underset{x\in X}{\mathrm{Argmax}}\, F_2(\lambda x)$

Теорема 3.2 Если $W_i(x)$ непр, положит. на компакте X, $i=1..s$

то $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_2(\lambda) = S(X,W)$ оптимально (1)

по Слейтеру

Д-во: $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_2(\lambda) \subseteq S(x,W)$

$\forall\lambda\in\Lambda : X_2(\lambda) \subseteq S(X,W)$; $\exists x' \in X_2(\lambda) \setminus S(X.W)$

Это означает что найдется $x\in X$:

$W_i(x) > W_i(x')$

домножим на λ_i $i=1..s$

$\min\limits_{i=\overline{1,s}} \lambda_i W_i(s) > \min\limits_{1\le i\le s} \lambda_i W_i(x') \Rightarrow F_2(\lambda x) > F_2(\lambda x')$

где $x' \in X_2(\lambda)$, то есть максимиз свертку

⇒ противоречие

$S(X,W) \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_2(\lambda)$

$\forall x \in S(X,W)\ \exists \lambda^0 \in \Lambda : x^0 \in X_2(\lambda^0)$

$\lambda^0 : \lambda_i^0 = \dfrac{1}{W_i(x^0)} \cdot \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{s} \dfrac{1}{W_k(x^0)}} > 0$

Берем $\forall x \ne x^0 ; x \in X$

Можно ут-ть, что (тк x^0 опт по Сл.)

$\exists i_1 : W_i(x) \le W_{i_1}(x^0)$

(если $\forall i$: „>" то x^0 не опт. по Слейтеру)

$F_2(\lambda^0, x) = \min\limits_{1\le i\le s} \lambda_i^0 W_i(x) \le \lambda_{i_1}^0 W_{i_1}(x) \le \lambda_{i_1}^0 W_{i_1}(x^0) =$

$= \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{1}{W_k(x^0)}} = \min\limits_{1\le i\le s} \lambda_i^0 W_i(x^0) = F_2(\lambda^0 x^0)$

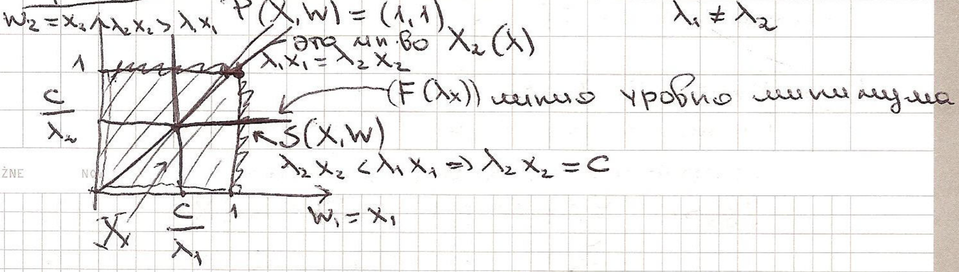
⇒ р-во множеств (1) полностью д-но

чтд

н.б. $X_2(\lambda) \not\subseteq P(X,W)$

Пример $x = (x_1 x_2) = W(x)$ $F(\lambda x) = \min(\lambda_1 x_1 \lambda_2 x_2) = C$

$\lambda_1 \ne \lambda_2$



76 $F_2(\lambda, x) + \alpha F_1(\lambda X)$ $\alpha > 0$

$X = \{x^1 .. x^N\}$

$P(X, W)$

$S(XW)$

Опр Будем говорить, что x лучше x' ($x \succeq x'$), если
$W_i(x) \geq W_i(x'),\ i = 1..s,\ W(x) \neq W(x')$ (1)
Если строго, то $x \succ x'$

Алгоритм (нахождения опт по П мн-ва)

шаг 1 $\Pi = \{x^1\}$

$\ldots k : \Pi$

шаг k+1 x^{k+1} Π такие x отбрасываем ⇒

Δ страш а) $\exists x \in \Pi : x^{k+1} \succeq x \Rightarrow \Pi'$

$\Pi := \{x^{k+1}\} \cup \Pi'$

$\exists x' \in \Pi' : x' \succeq x^{k+1} \succeq x \Rightarrow x' \succeq x$

б) $\exists x \in \Pi : x \succeq x^{k+1} \Rightarrow \Pi$

в) x^{k+1} не сравнимо с Π ⇒

$\Pi := \{x^{k+1}\} \cup \Pi$

После n-ого шага $P(X, W) = \Pi$

(Для $S(X, W)$ построения аналогичные)

$\exists X$

$P(X, W)$ возможно задать в виде доп. ограничен. Для этого будем требовать, что X - вып. множество в Евклид. пр-ве

Опр Пусть $x^0 \in X$, $\alpha \in E^n$
Бг что α задает в (·) x^0 возможное

направление, если выполнено:

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \Rightarrow x^0 + \varepsilon \alpha \in X$

Обознач. $\mathcal{Z}(x^0)$

$x^0 \notin S(X,W)$ – найдем критерий, кот. это н.т

Теорема 3.3 Пусть X – выпуклый компакт в Евклидовом пр-ве. Все частные критерии $W_i(x)$ вогнуты на X, непр. диф (имеют непр. частные пр-ные) на $D \supset X$

Тогда $x^0 \notin S(X,W) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathcal{Z}(x^0)$:
$(W_i'(x^0), \alpha) > 0 \quad i = 1..s$ (2)

Д/з. Необх. и дост. условие $x^0 \in S(X,W)$

Д-во: Необх. $x^0 \notin S(X,W) \Rightarrow (2)$

Раз $x^0 \notin S \Rightarrow$ найдется $x \in X : W_i(x) > W_i(x^0)$ $i=1..s$

$\Rightarrow 0 < W_i(x) - W_i(x^0) \leq$ {по нер-ву для диф. вогнутых функций} $\leq (W_i'(x^0), x - x^0)$

Возьмем $\alpha = x - x^0 \Rightarrow \alpha \in \mathcal{Z}(x^0)$ $(\varepsilon_0 = 1)$

$\forall \varepsilon \in (0, 1]$

$x^0 + \varepsilon(x - x_0) = x = (1-\varepsilon)x^0 + \varepsilon x \in X$ в силу вып-ти мн-ва X $\Rightarrow (2)$ чтд

Дост. $x^0 \in X$ $(2) \Rightarrow x^0 \notin S(X,W)$

$(2) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathcal{Z}(x^0)$: вып (2). По опр.

$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $x^0 + \varepsilon\alpha \in X$

$W_i(x^0 + \varepsilon\alpha) - W_i(x^0) =$ {ф. конечных приращений Лагранжа} $= \underbrace{(W_i'(x^0 + \theta_i \varepsilon\alpha), \varepsilon\alpha)} =$

где $0 < \theta_i < 1$

$= \varepsilon(W_i'(x^0 + \theta_i \varepsilon\alpha), \alpha) > 0$ $\quad \varepsilon(W_i'(x^0), \alpha) > 0$

Устремим $\varepsilon \to 0+$, $i = 1..s$

$\Rightarrow x^0 + \varepsilon\alpha \in X$ $\quad x^0 + \varepsilon\alpha \succ x^0$, $x^0 \notin S(X,W)$ чтд

Замечание Пусть все $W_i(x)$ строго вогнутые. Тогда $S(X,W) = P(X,W)$

Д-во: Из о-мей опт. стратегии по П и С $\Rightarrow$ $S(XW) \supseteq P(XW)$

Д-м, что $S(XW) \subseteq P(XW)$

J $\exists x' ; x' \in S(XW) \setminus P(XW)$

$\Rightarrow \exists x \in X : W_i(x) \geq W_i(x')$ $i = 1..s$ $\quad W(x) \neq W(x')$

$x \neq x'$ $\quad W_i\left(\frac{x + x'}{2}\right) \underset{\text{тк вогн}}{>} \frac{W(x) + W(x')}{2} \geq W_i(x')$ $i=1..s$

$\frac{x + x'}{2} \in X$ (тк вып) $\quad \frac{x + x'}{2} \succ x' \in S(X,W)$ против. чтд

78 Рассмотрим $X = \{x \in E^m \mid \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \le 1\}$

Обозначим $K = \{1..m\}$

Для $\forall J \subseteq K$ опр. м критерий:

$$W_J(x) = \sqrt{1-\sum_{k=1}^{m} x_k^2} - \sum_{k\in J} x_k + \sum_{k\notin J} x_k$$

Всего 2^m критериев. Допустимо $J=K$, $J=\varnothing$

W_J строго вогнуто по x

$\boxed{\text{Д/з}}$ Д! $\sqrt{1-\sum^{m} x_k^2}$ строго вогнут

⇒ для W_J совпадают мн-ва S, P

$$\frac{\partial W_J(x^0)}{\partial x_k} = \frac{-x_k^0}{\sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2}} \pm 1; \quad -1, \text{ при } k\in J; \quad 1 \text{ при } k\notin J$$

$x^0: \sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2 < 1$

∀ напр. нам явл. возможным + нормир α

$\Rightarrow \measuredangle\ \mathcal{Z}(x^0) = \{\alpha \in E^m \mid \sum_{k=1}^{m}|\alpha_k| = 1\}$

Таким образом

$$\exists \alpha \in \mathcal{Z}(x^0): \left(W_J'(x^0,\alpha) = \frac{-(x^0,\alpha)}{\sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2}} - \sum_{k\in J}\alpha_k + \sum_{k\in J}\alpha_k > 0 \quad \forall J \subseteq K \qquad (2)$$

(это ⇒ из теоремы)

$J^0 = \{k \mid \alpha_k \ge 0\}$

$$-\sum_{k\in J^0}\alpha_k + \sum_{k\notin J^0}\alpha_k = -\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k| = -1$$

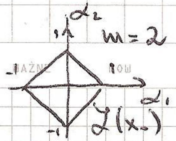
$$-\sum_{k\in J}\alpha_k + \sum_{k\notin J}\alpha_k \ge -\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k| = -1$$

$x^0 \in S(X,W) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathcal{Z}(x^0)$

$$\frac{-(x^0,\alpha)}{\sqrt{1-\sum(x_k^0)^2}} > 1 \quad \Rightarrow -(x^0,\alpha) > \sqrt{1-\sum(x_k^0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max_{\alpha\in\mathcal{Z}(x^0)}[-(x^0,\alpha)] > \sqrt{1-\sum(x_k^0)^2}$$

Найдем этот max



$$-(x^0,\alpha) \le \max_{1\le j\le m}|x_j^0| \underbrace{\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|}_{}^{=1} = \max_{1\le j\le m}|x_j| = |x^0_e|$$

$$\overset{\shortparallel}{\max_{\alpha\in\mathcal{Z}(x^0)}}[-(x^0,\alpha)]$$

$\forall\alpha \in \mathcal{Z}(x^0)$

$\alpha = (0 .. \underset{p}{\pm 1}\ 0 .. 0)$

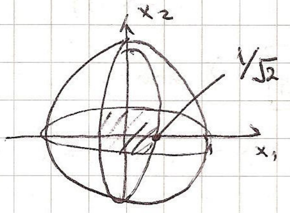
$\Rightarrow$ нер во справедливо $\Leftrightarrow \max\limits_{1\le j\le n}|x_j^0| > \sqrt{1-\sum\limits^{m}(x_k^0)^2}$

т.е $x^0 \in S(X,W) \Leftrightarrow \max\limits_{1\le j\le m}|x_j^0| \le \sqrt{1-\sum(x_k^0)^2}$

$$(x_j^0)^2 \le 1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2$$
$j=1..m$

Δ $m=2 \Rightarrow$ это ∩ 2х эллипсов

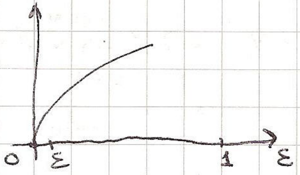
$$\begin{cases}2(x_1^0)^2+(x_2^0)^2\le 1\\(x_1^0)^2+2(x_3^0)^2\le 1\end{cases}$$



$$x^0 : \sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2 = 1$$

$(1-\varepsilon)x^0$

$$W_J((1-\varepsilon)x^0) = \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2}} + \ldots$$



Общая задача принятия решений.

Лицо, принимающ. р-е, прин. значения $x \in X$

Опр Б.о. на мн-ве X наз-ся мн-во $R \subseteq X \times X$

Интерпретация:

$(x,x') \in R$ означает, что x либо лучше x'
либо хуже

$x R x'$

Если $(x x') \notin R \Leftrightarrow x \bar{R} x'$

R называют

а) рефлексивным: $xRx \ \forall x \in X$ Пр: $\geqslant$

б) антирефлексивным: $x\bar{R}x \ \forall x \in X$ Пр: $>$

в) симметричное: $xRy \Rightarrow yRx$ Пр: $=$

г) асимметричное: $xRy \Rightarrow y\bar{R}x$ Пр: $>$

д) транзитивное: $xRyRz \Rightarrow xRz$

е) ацикличное: $\nexists x_1 \dots x_k : x_1 R x^2 \dots R x^k R x^1$

Соотношения:

г) ⇒ б)

$\boxed{\text{Д/з}}$ X-конечное, R - б), д) ⇒ R е)

Опр1 Б.о. R д-но на множестве X

(1) Ядром наз-ся $C(XR) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\}$

Опр2

(2) Если R асим. ⇒ $C(XR) = \{x' \in X \mid \nexists x : xRx'\}$

Ут: R ас. ⇒ ~~ли~~ оба (1) и (2) совп.

Д-во: $x' \in (1) \Rightarrow x' \in (2)$

От противного: $x' \notin (2) \Rightarrow \exists x \in X \quad xRx' \overset{\text{асим.}}{\Rightarrow} x'\bar{R}x$

$x' \in (2) \ \nexists x \in X$ $\Uparrow x' \in (1)$

xRx' $x'Rx$

$x' \in (1)$ чтд

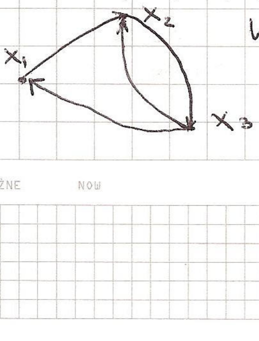
Пример критерий $W(x)$

$\geqslant, >$ асим, транз, б.о

$\mathrm{I}(X,W) = C(X,\geqslant)$

$S(XW) = C(X,>)$

$X = \{x^1 x^2 x^3\}$



не обл. ас ⇒ исп (1)

$x^2 R x^3 R x^2$

$C(XR) = \{x^3\}$

$x_1 \notin C(XR) \quad x^3 R x_1, \overset{\bar{R}x_3}{,} $ назад не верно

то же про x^2

$\boxed{\text{Д/з}}$ X конечно, R транз, ацикличнo
$C(X, R) \neq \emptyset$

$P' \subset P(X, W)$
P' сужение
Приложение, сужение $P(XW)$

<u>Пример</u> 2 ученика, оценив. по 2м предм

	м-ка	л-ра
x_1	3	5
x_2	5	4

м равноценна л-ре
д гипотет. у-ка x_3 | 4 | 5
$\Rightarrow x^2$ Так же x_3 лучше x_1
но транз. x_2 лучше x_1

л важнее м x^3 лучше x^2 - не получ
м важнее л x^2 лучше x^3 лучше x'

$W_i(x)$ $W_j(x)$

$$\max_{x \in X} W_i(x) = \max_{x \in X} W_j(x)$$

$$\min_{x \in X} W_i(x) = \max_{x \in X} W_j(x)$$

$\alpha W_j(x) + \beta$, $\alpha > 0 \Rightarrow$ какие α, β чтобы вып. ф-лы

$I = \{1 .. s\}$ мн-во номеров критериев
б.о A_1 $\quad r A_1 t$ симм, транз.
$\Leftrightarrow r$ и t равноц.
б.о A_2 $\quad r A_2 t \Leftrightarrow r$ важнее t асим. транз
инор-цио не д.б. противоречивой
(Пр: $1 A_1 2 A_2 3 A_1 1$)

Для этого
Определим б.о Φ
$r \Phi t \Leftrightarrow \exists\, i_0 .. i_k, B_1 .. B_k$
$r = i_0 B_1 i_1 \ldots B_k i_k = t$
$B_l = A_1$ либо A_2 ; B_l м.б равно A_2

Ф-антирефлексивно => **условие непротиворечив**

29.10.2007

пусть есть многокрит. з-да оптимиз.

X $W(x) = (W_1(x) \dots W_s(x))$ критерии предполаг. попарно однородн.

Рон. нашли $P(X,W)$ - опт. по Парето

$P' \subset P(X,W)$

$I = \{1..s\}$

rA_1t

получили инф-цию, что W_r и W_t равноц.

$rA_2t \Rightarrow r$ предпочтит. t

$r\Phi t$ => отношение непротиворец.
(см пред. лекцию)

$y = W(x) \in E^s$

$Y = W(X)$ - векторные оценки (мн. во)

в E^s определим б.о.

P - мн. во пар $P = \{(y,y') \mid y_i \geq y'_i \ \forall i=1..s, y \neq y'\}$

(r,t) $r \neq t$ rA_1t

Определим еще одно б.о

y^{rt} означает, что переставили rую и tую компоненту в y

Опр $yS_{rt}y' \Leftrightarrow y' = y^{rt}$

Опр Пусть был. rA_2t, T_{rt}: $yT_{rt}y' \Leftrightarrow y' = y^{rt}, y_r > y_t$

Возьмем транзитивное замыкание этих отношений!

О-м R - б.о. на E^s

$yRy' \Leftrightarrow z', z^1 .. z^k : y = z^0 H_1 z^1 H_2 .. H_k z^k = y'$

$H_e \in \{P, S_{rt} : rA_1t, T_{rt} : rA_2t\}$

Изучим св-ва б.о. R

Лемма 1 б.о R транзитивно и ацикл.

Д-во: 1) $y R y' R y'' \Rightarrow y R y''$

$z^1 .. z^k \; z^{k+1} .. z^2 \Rightarrow$

{если взять сов-ть цепочек} транз

2) $\exists\, y' R y' R \ldots R y^k R y \Rightarrow$ {тр} $y R y$

$\Rightarrow \exists\, z^0, z^1 .. z^k : y = z^0 H_1 z^1 \ldots H_k z^k = y$

1. $\exists \ell : H_\ell = P$

$z^{\ell-1} P z^\ell \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} z_i^{\ell-1} > \sum_{i=1}^{\ell} z_i^\ell$

$\Rightarrow \sum_1^s y_i \geqslant \sum^s z_i^1 \geqslant \ldots \geqslant \sum_{i=1}^s y_i$ против.

$\Rightarrow$ нет б.о P

2. $\exists \ell \;\; H_\ell = T_z t$

без потери общности $H_1 = T_z t$

$y T_z t z^1 \quad z A_2 t$

Определим. мн-во:

$I_+ = \{ i \in I \mid i \Phi t \}$ $\quad z \in I_+ \quad t \notin I_+ \quad z A_2 t \quad t \bar{\Phi} t$ ⇒

на сети ат-х $H_\ell = S_{i_\ell j_\ell}$ либо $T_{i_\ell j_\ell}$ $\ell = 2..k$

$i_\ell A_1 j_\ell \qquad j_\ell A_2 i_\ell$

⇒ $\sum_{i \in I_+} y_i > \sum_{i \in I_+} z_i^1$, т.к z^1 получ. перест. компонент, одна ε-ла, а другая меньше

С другими операциями:

$(i_\ell, j_\ell) \quad j_\ell \in I_+ \Rightarrow i_\ell \in I_+$

$i_\ell A_1 (A_2)\, j_\ell P t \Rightarrow i_\ell \in I_+$

1) $i_\ell, j_\ell \in I_+$ $\qquad i_\ell A_2 j_\ell$

2) $i_\ell, j_\ell \in I_+$ $\qquad \ldots$

3) $i_\ell \in I_+, j_\ell \notin I_+$ $\qquad i_\ell A_1 j_\ell \Rightarrow j_\ell A_1 i_\ell \Phi t \Rightarrow j_\ell \in I_+$

4ый исключили

на 1ом ℓ-ом месте: $\sum_{i \in I_+} z_i^{\ell-1} \geqslant \sum_{i \in I_+} z_i^\ell \Rightarrow z^{\ell-1} \begin{bmatrix} T_{i_\ell j_\ell} \\ S_{i_\ell j_\ell} \end{bmatrix} z^\ell$

$\Rightarrow$ в 1ом, 2ом случае просто рав-во

а в 3ем строгое нер-во

$\Rightarrow \sum y_i > \sum z_i^1 \geqslant \ldots \geqslant \sum y_i$ – противоречие

чтд

Замечание мн. непротив инор-ции ⇐ отнош антирефл

Окончательно поставим з-чу:

$\underline{P}(X, W) = \{x^1 \dots x^n\}$

$\underline{P}(Y) = \{y^1 = W(x^1) \dots y^n = W(x^n)\}$

соотв-ию в-ные оценки

Сужение заключается в сл-ем:

строим ядро $C(\underline{P}(Y), R)$

оно не пусто (отнош. ацикл., а мн-во конечно)

$P' = \{x \in \underline{P}(X, W) \mid W(x) \in C(\underline{P}(Y), R)\}$

<u>Пример</u> yRy' - ?

1. $A_1 = I \times I$ $A_2 = \emptyset$

$y \in E^s$

$\Theta(y) = (\Theta_1(y) \dots \Theta_s(y))$

$\Theta_1(y) \geq \dots \geq \Theta_s(y)$

$\Theta_1(y) = \max\limits_{1 \leq i \leq s} y_i$

отметим св-во отобр-ния:

<u>Лемма 2</u>] $y\underline{P}y' \Rightarrow \Theta(y)\underline{P}\Theta(y')$

Тогда $\Theta_i(y) \geq \Theta_i(y')$ $i = 1..s$

<u>Д-во</u>: $\Theta_1(y) \geq \Theta_1(y')$ $\exists k: Q_i(y) \geq \Theta_i(y')$ $i = 1..k$

$\Theta_{k+1}(y) < \Theta_{k+1}(y') \leq \Theta_k(y') \leq \dots \leq \Theta_1(y')$

y' : $k+1$ $y' > \Theta_{k+1}(y)$

$\Theta_{k+1}(y) \geq y'_{i_{k+1}}$ $s - k + k + 1 = s + 1$

$\Theta_s(y) \geq y'_s$

$(\Theta_1(y) \dots \Theta_s(y))$ $\Theta_1(y) \geq \dots \geq \Theta_s(y)$ прот.

<u>чтд</u>

<u>Утв</u>. $A_1 = I \times I$, $yRy' \Leftrightarrow \Theta(y)\underline{P}\Theta(y')$

<u>Док-во</u>: $yRy' \Rightarrow \Theta(y)\underline{P}\Theta(y')$

$y H_1 z^1 H_2 \dots H_k z^k = y'$

H_e S_{2t} $\underline{P}$

$H_e = \underline{P}$

$z^{e-1} \underline{P} z^e \overset{Л2}{\Rightarrow} \Theta(z^{e-1}) \underline{P} \Theta(z^e)$; $\Theta(z^{e-1}) = \Theta(z^e)$

$\Theta(y) P \Theta(y')$; $\Theta(y) \underline{P} \Theta(y') \Rightarrow yRy'$

$y S_{i_1 j_1} z^1 \dots z^k \Theta(y) P \Theta(y') S_{i_2 j_2} \dots y'$

<u>чтд</u>

Пример ① $P(X,W) = \{x^1 .. x^5\}$ ⇒ $y^1 R y^3$ $y^1 R y^4$

ученики и их учеба

y^1	3	5	3
y^2	4	4	3
y^3	5	3	2
y^4	2	3	5
y^5	4	2	4

⇒ $y^2 R y^5$

$\Theta(y^1) = (533)$

$\Theta(y^2) = (443)$ не сравнимы

② $P(XW) = \{x^1 x^2 x^3 x^4\}$

4 ученика

y^1	5	5	4	4
y^2	5	4	5	4
y^3	5	4	4	5
y^4	4	4	5	5

з-на инф-ция о ср. важности предметов

$A_1 = \{(1,3)\}$ – равноценны

$A_2 = \{(2,4),(2,3)\}$ 16.6.2010

⇒ Выделим лучшего ученика

перест.: $y^1 T_{24} y^3$ (1ый лучше чем 3ий) $y^1 R y^3$

$y^1 T_{23} y^2$ ⇒ $y^1 R y^2$

$y^3 S_{13} y^4$ ⇒

⇒ $y^1 R y^4$

⇒ 1ый возьмет с полки пирожок!!

Сравнение управляемых динамических объектов

(1) $\dot{z} = f(z,u,x)$ $z = (z_1 .. z_m)$, $x \in U \in E^r$, $x \in X$

$z(t_0) = z^1$

Δ ограничение на z

$$z \in Z(x) = \{z \in E^m \mid g_j(z) \le W_j(x), j = 1..l\}$$

Пусть есть 2 конструкции x, x'

как их сравнить?

1. Решается для ∀ой и ср-ю зн-е ф-ла
2. Найти б.о. R: $x R x'$ – будет легко давать ответ

86

$H \subset E^n$

conv H - вып. оболочка H

Пние всех вып. мн-в, содержащих H

$$\overset{x,z}{G}(x,z) = \text{conv}\,\{\underbrace{f \in E^m \mid f = f(z\,u\,x),\ u \in U}_{\overset{\shortparallel}{f(z,U,x)}}\}$$

Будем считать что:

- $f(z\,u\,x)$ - непр-но по всем переменным
- U - компакт

(без док-ва принимаем что вып. оболочка компакта это компакт)

Определим б.о. R:

$$x R x' \iff G(x,z) \supseteq G(x'\,z) \quad \forall z \in Z(x') \subseteq Z(x) \qquad (2)$$

смысл: у x - более широкие огр. в фаз пр-ве
- зн-е может менять в меньш. мн-ве.

Поитрошим. x порожд. более шир мн-во тр-рий x'

Св-во б.о. R:
- рефлексивность
- транзитивность
  ($\subseteq$ - транз. отношение)

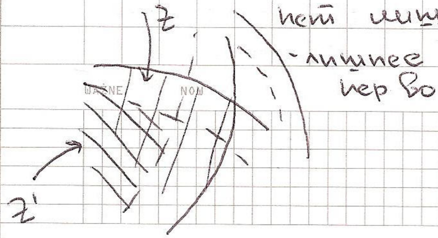
Перепишем о-ние б.о. в эквивалентном виде:

Утв $Z(x') \subseteq Z(x) \iff W_j(x') \leq W_j(x)$ $j = 1..\ell$

Д-во:

$\Leftarrow$ очевидно

$\Rightarrow$ $Z(x) = \{z \mid g_i(z) \leq W_j(x)$ $j = 1..s\}$ - тут нет лишних нер-в



E^m $\quad S = \{s \in E^m \mid |s| = 1\}$

Опорная ф-я: $\delta(s, x, z) = \max\limits_{f \in G(xz)} (sf)$

$\delta(sx'z)$

Утв $\quad G(xz) \geq G(x'z) \Leftrightarrow \delta(sxz) \geq \delta(sx'z) \ \forall s \in S$

Д-во: $\Rightarrow$ очевидно

$\Leftarrow$ с помощью т. об отделяющей гиперпл

Экв. опр:

$$xRx' \Leftrightarrow \begin{cases} \delta(sxz) \geq \delta(sx'z) \ \forall s \in S \\ \qquad\qquad \forall z \in Z(x') \\ W_j(x) \geq W_j(x') \quad j = 1..p \end{cases} \qquad (3)$$

Свернем еще 1ую группу нер-в

$$\Delta(xx'z) = \min_{s \in S} [\delta(s, xz) - \delta(s, x', z)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \delta(sxz) \geq \delta(sx'z)$$

$$xRx' \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(xx'z) \geq 0 \quad \forall z \in Z(x') \\ W_j(x) \geq W_j(x') \quad j = 1..p \end{cases} \qquad (3')$$

Пример: $\underset{\text{в-р}}{z^1} \in E^3$, $\underset{\text{ск-ть}}{z^2} = \dot{z}^1$ $\qquad z = (z^1 z^2) \in E^6$

$\dot{z}^1 = z^2 = f^1$ $\qquad f = (f^1 f^2)$

$\dot{z}^2 = Pu - kz^2 = f^2$

$u \in U = \{u \in E^3 \mid |u| \leq 1\}$

$P \quad k$

$x = (k, P) \in X = \{x \mid \underline{k} \leq k \leq \overline{k},\ \underline{P} \leq p \leq \overline{P}\}$ — ядро

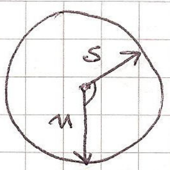
ск-ть макс. $\Leftrightarrow \dot{z}^2 = 0 \Rightarrow Pu - kz^2 = 0 \Rightarrow |z^2| = \frac{P|u|}{k} \leq \frac{P}{k}$

$\Rightarrow z \in Z(x) = \{z \mid \underset{y_1(z)}{\underset{\shortparallel}{|z^2|}} \leq \underset{W_1(x)}{\underset{\shortparallel}{\frac{P}{k}}}\}$

$S = \{s \in E^3 \mid |s| = 1\}$

$\delta(sxz) = \max\limits_{u:|u| \leq 1} (s, f^2) = \max\limits_{u:|u|=1} (s, Pu - kz^2) = \{$св-ва ск. пр-ния$\}$

$= \max\limits_{u:|u| \leq 1} [P(s, u) - k(s, z^2)]$



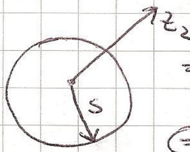
$= \underline{P} - k(s, z^2)$

$x' = (k' P')$

$\delta(s x' z) = P' - k'(s, z^2)$

Вычислим Δ

$\Delta(x x' z) = \min\limits_{s\in S}[\underbrace{P-P'}_{const} - (k-k')(s, z^2)]$ ⊜



⇒ з-т от знака $(k-k')$:

⊜ $P - P' - |k-k'||z^2|$

$$xRx' \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(x x' z) = \underline{P} - \underline{P}' - |k-k'||z^2| \geq 0 \quad \forall z: |z^2| \leq \frac{P'}{k'} \\ \frac{P}{k} \geq \frac{P'}{k'} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Rightarrow \text{получаем б.о. } R: \; xRx' \Leftrightarrow P - P' - |k-k'|\frac{P'}{k'} \geq 0 \\ \frac{P}{k} \geq \frac{P'}{k'} \end{cases}$$

построим ядро.

$X = \{x \mid \underline{k} \leq k \leq \bar{k}, \underline{P} \leq P \leq \bar{P}\}$

$C(XR) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\} = \{x \mid P = \bar{P}\}$

$x' = (k' P') \qquad P' < P$

$x = (k, P)$

$k = k', \underline{P} = P' + \varepsilon < \bar{P} \qquad \varepsilon > 0$

$x' \notin C(XR)$

$x' = (k' P')\ ;\ P' = \bar{P}$. д-м, что $x' \in C(XR)$

$xRx' \Rightarrow k = k', \underline{P} = P = \bar{P} \Rightarrow x = x' \Rightarrow x'Rx$

$\Rightarrow x'$ принадл. ядру

§ 12. Математическая модель операции.

Все это только в какой-то книжке 71г.

Операция - совокупность мероприятий, напр. на достиж. нек. цели

Сов-ть лиц или 1 лицо, кот. стремятся в данной операции к поставленной цели, наз. **оперирующей стороной**.

Выделяют **исследователя оп-ции**: сост. мат. модель и дает советы

по решению принимает оп. ст. (может иметь > инфор-ции)

Активные средства (ресурсы)
- запасы вооруж.
- денежн. суммы

итд

Контролируемые факторы

- величины, нах. в распоряжении оп. стороны и оказ. влияние на операции

$x \in M_0$

напр:
- модель нападение - оборона
  A $x = (x_1 \ldots x_n)$
- многошаг. игра антагон. с полн. инфор
  $x = (x_1 .. x_T)$ $x_t \in U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$

Неконтролируемые факторы - величины, влияющие на исход операции, но выбор этих величин не нах-ся в распоряжении опер. стороны
- неопределенные ф-ры — изв. на область, в кот. могут приним. знач
- случайные ф-ры

неопр: $y \in N_0$
$y \in N \subseteq N_0$
N - область неопр-ти

$y = (y_1 .. y_T)$

$y_t \in \mho_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1})$

мн. во неопр-ти

Классиф. неопр. ф-ров:

а) стратегии др. субъектов
б) природная неопр-ть
в) неясность цели

$F_1(\lambda, v) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x)$

$\lambda = (\lambda_1 .. \lambda_s) \in \Lambda = \{\lambda \mid \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1, \lambda_1 \geq \lambda_2 .. \geq \lambda_s \geq 0\} = N$

Случайные ф-ры:

напр. ошибка рассеивания при стрельбе

В-р $z \in Z$, подраз. $\exists \theta$ - закона р-ния

$\theta \in \Theta$

1) $\Theta = \{\theta_\alpha, \alpha \in \mathcal{J}\}$

мн-во р-ния, р-ния $\in$ 1 з-ну
т.е. одного типа, но разные
пар-ры, кот. м.б. точно неизв-ны

2) $\Theta = \{\theta \mid \underline{a_i} \leq \int_Z a_i(z)\, d\theta(z) \leq \bar{a}_i, i=1..\ell\}$

тип з-на неизвестен, но изв-ны
его интегр. характеристики
(напр. огр-я на моменты)

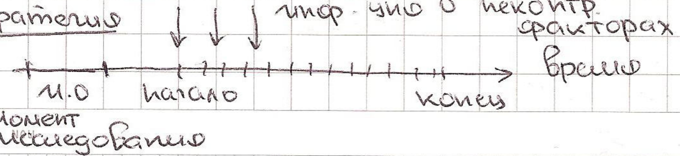
Критерий эффективности

$(x y z)$

$F(x y z)$ $M_0 \times N \times Z$

цель формир. оперирующая сторона

Стратегии



Информационная гипотеза - точное описание поступления инф-ции о неконтрол. ф-рах

Стратегия - выбор зн-ий контр. ф-ров в зависимости от поступ. инф-ции о неконтролируемых ф-рах:

$\tilde{x}: N \times Z \to M_0$

$\tilde{x} \in M$ набор функций

Δ игра с полн. инф-цией: $\tilde{x} = (\tilde{x}_t, t = 1..T)$

$\tilde{x}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$

1. J не будет никакой инф-ции $\Rightarrow \tilde{x} \equiv x \in M$

2. J в начале операции будет точно известно y - зн-е неопр ф-ра

M_N $\tilde{x}: N \to M_0$

$\tilde{x}(y)$

3. В начале оп-ции изв y, z

$\tilde{M}$ $\tilde{x}: N \times Z \to M_0$

4 $y = (y_1 .. y_N)$ $\sum_{j=1}^{n} y_j$ - известно

Тогда $\tilde{x} = f(\sum_{j=1}^{N} y_j)$ M.

Утв $M_0 \subset M \subset M_n$

Модель операции: $x \in M_0$, $y \in N \subseteq N_0$, $z \in Z$

$\theta \in \Theta$

Критерий эф. $F(xyz)$ $M_0 \times N \times Z$

Инф-ая гип: M - мн-во ф-ий $\tilde{x}: N \times Z \to M_0$

§13. Опт. стратегии в операциях

Исп. принцип гарант. р-та:

$\forall \tilde{x} \in M$

$W(\tilde{x})$ оценка эф-ти - некая гарантированная величина критерия

Опр Стратегия оптимальная если $W(\overset{\circ}{\tilde{x}}) = \max\limits_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) =$

$= F_2(M)$ - наил. гарант. р-т для данного мн-ва стратегий.

Если максимума нет, то $\sup\limits_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) = F_1(M)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\tilde{x}^{\varepsilon} \subseteq M$ если $W(\tilde{x}^{\varepsilon}) \geq \sup\limits_{x \in M} W(\tilde{x}) - \varepsilon$

ε-оптимальная

$\Gamma_1.$ x $y \in Y(x) = \operatorname{Argmax}\limits_{y \in Y} G(xy) = N^{\triangleleft}$ обл-ть неопр-ти

это предположение рискованное, может не выполняться

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(xy)$$

Формула для оценки эффективности:

Сделаем предположения:

- у либо стр. противника, имеющего противоположн. интересы либо прир. неопр-ть

$F_{\text{н}}(xyz) = \sim F(xyz)$

+ Противник не знает реализацию сл. ф-ра z

- оперирующая сторона разрешает осреднение критерия по случайности

(1) $W(\tilde{x}) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z F(\tilde{x}(y,z), y, z)\, d\theta(z)$

в критерии пост. ф-ю $\tilde{x}(yz)$
получили осредн. критерий $\bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \int_Z F d\theta(z)$
далее берется минимум по
всем неопределенностям

$W'(\tilde{x}) = \inf_{\theta \in \Theta} \int_z \inf_{y \in Y} F(\tilde{x}(yz), y, z)\, d\Theta(z)$ / если противник знает z и имеет против. интересы.

В худшем случае знает и стратегию z =>
может взять минимум => $\int \inf \inf F d\Theta$

Утв $W(\tilde{x}) \geq W'(\tilde{x})$

Д-во: $\forall \theta \in \Theta, \forall y \in N$ — тк верно для $\forall y$ => верно и для $\inf_y$

Тогда $\int_Z F(\tilde{x}(yz), yz) d\theta(z) \geq$

$\geq \int_z \inf_{y \in Y} F(\tilde{x}(yz) yz) d\theta(z)$

Берем $\inf_\theta$ от обеих частей

$\boxed{19.11.2007.}$

$x \in M_0, y \in N, z \in Z, \theta \in \Theta$
пример эфф. $F(xyz)$ опр на $M_0 \times N \times Z$

$\tilde{x} : N \times Z \to M_0$
имеется набор стратегий : $\tilde{x} \in M$
формула выписана на основе принципа
гарант. р-та:

$$W(\tilde{x}) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \underbrace{F(\tilde{x}(yz)yz) d\theta(z)}_{F(\bar{x}, y, \theta)}$$

Δ аналог. ~~пример~~ критерий для смеш. стратегий

$x \in M_0$, $F_2(M_0) = \sup_{x \in M_0} W(x)$

Опр Смеш. страт. операр. стороны Ѕ наз. страт из мн-ва M_0

противник не знает x ;

ф-ла оценки эф-ти для $\tilde{x}$:

$$W(\tilde{x}) = \inf_{y\in N}\inf_{\theta\in\Theta}\int_{M_0}\int_{z} F(x,y,z)\,d\theta(z)\,d\tilde{x}(x)$$

$\boxed{\text{Упр}}$ Как будет выглядеть ф-ла, если противник знает z

$\tilde{x}^0 \in M$ наз. опт., если

$$F_z(M) = \max_{\tilde{x}\in M} W(\tilde{x}) = W(\tilde{x}^0)$$

ε-оптимальная стр:

$\tilde{x}^\varepsilon : W(\tilde{x}^\varepsilon) \geq F_z(M) - \varepsilon$

Предположим, что Θ - известно

(р-ние для случайного фактора)

Опр Стратегия $\tilde{x}_a \in M$ наз. абсолютно оптим. стр., если выполнено

$$\bar{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) = \max_{\tilde{x}\in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta)\ \forall y\in N$$

Замечание $M : M_0 \leq M \leq M_{н} = \{\tilde{x} \mid \tilde{x} : N \to M_0\}$

В этом случае $\max\limits_{\tilde{x}\in M} \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \max\limits_{x\in M_0} \bar{F}(x, y, \theta)$ (1)

(можем взаимозаменять)

"$\geq$" очевидно, т.к. M_0 шире

"$\leq$" $\forall \tilde{x}\in M$ $\bar{F}(\tilde{x}\, y\, \theta) = F(\underset{\hat{M}_0}{\tilde{x}(y)}, y, \theta) \leq \underbrace{\bar{F}(x y \theta)}_{\max}$

$$\Rightarrow \max F(\tilde{x}\, y\, \theta) \leq \max \bar{F}(x y \theta)$$

Теорема 3.4 Пусть $\exists\, \tilde{x}_a \in M$.

Тогда $\tilde{x}_a$ - оптимальна и наил. гарант. р-т м.б. записан как

(2) $$F_z(M) = \inf_{y\in N}\max_{\tilde{x}\in M} \bar{F}(\tilde{x}\, y\, \theta)$$

Доп. что $\exists \max\limits_{x\in M_0} \bar{F}(x y \theta)\ \forall y\in N$

(3) Тогда $F_{н} \overset{def}{=} F_z(M_{н}) = \inf\limits_{y\in N}\max\limits_{x\in M_0} \bar{F}(x y \theta)$

Доп $\exists \max\limits_{x\in M_0} F(x y z)\ \forall y\in N, z\in Z$

Тогда для мн-во стр. $\hat{M} = \{\tilde{x} \mid N\times Z \to M_0\}$

наил. гарант. р-т для этого мн-ва

$$\tilde{F} \overset{def}{=} F_z(\hat{M}) = \inf_{y\in N}\int_z \max_{x\in M_0} F(x y z)\,d\theta(z) \quad (4)$$

Док-во: 1. Возьмем $\forall \tilde{x} \in M$

По определению $W(\tilde{x}) = \inf\limits_{y \in N} F(\tilde{x}, y, \theta)$

$$\leq \underbrace{\inf_{y\in N} \max_{\tilde{x}\in M} \bar{F}(\tilde{x} y \theta)}_{\text{наилучш. гарант. р-т}} \overset{\text{опр } \tilde{x}_a}{=} \inf_{y \in N} \bar{F}(\tilde{x}_a y \theta) = $$

$$= W(\tilde{x}_a)$$

$\Rightarrow$ (2) доказано

2. $\tilde{x}_a : N \to M_0 : \bar{F}(\tilde{x}_a(y), y, \theta) = \max\limits_{x \in M_0} \bar{F}(x y \theta) =$

$$\overset{(1)}{=} \max_{\tilde{x} \in M_u} \bar{F}(\tilde{x} y \theta) \quad \forall y \in N$$

Восп. (2) и запишем наил. гарант. р-т

$$F_u = \inf_{y \in N} \max_{x \in M_0} \bar{F}(x y \theta) \Rightarrow (3) \text{ дно}$$

3. Определим стратегию $\tilde{x}_a$:

$$\tilde{x}_a \in \tilde{M} \quad F(\tilde{x}_a(yz)\, yz) = \max_{x \in M_0} F(x y z)$$

$$\forall y \in N \quad \forall z \in Z$$

Осталось показать, что

(5) $$\max_{\tilde{x} \in \tilde{M}} \bar{F}(\tilde{x} y \theta) = \bar{F}(\tilde{x}_a y \theta) = \int_z \max_{x \in M_0} F(x y z)\, d\theta(z)$$

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{M} \quad F(\tilde{x} y \theta) = \int_z F(\overset{\in M_0}{\tilde{x}(yz)}\, yz)\, d\theta(z) \leq$$

$$\leq \int_z \max_{x \in M_0} F(x y z)\, d\theta(z) = \int_z F(\tilde{x}_a(yz)\, yz)\, d\theta(z) =$$

$$= \bar{F}(\tilde{x}_a . y . \theta)$$

$\Rightarrow$ (5) + (2) $\Rightarrow$ (4)

чтд

Предположим, что $\max \bar{F}(\tilde{x} y \theta)$ дост. не при всех y, но $\sup\limits_{\tilde{x} \in M} \bar{F}(\tilde{x} y \theta) < +\infty \quad \forall y \in N$

Опр $\forall \varepsilon > 0$ $\tilde{x}_a^{\varepsilon}$ наз. ε-абсолютно оптимальной, если $\bar{F}(\tilde{x}_a^{\varepsilon} y \theta) \geq \sup\limits_{\tilde{x} \in M} \bar{F}(\tilde{x} y \theta) - \varepsilon \quad \forall y \in N$

Пример "орлянка"

$i \in M_0 = \{1,2\}$ $j \in N = \{1,2\}$

$$(F(ij)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad M = M_0$$

инф-ти нет

Покажем, что нет абс. опт. стр. при $0 \le \varepsilon < 2$

$i=1$ $F(1,1) = -1 < F(2,1) - \varepsilon = 1 - \varepsilon = \max_{i \in M_\varepsilon} F(i,1) - \varepsilon$

при $j=1$ "$<$" а не "$\geq$"

аналогично при $i=2$

Теорема 3.4' $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \check{x}_a^{\varepsilon} \in M$ - известно

Тогда наил. гарант. р-т:

$$F_2(M) = \inf_{y \in N} \sup_{\check{x} \in M} \bar{F}(\check{x} y \theta)$$

Если $\sup_{x \in M_0} \bar{F}(xy\theta) < +\infty\ \forall y \in N$

$$F_u = F_2(M_u) = \inf_{y \in N} \sup_{x \in M_0} \bar{F}(xy\theta)$$

Если $\sup_{x \in M_0} F(xyz) < \infty\ \forall y \in N\ \forall z \in Z$, то

$$\tilde{F} = F_2(\tilde{M}) = \inf_{y \in N} \int_Z \sup_{x \in M_0} F(xyz)\, d\theta(z)$$

Рассмотрим мн-ва стр

$M_0, \{g\}, M_u, \tilde{M}$

Сравним наил. гарант. р-ты

$F_2^0 = F_2(M)$, $F_c \overset{def}{=} \sup_{g \in \{g\}} W(g)$, $F_u = F_2(M_u)$

$\tilde{F} = F_2(\tilde{M})$

Теорема 3.5 $F_2^\circ \le F_7 \le F_u \le \tilde{F}$

M_0, N - парал. евклид. пр-ва

$\bar{F}(xy\Theta)$ $M_0 \times N$

$\bar{F}$ $\cap_x \Rightarrow F_2^\circ = F_c$

$\bar{F}$ $\cup_y \Rightarrow F_c = F_u$

Д-во: 1. $F_2^\circ = \sup_{x\in M_0,\, y\in N}\inf \bar{F}(xy\Theta) \overset{M_0\in\{\varphi\}}{\le} \sup_{\varphi\in\{\varphi\}}\inf_{y\in N}\int_{M_0} F(\bar{x}y\Theta)\,d\Theta(x) =$

$= F_c$

2. $F_c \le F_u$ $\forall \varphi\in\{\varphi\}$

Тогда $W(\varphi) = \inf_{y\in M}\int_{M_0}\bar{F}(xy\Theta)\,d\varphi(x) \le$

$\le \inf_{y\in N}\max_{x\in M_0}\bar{F}(xy\Theta) = F_u$ нер-во д-но

3. $F_u \le \tilde{F}$ тк $\tilde{M} \supset M_0$

4. M_0, N - параллелепипеды

∠ антогон. игру $Г = \langle M_0, N, \bar{F}(xy\Theta)\rangle$

$\underline{v} = \max_{x\in M_0}\min_{y\in N}\bar{F}(xy\Theta) = F_2^\circ$

$\overset{\#}{v} = \max_{\varphi\in\{\varphi\}}\min_{y\in N}\int_{M_0}\bar{F}(xy\Theta)\,d\varphi(x)$

$\bar{v} = \min_{y\in N}\max_{x\in M_0}\bar{F}(xy\Theta) = F_u$ (по Т3.4)

Восп. Т1.14 и 1.15

$\bar{F}\cap_x$ то по Т1.14 $F_2^\circ = \underline{v} = v = F_c$

$\bar{F}\cup_y$ то по Т1.15 $\bar{v} = v$ те $F_u = F_c$

<u>чтд</u>

- Ценность информации противника:

$Ц_п = F_c - F_2^\circ$

если $x\in M_0 \Rightarrow F_2^\circ$

иначе $F_1^\circ < F_c$ может не заботится

Если $\bar{F}$ вогн. по $x \Rightarrow Ц_п = 0$ об инф. прот.

- Цен-ть инф. оперирующей стороны:

$Ц_о = F_u - F_c$

Пример

$i \in M_0 = \{1, 2, 3\}$ син. ф. ров ней

$j \in N = \{1, 2, 3, 4\}$

$$(F(ij))_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) M_u $\tilde{i} : N \to M_0$

Т3.4 $F_u = F_2(M_u) = \min\limits_{1\le j\le 4} \max\limits_{1\le i\le 3} F(ij) = 2$

$\tilde{i}^0 : W(\tilde{i}^0) = \min\limits_{1\le j\le 4} F(\tilde{i}^0(j), j) = 2$

$F(\tilde{i}^0(j), j) \geq 2 \ \forall j$

Выпишем все опт стр

$\hat{i}^0(1) = 2, 3$

$\hat{i}^0(2) = 1, 2, 3$

$\hat{i}^0(3) = 1, 3$

$\hat{i}^0(4) = 1, 2$

Абс. опт. стр. $F(\hat{i}a(j), j) = \max\limits_{1\le i\le 3} F(ij)$

$\tilde{i}_a(1) = 3$, $\tilde{i}_a(2) = 1, 2, 3$ $\hat{i}_a(3) = 1$ $\tilde{i}_a(4) = 1, 2$

2) $N_1 = \{1, 2\}$ $N_2 = \{3, 4\}$

$j \in N_1$ $\hat{i} : \hat{i}(j) = \begin{cases} i_1 & j \in N_1 \\ i_2 & j \in N_2 \end{cases}$

$j \in N_2$

M_1: 9 ф-ций

$\hat{i}a$: $i_1^a = 3$ $F_2(M_1) =$

$i_2^a = 1$ $= \min\limits_{1\le j\le 4} \max\limits_{1\le i\le 3} F(ij) = 2$

абс. опт.

$i_1^0 = 2, 3$

$\hat{i}_1^0 = 1$

§14 Необходимое условие для оптимальных (максиминных) стратегий.

$$W(x) = \min_{y \in N} F(xy)$$

$$x^0 \in M_0 : \quad W(x^0) = \max_{x \in M_0} W(x)$$

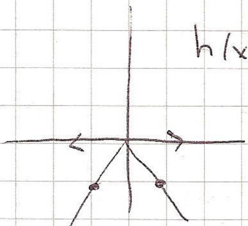
$x = (x_1 .. x_m)$

$\alpha \in E^m$ - некоторый ненулевой вектор

То для $h(x)$ произв. по направлению:

$$\frac{dh(x)}{d\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{h(x+\varepsilon\alpha) - h(x)}{\varepsilon} =$$

$$= (h'(x), \alpha)$$



$h(x) = \min\{x, -x\}$

$$W(x^0) = \max_{x \in M_0} W(x)$$

Теорема 36 $D \subset E^m$, N - компакт метр. пр-ва

$F(xy)$, $F'_{x_i}(xy)$ $i=1..m$ непр $D \times N$

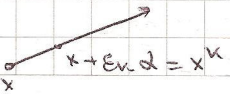
$\forall x \in D \ \forall \alpha \in E^m$.

Тогда

$$\frac{d}{d\alpha} \min_{y \in N} F(xy) = \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(xy) \qquad (1)$$

$$N(x) = \operatorname{Argmin}_{y \in N} F(xy)$$

Д-во: $\forall x \in D \ \forall \alpha \in E^m$ $x^k = x + \varepsilon_k \alpha$, $\varepsilon_k \to 0+$



$\Rightarrow x_i^k = x_i + \varepsilon_k \alpha_i$ $i=1..m$

$$\measuredangle \; \frac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k}$$

Н.Д. $\exists \lim$ ← и что верна (1)

$\forall k$ & $y^k \in N(x^k)$ и $\forall y \in N(x)$

$$\Rightarrow \frac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k} = \frac{F(x^k y^k)-F(xy)}{\varepsilon_k} =$$

$$\frac{\overbrace{F(x^k y^k) - F(x^k y)}^{\le 0} + F(x^k y) - F(xy)}{\varepsilon_k} \le$$

$$\le \frac{F(x^k y)-F(xy)}{\varepsilon_k} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i^k - x_i) F'_{x_i}(x+\theta_k(x^k-x)y)}{\varepsilon_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(\overset{\to x}{x+\theta_k(x^k-x)}y)$$

$$\exists \lim_{k\to\infty}$$

Восп. пред. переходом

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k} \le \min_{y\in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(xy) \qquad (2)$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k} \ge \min_{y\in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(xy) \qquad (3)$$

$$\frac{d}{d\alpha} \min_{y\in N} F(xy) = \min_{y\in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(xy)$$

Д-м (3) $\Rightarrow$ $\overline{\lim} = \underline{\lim}$

$\exists\, x^{k\ell}$, $\ell = 1, 2..$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{W(x^{k\ell})-W(x)}{\varepsilon_{k\ell}} = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k)-W(x)}{\varepsilon_k}$$

$\forall \ell$ $x^{k\ell}$ $y^{k\ell} \in N(x^{k\ell})$

$y^{k\ell} \to y^*$ из компактности $x^{k\ell} \to x$

аналогично в Т 1.2 ⇒ не будем д-ть

$\measuredangle$ разностное соотношение

$$(*)\ \frac{W(x^{k\ell})-W(x)}{\varepsilon_{k\ell}} = \frac{F(x^{k\ell}, y^{k\ell}) - F(xy^*)}{\varepsilon_{k\ell}} =$$

$$= \frac{F(x^{k\ell}, y^{k\ell}) - F(xy^{k\ell}) + \overbrace{F(xy^{k\ell}) - F(xy^*)}^{\ge 0}}{\varepsilon_{k\ell}} \ge$$

$$\geq \frac{F(x^{k_\ell}, y^{k_\ell}) - F(x y^{k_\ell})}{\varepsilon_{k_\ell}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x + \Theta_{k_\ell}(x^{k_\ell} - x), y^{k_\ell})$$

где $\Theta_{k_\ell} \in (0,1)$

Переходим к пределу при $\ell \to \infty$

$$\overset{\lim (*)}{\underline{\lim}}_{k\to\infty} \frac{W(x^{k_\ell}) - W(x)}{\varepsilon_k} \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x y^*) \geq$$

$$\geq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x y)$$

чтд

Пример $x = (x^1 x^2 x^3)$ $\quad f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$W(x) = \min_{1 \leq j \leq 3} f_j(x)$ $\quad f_2(x) = x_2^{10}$

$f_3(x) = \cos(\pi x_1^2) + x_2 + 10x_3$

$x^0 = (2,-2,1)$ $\alpha = (-3,2,-1)$

Найти произв-ные $\frac{dW(x^0)}{d\alpha}$

$f_1(x^0) = 9$, $f_2(x^0) = 2^{10}$, $f_3(x^0) = 9$

$N(x^0) = \{1,3\}$

$(\alpha, f_1'(x)) = 2(\alpha, x^0) = -22$

' - это градиент

$(\alpha, f_2'(x^0)) =$ не считаем тк не в N

$(\alpha, f_3'(x^0)) = -8$

$f_3'(x^0) = (0,1,10)$

$$\Rightarrow \frac{dW(x^0)}{d\alpha} = -22$$

Следствие 3.6 M_0 - вып. компакт E^m

$M_0 \in D$

и вып. все усл. т 3.6

Тогда для x^0 - максимин. стр. вып.

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{Z}(x^0)} \min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x^0 y) \leq 0 \qquad (4)$$

Д-во: x^0 $W(x^0) = \max_{x \in M_0} W(x)$

$\forall \alpha \in \mathcal{Z}(x^0)$ возм. напр-е $\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 :$

$x^0 + \varepsilon\alpha \in M_0$

102 Составим разност. соотн.

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{W(x^0+\varepsilon\alpha) - W(x^0)}{\varepsilon} \leq 0$$

есть для него гот. ф-ла (4)

$$(1) \Rightarrow \min_{y \in N(x^0)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x'y) \leq 0 \quad \forall \alpha \in Y(x^0)$$

чтд

З-ча: расписать условие в частн. случаях

$M_0 = [ab]$

$x \in M_0$ – скал. перем.

<u>Теорема</u> 3.7 Пусть $F(xy)$, $F'_x(xy)$ непр. на $D \times N$, где $D \supseteq M_0 = [a.b]$ интервал N-компакт метр. пр-ва. Макс. стр. $x^0 \in M_0$. Тогда вып.

а) $x^0 = a \vee x^0 = b$

или б) $\exists\, y' \neq y^2 \in N(x^0)$

или в) $N(x^0) = \{y'\}$ $F'_x(x'y') = 0$

<u>Док-во</u>: x^0

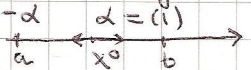
1. а) и б)

док от противн.

$\overline{а) и б)} \Rightarrow$ в)

$a < x^0 < b$ $\bar{а)}$

$N(x^0) = \{y'\}$ $\bar{б)}$ д-м, что $F'_x(x'y') = 0$



Соотв с (4):

$\alpha = (1)$ $1 \cdot F'_x(x^0 y') \leq 0$ $\Rightarrow$

$-\alpha$: $(-1) F'_x(x^0 y') \leq 0$

$\Rightarrow F'_x(x^0 y') = 0$

чтд

Следствие $N = \{ y \in E^n \mid c_j \le y_j \le d_j,\ j = 1..n \}$

$F'_{y_j}(xy)$ $j = 1..n$ $M_0 \times N$

\+ вып. усл. о Т3.7

Тогда для $x^0 \in M_0 = [ab]$

вып. хотя бы одно условие из:

1) $\exists y^0 \in N(x^0) : F'_x(x^0y^0)(x^0 - a)(x^0 - b) = 0 =$

$= F'_{y_j}(x^0y^0)(y'_j - c_j)(y'_j - d_j)$ $j = 1..m$

2) $\exists y' \neq y' \in N(x^0) : F'_{y_j}(x^0y')(y'_j - c_j)(y'_j - d_j) =$

$= F'_{y_j}(x^0y^2)(y^2_j - c_j)(y^2_j - d_j) = 0$

$F(x^0y') = F(x^0y^2)$

Док-во:

$x^0 \in M_0$

по Т3.7 вып либо а) б) в)

1. Если вып а) или в) $\Rightarrow$ 1)

а) $x^0 = a$ или $x^0 = b$ $\Rightarrow$ ...

б) $N(x^0) = \{y'\}$ $F'_x(x'y') = 0$ $\Rightarrow$ ...

$$F(x^0y') = \min_{c_j \le y_j \le d_j} F(x^0y' \| y_j)$$

мин. достигается при $y'_j = y_j$

те реш-ем явл-ся $y_j = y'_j$

из необх. усл-я минимума:

либо $F'_{y_j}(x^0y') = 0$ либо одна из скобок $= 0$

(1) Выполнено

2. Пусть вып б) $\Rightarrow$ (2)

чтд

1) $n+1$ $x^0 y'_j$ $j = 1..m$

2) $2n+1$ $x^0 y'_j y^2_j$ $j = 1..n$

Если соберем, то x^0 M_0^* – образ конечн. мн-во решений

$y' y^2$

$$\max_{x \in M_0^*} \min_{y \in N^*} F(xy)$$

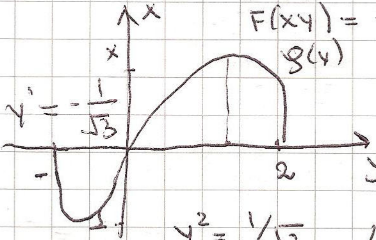
Пример $F(xy) = -(x-y+y^3)^2$

$M_0 = [-1\ 1]$

$N = [-1\ 1]$

$g(y) = y - y^3$

$F(xy) = -(x - g(y))^2$



$$N(x) = \begin{cases} \{y'\} & x>0 \\ \{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\} & x=0 \\ \{-\frac{1}{\sqrt{3}}\} & x>0 \end{cases}$$

$y^2 = 1/\sqrt{3}$ M_0^*

x^0 – макс, то

либо $N(x^0)$ сод. 2 эл-та

$x^0 = 0$

либо $x^0 = \pm 1$, либо $F'_x(x^0 y') = 0 =$

$= -(x - y' + (y')^3)$

$M_0^* = \{0, \pm 1\}$

$N^* = \{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

=) для поиска максим. стр. составим м-цу

$$(F(xy)) = \begin{array}{c|cc} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \hline -1 & & \\ 0 & & \\ 1 & & \end{array} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(2/3\sqrt{3})^2 & -(1+2/3\sqrt{3})^2 \\ -(2/3\sqrt{3})^2 & -(2/3\sqrt{3})^2 \\ (-1+2/3\sqrt{3})^2 & -(1-2/3\sqrt{3})^2 \end{pmatrix} \quad x^0 = 0$$

Здесь реализ (2) условие $N(x^0) = \{\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$F(xy)$ V строго вып по y

=) 2 не вып, 1) вып

То есть необх. условие нельзя улучшить

§ 15. Некоторые задачи распределения ресурсов

n: $i = 1..n$, A – ф-ции. В кот можно р-ть ресурсы

$f_i(t)$, t

$x = (x_1 \dots x_n)$ – распр-ние ресурсов

$$x \in M_0 = \{x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A, x_i \geq 0 \ i = 1..n\}$$

Если задача дискретная:

$$x \in M_0' = \{x \in M_0 \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = 1..n\}$$

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0) \qquad (I)$$

x^0

$f_i(t)$ $[0, A]$ $f_1(0) \leq f_2(0) \leq \dots \leq f_n(0)$

Теорема 3.8 (принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера)

Пусть x_0 – опт. р-ние р-сов. Тогда вып. необх. и дост. условие:

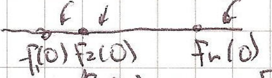
$$\exists k: 1 \leq k \leq n : f_1(x_1^0) = \dots = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0) \qquad (1)$$

$$x_{k+1}^0 = \dots = x_i^0 = 0$$

$$f_1(0) = f_2(0) = \dots = f_n(0) \Rightarrow k = n$$

Док-во: Необходимо x^0 $(I) \Rightarrow (1)$

$$k: \ f_k(0) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0) < f_{k+1}(0) \qquad (2)$$



$k = n$

$f_1(0) = \dots = f_n(0)$

Выведем (1) как необходимое

$$x_{k+1}^0 = \dots = x_i^0 = 0$$

$$\exists i_1 \geq k+1 : x_{i_1} > 0$$

$\varepsilon > 0$

Будем строить z: $z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon, & i = i_1 \\ x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}, & i \neq i_1 \end{cases}$

$i \neq i_1$ $f_i(z_i) = f_i(x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}) > f_i(x_i^0) \geq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x^0)$

$i = i_1$ $f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon) > f_{i_1}(0) \geq$
$\geq f_{k+1}(0) > \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$

$$\min_{1\le i\le n} fi(z_i) > \min_{1\le i\le n} fi(x_i^0)$$

$$fi(x_i^0) = \min_{1\le i\le n} fi(x_i^0) \quad i = 1..k$$

$$\exists i_1 \le k: f_{i_1}(x_{i_1}^0) > \min_{1\le i\le n} fi(x_i) \overset{(2)}{\ge} f_k(0) \ge f_{i_1}(0)$$

Достаточность:

x^0 удовл. (1) $\Rightarrow$ x^0 опт реш (I)

Возьмем $\forall$ р-ние $x \in M_0$, $x \ne x^0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists j: x_j < x_j^0 \Rightarrow x_j^0 > 0 \quad j \ge k$

$$\min_{1\le i\le n} fi(x_i) \le f_j(x_j) < f_j(x_j^0) =$$

$$= \min_{i=\overline{1,n}} fi(x_i^0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^0$ оптимальное р-е ресурса

чтд

$1 \le k \le n$

Берем какое-то k

$$\begin{cases} fi(x_i^0) = C & i = 1..k \\ \sum_{i=1}^{k} x_i^0 = A \end{cases} \qquad C < f_{k+1}(0)$$

Иногда $fi(t)$ можно интерпр. то как "величину остаточного ущерба"

$$\max_{x\in M_0'} \min_{1\le i\le n} f_i(x_i) = \min_{1\le i\le n} fi(x_i^*) \qquad (I)$$

Обозначим $I(x) = \operatorname{Argmin}_{1\le i\le n} fi(x_i)$

Теорема 3.9 Пусть x^* – оптимальное р-ние ресурсов в $(I)'$ такое что $|I(x^*)|$ минимально среди всех р-ний ресурсов.

Тогда выполнено необх. условие

если $x_j^* > 0 \Rightarrow \min_{1\le i\le n} fi(x_i^*) \ge fj(x_j^* - 1)$ (3)

Если для x^* вып. (3) – дост. усл-е оптимальности – то оно опт-ное ш-во

Док-во: Необх. x^* (I)'

--- $|I(x^*)|$ $\Rightarrow$ (3) выведем.

От противного

пусть (3) не вып.

$$\exists j: x_j^* > 0 \quad f_j(x_j^*-1) > \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*) = f_\ell(x_\ell^*)$$

$$z: z_i = \begin{cases} x_j^*-1, & \text{если } i=j \\ x_\ell^*+1, & \text{если } i=\ell \\ x_i^*, & \text{если } i\ne j,\ell \end{cases}$$

Значения ф-ции:

$$f_j(z_j) = f_j(x_j^*-1) > \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$$

для ост. пунктов

$$f_\ell(z_i) > \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$$

$$f_i(z_i) \ge \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$$

$I(z) = I(x^*) \setminus \{\ell\}$ против о-ния x^*