Теория игр и исследование операций

Морозов Владимир Викторович

к/р - в середине ноября

03.09

## §1. Введение.

Антагон. игры
Неант. игры
Иерархич. игры
Неопр. в выборе цели - многокрит. задачи
Оптим. распред. ресурсов

Лит-ра:


V 1) А.А. Васин, Б.В. Морозов (2/3 курса)
"Теория игр и модели мат. экономики"
МАКС-Пресс, 2005

2) В.В. Морозов, А.Г. Сухарев, В.В. Федоров
"Исследование операций в задачах и упр."
1986 год

# Глава I. Антагонистические игры

## §2. Седловые точки и решение антагонист. игр.

$F(x, y)$ – вещ., $x \in X$, $y \in Y$
$X, Y$ – $\forall$

$F(x, y) \in X \times Y$

Опр. $(x^0, y^0) \in X \times Y$ наз. седл. точкой ф-ии $F(x, y)$, если:

$$F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y) \quad (1)$$

$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y$$

$z + x^2 - y^2 = 0$ – седлов. поверхность

В игре 2 игрока : 1, 2

1 игрок – стратегии $x \in X$
2 игрок – стратегии $y \in Y$

Норм. форма игры: выбор стратегий не зависим

$(x, y) \in X \times Y$

$F(x, y) \in X \times Y$ – ф-ия выигрыша 1-ого игрока
(или проигрыш 2-ого)

Цель 1-ого игрока – сделать выигрыш как можно больше
2-ой игрок – наоборот

Антагон. игра:

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$

игроки выбир. стратегии независимо

$1 \to \max F$

$2 \to \min F$

Рассм. седлов. точку $(x^0, y^0)$
Тогда игрокам невыгодно отклоняться от своего положения – это уст. сост.

$$(1) \Longleftrightarrow \quad \max_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \min_{y \in Y} F(x^0, y)$$

Опр.
Решение антаг. игры Г наз. след. тройка $(x^0, y^0, v)$, $(x^0, y^0)$ – седл. т. F
$v$ – значение седл. т.

оптим. стратегии игроков

значение игры (цена игры)

Коррект. опр. $v$:

Лемма 1. $(x^0, y^0)$, $(x^*, y^*)$ – седл. т. F на $X \times Y$.
Тогда $F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$.

Док-во:

1) $F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y) \quad (1)$
$F(x, y^*) \le F(x^*, y^*) \le F(x^*, y) \quad (2)$

2) $F(x^0, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0, y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^*, y^*) \overset{(2)}{\le} F(x^*, y^0) \overset{(1)}{\le} F(x^0, y^0)$

$\Downarrow$

$F(x^0, y^0) = F(x^*, y^*)$

Лемма док-на.

Рассм. матричн. игры:

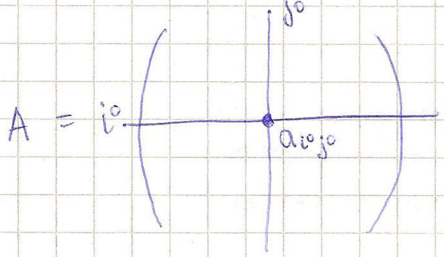
Опр. Г назыв. матричной, если
$X, Y$ – конечн. мн-ва
$X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$

$i \in X$, $j \in Y$

$F(i, j) = a_{ij}$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

Опр. $(i^0, j^0)$ – седлов. т. м. A, если
$$a_{ij^0} \le a_{i^0j^0} \le a_{i^0j}, \quad i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots n \qquad (1)$$




$a_{i^0j^0}$ — в столбце максим.
— в строке миним.

Пример:

①. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Седл. т.: $(1,1)$, $(2,1)$
$v = 0$

(!) $a_{12} = 0 = v$
не явл. седл. т.

②. $A = \begin{array}{c} \\ o \\ p \end{array} \begin{array}{cc} o & p \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \end{array}$

Матрица игры Орлянка

Эта игра не имеет реш., т.к. нет седл. т.

~~~

$F(x,y)$, $X \times Y$

1 игрок выбрал: $x \Rightarrow \inf\limits_{y \in Y} F(x,y) = W(x)$ – гарантир. выигрыш 1 игрока

$\underline{v} = \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x,y)$ – наилучш. гарант. выигрыш 1 игрока

нижн. значение игры
~~~

**Опр.** Стратегия $x^0 \in X$ – __максиминная стратегия__, если $\inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}$

2 игрок выбрал: $y \in Y$

$\underbrace{\sup\limits_{x \in X} F(x, y)}_{M(y)}$ – гарант. результат для 2-ого игрока (наиб. проигрыш)

$\overline{v} = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x, y)$ – __верхн. значение игры__

**Опр.** $y^0 \in Y$ – __минимаксная стратегия__, если $\sup\limits_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v}$

__Лемма 2__. $\forall$ ант. игры $\Gamma$ верно: $\underline{v} \leq \overline{v}$

__Док-во__: „лучше быть плохим среди хороших, чем хорошим среди плохих"

1) $\forall x \in X, \forall y \in Y$

$W(x) = \inf\limits_{y \in Y} F(x, y) \leq F(x, y) \leq \sup\limits_{x \in X} F(x, y) = M(y)$

2) Фикс. $\forall y \Rightarrow W(x) \leq \underbrace{M(y)}_{\text{число}} \quad \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\sup\limits_{x \in X} W(x)}_{\underline{v}} \leq M(y) \Rightarrow \underline{v} \leq \overline{v}.$

Лемма док-на.

Теорема 1.1:

1) F имеет седл. т. на $X \times Y$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \max\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x,y) = \min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x,y)$ **(α)**

В соотв. Г вып. $\underline{v} = \overline{v} = v$

2) Вып. усл. (α), $(x^0, y^0)$ - седл. т. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y) = \underline{v}$, $\sup\limits_{x \in X} F(x, y^0) = \overline{v}$ (β)

Док-во:

$\Rightarrow$

1) $(x^0, y^0)$ - седл. т. $\Rightarrow$ (α), (β) ← док-ем

$\overline{v} = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(x,y) \overset{(*1)}{\leq} \sup\limits_{x \in X} F(x, y^0) \overset{(1)}{=} F(x^0, y^0) \overset{(1)}{=}$

$= \inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y) \overset{(*2)}{\leq} \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} F(x,y) = \underline{v}$

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} \overline{v} \leq \underline{v} \\ \text{л. 2} \quad \underline{v} \leq \overline{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{v} = \underline{v} = v$

$\Downarrow$

(*1) $\Rightarrow y^0$ - минимакс. стр.
(*2) $\Rightarrow x^0$ - максимин. стр. $\Rightarrow$ вып. (β), (α)

2) $\Leftarrow$ (α) - вып., $x^0, y^0$ - из (β)

док-ем: $(x^0, y^0)$ - седл. т.

$F(x^0, y^0) \leq \sup\limits_{x \in X} F(x, y^0) \overset{(\beta)}{=} \overline{v} \overset{(\alpha)}{=} \underline{v} \overset{(\beta)}{=} \inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y) \leq$

$\leq F(x^0, y^0)$

$\Downarrow$

$\sup\limits_{x \in X} F(x, y^0) = F(x^0, y^0) = \inf\limits_{y \in Y} F(x^0, y)$

$\Downarrow$

$(x^0, y^0)$ - седл. т.

Т-ма док-на.

Поиск седл. т.:

$X^0 = \{ x^0 \in X \mid (\beta) \}$,

$Y^0 = \{ y^0 \in Y \mid (\beta) \}$

$X^0 \times Y^0$ – мн-во всех седл. т.

Примеры: (задача в к/р)

1. $F(x, y) = x \cdot y$

$X = Y = (-\infty, +\infty)$

$(0, 0)$ – седл. т. $\Rightarrow v = 0$

$0 \cdot y = 0 \cdot 0 = x \cdot 0$

$\inf\limits_{y \in Y} xy = -\infty, \quad x \neq 0$

$\sup\limits_{x \in X} xy = +\infty, \quad y \neq 0$

2.

$W(i) = \min\limits_j a_{ij}$

$$A = \begin{array}{cc|c} & j & \\ i & \begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 7 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ M(j) \to & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} & \end{array}$$

найти седл. т.

$\underline{v} = \max\limits_{1 \le i \le 4} \min\limits_{1 \le j \le 4} a_{ij}$, $\quad \underline{v} = 2$ $\quad \max W(i)$

$X^0 = \{2, 3\}$

где достиг. max, см. $W(i)$

$\overline{v} = \min\limits_{1 \le j \le 4} \underbrace{\max\limits_{1 \le i \le 4} a_{ij}}$, $\quad$ см. строку $M(j)$

$\overline{v} = 2 \quad \min M(j)$

$Y^0 = \{2, 4\}$

$\underline{v} = \overline{v} = 2 \Rightarrow \exists$ седл. точк.: $(2,2)$, $(2,4)$

$X^0 \times Y^0 \longrightarrow (3,2)$, $(3,4)$

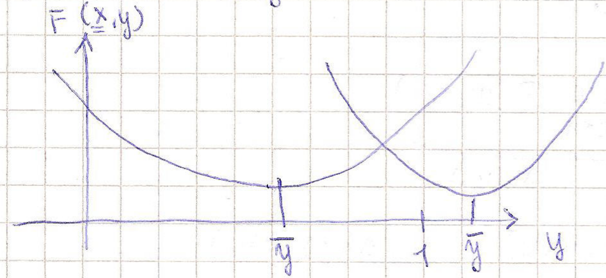
(4). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ Найти седл. т.

(3). $F(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$, $X = Y = [0,1]$

Найти седл. т., если есть.

$$\underline{v} = \max_{0 \le x \le 1} \underbrace{\min_{0 \le y \le 1} F(x,y)}_{= W(x)}$$

$$W(x) = F(x, y(x))$$




$F'_y = -3x + 2y = 0 \Rightarrow \bar{y} = \frac{3x}{2}$ – т. безусл. min

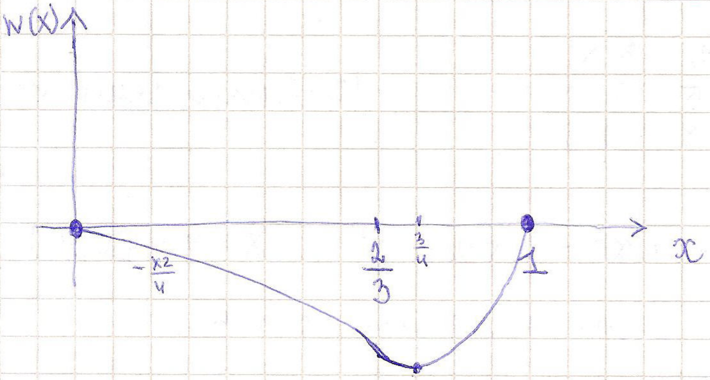
$0 \le \bar{y} = \frac{3x}{2} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le \frac{2}{3}$, $y(x) = \bar{y}$

$\frac{2}{3} < x \le 1 \Rightarrow y(x) = 1$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2}, & 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

$$\underline{W(x)} = F(x, y(x)) = \begin{cases} -\frac{x^2}{4}, & 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 2x^2 - 3x + 1, & \frac{2}{3} < x \le 1 \end{cases}$$

$$F\left(x, \frac{3x}{2}\right) = 2x^2 - \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$



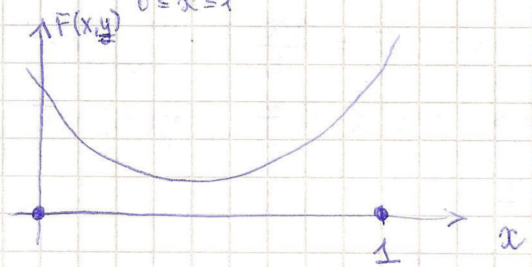

$2x^2 - 3x + 1$

$x = \frac{3}{4}$ – верш. параб.

$\boxed{X^\circ = \{0, 1\}}$

$$\bar{v} = \min_{0 \le y \le 1} \underbrace{\max_{0 \le x \le 1} F(x, y)}_{M(y)}$$

$$M(y) = \max_{0 \le x \le 1} F(x,y) = F(x(y), y)$$

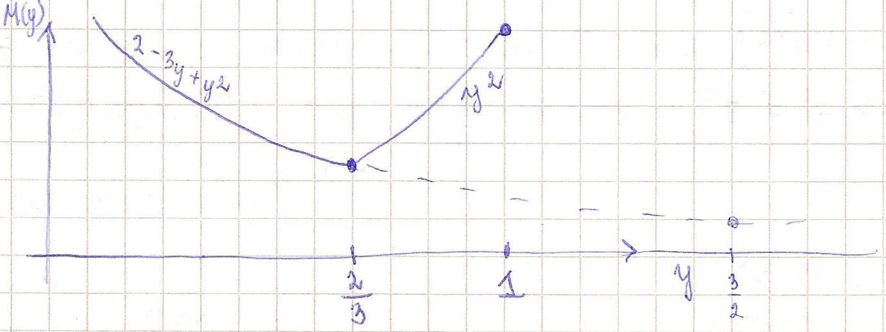



$$M(y) = \max\{F(0, y), F(1, y)\} =$$

$$= \max\{y^2, 2 - 3y + y^2\}$$

$$\cancel{y^2} \le 2 - 3y + \cancel{y^2} \Rightarrow y \le \frac{2}{3}$$

$$M(y) = \begin{cases} 2 - 3y + y^2, & 0 \le y \le \frac{2}{3} \\ y^2, & \frac{2}{3} < y \le 1 \end{cases}$$




$-3 + 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

$y^0 = \frac{2}{3}$

$\overline{v} = \min\limits_{0 \le y \le 1} M(y) = M\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} > 0 = \underline{v}$

$\Rightarrow$ нет седлов. точки

---

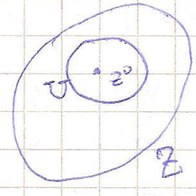
$Z$ – мн-во в метр. пр-ве

Опр. $Z$ – компактн., если из $\forall z^k$, $k = 1, 2, \ldots$, $z^k \in Z$ можно выделить сход. подп-ть $z^{k_l}$, $l = 1, 2, \ldots$ : $z^{k_l} \to z^0 \in Z$

$E^m$:
компакты – замкн. огр. мн-ва

Утв. $Z$ – компакт метр. пр-ва, $\{z^k\} \subset Z$.
Если $z^0$ – един. пред. точка $\{z^k\}$, то $z^k \to z^0$

Док-во:




1) Пусть, $z^k \not\to z^0 \Rightarrow$
? $\Rightarrow \exists$ окр. т. $z^0$ $U$ : в $U$ беск. много эл-тов п-ти $z^k \Rightarrow$
$\Rightarrow z^{k_l} \in \underbrace{Z \setminus U}$, $l = 1, 2, \ldots$
замкн. подмн-во комп. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ комп.

2) $\Rightarrow \{z^{k_l}\} \subset Z \setminus U$ имеет свою пред. т. $z' \Rightarrow$
$\Rightarrow z' \neq z^0$ – противор. усл. ($\exists!$ пред. т.)

Утв. док-но.

$Z$, $h(z)$

$$\underset{z \in Z}{\mathrm{Arg}\overset{\min}{\max}}\, h(z) = \{z' \in Z \mid h(z') = \underset{z \in Z}{\overset{\min}{\max}}\, h(z)\}$$

$F(x, y)$, $X \times Y$

$$Y(x) = \underset{y \in Y}{\mathrm{Arg}\min}\, F(x, y)$$

мн-во ответов 2-го (минимизирующие)

<u>Теорема 1.2.</u> $F(x, y)$ – непр. на $X \times Y$, $X, Y$ – компакты метр. пр-в. Тогда:

1) $W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$ – непр. на $X$
2) пусть, $Y(x) = \{y(x)\}$, $\forall x \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow y(x) : X \to Y$ – непр. отображение

<u>Док-во</u>:

1) $W(x)$, $\max\limits_{x, y} F(x, y) \geq F(x, y) \geq \min\limits_{x, y} F(x, y)$

Рассм. т. $x^0 \in X$
Рассм. $\forall$ п-ть $x^k \to x^0$ (непр. по Гейне)
$\{W(x^k)\}$, $W'$ – пред. точка $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, x^{k_l} : W(x^{k_l}) \to W'$

Рассм. $y^{k_l} \in Y(x^{k_l})$
$y^{k_l} \in Y$ – комп. $\Rightarrow y^{k_l} \to y'$
$F(x^{k_l}, y^{k_l}) \leq F(x^{k_l}, y)$, $\forall y \in Y$, $l = 1, 2, \ldots$
$l \to \infty$, фикс. $y \Rightarrow \{F\text{ – непр.}\}\ F(x^0, y') \leq F(x^0, y)$, $\forall y \in Y$

$\Rightarrow y' \in Y(x^0)$

$$W(x^{k_l}) = F(x^{k_l}, y^{k_l}) \xrightarrow{l\to\infty} F(x^0, y') = \min_{y\in Y} F(x^0, y) = W(x^0)$$

$\downarrow$ $W'$

$\Downarrow$

$W' = W(x^0) \Rightarrow \{W(x^k)\}$ имеет ед. пред. т. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ {утв.} $W(x^k) \to W(x^0) \Rightarrow W(x)$ - непр.

2) $x^0 \in X$, $\forall x^k \to x^0$
док-ем: $y(x^k) \to y(x^0)$

$\{y(x^k)\}$, пусть, $y'$ - пред. т. этой п-ти $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \{x^{k_l}\}: \underset{y^{k_l}}{y(x^{k_l})} \to y' \in Y(x^0) \overset{\text{усл. т-мы}}{=} \{y(x^0)\} \Rightarrow$

↖ 1-ая часть т-мы

$\Rightarrow y' = y(x^0)$

Т-ма док-на.

$M(y) = \max_{x\in X} F(x,y) \Rightarrow$ аналогичн. т-ма

__Опр.__ Ант. игра $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ наз. __непр.__, если $F(x,y)$ - непр. на $X \times Y$, $X \subset E^m$, $Y \subset E^n$

↖ параллелепипеды

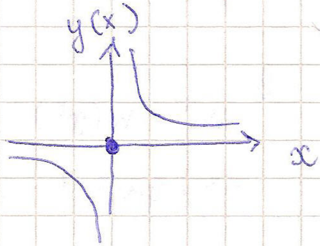
__Следствие__ В $\forall$ непр. игре $\Gamma$ у игроков $\exists$ максимин. и
т-мы 1.2. минимакс. стратегии.

Пример:

$$F(x,y) = (1+y^2)(xy-1)^2$$

$X = [-1,1]$, $Y = (-\infty, +\infty)$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



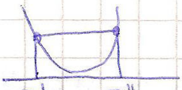

Наруш. усл.: $Y$ не явл. компактом

$Z$ - мн-во евкл. пр-ва конечн. размерн.

Опр. $Z$ - выпукл., если $\forall z' \neq z'' \in Z$, $\forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow$ $\lambda z' + (1-\lambda) z'' \in Z$

$h(z)$ - опр. на вып. $Z$

Опр. $h(z)$ - выпукл. ф-ия, если $\forall z' \neq z''$, $\forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow$ $h(\lambda z' + (1-\lambda) z'') \leq \lambda \cdot h(z') + (1-\lambda) \cdot h(z'')$




Опр. $h(z)$ - вогнут. ф-ия, если -"- $h(\ldots) > \lambda h + (1-\lambda) \cdot h$

Пример (упр.):

1. $h(z) = \sum_{i=1}^{m} z_i^2 = |z|^2$ - строго выпукл.

↑ док-ть $\qquad$ $z^2$, $z \in E^1$ - сначала

2. $h(z)$ - непр. на вып. комп. $Z$

$h(z)$ - строго выпуклая

13) Тогда $\min h(z)$ достиг. в ед. т. $\Leftarrow$ док-ть

Теорема 1.3. Пусть, $F(x,y)$ – непр. на $X \times Y$,
$X$ – выпукл. комп. в $E^m$, $Y$ – вып. комп. в $E^n$,
$\forall y \in Y \Rightarrow F(x,y)$ – вогнут. по $x$,
$\forall x \in X \Rightarrow F(x,y)$ – выпукл. по $y$

$\Downarrow$

$\exists$ седл. точка ф-ии $F(x,y)$ на $X \times Y$

Док-во:

1) пусть, $F(x,y)$ – строго вып. по $y$ $\leftarrow$ доп. предпол.

Рассм. $W(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x,y) = F(x, y(x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ {т-ма 1.2} $y(x)$ – непр. отобр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow W(x)$ – непр.

$x^*: \; W(x^*) = \max\limits_{x \in X} W(x)$

$(x^*, y(x^*))$

$\forall x \in X, \; \forall t \in (0,1)$

Рассм. выраж:

$(1-t)x^* + tx \in X$ (т.к. $X$ – вып.)

$\tilde{y} \overset{def}{=} y((1-t)x^* + tx)$

$\cancel{W(x^*)} \geq W((1-t)x^* + tx) =$

$= F((1-t)x^* + tx, \tilde{y}) \geq$ {$F$ – вогн. по 1 арг.} $\geq$

$\geq (1-t) \cdot \underbrace{F(x^*, \tilde{y})} + t \cdot F(x, \tilde{y}) \geq$

$\geq (\cancel{1}-t) \cdot W(x^*) + t \cdot F(x, \tilde{y})$

$\Downarrow$

$\cancel{t} \cdot F(x, \tilde{y}) \leq \cancel{t} \cdot W(x^*)$, $t > 0$

$t \to 0+ \Rightarrow \tilde{y} \to y(x^*) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{F(x, y(x^*))} \leq W(x^*) = \underline{F(x^*, y(x^*))} \leq$

$\leq \underline{F(x^*, y)}, \; \forall y \in Y, \forall x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^*, y(x^*))$ - седл. т. ф-ии F.

2) Общ. случай (без предп.)

Рассм. $F_\varepsilon(x,y) = F(x,y) + \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j^2$ - строго вып. по $y$

$\Downarrow$

$F_\varepsilon$ - удовл. 1 части док-ва

$\Downarrow$

$\exists$ седл. т. ф-ии $F_\varepsilon$ : $(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$

Рассм. $\varepsilon_k \to 0+ \Rightarrow (x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \in X \times Y$ - комп.

$\Rightarrow$ можно выделить сход. подп-ть

$(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \to (x^0, y^0)$

$F_{\varepsilon_k}(x, y^{\varepsilon_k}) \le F_{\varepsilon_k}(x^{\varepsilon_k}, y^{\varepsilon_k}) \le F_{\varepsilon_k}(x^{\varepsilon_k}, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$k \to \infty$ $(\varepsilon_k \to 0)$ $\Rightarrow F(x, y^0) \le F(x^0, y^0) \le F(x^0, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

Т-ма док-на.

$\boxed{10.09}$

Пример:

$F(x,y) = xy$, $X = Y = [0,1]$

$X^0 = [0,1]$
$Y^0 = \{0\}$ $\geq$ показать

$X^0 \times Y^0$ - мн-во всех седл. т.

пусть, $x^* = 0$
$Y(0) = [0,1]$
$y^* = 1$

$(0,1)$ - не явл. седл. точкой

Если $F$ - строго вогн. по $x$, то

$X(y) = \{x(y)\}$

$y^*$ - минимакс. страт.

$(x(y^*), y^*)$ - седл. т.

<u>Пример</u>:

$F(x, y) = -x^2 + y^3 + y^2 x - 4y + 3$

$X = Y = [0, 1]$

Явл. ли вогн. - вып. ?

$F''_{xx} = -2 < 0 \Rightarrow$ строго вогн. по $x$

$F''_{yy} = 6y + 2x \geq 0 \Rightarrow$ выпукл. по $y$

2-ой метод нахожд. седл. т.:

$x(y): \quad F'_x = -2x + y^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(y) = \frac{y^2}{2} \in [0, 1]$

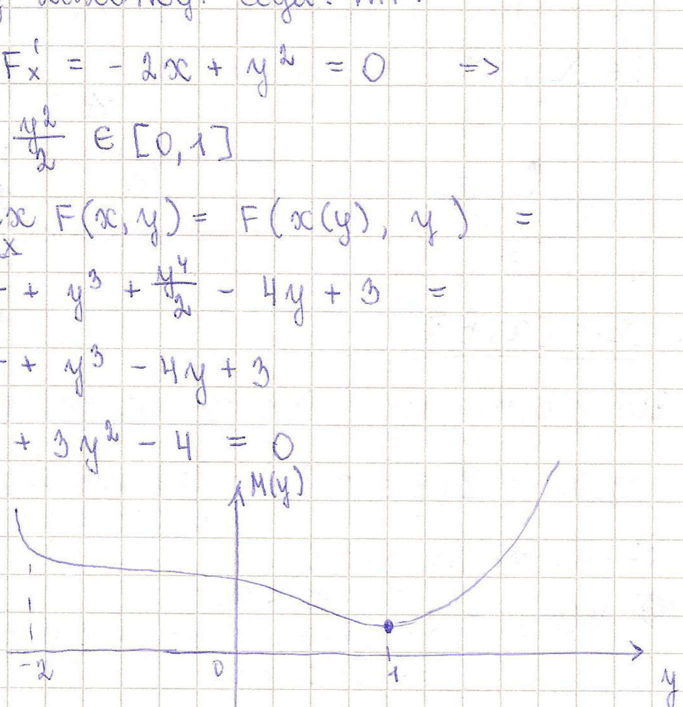
$$M(y) = \max_{x \in X} F(x, y) = F(x(y), y) =$$

$$= -\frac{y^4}{4} + y^3 + \frac{y^4}{2} - 4y + 3 =$$

$$= \frac{y^4}{4} + y^3 - 4y + 3$$

$M'(y) = y^3 + 3y^2 - 4 = 0$

$\Downarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{2,3} = -2 \end{cases}$




$y^* = 1$, $x(y^*) = \frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{2}, 1\right)}$ - седлов. точка

# §3. Смешанные расширения антагонистических игр.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ — нет седл. т.

$X$ — мн-во страт.

Опр. Смеш. страт. 1ого игрока наз. вероятн. распр. $\varphi$ на мн-ве $X$.

Применить смеш. страт. означ., что игрок выбир. знач. $x$, как реализ. случ. величины распр. $\varphi$.

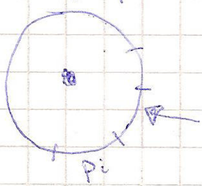
① $X = \{1, \dots, n\}$

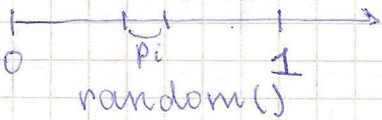
Вероятн. распр. задается вероятностным вектором:

$$p = (p_1, \dots, p_m): \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1 \dots m$$

$i \in X$, $p_i$ — $i$ с вер. $p_i$

выбор стратегии



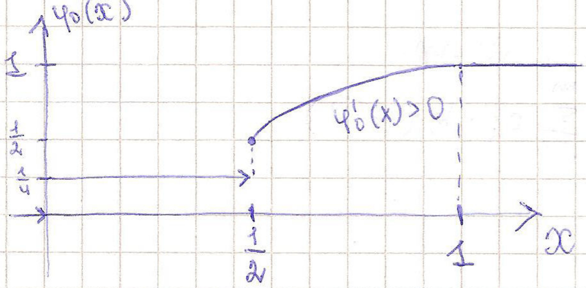

② $X = [a, b]$

вер. распр. $\varphi$ — это ф-ия распр.

$\varphi(x) = P(\xi \leq x)$ — вер. того, что случ. величина $\xi \leq x$

Св-ва ф-ии распр.:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \text{неубыв., непр. справа}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$




пример ф-ии распред.

Как примен. такую стратегию?

1) реал. на $[0,1]$ случ. велич. $\eta \in [0,1]$, равном. распр. на $[0,1]$

2) строим обр. ф-ию к $\varphi_0(x)$

$$\xi = \begin{cases} 0 & , 0 \le \eta < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & , \frac{1}{4} \le \eta < \frac{1}{2} \\ \varphi_0^{-1}(\eta) & , \frac{1}{2} \le \eta \le 1 \end{cases}$$

$\xi$ имеет ф-ию распр. $\varphi_0(x)$:

$$P(\xi \le x) = P(0 \le \eta \le \varphi_0(x)) \overset{\text{т.к. равном. распр.}}{=} \varphi_0(x)$$

~

Если на $[a,b]$ $h(x)$ - непр. (кус.-непр.), то

$$\int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x) = \frac{1}{4} \cdot h(0) + \frac{1}{4} \cdot h\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{1/2}^{1} h(x)\varphi_0'(x)\,dx$$

3. X - вып. компакт в евкл. пр-ве
(вып. замк. огр. мн-во)

$x_0 \in X$

Вер. мера, сосред. в точке:

ф-ия-индикатор $I_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \ne x_0 \end{cases}$

$x^{(i)} \in X$, $i = 1, \dots, m$

$\varphi = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot I_{x^{(i)}}$ $\qquad p = (p_1, \dots, p_m)$

$h(x)$ опр. на $X$, непр.

$$\int\limits_X h(x)\, d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot h(x^{(i)})$$

---

Рассм. $X$

$\{\varphi\}$ – мн-во смеш. страт. на $X$

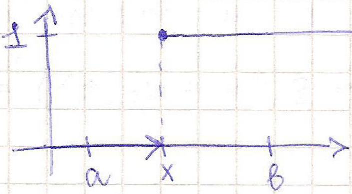
$X$ – мн-во чистых стратегий

Считаем, что $X \subset \{\varphi\}$, т.к.

①. $X = \{1, \dots, n\}$

$i$, $p = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ ~ чист. страт.

②. $X = [a, b]$

$x$, 

~ чист. стат.

③. $X$ – вып. комп.

$x$, $I_x$ ~ чист. страт.

---

$\Gamma = < X, Y, F(x,y) >$ – антаг. игра

$\{\varphi\}$ – вер. распр. на $X$ – смеш. стр. 1-ого игрока

$\{\psi\}$ – вер. распр. на $Y$ – смеш. стр. 2ого игр.

$F(\varphi, \psi)$ – мат. ожид. выигрыша 1ого игрока

$$F(\varphi, \psi) = \int\limits_X \int\limits_Y F(x,y)\, d\varphi(x)\, d\psi(y)$$

$\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi, \psi) \rangle$

смеш. расшир. игры $\Gamma$

Опр. $\Gamma$ имеет реш. в смеш. стратегиях, если имеет реш. $\overline{\Gamma}$.

реш. $\overline{\Gamma}$ – $(\varphi^0, \psi^0, v)$, $(\varphi^0, \psi^0)$ – седл. т. $F(\varphi, \psi)$

$v = F(\varphi^0, \psi^0)$

Опр. $\varphi^0, \psi^0$ – оптим. смеш. страт.

$v$ – значение (цена) игры

Смеш. расшир. матр. игры:

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

$p \in P = \{p \in E^m \mid \sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ i = 1 \ldots m\}$

↑ страт. 1ого игрока

$q \in Q = \{q \in E^m \mid \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1,\ q_j \geq 0,\ j = 1 \ldots n\}$

↑ страт. 2ого игрока

ожид. выигрыш 1ого игр.:

$\underline{A(p, q)} = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$ – мат. ожид. случ. вел. $a_{ij}$

$p_i$, $i$

$q_j$, $j$

$(i, j)$ с вер. $p_i q_j$

$\overline{\Gamma} = \langle P, Q, A(p, q) \rangle$ – смеш. расшир.

Теорема 1.4 (основн. т-ма матр. игр)
∀ матр. игра имеет реш. в смеш. страт.

Док-во:

1) $A = (a_{ij})_{m \times n}$

док-ть: $A(p,q)$ имеет седл. т. на $P \times Q$

2) {т-ма 1.3}:

$$\begin{cases} P, Q - \text{вып. замкн. огр. мн-ва} \\ A(p,q) - \text{непр. по } p, q \\ \qquad \text{билин. (лин. по } p \text{, по } q) \Rightarrow \\ \Rightarrow A(p,q) - \text{вогн. по } p \\ \qquad \text{вып. по } q \quad \text{(т.к. лин.)} \end{cases}$$

$\Downarrow$ Т.1.3.

$A(p,q)$ имеет седл. т. $(p^0, q^0)$

Т-ма док-на.

$(p^0, q^0)$:

$$A(p, q^0) \le \underset{v}{A(p^0, q^0)} \le A(p^0, q), \ \forall p \in P, \ \forall q \in Q$$

Когда возм. применять смеш. стратегии?

1. Игра Г повторяется много раз

2. Игра Г - 1 раз
игрок действует в усл. риска

$A = (a_{ij})$ вместо денеж. выигр
$\downarrow$ надо исп. полезность
$A' = (a'_{ij})$ - исп. ф-ию полезности

<u>Пример</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$$ Как опр. полезность „5"?

м. полезности

Рассм. лотерею:
„10" с вер. $a$
„0" с вер. $1-a$ $\quad 0 < a < 1$

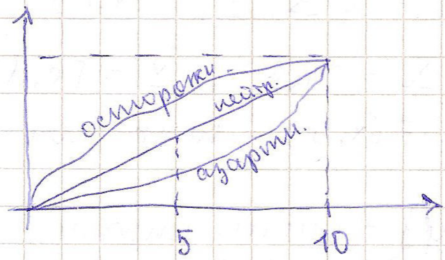
~~Сколько стоит такой лотер. билет?~~

При каком $a$ выигрыш „5" эквив. этой лотерее?

нейтр. отн. к риску: $a = 0.5$
осторожн.: $a > 1/2$
рисков.: $a < 1/2$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

учитывается отношение игрока к риску




③. Реализация в виде „физич." смеси.

<u>Пример</u>:
(игра против природы)

Фермер: $i = 1, 2, 3$ (3 вида с/х культур)

Природа: $j = 1, 2, 3$

$j = 1$ – норм. год
$j = 2$ – засуха
$j = 3$ – дожди

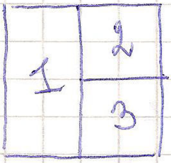
цена $i$-ой культ. – $a_i$

матрица урожайности $H = (h_{ij})$

$A = (a_i \cdot h_{ij})$ — выручки фермера

Пусть, оптим. смеш. страт.

$$p^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$




на участке так засеиваются культуры

## Непрерывные игры:

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$$

$X = [a,b]$, $Y = [c,d]$.

$F(x,y)$ — непр. на $[a,b] \times [c,d]$

$\{\varphi\}$ — смеш. страт. 1ого игрока (на $[a,b]$)

$\{\psi\}$ — смеш. страт. 2ого игрока (на $[c,d]$)

$$F(\varphi, \psi) = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\, d\varphi(x)\, d\psi(y)$$

$$F(x, \psi) = \int_c^d F(x,y)\, d\psi(y)$$, если $x$ — чист. страт.

$$F(\varphi, y) = \int_a^b F(x,y)\, d\varphi(x)$$

$$F(\varphi, \psi) = \int_a^b F(x, \psi)\, d\varphi(x) = \int_c^d F(\varphi, y)\, d\psi(y)$$

$$\overline{\Gamma} = \langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi, \psi) \rangle$$ — смеш. расшир. непр. игры на прямоуг.

$X = [a, b]$

$\{\varphi\}$ - мн-во ф-ий распр. на $[a, b]$

Утв. $\{\varphi\}$ - слаб. компакт

т.е. $\forall \varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ $\exists \varphi_{k_l}$, $l = 1, 2, \ldots$ :

$\varphi_{k_l} \xrightarrow{сл.} \varphi_0 \in \{\varphi\}$, т.е.

$\forall h(x)$ - непр. на $[a, b]$,

$$\int_a^b h(x)\, d\varphi_{k_l}(x) \longrightarrow \int_a^b h(x)\, d\varphi_0(x)$$

(без док-ва)

Лемма 3. В непр. Г на прямоуг. $\exists$ макси-мин. и минимакс. смеш. страт.

Док-во:

1) Рассм. смеш. расшир. $\overline{\Gamma}$ :

$$\underline{v} = \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi)$$

$$\overline{v} = \inf_{\psi \in \{\psi\}} \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi)$$

лемма утв., что внеш. sup (inf) достиг.

2) Док-ем $\exists$ максимин. стратегии:

Рассм. $\varepsilon_k \to 0+$ :

$$\exists \varphi_k : \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi_k, \psi) \geq \underline{v} - \varepsilon_k$$

3) $\{\varphi\}$ - сл. комп. =>

=> $\varphi_{k_l} \xrightarrow{сл.} \varphi_0$

$$\inf_{\psi} F(\varphi_{k_l}, \psi) \geq \underline{v} - \varepsilon_{k_l}$$

$\Downarrow$

$$F(\varphi_{k_l}, \psi) = \int_a^b \overbrace{F(x, \psi)}^{\text{непр. по } x}\, d\varphi_{k_l}(x) \geq \underline{v} - \varepsilon_{k_l}$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$ $l \to \infty$, сл. сход., $F$ - непр. по $x$

$$\int_a^b F(x, \psi)\, d\varphi_0(x) \geq \underline{v}$$

$\Downarrow$

$$F(\varphi_0, \psi) \geq \underline{v}, \quad \forall \psi \in \{\psi\}$$

$\Downarrow$

$$\inf_{\psi} F(\varphi_0, \psi) \geq \underline{v}$$

$\Downarrow$ из опр. $\underline{v} = \sup\inf$

$$\inf_{\psi = \{\psi\}} F(\varphi_0, \psi) = \underline{v}$$

$\Downarrow$

$\exists$ максимин. стр.

Лемма док-на.

<u>Лемма 4</u>.

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle \\ \Gamma' = \langle X, Y, F'(x,y) \rangle \\ F, F' - \text{огранич.} \\ |F(x,y) - F'(x,y)| \leq \varepsilon, \ \forall x,y \in X \times Y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (A)$$

$$\Rightarrow |\underline{v} - \underline{v}'| \leq \varepsilon, \quad |\overline{v} - \overline{v}'| \leq \varepsilon$$

<u>Док-во</u>:

1) Рассм. $\forall x \in X$

$$\left|\inf_{y \in Y} F(x,y) - \inf_{y \in Y} F'(x,y)\right| \leq \varepsilon \quad (1) \text{ - док-ем}$$

$$\inf_{y \in Y} F(x,y) - \inf_{y \in Y} F'(x,y) \geq \inf (F(x,y) - F'(x,y)) \geq$$

$\geq -\varepsilon$ (из усл. (A))

Аналогично, $F' - F$ $\Rightarrow$ (1) док-но

2) $\left|\underbrace{\sup_{x \in X} W(x)}_{\text{"}\underline{v}} - \underbrace{\sup_{x \in X} W'(x)}_{\text{"}\underline{v}'}\right| \leq \varepsilon$ (аналог. (1))

Лемма док-на.

Теорема 1.5 (основн. т-ма непр. игр.)
$\forall$ непр. $\Gamma$ на прямоуг. имеет реш. в смеш. стратегиях.

Док-во:

1) Рассм. $\overline{\Gamma} \to F(\varphi, \psi)$

$$\left.\begin{aligned} \{\text{Т-ма } 1.1\}: \ \underline{v} &= \max_{\varphi} \inf_{\psi} F(\varphi, \psi) \\ \overline{v} &= \min_{\psi} \sup_{\varphi} F(\varphi, \psi) \end{aligned}\right\} \text{ док-ть } \underline{v} = \overline{v}$$

($\exists$ max и min по л. 3)

2) $F(x, y)$ – непр. на $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow F(x, y)$ – равном. непр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиение $X^i$, $i = 1 \ldots m$,

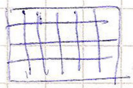
$\cancel{{}_a[\ )(\ )(\ )(\ ]_b}$

$\exists$ разб. $Y^j$, $j = 1 \ldots n$ : $|F(x, y) - F(x', y')| \leq \varepsilon$ (1)

$\forall (x, y), (x', y') \in X^i \times Y^j$

3) рассм: $x^i \in X^i$

$y^j \in Y^j$



опр. ступенч. ф-ию:

$F_1(x, y) = F(x^i, y^j)$, $(x, y) \in X^i \times Y^j$

Из усл. (1) $\Rightarrow |F(x, y) - F_1(x, y)| \leq \varepsilon$, $\forall (x, y)$ (2)

4) $a_{ij} = F(x^i, y^j)$

$\Downarrow$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$

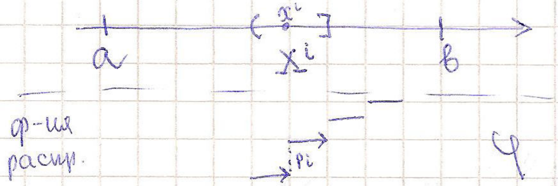
5) $\varphi$ ~~~~ сопоставим $p = (p_1, \ldots, p_m)$

$p_i = \int\limits_{X^i} d\varphi(x) \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$

т.е. построим отобр. на:

$\{\varphi\} \xrightarrow{\text{на}} \underline{P}$

$\forall p \in P \ \exists \varphi \to p$, т.к.




6) Аналогично, $\{\psi\} \xrightarrow{\text{на}} Q$

7) $F_1(\varphi, \psi) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d F_1(x, y)\, d\varphi(x)\, d\psi(y) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i \underbrace{a_{ij}}_{= F(x^i, y^j)} q_j = A(p, q) \qquad (3)$$

8) $|F(\varphi, \psi) - F_1(\varphi, \psi)| = \left| \int\limits_a^b \int\limits_c^d (F(x,y) - F_1(x,y))\, d\varphi(x)\, d\psi(y) \right| \le$

$$\le \int\limits_a^b \int\limits_c^d \overbrace{|F(x,y) - F_1(x,y)|}^{\overset{(2)}{\le} \varepsilon}\, d\varphi(x)\, d\psi(y) \le \varepsilon, \ \forall \varphi, \psi$$

это усл. (A)

$\Downarrow$ {лемма 4}

$$\Big| \underbrace{\max_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi)}_{= \underline{v}} - \underbrace{\max_{\varphi} \min_{\psi} F_1(\varphi, \psi)}_{= \max\limits_p \min\limits_q A(p,q) = v(A)} \Big| \le \varepsilon$$

т.е. $|\underline{v} - v(A)| \le \varepsilon$

9) Аналогично, $|\overline{v} - v(A)| \le \varepsilon$

10) $\left.\begin{array}{l} |\underline{v} - v(A)| \le \varepsilon \\ |\overline{v} - v(A)| \le \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |\underline{v} - \overline{v}| \le 2\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\forall \varepsilon\} \ \underline{v} = \overline{v}$

Т-ма док-на.

## §4. Свойства решений в смешанных стратегиях.

Рассм. непр. игры.

Теорема 1.6.

$(\varphi^0, \psi^0, v)$ – реш. в см. стр. непр. $\Gamma$ на прямоуг. $\Leftrightarrow F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ $(*)$

$$\left[ \text{Рассм. } F(x,\psi^0) \le v \text{ означ.: } \max_{x \in X} F(x, \psi^0) \le v \left( \le \min_{y \in Y} F(\varphi^0, y) \right) \right]$$

Док-во:

1) необх. $\Rightarrow$

$(\varphi^0, \psi^0, v)$ – реш. в см. ст. $\Gamma$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\varphi^0, \psi^0)$ – седл. т. $F(\varphi, \psi)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(\varphi, \psi^0) \le \underbrace{F(\varphi^0, \psi^0)}_{= v} \le F(\varphi^0, \psi), \forall \varphi, \psi$$

В качестве $\varphi$ – чист. страт. $x$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y), \forall x, \forall y$$

2) достат. $\Leftarrow$

вып. $(*)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ рассм. $\forall \varphi \in \{\varphi\}$

$$F(\varphi, \psi^0) = \int_a^b \overbrace{F(x, \psi^0)}^{\overset{(*)}{\le} v} d\varphi(x) \le v$$

аналог., $v \le F(\varphi^0, \psi)$, $\forall \psi \in \{\psi\}$

пусть $\varphi = \varphi^0$, $\psi = \psi^0$ $\Rightarrow F(\varphi^0, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, \psi^0) \Rightarrow$

$\Rightarrow v = F(\varphi^0, \psi^0) \Rightarrow (\varphi^0, \psi^0)$ – седл. т.

Т-ма док-на.

Теорема 1.6'

$(p^0, q^0, v)$ – реш. в см. стр. матр. игры $A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(i, q^0) \le v \le A(p^0, j), \quad \forall i = 1 \dots m, \ \forall j = 1 \dots n \qquad (*)$

(док-ть)

$$A(i, q^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0$$

$\Updownarrow$

скал. пр-ние $i$-ой строки на $q^0$

$$A = \begin{array}{cc} & q_1^0 \ \dots \dots \ q_n^0 \\ i \to & \begin{pmatrix} \\ \text{—————} \\ \\ \end{pmatrix} \end{array}$$

~~ск~~.

$$A(p^0, j) = \sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij}$$

$\Updownarrow$ скал. пр-ние $p^0$ на $j$-й столбец

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots\dots & a_n \\ a_n & a_1 \ \dots\dots & a_{n-1} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ a_2 & \dots\dots a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

$p^0 = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = q^0$ – оптим. страт. – ?

$$v = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

$A(p^0, j) = v = A(i, q_0), \quad \forall i, j \Rightarrow (*)$ – вып.

## Теорема 1.7

Для непр. Г на прямоуг. верно:

1) $\forall \varphi \in \{\varphi\} \Rightarrow \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$

2) $\forall \psi \in \{\psi\} \Rightarrow \sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) = \max\limits_{x \in X} F(x, \psi)$

Док-во:

1) $\forall \varphi$: $\inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \leq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$ (I)

$Y \subset \{\psi\}$

2) $\forall \psi$: $F(\varphi, \psi) = \int\limits_c^d \overbrace{F(\varphi, y)}^{\geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)} d\psi(y) \geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y)$

$\Rightarrow \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) \geq \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y) \Rightarrow$ 1) док-но

Т-ма док-на.

Следствие: в непр. Г на прямоуг. значение игры $v = \max\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min\limits_{\psi \in \{\psi\}} \max\limits_{x \in X} F(x, \psi)$

Док-во:

1) $v \overset{T.1.1}{=} \max\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf\limits_{\psi \in \{\psi\}} F(\varphi, \psi) = \min\limits_{\psi \in \{\psi\}} \sup\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} F(\varphi, \psi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{T.1.7\}$ $v = \max\limits_{\varphi \in \{\varphi\}} \min\limits_{y \in Y} F(\varphi, y) = \min\limits_{\psi \in \{\psi\}} \max\limits_{x \in X} F(x, \psi)$

Сл-е док-но.

Упр.: $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x, y) \leq v \leq \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x, y)$

Теорема 1.7'.
игра с A, верно:

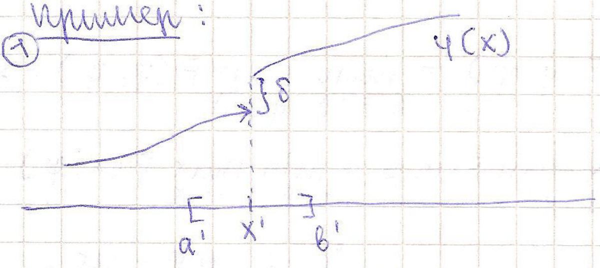
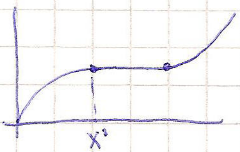
1) $\forall p \in P \Rightarrow \min\limits_{q \in Q} A(p,q) = \min\limits_{1 \le j \le n} A(p,j)$

2) $\forall q \in Q \Rightarrow \max\limits_{p \in P} A(p,q) = \max\limits_{1 \le i \le m} A(i,q)$

(док-ть)

A - лин. по q, ...

Следствие.
в игре с A, $v = \max\limits_{p \in P} \min\limits_{1 \le j \le n} A(p,j) =$
$= \min\limits_{q \in Q} \max\limits_{1 \le i \le m} A(i,q)$

~~~

$\varphi$ - смеш. ст. 1ого игрока на $X = [a,b]$

Опр. $x' \in Sp(\varphi)$, если выполн.:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists [a', b'] \ni x' : b' - a' < \varepsilon, \ \varphi(b') - \varphi(a') > 0$

Sp - спектр

пример:

1




т. спектра = 
= т. роста

$x' \in Sp(\varphi)$

$\varphi(b') - \varphi(a') > \delta > 0, \quad b' - a' < \varepsilon$

2. если в $x'$ $\varphi'(x') > 0$, то $x' \in Sp(\varphi)$

3. $\varphi'(x') = 0$




$x' \in Sp(\varphi)$
~~~

# V. Метод Брауна

24.09

задана точн. $\varepsilon > 0$
опр. знач. игры $v$ с точн. до $\varepsilon$

$p^\varepsilon : \min\limits_{1\le j\le n} A(p^\varepsilon, j) \geq v - \varepsilon$ – максимин. смеш. стратегия у 1 игрока по $\varepsilon$

$q^\varepsilon : \max\limits_{1\le i\le m} A(i, q^\varepsilon) \leq v + \varepsilon$

~~Интерпретация~~

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ – игра повтор. многокр.

игра повтор. $k$ раз
1 игрок $r_i$ раз выбрал $i$-ую чист. страт.
$\sum\limits_{i=1}^m r_i = k$

$p(k) = \left(\frac{r_1}{k}, \ldots, \frac{r_m}{k}\right) \in P$ – вектор частот

$l_j$ раз 2-ой игрок выбирал $j$-ую чистую стратегию
$\sum l_j = k$

$q(k) = \left(\frac{l_1}{k}, \ldots, \frac{l_n}{k}\right) \in Q$ – вектор частот

Алгоритм:

шаг 1:
$\forall$ чист. страт. – $i_1, j_1$

k повтор.: $i_1, \ldots, i_k \to p(k)$
$j_1, \ldots, j_k \to q(k)$

шаг $(k+1)$: $i_{k+1} : A(i_{k+1}, q(k)) =$
$= \max\limits_{1\le i\le m} A(i, q(k)) = v_1(k)$

$$j_{k+1}: A(p(k), j_{k+1}) = \min_{1 \le j \le n} A(p(k), j) = v_2(k)$$

~~Правило остановки~~

~~Тв.~~ $\underbrace{v_1(k) \ge v \ge v_2(k)}$, $\forall k = 1, 2, \dots$ **(1)**

Док-во:

$$\underline{v_1(k)} = \max_{1 \le i \le m} A(i, q(k)) \ge \min_{q \in Q} \max_{1 \le i \le m} A(i, q) =$$

$$= \{\text{см. Т 1.7'}\} = \underline{v} = \max_{p \in P} \min_{1 \le j \le n} A(p, j) \ge$$

$$\ge \min_{1 \le j \le n} A(p(k), j) = \underline{v_2(k)}$$

Теорема 1.11.

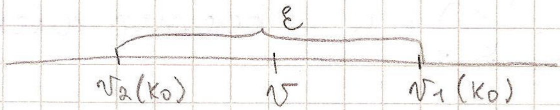
В методе Брауна 1) $\exists \lim\limits_{k \to \infty} v_1(k) = \lim\limits_{k \to \infty} v_2(k) = v$

2) $p^\circ$ – $\forall$ предел. т. $\{p(k)\}$ => $p^\circ$ – оптим. смеш. стратегия 1 игрока

(Аналогично, $q^\circ$ – ...)

Правило остановки:

$k_0: v_1(k_0) - v_2(k_0) \le \varepsilon$




⇓

$$|v - v_1(k_0)| \le \varepsilon$$
$$|v - v_2(k_0)| \le \varepsilon \qquad (2)$$

$p(k_0)$ – $\varepsilon$ максимин. смеш. страт., т.к.

$$\min_{1 \le j \le n} A(p(k_0), j) = v_2(k_0) \overset{(2)}{\ge} v - \varepsilon$$

$q(k_0)$ – $\varepsilon$ минимакс. смеш. страт.

Скорость сход. (теоретич.):

$$\underline{O}\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{m+n-2}}}\right)$$

Это весьма медлен. скор. сход.

На практике: $\underline{O}\left(\frac{1}{k}\right)$

<u>Модификация м. Брауна</u>:

$$v_1^*(k) = \min_{1 \le t \le k} v_1(t) \quad \leftarrow \text{опр. величину}$$

$$v_1^*(k) \overset{(1)}{\geq} v \geq v_2^*(k) = \max_{1 \le t \le k} v_2(t)$$

<u>Правило остановки:</u>

$$k_0: \quad v_1^*(k_0) - v_2^*(k_0) \le \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} |v - v_1^*(k_0)| &\le \varepsilon \\ |v - v_2^*(k_0)| &\le \varepsilon \end{aligned} \qquad (3)$$

$$v_1^*(k_0) = \min_{1 \le t \le k_0} v_1(t) \doteq v_1(t_1)$$

$$v_2^*(k_0) = \max_{1 \le t \le k_0} v_2(t) = v_2(t_2)$$

$p(t_2)$ – $\varepsilon$-максимин. смеш. страт.
$q(t_1)$ – $\varepsilon$-минимакс. смеш. страт.

т.к.

$$\min_{1 \le j \le n} A(p(t_2), j) = v_2(t_2) = v_2^*(k_0) \overset{(3)}{\geq} v - \varepsilon$$

$\sim$

k повтор.

пусть, $c(k) \in E^m$: $c_i(k) = k \cdot A(i, q(k))$

$$c_i(k) = k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{l_j}{k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot l_j = \sum_{t=1}^{k} a_{ij_t}$$

$j_t = j$ $l_j$ раз

$c(k)$ — это сумма столбцов $A$ с номерами $j_t$

Пусть, $d(k) \in E^n$

$$d_j(k) = k \cdot A(p(k), j) = \cancel{k} \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i}{\cancel{k}} \cdot a_{ij} = \sum_{t=1}^{k} a_{i_t j}$$

$i_t = i$ $r_i$ раз

$d(k)$ — сумма строк $A$ с номерами $i_t$

~

$$i_{k+1}: \quad \max_{1 \le i \le m} \frac{c_i(k)}{k} = \frac{c_{i_{k+1}}(k)}{k} = v_1(k)$$

$$j_{k+1}: \quad \min_{1 \le j \le n} \frac{d_j(k)}{k} = v_2(k)$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

| | | сумма столбцов | | | | сумма строк | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $i_k$ | $c_1(k)$ | $c_2(k)$ | $v_1(k)$ | $j_k$ | $d_1(k)$ | $d_2(k)$ | $v_2(k)$ | $\varepsilon$ |
| 1 | 1 | 0 | 4 | $4 = \frac{4}{k}$ | 1 | 0 | 2 | $0 = \frac{0}{k}$ | 4 |
| 2 | 2 | 0 | 1+1 столбцы 8 | $4 = \frac{8}{k}$ | 1 | 4 | 1+2 строки 3 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ |
| 3 | 2 | 2 | (0,8)+2 столбец 9 | $3 = \frac{9}{k}$ | 2 | 8 | 4 | $\frac{4}{3} = \frac{4}{k}$ | $\frac{3}{2} = 3 - \frac{3}{2}$ наим. оценка |
| 4 | 2 | 4 | 10 | $\frac{5}{2}$ | 2 | 12 | 5 | $\frac{5}{4}$ | $1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$ |
| 5 | 2 | 6 | 11 | $\frac{11}{5}$ | 2 | 16 | 6 | $\frac{6}{5}$ | $\frac{11}{5} - \frac{3}{2} = \frac{7}{10}$ |
| 6 | 2 | 8 | 12 | $2 = \frac{12}{k}$ | 2 | 20 | 7 | $\frac{7}{6}$ | $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ |
| 7 | 2 | 10 | 13 | $\frac{13}{7}$ | 2 | 24 | 8 | $\frac{8}{7}$ | $\frac{13}{7} - \frac{3}{2} = \frac{5}{14}$ |
| 8 | 2 | 12 | 14 | $\frac{7}{4}$ | 2 | 28 | 9 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$ |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 2 | 14 | $\underline{\underline{15}}$ | $\frac{5}{3}$ | 2 | 32 | $\underline{\underline{10}}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{5}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$ |
| 10 | 2 | 16 | $\underline{\underline{16}}$ | $\frac{8}{5}$ | 2 | 36 | $\underline{\underline{11}}$ | $\frac{11}{10}$ | $\frac{8}{5}-\frac{3}{2}=\frac{1}{10}$ |

$\varepsilon = \frac{1}{10}$, $v_1^*(10) = \frac{8}{5}$, $t_1 = 10$ шаг

$v_2^*(10) = \frac{3}{2}$, $t_2 = 2$ шаг

$v =$ или $\frac{8}{5}$, или $\frac{3}{2}$, или $\frac{1}{2}\left(\frac{8}{5}+\frac{3}{2}\right)$

$p(t_2) = p(2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$q(t_1) = q(10) = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ – 2 раза выбир. 1,
8 раз выбир. 2.

## §6. Решения игр с вогнутыми и выпуклыми функциями выигрыша

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$

**Опр.** Антаг. игра $\Gamma$ — игра с вогн. ф-ей выигрыша, если $F(x,y)$ — ~~непр.~~ непр. на вып. комп. $X \times Y$
$\forall y \in Y$, $F(x,y)$ — вогн. по $x$

если $F$ — вып. по $y$, то игра с вып. ф-ей выигрыша

**Теорема 1.12 (Хелли)**

Пусть, в $E^m$ $\exists$ сем-во $D_\alpha^{\alpha \in \mathcal{L}}$ вып. компактов:

$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$ $\bigcap\limits_{i=1}^{m+1} D_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

Тогда, $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{L}} D_\alpha \neq \emptyset$.

(без док-ва)

**Упр.** Док-ть т-му при $m = 1$

**Теорема 1.13**

Пусть, $\Gamma$ — игра с вогн. ф-ей выигрыша $\cap_x$

Тогда, $\underline{v} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x,y) = \underbrace{\min\limits_{\substack{y^j \in Y \\ j=1\dots m+1}} \max\limits_{x \in X} \min\limits_{1 \leq j \leq m+1} F(x, y^j)}_{w}$

$\left\{ y^j \in Y \subset E^n, \text{ внеш. min по перем. } (m+1) \cdot n \right\}$

**Док-во:**

1) $F(x, y^j)$ — непр. $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ min достиг.

2) Док-ем: $w \geq \underline{v}$

рассм. $\forall\, y^1 \dots y^{m+1}$

$$\max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x, y^j) \geq \max_{x\in X} \min_{y\in Y} F(x,y) = \underline{v}$$

$\Downarrow$ $\{\forall$ набор$\}$ $w \geq \underline{v}$

3) Док-ем: $w \leq \underline{v}$

пусть, $y \in Y$ — это $\alpha$ из Т. Хелли

$$D_y = \{x \in X \mid F(x,y) \geq w\}$$

$\left.\begin{array}{l} F \text{ - вогн. по } x \\ F \text{ - непр.} \end{array}\right\} \Rightarrow D_y$ — вып. и замкн. (проверить)

$\bigcap\limits_{j=1}^{m+1} D_{y^j} \neq \emptyset$ ← надо док-ть

$$\max_{x\in X} \min_{1\le j\le m+1} F(x, y^j) \geq w \quad (\text{по опр. } w)$$

$\downarrow x^*$

$$\min_{1\le j\le m+1} F(x^*, y^j) \geq w \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow F(x^*, y^j) \geq w, \quad \forall\, 1\le j \le m+1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow x^* \in \bigcap\limits_{j=1}^{m+1} D_{y_j} \Rightarrow \bigcap D_{y_j} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вып. усл. т-мы Хелли $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x^0 \in \bigcap\limits_{y\in Y} D_y \Rightarrow F(x^0, y) \geq w, \ \forall y \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v} \geq \min\limits_{y\in Y} F(x^0, y) \geq w$

Т-ма док-на.

Введем набор:

$\overline{y}^1, \ldots, \overline{y}^{m+1}$ — реализ. внеш. min в $w$

т. е. $\max\limits_{x \in X} \min\limits_{1 \le j \le m+1} F(x, \overline{y}^j) = w$

Пусть, $Q = \{ q = (q_1, \ldots, q_{m+1}) \mid \sum\limits_{j=1}^{m+1} q_j = 1,\ q_j \ge 0 \}$

Пусть, $\Phi(x, q) = \sum\limits_{j=1}^{m+1} F(x, \overline{y}^j) \cdot q_j$

$\cap_x$, лин. по $q$

Теорема 1.14

В игре $\Gamma$ с вогн. ф-ей выигр. $\exists$ реш.:

$(x^0, \psi^0, \underline{v})$

$x^0$ — чист. maxmin страт. 1 игр.

$\psi^0$ — смеш. страт. 2ого игр.

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^{m+1} q_j^0 I_{\overline{y}^j}$$

$q^0 = (q_1^0, \ldots, q_{m+1}^0) : \max\limits_{x \in X} \Phi(x, q^0) = \min\limits_{q} \max\limits_{x} \Phi(x, q)$

Док-во:

1) $\underline{v} = \{T\,1.13\} = w = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{1 \le j \le m+1} F(x, \overline{y}^j) =$

$= \{T\,1.7'\} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{q \in Q} \sum\limits_{j=1}^{m+1} F(x, \overline{y}^j) =$

$= \max\limits_{x \in X} \min\limits_{q \in Q} \Phi(x, q) = \{T\,1.3\} =$

$= \min\limits_{q \in Q} \max\limits_{x \in X} \Phi(x, q) = \max\limits_{x \in X} \Phi(x, q^0) =$

$$= \max_{x \in X} \sum_{j=1}^{m+1} F(x, \overline{y}j)\, q_j^0 =$$

$$= \max_{x \in X} \int_Y F(x,y)\, d\psi^0(y) =$$

$$= \max_{x \in X} F(x, \psi^0)$$

т.е. $\max\limits_{x \in X} F(x, \psi^0) = \underline{v} = \min\limits_{y \in Y} F(x^0, y)$

$\Rightarrow F(x, \psi^0) \le \underline{v} \le F(x^0, y)$, $\forall x, y$ это $(*)$

Т-ма док-на.

<u>Замечание</u>. Не исп. $Y$ - вып.

1) Т-ма верна, если $Y$ - компакт метр. пр-ва

2) пусть, $Y$ - вып. комп., $Y^0$ - мн-во крайних точек, $F(x,y)$ - $\cap_x, \cap_y$

$\Downarrow$

$$\underline{v} = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x,y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y^0} F(x,y)$$

Рассм. $\Gamma^0 = \langle X, Y^0, F(x,y) \rangle$

Реш. в смеш. страт. $\Gamma^0$ совпад. с $\Gamma$

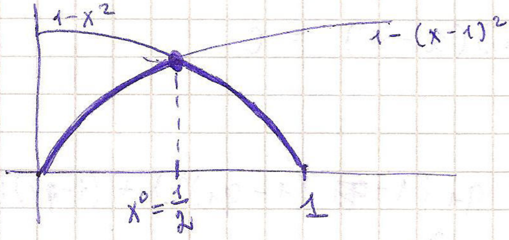
Тогда $\overline{y}j \in Y^0$ - т.е. берем такие $\overline{y}$

Теорема 1.13'.

$\Gamma$ - игра с вып. ф-ей выигр. ($F$ - $\cup_y$)

Тогда $\bar{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x,y) = \max\limits_{\substack{x^i \in X \\ i=1\dots n+1}} \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{1 \le i \le n+1} F(x^i, y) = w^1$

~~~

Пусть, $\bar{x}^i$, $i = 1 \dots n+1$ :

$$\min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n+1} F(\bar{x}^i, y) = w^1$$

Пусть, $\Phi^1(p, y) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} p_i F(\bar{x}^i, y)$

$$p \in P = \{ p \in E^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} p_i = 1,\ p_i \ge 0 \}$$

Теорема 1.15

$\Gamma$ - игра с вып. ф-ей выигр. ($\cup_y$)

Тогда $\exists$ реш. в смеш. страт.:

$(\varphi^0, y^0, \bar{v})$

$y^0$ - minmax чист. страт.

$$\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n+1} p_i^0 I_{\bar{x}^i}$$

$p^0$ : $\max\limits_{p \in P} \min\limits_{y \in Y} \Phi^1(p, y) = \min\limits_{y \in Y} \Phi^1(p^0, y)$

Пример:

$F(x, y) = 1 - (x-y)^2$

$X = Y = [0, 1]$

$F''_x = -2 \Rightarrow$ ф-ия вогнута

$\bar{v} = \max\limits_{0 \le x \le 1} \min\limits_{0 \le y \le 1} [1 - (x-y)^2] = \max\limits_{0 \le x \le 1} \min [1 - x^2, 1 - (x-1)^2]$
~~~

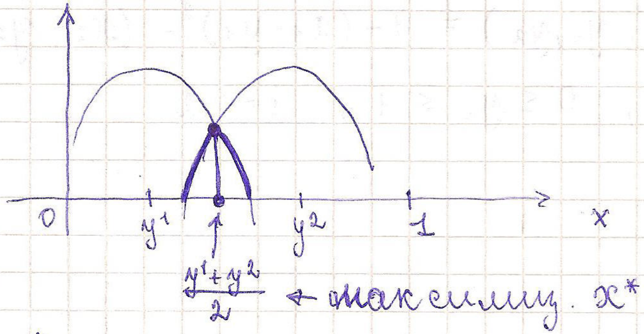



$$\boxed{x^0 = \frac{1}{2}\,,\quad \underline{v} = \frac{3}{4}}$$

$m = n = 1 \Rightarrow$ оптим. смеш. стр. 2 игрока сосред. в 2-х точках

$$w = \min_{0 \le y^1 \le y^2 \le 1} \; \max_{0 \le x \le 1} \; \min\left[1 - (x - y^1)^2,\; 1 - (x - y^2)^2\right]$$

Фикс. $y^1, y^2$




$\Downarrow$

$$w = \min_{0 \le y^1 \le y^2 \le 1} \left[1 - \left(\frac{y^1 - y^2}{2}\right)^2\right]$$

$\bar{y}^1 = 0\,,\quad \bar{y}^2 = 1$ — реализ. min

$$\Phi(x, q) = q_1 \cdot F(x, \bar{y}^1) + (1 - q_1) \cdot F(x, \bar{y}^2) =$$

$$= q_1\left[1 - x^2\right] + (1 - q_1)\left[1 - (x - 1)^2\right]$$

$$M(q) = \max_{0 \le x \le 1} \Phi(x, q)$$

$$\Phi'_x = -2q_1 x - 2(1-q_1)(x-1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x(q_1) = 1 - q_1$$

$$M(q_1) = \Phi(x(q_1), q) = q_1(1 - (1-q_1)^2) + (1-q_1)(1-q_1^2) =$$

$$= 1 - q_1(1-q_1)$$

$$\min_{0 \le q_1 \le 1} M(q_1) = M\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

<u>Ответ:</u> $x^0 = \frac{1}{2}$,

$v = \underline{v} = \frac{3}{4}$

$\psi^0 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1$

<u>Упр.</u> $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 1 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2$

$0 \le x_i \le 1, \quad 0 \le y_i \le 1, \quad i = 1, 2$

## §7. Исследование игровых моделей.

### Модель "Нападение - оборона"

1. $A$ - общ. кол-во ср-в ~~обороны~~ нападения
$B$ - —"— обороны
пункты: 1 ... n

$A, B$ - бескон. делимы

$x = (x_1 \dots x_n)$ - распр. ср-в нападения
$x \in X = \{x \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A, \; x_i \geq 0\}$

$y = (y_1 \dots y_n)$ - распр. ср-в защиты
$y \in Y = \{y \mid \sum_{i=1}^{n} y_i = B, \; y_i \geq 0\}$

$i$ пункт:
$\mu_i > 0$ - кол-во средств нападения, $\gamma$ может уничт. 1 ед. ср-в нападения

$x_i, \; y_i$

1 случай: $x_i > \mu_i \cdot y_i \qquad (x_i - \mu_i y_i)$
2 случай: $x_i \leq \mu_i \cdot y_i \qquad 0$

$\max[x_i - \mu_i y_i, \; 0]$ - ср-ва напад., прорыв. на $i$ пункте

$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i y_i, \; 0]$ - ф-ция выигр.

$F(x,y) \; \cup_x, \; \cup_y$

$\Downarrow$ $\underline{v} = \overline{v}$ (т.к. выпукл. игра) пусть, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n > 0$

$n$ - слабейший пункт

ⓐ $$\begin{cases} \underline{v} = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} F(x,y) = \max[A - \mu_n B, 0] \\ x^0 = x^{(n)} = (0, \ldots, 0, A) \end{cases}$$

докажем это утв.:

рассм. $\forall x \in X$

док-ем: $\min\limits_{y \in Y} F(x,y) \leq \min\limits_{y \in Y} F(x^{(n)}, y)$

$$\min_{y \in Y} F(x,y) \leq \left\{ \bar{y} : \bar{y}_i = \frac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k}} \cdot \frac{x_i}{\mu_i} \right\} \leq$$

$$\leq F(x, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \max[x_i - \mu_i \bar{y}_i, 0] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } B \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \Rightarrow \bar{y}_i \geq \frac{x_i}{\mu_i} \\ \underline{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i \bar{y}_i)}, & \text{если } B < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\mu_k} \end{cases} \leq$$

$$\leq A - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \bar{y}_i \leq A - \sum_{i=1}^{n} \mu_n \bar{y}_i = A - \mu_n B \leq$$

$$\leq \max[A - \mu_n B, 0] =$$

$$= \min_{y \in Y} \max[A - \mu_n y_n, 0] =$$

$$= \min_{y \in Y} F(x^{(n)}, y)$$

(8). $\begin{cases} \overline{v} = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} F(x,y) = \max\left[A - \dfrac{B}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\right] \\ y^0 : y_i^0 = \dfrac{B}{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \end{cases}$

док-ем

$$x^{(i)} = (0, \ldots, 0, \overset{i}{A}, 0, \ldots, 0)$$

(1) $\max\limits_{x \in X} F(x,y) = \max\limits_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y), \quad \forall y \in Y$

док-ем (1):

$\max\limits_{x \in X} F(x,y) \geq \max\limits_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y)$ – очевидно

рассм. $\forall x \in X$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{x_i}{A}}_{\lambda_i} x^{(i)}$ – вып. комбин.

$$F(x,y) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{A} x^{(i)}, y\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{A} F(x^{(i)}, y) \le \max_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y)$$

Фикс. $y$: $\max\limits_{x \in X} F(x,y) \le \max\limits_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y)$

док-ли (1)

$$\overline{v} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x,y) \overset{(1)}{=} \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} F(x^{(i)}, y) =$$

$$= \min_{y \in Y} \max_{1 \le i \le n} \max\left[A - \mu_i y_i, 0\right] =$$

$$= \min_{y \in Y} \max\left[A - \min_{1 \le i \le n} \mu_i y_i, 0\right] =$$

$$= \max\left[A - \max_{y \in Y} \min_{1 \le i \le n} \mu_i y_i, 0\right] =$$

$= \{ p : p_i = y_i / B, \ \Sigma p_i = 1, \ p_i \geq 0 \}, \ p \in \mathcal{P} \} =$

$$= \max [ A - B \cdot \max_{p \in \mathcal{P}} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i p_i , \ 0 ] =$$

(см. §4 - в конце)

$$= \max [ A - B \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} , 0 ]$$

$$p_i^0 = \frac{1}{\mu_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, \quad i = 1 \ldots n$$

$\Downarrow$

$$y_i^0 = \frac{B}{\mu_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$$

Сравним maxmin и minmax:

$$\underline{v} = \max [ A - \mu_n B, 0 ]$$

$$\overline{v} = \max [ A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0 ]$$

$\boxed{01.10}$

1) Пусть, $\underbrace{B \geq A \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$,

Тогда,

$$\overline{v} = 0 \geq \underline{v} \geq 0 \quad \Rightarrow \overline{v} = \underline{v}$$

2) Пусть, $\underbrace{B < A \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}$,

$$\overline{v} = \underbrace{A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}}_{>0} > A - \frac{B}{\frac{1}{\mu_n}} = A - \mu_n B$$

$\Downarrow$

$\overline{v} > \max [ A - \mu_n B, 0 ] = \underline{v}$ — нет седловой точки

$U_y \Rightarrow \{T1.15\}$ $v = \overline{v}$

$y^0$ - максимин. страт.

(оптим. чист. стр. 1 игр)

$\underbrace{\varphi^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \, I_{x^{(i)}}}$ - смеш. стратегия 2 игрока

$$p_i^0 = \frac{1}{\mu_i \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, \quad i = 1 \ldots n$$

$x^{(i)} = (0, \ldots, 0, \underset{\uparrow i}{A}, 0, \ldots, 0)$ - концентрир. удар по $i$-ому пункту

Док-ем, $\varphi^0$ - оптим. смеш. стратегия для нападение

$\Downarrow$

т.е. $F(\varphi^0, y) \geq \overline{v}$ $\forall y \in Y$ - достат. док-ть

$\max_{x \in X} F(x, y^0) \geq F(x, y^0)$ → условие (*)

рассм. н-во:

$a_i, b_i, \; i = 1 \ldots n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \max[a_i, b_i] \geq \max\left[\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\right]$ - практич. очевидно (!...)

$$F(\varphi^0, y) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(x^{(i)}, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max[A - \mu_i y_i, 0] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \max[\underbrace{p_i^0 A - p_i^0 \mu_i y_i}_{a_i}, \underbrace{0}_{b_i}] \overset{(2)}{\geq}$$

$$\geq \max\left[\sum_{i=1}^{n} p_i^0 A - p_i^0 \mu_i y_i, 0\right] = \left\{ \begin{array}{l} \sum p_i^0 = 1 \\ p_i^0 \mu_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \end{array} \right\} =$$

$$= \max\left[A - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i, 0\right] =$$

$$= \max\left[A - \frac{B}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mu_k}}, 0\right] = \overline{v}$$

док-ли

## ②. Модель „дуэль"

2 игрока

- $d_0$ – нач. расст. между дуэлянтами
- по 1 выстрелу
- дуэлянты сближаются
- в $\forall$ момент $\forall$ игрок может произвести выстрел
- $\forall$ дуэлянта ф-ия меткости

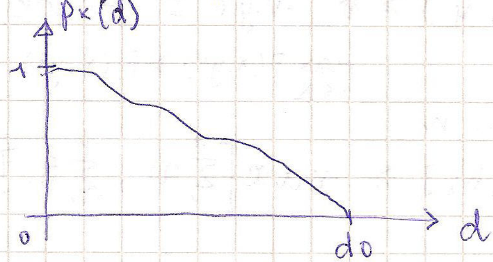
$\boxed{p_K(d)}$, $K = 1,2$ – с какой вер. попадет

$d \in [0, d_0]$

$p_K(d)$ – непр. и убывают

пусть, $p_K(0) = 1$

$p_K(d_0) = 0$




Стратегии дуэлянтов:

1 игрок : $x$ – расст., с к. намер. выстрел

$x \in X = [0, d_0]$ ← выигрыш – – вер. пораж. противника

2 игрок : $y$ — —"—

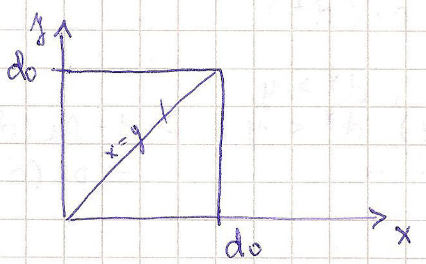
$y \in Y = [0, d_0]$

шумная дуэль – слышны выстрелы
бесшумная дуэль – не слышны

Рассм. <u>шумную</u> дуэль :

$$\boxed{F(x,y)} = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ 1 - p_2(y), & x < y \end{cases}$$ – вер. промаха 2 игрока

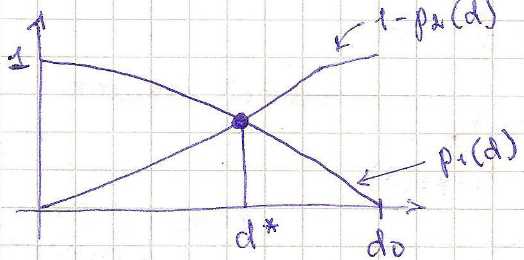
$f(y) = \begin{cases} x, & x \ge y \\ 0, & x < y \end{cases}$ — ф-ия поведения 1 игрока




вдоль $x = y$ ф-ия $F$ разрывна

Рассм. ф-ии:

$p_1(d)$ и $1 - p_2(d)$




$d^*$ — корень ур-я $p_1(d) = 1 - p_2(d)$

$\underbrace{(d^*, d^*, v = p_1(d^*))}$ — реш. шумной дуэли в чист. страт

$(d^*, d^*)$ — седлов. т. $F(x, y)$, т.к.

$F(d^*, d^*) = p_1(d^*)$

Рассм. $\forall$ страт. $x$
$y = d^*$

покажем: $F(x, d^*) \le p_1(d^*) = F(d^*, d^*)$

$\Downarrow$

$$F(x, d^*) = \begin{cases} p_1(x), & x \ge d^* \\ \underbrace{1 - p_2(d^*)}_{= p_1(d^*)}, & x < d^* \end{cases} \le p_1(d^*)$$

~~покажем~~ пусть, $x = d^*$
$\forall y$

покажем: $F(d^*, y) \geq p_1(d^*)$

$$\Downarrow \left[ F(d^*, y) = \begin{cases} p_1(d^*), & d^* \geq y \\ \underbrace{1 - p_2(y)}_{\text{возр. ф-ция}} & d^* < y \end{cases} \right. > 1 - p_2(d^*) = p_1(d^*)$$

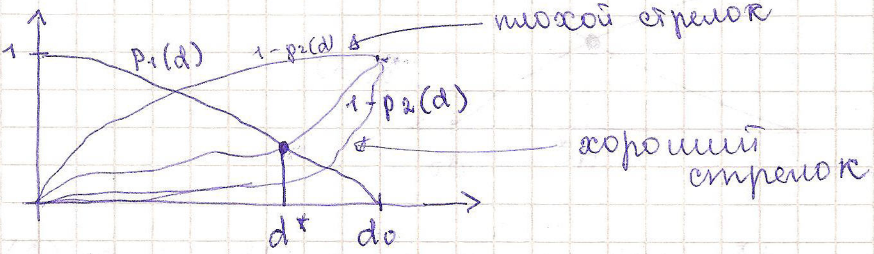
Отметим частн. случаи:

1) $p_1(d) = p_2(d)$

$\Downarrow$

$p_1(d) = 1 - p_1(d)$

$\Downarrow$ $p^*: \; p_1(d) = \frac{1}{2} = v$




Рассм. <u>бесшумную</u> дуэль:

$$F(x, y) = \begin{cases} p_1(x), & x \geq y \\ p_1(x)(1 - p_2(y)), & x < y \end{cases}$$

$$\underline{v} = \sup_{0 \leq x \leq d_0} \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x, y)$$

$0 \leq x < d_0$

$$w(x) = \inf_{0 \leq y \leq d_0} F(x, y) =$$

$$= \min \Big[ \inf_{0 \leq y \leq x} p_1(x), \; \inf_{x \leq y \leq d_0} p_1(x) \overbrace{(1 - p_2(y))}^{\text{возраст.}} \Big] =$$

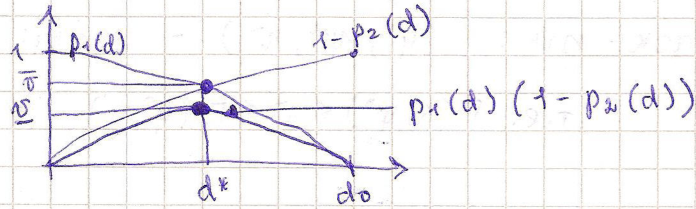
$$= \min \left[ p_1(x), \; p_1(x)(1 - p_2(x)) \right] = p_1(x) \cdot (1 - p_2(x))$$

Тогда, $\underline{v} = \max\limits_{0 \le x \le d_0} p_1(x)(1 - p_2(x))$

Аналогично, $\overline{v} = p_1(d^*)$ (показать)

$d^*: \; p_1(d) = 1 - p_2(d)$

Покажем: $\underline{v} < \overline{v}$




т.е. нет седлов. т. в чист. стратегиях

Пример:

$d_0 = 1$

$p_1(d) = p_2(d) = 1 - d$

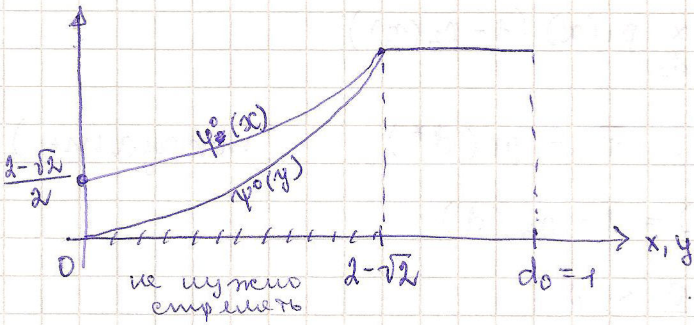
бесшумная дуэль

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - x, & x \ge y \\ (1-x)\cdot y, & x < y \end{cases}$$

Ответ: $v = \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{1}{(x-1)^2} + 1\right), & 0 \le x < 2-\sqrt{2} \\ 1, & 2-\sqrt{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\psi^0(y) = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\left(\frac{1}{(y-1)^2} - 1\right), & 0 \le y < 2-\sqrt{2} \\ 1, & 2-\sqrt{2} \le y \le 1 \end{cases}$$




смешанные стратегии

Можно док-ть: $(\varphi^0, \psi^0, v)$ - удовл. усл. $(*)$

т.е. $F(x, \psi^0) \le v \le F(\varphi^0, y), \ \forall x, y$

## §8. Многошаговые антагонистические игры с полной информацией

T шагов, $t = 1 \dots T$

на $\forall$ шаге игроки выбир. значение контролируем. факторов $x_t$, $y_t$

значение $x_t$ ($y_t$) – альтернатива

1 шаг: $x_1 \in U_1$, $y_1 \in V_1(x_1) = V_1(\cdot)$

„$y_1$" знает $x_1$

(t-1) шагов: $x_1, \dots, x_{t-1}$ ; $y_1, \dots, y_{t-1}$

пусть, $\overline{x}_t = (x_1, \dots, x_t)$

$\overline{y}_t = (y_1, \dots, y_t)$

t шаг: $x_t \in U_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1}) = U_t(\cdot)$

$y_t \in V_t(\overline{x}_t, \overline{y}_{t-1}) = V_t(\cdot)$

T шаг: $(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ – партия игры

$F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$ – опр. $\forall$ набора

выигрыш 1 игрока

Пример:

n спичек

2 игрока

можно взять 1 или 2 спички

кто берет посл. – проигрыв.

если $n = 1$, то 1 проигр. $-$
$n = 2$, то 1 выигр. $+$
$n = 3$, то 1 выигр. $+$
$n = 4$, то 1 проигр. $-$
$n = 5$, то 1 выигр. $+$
...

$n = 3k+1 \Rightarrow$ 1 проигрыв.

~

рассм. $t$ шаг:

$$x_t = \tilde{x}_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1}), \quad \tilde{x}_t \in \tilde{U}_t$$

$\tilde{x} = (\tilde{x}_t, t = 1, \dots, T)$ – <u>стратегия 1 игр.</u>

$$\in \tilde{X} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{U}_t$$

$$t = 1, \quad \tilde{x}_1 = x_1$$

$$y_t = \tilde{y}_t(\bar{x}_t, \bar{y}_{t-1}), \quad \tilde{y}_t \in \tilde{V}_t$$

$\tilde{y} = (\tilde{y}_t, t = 1, \dots, T)$ – <u>стратегия 2 игр.</u>

$$\in \tilde{Y} = \prod_{t=1}^{T} \tilde{V}_t$$

Определим:

$F(\tilde{x}, \tilde{y})$

$(\tilde{x}, \tilde{y}) \to (\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ ← покажем

$$\tilde{x}_1 = x_1, \quad y_1 = \tilde{y}_1(x_1)$$

$$x_2 = \tilde{x}_2(x_1, y_1) \quad \dots$$

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$$

$\Gamma = \langle \tilde{X}, \tilde{Y}, F(\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle$ – многошаг. игра с полн. инф.

Будем рассм.:

$\Gamma'$: $U_t(\cdot)$, $V_t(\cdot)$ – конечные мн-ва

$\Gamma''$: $U_t(\cdot) \equiv U_t$ – компакт

$V_t(\cdot) \equiv V_t$

$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ – непр. на $\left(\prod_{t=1}^{T} U_t\right) \times \left(\prod_{t=1}^{T} V_t\right)$

$\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_t^0, t = 1, \dots, T)$

$\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_t^0, t = 1, \dots, T)$

определим

исп. метод динамич. программир., т.е. эти ф-ии опр. в обратн. порядке

$\tilde{y}_T^0, \tilde{x}_T^0, \tilde{y}_{T-1}^0, \dots$

опр. $\tilde{y}_T^0$: $\tilde{y}_T^0(\tilde{x}_T, \tilde{y}_{T-1}) \overset{\text{обозн.}}{=} y_T^0$

$y_T^0$: $F(\underbrace{\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}}_{\text{изв.}}, y_T^0) = \min\limits_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\underbrace{\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1}}_{\text{изв.}}, y_T) =$

(ф-ия Беллмана) $= F(\bar{x}_T, \bar{y}_{T-1})$

опр. $\tilde{x}_T^0$: $\tilde{x}_T^0(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1}) \overset{\text{обозн.}}{=} x_T^0$

$F(\bar{x}_{T-1}, x_T^0, \bar{y}_{T-1}) = \max\limits_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\bar{x}_{T-1}, x_T, \bar{y}_{T-1}) =$

$= F(\bar{x}_{T-1}, \bar{y}_{T-1})$

уже опр. $\tilde{y}_T^0, \tilde{x}_T^0, \tilde{y}_{T-1}^0, \dots, \tilde{y}_{t+1}^0, \tilde{x}_{t+1}^0$

$F(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$

опр: $\tilde{y}^\circ_t$, $\tilde{x}^\circ_t$ : те же ф-лы $t \leftrightarrow T$

опр. $\tilde{x}^\circ_1 = x^\circ_1$ : $F(x^\circ_1) = \max\limits_{x_1 \in U_1} F(x_1)$

↑ корректно и для Γ', и для Γ''
(т.е. max, min достиг.) ↑ т.к. мн-ва конечн. ↑ т.к. Т1.2

опр. $\underbrace{\tilde{v}} = \max\limits_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \max\limits_{x_1 \in U_1} \min\limits_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(x_1, y_1) =$

$= \ldots = \max\limits_{x_1 \in U_1} \min\limits_{y_1 \in V_1(\cdot)} \ldots \max\limits_{x_T \in U_T(\cdot)} \min\limits_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\overline{x}_T, \overline{y}_T)$

Теорема 1.16. (Цермело)
∀ многош. игра с полн. инф. Γ' имеет реш. вида: $(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}^\circ, \tilde{v})$

Док-во:

1) т.е. покажем: $(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}^\circ)$ - седл. т. $F(\tilde{x}, \tilde{y})$ на $\tilde{X} \times \tilde{Y}$

т.е. $F(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}) \geq \tilde{v}$, $\forall \tilde{y} \in \tilde{Y}$ - I н-во

$F(\tilde{x}, \tilde{y}^\circ) \leq \tilde{v}$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$ - II н-во

2) док-ем I неравенство:

рассм. $\forall \tilde{y} \in \tilde{Y}$

$F(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}) = F(\underbrace{\tilde{x}^\circ, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}}, \tilde{y}_T) \geq$

$\geq \min\limits_{y_T \in V_T(\cdot)} F(\tilde{x}^\circ_T, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}, y_T) \overset{\text{по опр. ф-ии Беллмана}}{=}$

$= F(\tilde{x}^\circ_T, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}) =$

$= F(\underbrace{\tilde{x}^\circ_1, \ldots, \tilde{x}^\circ_{T-1}}, \tilde{x}^\circ_T, \underbrace{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{T-1}}) \overset{\tilde{x}^\circ_T}{=}$

$$= \max_{x_T \in U_T(\cdot)} F(\tilde{x}_1^0, \dots, \tilde{x}_{T-1}^0, x_T, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}) =$$

$$= \{\text{ф-ия Беллмана}\} = F(\tilde{x}_1^0, \dots, \tilde{x}_{T-1}^0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1}) \geqslant$$

$$\geqslant \dots \geqslant F(\tilde{x}_1^0, \tilde{y}_1) \geqslant \min_{y_1 \in V_1(\cdot)} F(\tilde{x}_1^0, y_1) =$$

$$= F(\tilde{x}_1^0) \overset{\tilde{x}_1^0}{=\!=} \max_{x_1 \in U_1} F(x_1) = \tilde{v}$$

3) II н-во - аналогично

T-ма док-на.

<u>Пример</u>:

1. шахматы
это игра Г'

белые - 1 игр.
черные - 2 игрок

$U_t(\bar{x}_{t-1}, \bar{y}_{t-1})$ - мн-во всех разреш. ходов в этой позиции

$$F(\bar{x}_T, \bar{y}_T) = \begin{cases} 1, & \text{белые выигр.} \\ 1/2, & \text{ничья} \\ 0, & \text{белые проигр.} \end{cases}$$

2. [на к/р - !]

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1 - max
2 - min

$M_\alpha$ : $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{3, 4\}$ - разб. строк

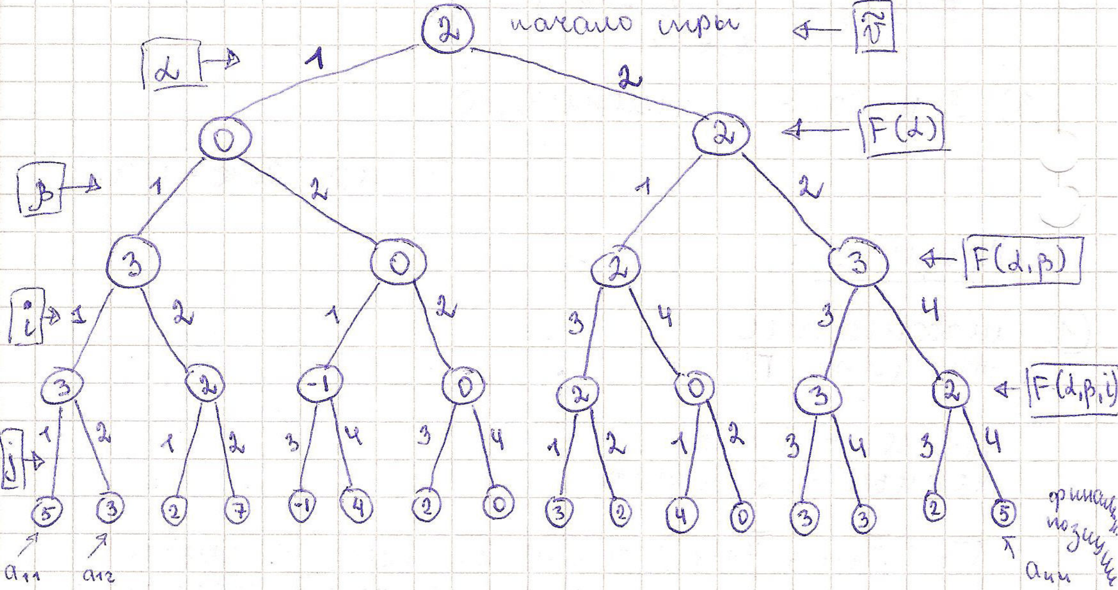
$N_\beta$ : $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{3, 4\}$ - разб. столбцов шаг 1: 1 игр. выбир. $\alpha \in \{1, 2\}$

2 игр. выбир. $\beta \in \{1, 2\}$, изв. $\alpha$

шаг 2: 1 игр. выбир. $i \in M_\alpha$

2 игр. выбир. $j \in N_\beta$, изв. $i$

$F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$ – выигр. 1 игрока



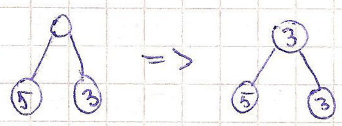

$F(\alpha, \beta, i, j) = a_{ij}$ – посл. уровень ← ф-ии Беллмана

$$F(\alpha, \beta, i) = \min_{j \in N_\beta} a_{ij}$$

$$F(\alpha, \beta) = \max_{i \in M_\alpha} F(\alpha, \beta, i)$$

$$F(\alpha) = \min_{\beta = 1,2} F(\alpha, \beta)$$

$$\tilde{v} = \max_{\alpha = 1,2} F(\alpha)$$



min и т.д.

$F(\alpha, \beta, i)$ находим

и т.д.

Таким образом, нашли $\boxed{\tilde{v} = 2}$,

Постр. оптим. страт.:

$\alpha^0$, $\tilde{i}^0(\alpha, \beta)$ – опр.

опт. стр. 1 игр.
$$\begin{cases} \alpha^0: \ \max F(\alpha), \text{ т.е. } \alpha^0 = 2 \ (\text{см. дерево}) \\ \tilde{i}^0(2,1) = 3, \text{ ч.б. выбрать } 2 \\ \tilde{i}^0(2,2) = 3, \text{ ч.б. выбрать } 3 \\ \qquad\qquad = 4, \text{ ч.б. выбрать } 2 \ (\text{можно}) \end{cases}$$

$\tilde{\beta}^0(\alpha)$, $\tilde{j}^0(\alpha, \beta, i)$ – опр.

опт. стр. 2 игр.
$$\begin{cases} \tilde{\beta}^0(1) = 2, \text{ ч.б. выбрать } 0 \\ \tilde{\beta}^0(2) = 1, \text{ ч.б. выбрать } 2 \\ \tilde{j}^0(1, \overset{\beta(1)}{2}, 1) = 3, \text{ ч.б. } -1 \\ \tilde{j}^0(1, 2, 2) = 4, \text{ ч.б. } 0 \\ \qquad\qquad = 3, \text{ ч.б. } 2 \ (\text{можно}) \\ \tilde{j}^0(2, \overset{\beta(2)}{1}, 3) = 2, \text{ ч.б. } 2 \\ \tilde{j}^0(2, 1, 4) = 2, \text{ ч.б. } 0 \end{cases}$$

<u>Упр.</u> Та же м. A
шаг 1: 2 выбир. $\beta$
1 выбир. $\alpha$, изв. $\beta$
шаг 2: 2 выбир. $j \in N_\beta$
1 выбир. $i \in M_\alpha$, изв. $j$

Опр. значение игры и выписать все оптим. страт.

③. $F(x,y) = -(x-y)^2$

$X = [0,1]$, $Y = [0,1]$

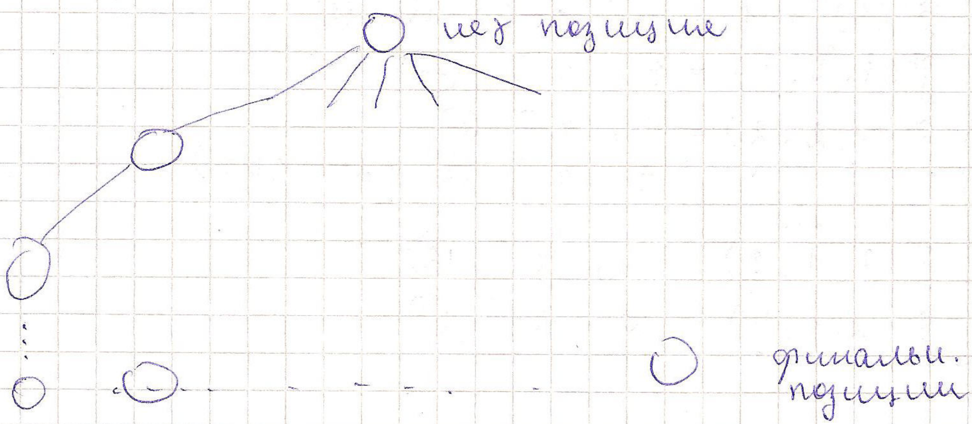
<u>шаг 1</u>: 1 выбир. $x \in X$
2 выбир. $y \in Y$, изв. $x$

Опр. значение игры и выписать опт. страт.

$v = \underline{v}$, $x^0$, $y(x)$
min-ий $y$ на $\forall x$

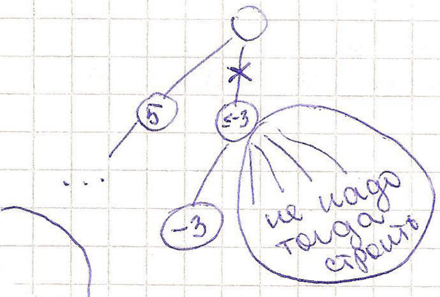
~

Программирование шахмат:




дерево строится не все сразу, а постепенно

исп. нач сокращения вычислений




$\alpha$-отсечение $\beta$

# Глава II. Неантагонистические игры

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y) \rangle$ — ант. игра

1) интересы 2 необяз. противопол. интересам 1

2) не 2 игрока, а много

Пусть, $\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$

$$\begin{cases} x \in X \\ y \in Y \\ 1 - \max F \\ 2 - \max G \end{cases}$$

выбор независим

неант. игра

случай $F \equiv -G$ — ант. игра

$(x, y)$ — ситуация

Опр. $(x^0, y^0)$ — ситуация равновесие (равновесие по Нэшу), если вып.

$$\begin{cases} F(x, y^0) \leq F(x^0, y^0), \ \forall x \in X \\ G(x^0, y) \leq G(x^0, y^0), \ \forall y \in Y \end{cases}$$

Опр. игра $\Gamma$ — биматричная, если $X = \{1, \dots, m\}$, $Y = \{1, \dots, n\}$

$i \in X$, $j \in Y$

$F(i,j) = a_{ij}$

$G(i,j) = b_{ij}$

$\downarrow$

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ — выигр. 1 игр.

$B = (b_{ij})_{m \times n}$ — выигр. 2 игр.

1 – выб. строку
2 – выб. столбец

<u>Опр.</u> $(i^\circ, j^\circ)$ – <u>равнов. по Нэшу</u>, если

$$\begin{cases} a_{ij^\circ} \le a_{i^\circ j^\circ}, & i = 1, \dots, m \\ b_{i^\circ j} \le b_{i^\circ j^\circ}, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ i^\circ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} j^\circ \\ \left( \begin{array}{c} \vdots \\ \dots\ a_{i^\circ j^\circ} \\ \\ \end{array} \right) \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ i_0 \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} j^\circ \\ \left( \begin{array}{c} \vdots \\ \dots\ b_{i^\circ j^\circ} \\ \\ \end{array} \right) \end{array}$$

max в столбце — min в строке

<u>Недостатки</u> ситуации равновесия:

1. „<u>Семейный спор</u>"

$$A = \begin{array}{c|cc} & Ф & Т \\ \hline Ф & 1 & 0 \\ Т & 0 & 2 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc} & Ф & Т \\ \hline Ф & 2 & 0 \\ Т & 0 & 1 \end{array}$$

2 альтернативы: футбол и театр

$(1, 1) \leftrightarrow (Ф, Ф)$ — ситуации
$(2, 2) \leftrightarrow (Т, Т)$ — равновесия

2. „<u>Дилемма заключенных</u>"

$$A = \begin{array}{c|cc} & нет & да \\ \hline нет & -2 & -10 \\ да & -1 & -5 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc} & нет & да \\ \hline нет & -2 & -1 \\ да & -10 & -5 \end{array}$$

2 альтерн.: не признаваться и признаться

$(4, 4)$ – ситуация равнов.

для игроков лучше $(1, 1)$

08.10

Опр. $(x^*, y^*)$ — оптим. по Парето, если
$\nexists (x,y): \begin{cases} F(x,y) \geq F(x^*, y^*) \\ G(x,y) \geq G(x^*, y^*) \end{cases}$ хотя бы 1 н-во вып. как строгое

В ант. играх $\forall$ ситуация равнов. явл. оптим. по Парето.

③.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Покажем, что $\exists!$ ситуац. равнов. $(1,1)$
[см. стрелочки]

$W_1(1) = 0 = \min\limits_{1 \leq j \leq 3} a_{1j}$

$W_1(2) = \min\limits_{1 \leq j \leq 3} a_{2j} = 2$

2 стратегия — maxmin (для 1 игр.)

аналогично, 2 страт. — maxmin (для 2 игр.)

Равнов. — $(1,1)$
По maxmin — $(2,2)$

Пусть, $s \geq 2$

$I = \{1, \dots, s\}$ - мн-во игроков

Рассм. $k$-ого игрока

$k \in I$, стратегии $x_k \in X_k$

$x = (x_1, \dots, x_s)$ - ситуация (набор стратегий)

$X = \times \prod\limits_{k=1}^{s} X_k$

Ф-ия выигрыша для $k$-ого игрока:

$F_k(x) \longrightarrow \max$

$\Downarrow$

$\Gamma = \langle X_k, F_k(x), k \in I \rangle$ - игра $s$ лиц

(игроки выбир. св. стратегии независимо - игра в норм. форме)

$x \in X$

$y_k$ - нек страт. $k$-ого игрока

$\underbrace{x \,\|\, y_k}_{} = (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_s)$

т.е. $x_k \to y_k$

нов. ситуация

<u>Опр.</u> Ситуация $x^0 \in X$ - <u>сит. равновесия</u> (<u>равнов. по Нэшу</u>), если вып.

$$F_k(x^0) = \max_{x_k \in X_k} F_k(x^0 \,\|\, x_k), \quad k = 1, \dots, s$$

т.е. $x_k^0$ - максим. по $x_k$ эту ф-ию

Можно записать: $F_k(x^0 \,\|\, x_k) \leq F_k(x^0)$

$\forall x_k \in X_k, \quad k = 1, \dots, s$

Когда $\exists$ ситуация равновесия?

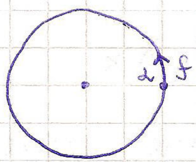
Вспомним Т1.3 $\Rightarrow$ ~ обобщим.

<u>Теорема</u> (Брауэра о неподв. т.)
Пусть, $X$ - вып. компакт евкл. пр-ва, задано отобр. $f: X \to X$ - непр.
Тогда, $\exists\, x^0 \in X : f(x^0) = x^0$.

без док-ва

<u>Упр.</u> Док-ть для случая $X = [a, b]$

$X$ - вып. : если отказаться, то




$X$ - окружность

$f$ - поворот окр. на угол $\alpha$

$\Downarrow$

не будет неподв. точки

Придумать контрпримеры:

1. $X = (0; 1]$
2. $X = [0; +\infty)$
3. $X = [0, 1]$, $f$ - разрывна

Теорема 2.1.

Пусть, в игре Г множ-ва мн вып.:

$X_k$, $k = 1 \dots S$ – вып. комп. евкл. пр-в

Пусть, $F_k(x)$ – непр. на $X$

– вогнут. по $x_k$ при фикс. ост. перем. $\cap_{x_k}$

Тогда, в игре Г $\exists$ ситуация равновесия.

Док-во:

I). Пусть, $F_k(x)$ – строго вогн. по $x_k$

1) $\max\limits_{x_k \in X_k} F_k(x \| x_k) = F_k(x \| f_k(x_l, l \neq k))$

$f_k(x_l, l \neq k) \in X_k$

$\Downarrow$

ф-ия $f_k$ – ф-ия наилучш. ответа для $\forall$ игрока

$f_k : \prod\limits_{l \neq k} X_k \to X_k$

Т1.2. $\Rightarrow$ $f_k$ – непр.

2) $X = \times \prod\limits_{k=1}^{S} X_k$

Построим отобр. $X \to X$:

$\forall x \in X \quad f(x) = (f_k(x_l, l \neq k),\ k = 1, \dots, S)$

$\exists x^0 \in X : f(x^0) = x^0$

$\Downarrow$ $f_k(x_l^0, l \neq k) = x_k^0$, $\forall k = 1, \dots, S$

$\uparrow$ $x_k^0$ – лучш. ответ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x^0$ – сит. равнов.

док-ли в частн. случае.

II) Пусть, $F_k(x)$ - вогн. по $x_k$ (общ. случай)

1) Рассм. $F_k^\varepsilon(x) = F_k(x) - \varepsilon |x_k|^2$, $\varepsilon > 0$

строго вогн. по $x_k$
(т.к. $|x_k|^2$ - строго вогн.)

$\Downarrow$ $\exists\, x^\varepsilon$ - ситуация равнов. $F_k^\varepsilon(x)$

2) Рассм. п-ть $\{\varepsilon_h\}$, $\varepsilon_h \to 0+$

$\Downarrow$ $\{x^{\varepsilon_h}\}$, $x^{\varepsilon_h} \in X$ - компакт $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно выдел. сход. п-ть
запишем $x^{\varepsilon_h} \to x^0$, $h \to \infty$

3) Ситуация равнов. $\Rightarrow$

$$F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h} \| x_k) \le F_k^{\varepsilon_h}(x^{\varepsilon_h}), \quad \forall x_k \in X_k, \quad k = 1 \dots S$$

Фикс. $x_k$, $k$

$\Downarrow$ $h \to \infty$

$$F_k(x^0 \| x_k) \le F_k(x^0), \quad \forall x_k \in X_k, \quad k = 1 \dots S$$

$\Downarrow$

$x^0$ - ситуация равнов.

Т-ма док-на.

Метод поиска ситуац. равновесия с помощью мн-в наилучш. ответов:

$k$ игрок
фикс. $\forall x_l, l \neq k$

$X_k(x_l, l \neq k) = \operatorname{Arg}\max\limits_{x_k \in X_k} F_k(x)$ – мн-во наил. ответов

$x^0$ – сит. равнов., если
$x_k^0 \in X_k(x_l^0, l \neq k)$, $k = 1, \dots, s$
↑ система включений (?)

если $X_k(x_l^*, l \neq k) = \{f_k(x_l, l \neq k)\}$,
то получ. сист. ур-ий вида:
$f_k(x_l^0, l \neq k) = x_k^0$, $k = 1 \dots s$

Пример:

1. (к/р) (!)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & 6 & 2 \\ 8 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Постр. мн-ва наил. ответов.

$X(j)$ – для 1 игрока

$X(1) = \{1, 2\}$ – в $\forall$ столбце max эл-т
...

Аналогично, для 2 игрока: $Y(i)$
в $\forall$ строке max эл-т
$Y(1) = \{1, 4\}$

Сит. равнов.: $(i^0, j^0)$, $i^0 \in X(j^0)$
$j^0 \in Y(i^0)$

Смотрим „общие кружочки" $\Rightarrow$

сит. равнов. $(1,1)$, $(3,3)$

(2). (к/р) !

$$\begin{cases} F(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 2xy - 5y^2 + 3x \\ G(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - y \end{cases}$$

$X = [-1; 2]$, $Y = [-2, 1]$

F - вогн. по x (строго) $F_{xx} < 0$
G - вогн. по y (строго) $\Rightarrow G_{yy} < 0$

$\Downarrow$ $\exists$ сит. равнов.

строг. вогн. $\Rightarrow$ мн-во наил. ответов — ед. эл-т

$x(y)$: $\max\limits_{-1 \le x \le 2} F(x,y) = F(x(y), y)$

$y(x)$: $\max\limits_{-2 \le y \le 1} G(x,y) = G(x, y(x))$

$\Downarrow$

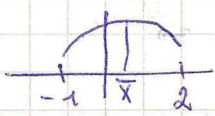
$$\begin{cases} x(y) = x \\ y(x) = y \end{cases} \to (x^0, y^0)$$

Построим $x(y)$:

$F'_x = -x + 2y + 3 = 0$ (т. к. ф-ия вогн.)

$\Downarrow$ $\bar{x} = 2y + 3$

при каких $y$ $\bar{x} \in [-1, 2]$



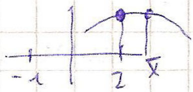

$\Downarrow$

$-1 \le \bar{x} = 2y + 3 \le 2$

$\Downarrow$

$-2 \le y \le -\frac{1}{2}$

$$x(y) = \begin{cases} 2y+3, & -2 \le y \le -\frac{1}{2} \\ 2, & -\frac{1}{2} < y \le 1 \end{cases}$$




ф-ие наил. ответа для 1 игр.

Построим $y(x)$:

$$G'_y = 4x - 2y - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{y} = \frac{4x-1}{2}$$

$$\Downarrow$$

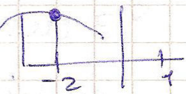
$$-2 \le \bar{y} = \frac{4x-1}{2} \le 1$$

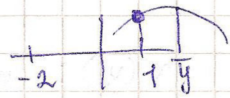
$$\Downarrow$$

$$-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$$

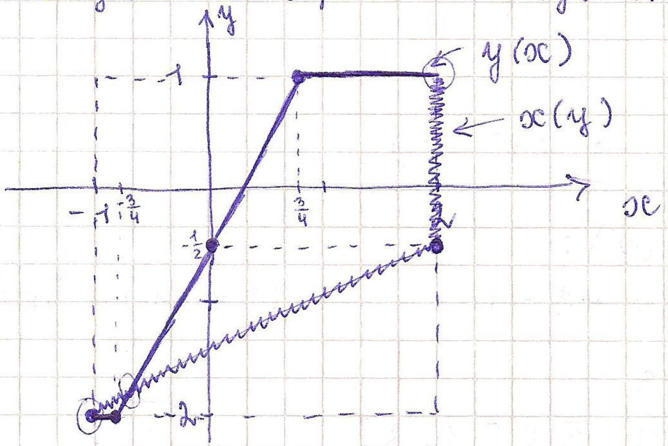

$$y(x) = \begin{cases} -2, & -1 \le x \le -\frac{3}{4} \\ \frac{4x-1}{2}, & -\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4} \\ 1, & \frac{3}{4} \le x \le 2 \end{cases}$$

ф-ие наил. ответов 2 игр.




Найдем т. пересеч. $x(y)$ и $y(x)$:




$$(x^0, y^0) = (-1, -2),\ (2, 1),\ \left(-\frac{2}{3}, -\frac{11}{6}\right)$$

← ситуации равновесия

$$\begin{cases} x = 2y + 3 \\ 2y = 4x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{11}{6} \end{cases}$$

Ситуации равновесия в смеш. стратегиях биматричн. игры:

$$\Gamma: \begin{cases} A = (a_{ij})_{m \times n} \\ B = (b_{ij})_{m \times n} \end{cases}$$

Если $B = -A$, то антаг. игра, $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ может не быть седл. т. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ может не быть сит. равнов. в чист. стратегиях

1 игрок: $p = (p_1, \dots, p_m) \in P$

2 игрок: $q = (q_1, \dots, q_n) \in Q$

Выигрыш игроков – ожид. выигр.:

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

$$B(p,q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i b_{ij} q_j$$

$\overline{\Gamma} = \langle P, Q, A(p,q), B(p,q) \rangle$ – смешанное расширение

$(p^0, q^0)$ – сит. равнов. игры $\overline{\Gamma}$ – это сит. равнов. в смеш. страт. игры $\Gamma$

Опр. $A(p, q^0) \le A(p^0, q^0), \ \forall p \in P$
$B(p^0, q) \le B(p^0, q^0), \ \forall q \in Q$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (p^0, q^0)$ – сит. равнов. в смеш. страт.

Т2.1 $\Rightarrow \exists$ сит. равнов. в $\overline{\Gamma}$, т.к. усл. Т2.1.

$$\begin{cases} P, Q \text{ – вып. комп. евкл. пр-в} \\ A(p,q) \text{ – лин. по } p \Rightarrow \text{вогн. по } p \\ B(p,q) \text{ – лин. по } q \Rightarrow \text{вогн. по } q \end{cases}$$

Свойства:

Лемма 1. $(p^0, q^0)$ – сит. равнов. в смеш. страт. биматр. игры $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(i, q^0) \le A(p^0, q^0), & i = 1 \dots m \\ B(p^0, j) \le B(p^0, q^0), & j = 1 \dots n \end{cases} \quad (*)$$

(ср. с Т1.6')

Док-во:

1) $\Rightarrow$ $(p^0, q^0)$ – с.р. в смеш. страт.

очевидно

$p = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0) \Rightarrow$ 1 н-ва

2) $\Leftarrow$ $(p^0, q^0)$ – вып. $(*)$

1 н-во: $A(i, q^0) \le A(p^0, q^0)$, $i = 1 \dots m$

Рассм. $\forall p \in P$

$p_i A(i, q^0) \le p_i A(p^0, q^0)$

$\Downarrow \sum_i$

$A(p, q^0) \le A(p^0, q^0)$, $\forall p \in P$

Аналогично для $q$

Лемма док-на.

Теорема 2.2 (св-во доп. нежесткости)

$(p^0, q^0)$ – с.р. в см. стр. $\Rightarrow$

1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow A(i, q^0) = A(p^0, q^0)$

2) $q_j^0 > 0 \Rightarrow B(p^0, j) = B(p^0, q^0)$

ср. с Т1.8'

Док-во:

1) Пусть, $\exists i_1 : p_{i_1}^0 > 0$ и $A(i_1, q^0) < A(p^0, q^0)$ $| \times p_{i_1}^0$

$\forall i \ne i_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} A(i, q^0) \le A(p^0, q^0)$ $| \times p_i^0$ $\oplus$

$\Downarrow$

$$\Downarrow$$

$$\oplus\begin{cases} p^0_{i_1} A(i_1, q^0) < A(p^0, q^0)\, p^0_{i_1} \\ p^0_i A(i, q^0) \le A(p^0, q^0) \cdot p^0_i \end{cases}$$

$\Downarrow$ $A(p^0, q^0) < A(p^0, q^0) \Rightarrow$ противор.

2) 2-ое док. аналог.

Т-ма док-на.

<u>Следствие</u>. $(p^0, q^0)$ - с.р. в см. стр. $\Rightarrow$

1) $A(i, q_0) < A(p^0, q^0) \Rightarrow p^0_i = 0$

2) $B(p^0, j) < B(p^0, q^0) \Rightarrow q^0_j = 0$

<u>Теорема 2.3</u>

$(p^0, q^0)$ - с.р. в см. стр., $X = \{1 \dots m\}$, $Y = \{1 \dots n\}$ - мн-ва чист. стр.

Тогда, $\exists X^0 \subset X$, $Y^0 \subset Y$; $\exists v_1, v_2$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in Y^0} a_{ij} q^0_j = v_1, \ \forall i \in X^0 \\ \sum\limits_{j \in Y^0} q^0_j = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in X^0} p^0_i b_{ij} = v_2, \ \forall j \in Y^0 \\ \sum\limits_{i \in X^0} p^0_i = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

(ср. с Т1.10)

$\bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$ ← необяз. (ср.)

$\bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$ ← квадр. м.

<u>Док-во:</u>

1) Пусть, $X^0 = Sp(p^0) = \{ i \mid p_i > 0 \}$

$Y^0 = Sp(q^0) = \{ j \mid q^0_j > 0 \}$

$v_1 = A(p^0, q^0)$, $v_2 = B(p^0, q^0)$

Тогда справедл. (1) и (2), (т.к.)

2) $p_i^0 > 0,\ i \in X^0 \Rightarrow$ {св-во доп. нежк.} $\Rightarrow$

$\Rightarrow A(i, q^0) = A(p^0, q^0) = v_1 \Rightarrow$

$A(i, q^0) = \sum\limits_{j \in Y^0} a_{ij} q_j^0$

$\Rightarrow$ ур-е из сист. (1) ...

Т-ма док-на.

Рассм. сист. векторов:

$a^{(i)} \in E^m,\ i \in X^0,\ |X^0| \geq m+1$

<u>Опр.</u> Эта сист. вект. имеет <u>макс. аффинный ранг</u>, если вып.:

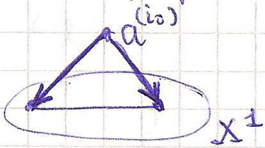
$\exists i_0 \in X^0,\ \exists X^1 \subset X^0 : i_0 \notin X^1,\ |X^1| = m \Rightarrow$

$[a^{(i)} - a^{(i_0)}],\ i \in X_1$ — ЛНЗ

Поясним опр. на пр.:

$m = 2$, $a^{(i)}$ — точки

$\exists$ макс. аф. ранг: точки не лежат на 1 прямой

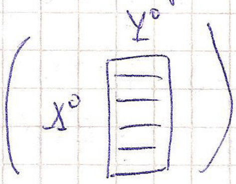



вект. — ЛНЗ

<u>Опр.</u> A находится в <u>общ. положении</u>, если

$\forall \bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$ — подматр. м. A : $|X^0| > |Y^0|$

$\Rightarrow$ сист. строк $\bar{A}$ имеет макс. аф. ранг

$\bar{A} =$ 

__Опр.__ В нах. в __общ. положении__, если вып

$\forall\, \bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0,\, j \in Y^0} \;:\; |X^0| < |Y^0| \;\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сист. столбцов имеет макс. аф. ран

$A$ – в общ. полож.

$A'$ – близка к $A$ $\Rightarrow$ $A'$ – в общ. полож.

__Теорема 2.4.__

В биматр. игре $A, B$ – в общ. полож. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, (p^0, q^0)$ – с.р. в см. стр. верно

$\exists\, X^0 \subseteq X,\ Y^0 \subseteq Y,\ \exists\, v_1, v_2$ : справ. (1) и (2

и $|X^0| = |Y^0|$.

__Док-во:__

1) Рассм. $\forall$ с.р. $(p^0, q^0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ {Т2.3} справ. (1) и (2)

2) Пусть, $|X^0| > |Y^0|$

$$A = \left( X^0 \left\{ \left[ \overbrace{\bar{A}}^{Y^0} \right]^{i^0} \right\} X^1 \right) \quad - \ \bar{A} \text{ из } (1)$$

Общ. полож. $\Rightarrow$ строки $\bar{A}$ имеют макс. аф. ран $\Rightarrow$

$\Rightarrow |X^1| = |Y^0|$

$(a_{ij} - a_{i^0 j}),\ i \in X^1, j \in Y^0$ – невыр. м.

$\Downarrow$

$$\sum_{j \in Y^0} (a_{ij} - a_{i^0 j})\, q_j^0 = 0, \quad i \in X^1$$

$|Y^0|$ ур-ий, неизв.

$\Downarrow$

$q_j^0 = 0,\ \forall j \in Y^0$ $\Rightarrow$ противор. 2 ур-ю из (1)

3) Аналог. для $|X^0| < |Y^0|$

Т-ма док-на.

Теорема 2.4'.

В $\forall$ биматр. игре $\exists$ с.р. в см. стр. $(p^0, q^0)$ :
$\exists X^0 \subseteq X$, $Y^0 \subseteq Y$, $\exists v_1, v_2$ $\Rightarrow$ вып. (1), (2),
$|X^0| = |Y^0|$

Док-во:

1) $A^k \to A$, $A^k$ - в общ. пол.
$B^k \to B$, $B^k$ - в общ. пол. $\quad k \to \infty$

2) Рассм. бим. игру с $A^k, B^k$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{T2.4\} \ \forall (p^k, q^k) \ \exists X^k \subseteq X$, $Y^k \subseteq Y$, $\exists v_1^k, v_2^k$ :
вып. (1) и (2) для $X^k, Y^k, q^k, p^k$

3) пусть, $X^k = X^0$, $Y^k = Y^0$ - подп-ть возьмем
$|X^k| = |Y^k|$

$p^k \to p^0$
$q^k \to q^0$

Тогда сист. (1) и (2)

4) Док-ем: $(p^0, q^0)$ - с.р. в см. стр.

$(*) \Rightarrow A^k(i, q^k) \le A^k(p^k, q^k)$, $i = 1 \dots m$
$B^k(p^k, j) \le B^k(p^k, q^k)$

$A^k \to A$, $p^k \to p^0$, $q^k \to p^0$
$\Downarrow$ $(*)$ для $(p^0, q^0)$, A, B

Т-ма док-на.

$X^0, Y^0, \quad |X^0| = |Y^0|$

$X^0 \subseteq X, \quad Y^0 \subseteq Y$

$\bar{A} = (a_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$ ← квадр.

$\bar{B} = (b_{ij})_{i \in X^0, j \in Y^0}$ ← подматр.

Решаем сист. (1) и (2)

$\underline{q_j^0}, j \in Y^0, \; v_1$ ← из (1) по A

$\underline{p_i^0}, i \in X^0, \; v_2$ ← из (2) по B

если $\exists \, p_i^0$ или $q_j^0 < 0$, то перех. к др. м.

иначе: $p^0 = (\underset{i \notin X^0}{0} \ldots, \underset{i \in X^0}{p_i^0}, 0, \ldots)$

$q^0 = (\underset{j \notin Y^0}{0} \ldots, \underset{j \in Y^0}{q_j^0}, 0 \ldots)$

проверяем (*):

$A(i, q^0) \le v_1 = A(p^0, q^0) \quad \forall i$

$A(p^0, j) \le v_2 = B(p^0, q^0) \quad \forall j$

Покажем: $v_1 = A(p^0, q^0)$

$\downarrow$

i-ое ур-е $\times \, p_i^0$

$\underbrace{\sum_{i \in X^0} \cancel{p_i} \sum_{j \in Y^0} p_i^0 a_{ij} q_j^0}_{= A(p^0, q^0)} = v_1$

Пусть, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \end{pmatrix}$

Найти ситуации равнов. в см. стр.:

$p = (p_1, 1-p_1)$ – 2 стратегии всего

$p^0$ – из (2) по B

$j_1, j_2 \Rightarrow \overline{B} = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{2j_2} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} \end{pmatrix}$

$(2) \Rightarrow \begin{cases} p_1^0 \cdot b_{1j_1} + (1-p_1^0)\, b_{2j_1} = v_2 \\ p_1^0 \cdot b_{1j_2} + (1-p_1^0)\, b_{2j_2} = v_2 \end{cases}$ ← реш.

если $0 \leq p_1^0 \leq 1$, то

$B(p^0, j) \leq v_2^*$, $j \neq j_1, j_2$ ← провер. (*)

⇓

$p_1 b_{1j_*} + (1-p_1)\, b_{2j_*} \leq v_2$, $\forall j \neq j_1, j_2$

если не вып., то к др. подматр.

иначе ищем $q^0$:

$q^0 = (0, \dots, \underset{\uparrow j_1}{q^*}, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow j_2}{1-q^*}, 0, \dots, 0)$

по м. A $\Rightarrow \overline{A} = \begin{array}{cc} q^* & 1-q^* \end{array}$
$\begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} \end{pmatrix}$

$(1) \Rightarrow \begin{cases} q^* a_{1j_1} + (1-q^*)\, a_{1j_2} = v_1 \\ q^* a_{2j_1} + (1-q^*)\, a_{2j_2} = v_1 \end{cases}$

↗ реш

$0 \le q^* \le 1 \Rightarrow$ нашли с.р.

графич. иллюстрация:

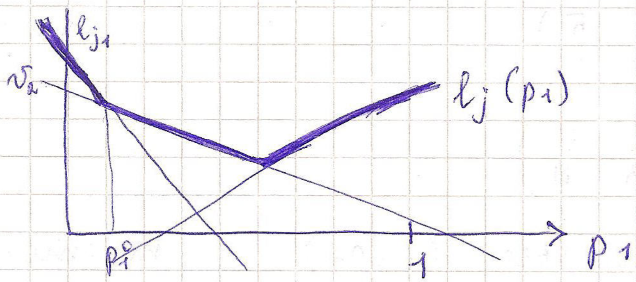
Рассм. мин. ф-ию

$$l_j(p_1) = p_1 b_{1j} + (1-p_1) b_{2j}$$

$$(2) \Rightarrow l_{j_1}(p_1^0) = l_{j_2}(p_1^0) = v_2$$

св-во доп. нежс. $\Rightarrow l_j(p_1^0) \le v_2, \; j \ne j_1, j_2 \quad (*)$

Строим сем-во прямых




берем верхн. огибающ. и точки излома

Пример:

① „Семейный спор"

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} Ф & Т \end{array} \\ \begin{array}{c} Ф \\ Т \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем реш. в смеш. стр.

для B: $\quad 2p_1^0 = 1 - p_1^0 = v_2 \quad$ (по столбц.)

$$\Downarrow \quad p_1^0 = \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow \quad p^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$v_2 = \frac{2}{3}$$

для A : $\quad q_1^0 = 2(1-q_1^0) = v_1$
(по строчкам)

$$\Downarrow \quad q_1^0 = \frac{2}{3}$$

$$\Downarrow \quad q^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$v_1 = \frac{2}{3}$$

случ. п-ть Ф и Т в тех соотнош.

если Ф, Ф или Т, Т, то идут

(к|р)!

2 . $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

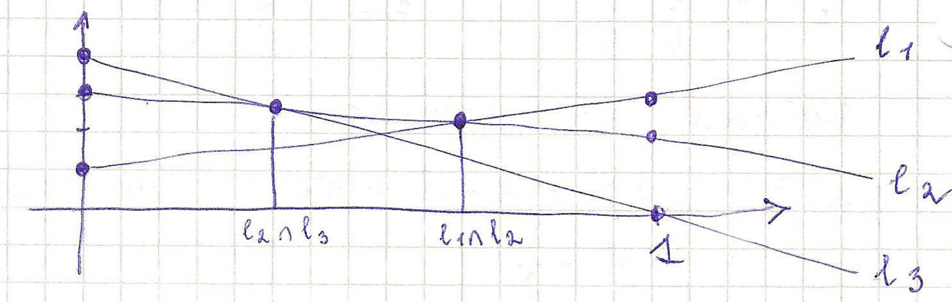
$B = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Строим прямые $l_i(p_1)$ по столбц. B

$$l_1(p_1) = 3p_1 + 1 - p_1 = 1 + 2p_1$$

$$l_2(p_1) = 2p_1 + 3(1-p_1) = 3 - p_1$$

$$l_3(p_1) = 4 - 4p_1$$




$\underline{l_2 \cap l_3}$ : $\quad 3 - p_1 = 4 - 4p_1 = v_2$

$$\Downarrow \quad p_1^0 = \frac{1}{3} \Rightarrow p^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{см. } A: \quad \begin{array}{ccc} 0 & q^* & 1-q^* \\ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right. & \boxed{\begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{array}} & \left. \right) \end{array}$$

рассм. ← по строкам

$$\begin{cases} 4q^* + 5(1-q^*) = v_1 \\ 2q^* + 1 - q^* = v_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$2q^* + 4(1-q^*) = 0$$

$$\Downarrow$$

$q^* = 2$ – за пределами => 1т. не годится

$\underline{l_1 \cap l_2}$ : $1 + 2p_1 = 3 - p_1$

$$\Downarrow$$

$$p_1^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow p^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{см. } A \quad \begin{array}{ccc} q^* & 1-q^* & 0 \\ \left( \boxed{\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{array}} \right. & & \left. \begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \right) \end{array}$$

по строкам:

$$\begin{cases} q^* + 4(1-q^*) = v_1 \\ 3q^* + 2(1-q^*) = v_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-2q^* + 2(1-q^*) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$q^* = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Ситуация равнов.

$$p^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$q^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$\boxed{15.10}$

3. (Алгоритм нах. не все ст. р.)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} q_1^0 & 1-q_1^0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} p_1 \\ 1-p_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) для B по столбцам $\Rightarrow \begin{cases} 2p_1^0 - 3(1-p_1^0) = v_2 \\ 2p_1^0 + 4(1-p_1^0) = v_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -7(1-p_1^0) = 0 \Rightarrow p_1^0 = 1 \Rightarrow \underline{p^0 = (1, 0)}$

(1) для A по строкам $\Rightarrow \begin{cases} q_1^0 - (1-q_1^0) = v_1 \\ -2q_1^0 + 4(1-q_1^0) = v_1 \end{cases} \Rightarrow q_1^0 = \frac{5}{8} \Rightarrow \underline{q^0 = \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)}$

если реш. $\begin{cases} q_1^0 - (1-q_1^0) = v_1 & (\text{т.к. } p_1^0 > 0) \\ -2q_1^0 + 4(1-q_1^0) \leq v_1 & \text{усл. } (*) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5(1-q_1^0) \leq 3q_1^0 \Rightarrow 1 \geq q_1^0 \geq \frac{5}{8}$

$\underline{p^0 = (1, 0)}$, $\underline{q^0 = (q_1^0, 1-q_1^0)}$, $\frac{5}{8} \leq q_1^0 \leq 1$

сит. равнов.

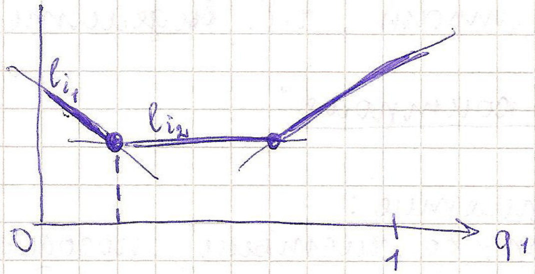
~~4~~. <u>$m \times 2$</u>

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} q_1 & 1-q_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} \end{pmatrix}$$

$q = (q_1, 1-q_1)$, $0 \leq q_1 \leq 1$

Постр. сем-во прямые:

$l_i(q_1) = a_{i1} q_1 + a_{i2}(1-q_1)$




Верхн. огибающая
+ точки излома

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} l_{i_1}(q_1^0) = v_1 \\ l_{i_2}(q_1^0) = v_1 \end{cases}$$

(2)

$$p^0 = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow i_1}{p^*}, \dots, \underset{\uparrow i_2}{1-p^*}, 0 \dots 0)$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} p^* b_{i_1 1} + (1-p^*) b_{i_2 1} = v_2 \\ b_{i_1 2} p^* + (1-p^*) b_{i_2 2} = v_2 \end{cases}$$

ср. с Т1.9.

<u>Теорема 2.5</u>

Игра A, B. Нек строка м. A доминируется вып. комбинацией ост. строк м. A.

Тогда эта строка входит с 0 вер. в нек равнов. смеш. стратегию 1ого игрока.

Если строка доминир. строго, то с 0 вер. входит в $\forall$ равнов. страт. 1ого игрока.

<u>Теорема 2.5'</u> —"—, но про м. B и столбец, 2-ого игрока

<u>Пример:</u> (в чистых стр. - осторожно)

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

(1, 1) - ! с.р. $\qquad$ (!) в B столбцы: $2 \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ вычерк. $\Rightarrow$ нет с.р.

②. Доминир. в чист. страт., ч.б. выделить одну с.р.

„Игра экологич. контроля"

Игрок 1 – предприятие:

1 страт.: пр-во „чистым" способом

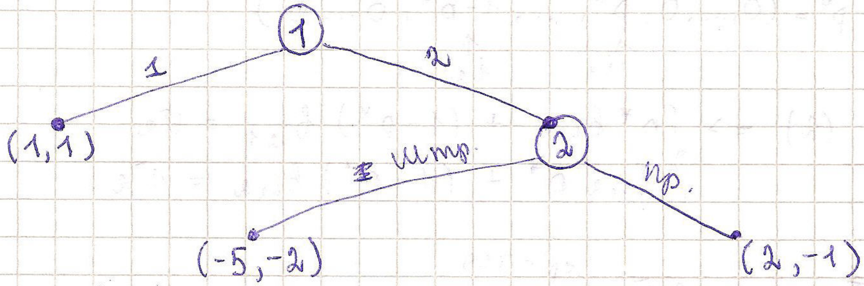
2 страт.: пр-во „грязным" способом

игра с полн. инф.

Игрок 2 – контрол. орган:

1 страт.: штрафовать шт.

2 страт: пропускать пр.




$$A = \begin{array}{c|cc} & ш & пр. \\ \hline 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$}} \\ 2 & & \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c|cc} & ш & пр. \\ \hline 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$}} \\ 2 & & \end{array}$$

С.р.: (1, Ш)

(2, Пр)

м. В: 2 столбец ≥ 1 столб. => 1 столб. вычерк.

м. А: аналог. 1 строка

⇓ (2, Пр) – с.р.

## §10. Иерархические игры 2х лиц

$x \in X$
$y \in Y$

$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$ – игра 2х лиц в норм. форме

Считаем, что $X, Y$ – компакты метр. пр-в
$F, G$ – непр. на $X \times Y$

Игра $\Gamma_1$:

1 игрок – выбир. $x \in X$, сообщ. $x$ 2ому
2 игрок – выбир. $y \in Y$, зная $x$

$x \xrightarrow{2} y$

(это одноиам. игра с полн. инф., $F \not\equiv -G$)

$x \in X$ – мн-во стратегий 1 игрока
$g: X \to Y$ – ~~мн-во~~ стратегия 2 игрока
$y = g(x)$
$\{g\}$ – мн-во стр. 2 игрока

$(x, g)$: $F(x,g) \stackrel{def}{=} F(x, g(x))$
$G(x,g) = G(x, g(x))$

$\Gamma_1 = \langle X, \{g\}, F(x,g), G(x,g) \rangle$ – игра в норм. форме

Наилучш. гарант. результат 1ого игрока
будем это искать

$x$
$y \in Y(x) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in Y} G(x,y)$ ← считаем

$Y(x) \neq \varnothing$, т.к. $G$ – непр., $Y$ – компакт
$Y(x) \subseteq Y$

гарант. выигр. 1 игр.:

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

$$F_1 = \sup_{x \in X} W(x) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

Решить игру: найти $F_1$ и $x^\varepsilon$

пусть, $\varepsilon > 0$

Опр. Страт. $x^\varepsilon$ - ε-оптим., если

$$W(x^\varepsilon) \geq F_1 - \varepsilon$$

Экономич. интерпр. $\Gamma_1$:

1 игр. - Центр → $x$ - цена на продукцию

2 игр. - Произв. продукции →

→ $y$ - кол-во произв. продукции

~~Опр.~~ Равновесие по Штакельбергу:

пусть, 2 игр. - благожелат. по отн. к 1 игр.

$$\Downarrow \quad W'(x) = \max_{y \in Y(x)} F(x, y)$$

$Y^*(x) = \operatorname{Arg}\max_{y \in Y(x)} F(x, y)$ - мн-во наил. ответов 2ого игрока

Опр. $(x^0, y^0)$ - равнов. по Шт., если

$$x^0: \ W'(x^0) = \max_{x \in X} W'(x) = F'$$

$$y^0 \in Y^*(x^0)$$

Существует ли $\max_{x \in X}$ ?

Лемма. В сделан. предположениях в игре $\Gamma_1$ $\exists$ равнов. по Штакельбергу.

Док-во:

1) $F' = \sup\limits_{x \in X} W'(x)$

$\Downarrow$

рассм. п-ть $\{x^k\}$: $W'(x^k) = \max\limits_{y \in Y(x^k)} F(x^k, y)$ $\xrightarrow{k\to\infty} F'$

2) рассм. соотв. п-ть $\{y^k\}$, $y^k \in Y^*(x^k)$

3) пусть, $x^k \to x^0$ (иначе выдел. сход. подп-ть)

$y^k \to y^0$

4) Док-ем: $y^0 \in Y^*(x^0)$

$G(x^k, y^k) \geq G(x^k, y)$, $\forall y \in Y$, $\forall k = 1, 2, \ldots$

$\Downarrow$ фикс. $y$

$G(x^0, y^0) \geq G(x^0, y)$, $\forall y \in Y$

$\Downarrow$

$y^0 \in Y^*(x^0)$

5) $F(x^k, y^k) = W'(x^k) \to F'$, $k \to \infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ {F - непр.} $F' = F(x^0, y^0)$

6) Док-ем: $F(x^0, y^0) = W'(x^0)$, т.е. $y^0 \in Y^*(x^0)$

~~Кроме~~, $y^0 \in Y(x^0)$

Пусть, $y^0 \notin Y^*(x^0) \Rightarrow \exists\, y' \in Y(x^0)$: $\underbrace{F(x^0, y')}_{\leq \max\limits_{y \in Y(x^0)} F(x,y)} > \underbrace{F(x^0, y^0)}_{F'}$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $y^0 \in Y^*(x^0)$

Лемма док-на.

Пример:

1. (к/р!)

$$Г: \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \underline{7} & 4 & 3 \\ \underline{7} & \underline{7} & 3 \\ -1 & \underline{1} & \underline{1} \end{pmatrix}$$

Решить $Г_1$.

$$F_1 = \max_{1 \le i \le 3} \min_{j \in Y(i)} a_{ij}, \qquad Y(i) = \operatorname{Arg}\max_{1 \le j \le 3} b_{ij}$$

$$W(i) = \min_{y \in Y(i)} a_{ij}$$

$i = 1 \Rightarrow Y(1) = \{1\}$
$i = 2 \Rightarrow Y(2) = \{1, 2\}$
$i = 3 \Rightarrow Y(3) = \{2, 3\}$

$W(1) = 3$
$W(2) = 3$ $\Rightarrow$ $\underline{i^0 = 1, 2}$ – оптим. стратегии
$W(3) = -5$ $\qquad \underline{F_1 = 3}$

Найдем равнов. по Ш.:

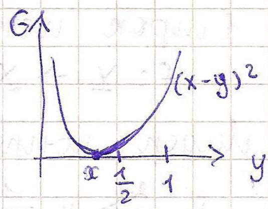
$$W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$W'(1) = 3$
$W'(2) = 4$ $\Rightarrow$ $F' = 4$
$W'(3) = 4$

Равнов. по Ш: $(i^0, j^0) = (2, 1)$
$\qquad (3, 3)$

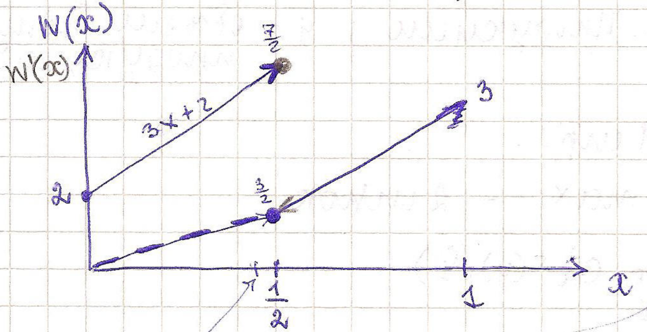
② .

$$\begin{cases} F(x,y) = 3x + 2y \\ G(x,y) = (x-y)^2 \\ X = [0,1], \quad Y = [0,1] \end{cases}$$




$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} (3x + 2y)$$

$$Y(x) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \{0, 1\}, & x = \frac{1}{2} \\ \{0\} & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$




$F_1 = \frac{7}{2}$

sup не достиг.

$x^{\varepsilon} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$

$$W(x^{\varepsilon}) = 3x^{\varepsilon} + 2 = \frac{7}{2} - \varepsilon$$

Равнов. по Шт.:

$(x^0, y^0) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

## Игра $\Gamma_2$:

1 игрок - выбир. $x$, зная $y$

1 игрок исп. ф-цию ответа:

$f: Y \to X$, $x = f(y)$

Лидер по-прежнему 1 игрок:

$f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$

Эконом. интерпр.:

1 игр. - центр, $x$ - размер премии

2 игр. - произв. продукции, $y$ - объем выпуск. продукции

Гарант. выигр. 1 игр.:

$G(f(y), y) \to \max$ - 2 игрок

$Y(f) = \operatorname{Argmax}_{y \in Y} G(f(y), y)$

$y \in$

$f(y)$ - как правило, разрывная

$\Downarrow$

может $Y(f) = \varnothing$

если $Y(f) = \varnothing$, то 2 игрок выбирает $\forall y$,

т.е. нельзя предугадать его повед.

$\Downarrow$

$$\tilde{Y}(f) = \begin{cases} Y(f), & Y(f) \neq \varnothing \\ Y, & Y(f) = \varnothing \end{cases}$$

$$W(f) = \inf_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y)$$

$F_2 = \sup_{f \in \{f\}} W(f)$ - наил. гаран. рез. 1 игр. в игре $\Gamma_2$

Опр. $\varepsilon > 0$, $f^{\varepsilon}$ - $\varepsilon$-оптим. страт., если
$$W(f^{\varepsilon}) \geq F_2 - \varepsilon.$$
Если $\varepsilon = 0$, то это просто оптим. страт.

Избавимся от $\sup\limits_{f \in \{f\}} \ldots$

$\mathfrak{X}(y) = \mathrm{Arg}\max\limits_{x \in \mathfrak{X}} F(x, y)$ - мн-во наил. ответов 1игр.

$\mathfrak{X}^*(y) = \mathrm{Arg}\max\limits_{x \in \mathfrak{X}(y)} F(x, y)$ - —"—, благожел. по отнош. ко 2 игр.

Рассм. стратегию 1игр:
$\underline{f^*}$: $f^*(y) \in \mathfrak{X}^*(y)$, $\forall y \in Y$

$G(f^*(y), y)$ - достиг. $\max\limits_{y \in Y}$ (т.к. лемма 2)

$\underline{G_2} = \max\limits_{y \in Y} \min\limits_{x \in \mathfrak{X}} G(x, y)$

Опр. $f^н$ - страт. наказания, если
$$G(f^н(y), y) = \min_{x \in \mathfrak{X}} G(x, y)$$

$\underline{E} = \mathrm{Arg}\max\limits_{y \in Y} \left[\min\limits_{x \in \mathfrak{X}} G(x, y)\right]$ - все max min. страт. 2 игр., при усл. наказ.

$\underline{\mathcal{D}} = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \times Y \mid G(x, y) > G_2\}$

$$\underline{K} = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y) \in \mathcal{D}} F(x, y), & \mathcal{D} \neq \varnothing \\ -\infty, & \mathcal{D} = \varnothing \end{cases}$$

Если $G \equiv \mathrm{const}$, то $\mathcal{D} = \varnothing$

$\underline{M} = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y)$

Теорема 2.6 (Гермейер)
Наил. гаран. рез. 1 игр. в игре $\Gamma_2$ при сдел. предполож.:

$$F_2 = \max[K, M]$$

(будут получ. оптим. страт.)

$\exists (x^0, y^0) \in D \cap \operatorname{Arg}\max_{(x,y) \in X \times Y} F(x, y)$

$\Downarrow$

$K = \max_{(x,y) \in X \times Y} F(x, y) = F_2$ ?

↑абсол. максимум

Док-во т-мы:

I) Укажем $\varepsilon$-опт. страт., к гарантирует получ. $W(f^\varepsilon) \geq \max[K, M]$

II) покажем: $\forall f \in \{f\} \Rightarrow W(f) \leq \max[K, M]$

I. 1) $\underline{K > M} \Rightarrow$

$\Rightarrow D \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0 \; f^\varepsilon : W(f^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$ – надо построить

$K = \sup_{(x,y) \in D} F(x, y)$

рассм. $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D : F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$

постр. $f^\varepsilon$: $\boxed{f^\varepsilon(y)} = \begin{cases} x^\varepsilon, & \text{если } y = y^\varepsilon \\ f^H(y), & \text{если } y \neq y^\varepsilon \end{cases}$

Покажем: $W(f^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$

2 игр: $f^\varepsilon(y) \to$ в G

если $y = y^\varepsilon$, то $G(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \xrightarrow{} G_2$ – выигр. 2 игр

если $y \neq y^\varepsilon$, то $G(f^H(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y) \leq G_2$

$\Downarrow$

$\max G(f^\varepsilon(y), y)$ достиг. в $y = y^\varepsilon$

$\Downarrow$ $Y(f^\varepsilon) = \{y^\varepsilon\}$

Гар. выигр. 1 игр.:

$$W(f^\varepsilon) = \inf_{y \in Y(f^\varepsilon)} F(f^\varepsilon(y), y) = F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon.$$

2) $\underline{M \geq K}$

Постр. $f^0$: $W(f^0) \geq M$

$$\boxed{f^0} = \begin{cases} f^*(y), & \text{если } y \in E \\ f^н(y), & \text{если } y \notin E \end{cases}$$

2 игр.: $G(f^0(y), y)$

если $y \notin E$, то $\overset{\text{выигр. 2 игр.}}{G(f^н(y), y)} = \min\limits_{x \in X} G(x, y) < G_2$

если $\underline{y \in E}$, то $G(f^*(y), y) \geq \min\limits_{x \in X} G(x, y) = \underset{\substack{y - \max\min \\ \text{стратег.} \\ \text{для 2 игр}}}{G_2}$

$\swarrow$

$E$ - комп., из Л2 $G$ достиг. $\max$

$\Downarrow$ $Y(f^0) = \operatorname{Arg}\max\limits_{y \in E} G(f^*(y), y) \subseteq E$

$$W(f^0) = \inf_{y \in Y(f^0)} F(f^0(y), y) \geq \inf_{y \in E} F(f^*(y), y) \geq$$

$$= \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M$$

I док-на.

II. $\forall f$, покажем: $W(f) \leq \max[K, M]$

$$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) \geq \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y) = G_2$$

1) $\underbrace{\sup_{y \in Y} G(f(y), y) > G_2}$

Док-ем: $\exists y^0 \in \tilde{Y}(f)$: $(f(y^0), y^0) \in D$

Если sup не достигается, то $\tilde{Y}(f) = Y \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists y^0$ из опр. sup : $G(f(y^0), y^0) > G_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (f(y^0), y^0) \in D$

Если sup достиг., то берем $y^0 \in Y(f) \Rightarrow$
$\Rightarrow G(f(y^0), y^0) > G_2 \Rightarrow (f(y^0), y^0) \in D$

Тогда, $\underline{W(f)} = \inf\limits_{y \in \tilde{Y}(f)} F(f(y), y) \leq$

$\leq F(\underbrace{f(y^0), y^0}_{\in D}) \leq K \leq \underline{\max[K, M]}$

2) $\underline{\sup\limits_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2}$

$\forall y \in E$. Покажем: $y \in Y(f)$, т.е. $E \subseteq Y(f)$

$G_2 = \min\limits_{x \in X} G(x, y) \leqq G(f(y), y) \leqq$

$\leqq \sup\limits_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$

$\Downarrow$ sup достиг. $\forall y \in E$

$W(f) = \inf\limits_{y \in Y(f)} F(f(y), y) \leq \inf\limits_{y \in E} F(f(y), y) \leq$

$\leq \min\limits_{y \in E} \max\limits_{x \in X} F(x, y) = M \leq \max[K, M]$

Т-ма док-на.

(!) $f^\varepsilon$, $f^0$ - оптим. стратегии

Пример:

(1) (к/р!)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\max\limits_{1\le i\le 3} a_{ij}$: 7  6  ~~8~~

$\min\limits_{1\le i\le 3} b_{ij}$: 4  4  3

$\mathcal{D}$

Решить игру $\Gamma_2$.

$$G_2 = \max_{1\le j\le 3} \min_{1\le i\le 3} b_{ij} = 4$$

~~$\min\limits_{1\le i\le 3}$~~ $E = \{1, 2\}$

$\mathcal{D} = \{(i,j) \mid b_{ij} > G_2 > 4\}$ см. матрицу B

$$K = \max_{(i,j)\in\mathcal{D}} a_{ij} = 4$$

$$M = \min_{j\in E} \max_{1\le i\le 3} a_{ij} = 6 > K = 4 \Rightarrow \boxed{F_2 = 6}$$ см. матр. A

т.е. minmax для м. $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

Выпишем оптим. страт.:

$M \ge K$ – 2) случай из т-мы

$$f^0(j) = \begin{cases} 3, & \text{если } j = 1 \in E \\ 1, & \text{если } j = 2 \in E \\ 1(2), & \text{если } j = 3 \notin E \end{cases}$$

3 строка в 1 столбце A

1 строка во 2 столб. A

min в 3 столбце B $\Rightarrow$

$^*\Rightarrow$ 1 или 2

~

Если $A = \begin{pmatrix} \cdot & -6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ тоже самое, но

$M = 3 < K = \underbrace{4 = F_2}$

Реал. $F_2$ в $a_{33}$ например: $(i^0, j^0)$: $a_{i^0 j^0} = \max\limits_{(i,j)\in\mathcal{D}} a_{ij}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$f^0(j) = \begin{cases} 3 & \text{, если } j = 3 \\ 3 & \text{, если } j = 1 \quad \text{наим. в 1 столбце } B \\ 1 & \text{, если } j = 2 \quad \text{наим. во 2 столб. } B \end{cases}$$

Найти $W(f^0)$:

$\Rightarrow Y(f^0) = \{3\}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} \vdots & 4 & \vdots \\ 4 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$ $\qquad \max\limits_{1 \le j \le 3} b_{f^0(j) j} \Rightarrow j = 3$

$W(f^0) = 4$

см. 1 строку опр. $f^0(j)$

$4 = a_{33}$

②. $F(x, y) = 3x + 2y$

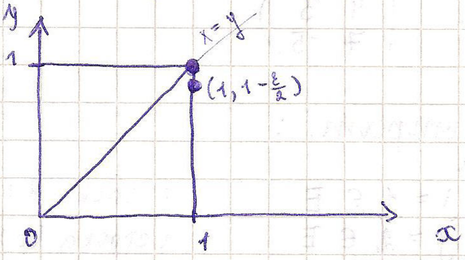
$G(x, y) = (x - y)^2$

$X = Y = [0, 1]$

Решить игру $\Gamma_2$.

$$G_2 = \max_{0 \le y \le 1} \underbrace{\min_{0 \le x \le 1} (x - y)^2}_{\text{дост. при } y = x \; = 0} = 0$$

$f^н(y) = y$ – страт. наказания




$$D = \{(x, y) \mid \underset{G(x,y)}{(x - y)^2} > 0 = G_2\} = \{(x, y) \mid x \ne y\}$$

$$K = \sup_{(x,y) \in D} (3x + 2y) = 5 = F_2$$

$\uparrow$ т. к. абсол. max

$\varepsilon > 0$, $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = (1, 1 - \frac{\varepsilon}{2})$

$$F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) = 3 + 2(1 - \frac{\varepsilon}{2}) = 5 - \varepsilon$$

$\Downarrow$ $f^{\varepsilon}(y) = \begin{cases} 1 & , y = 1 - \varepsilon/2 \\ y & , y \neq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ ← страт. наказ.

Игра $\Gamma_2$ – распр. в политике.

# Глава III. Теория принятия решений.



ЛПР – лицо, принимающ. реш.
выбрать $x \in X$
есть нек неопределенность

~~§11. Многок~~

## §11. Задача многокритериальной оптимизации.

$$W(x) = (W_1(x), \dots, W_s(x))$$

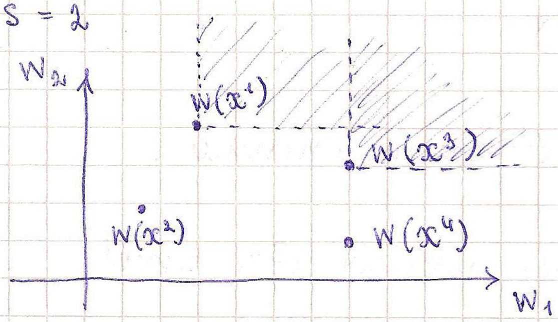
$W_i(x)$ – частный критерий
$\forall i \ W_i(x) \to \max$ – желательно

Как правило:
$$\nexists\, x^0 \in X : \ x^0 \in \operatorname*{Argmax}_{x \in X} W_i(x), \quad i = 1 \dots s$$

Пример:

$X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$

$S = 2$




$$W(x^1) = (W_1(x^1), W_2(x^1))$$

$$\operatorname*{Argmax}_{x \in X} W_1(x) = \{x^3, x^4\}$$

$$\operatorname*{Argmax}_{x \in X} W_2(x) = \{x^1\}$$

**Опр.** $x^0 \in X$ – <u>оптим. по Парето</u>, если

$$\nexists\, x \in X: \quad W_i(x) \geq W_i(x^0), \quad i = 1, \dots, s$$

$$W(x) \neq W(x^0)$$ (т.е. хотя бы 1 н-во строгое)

<u>$P(X, W)$</u> – мн-во всех стратегий, оптим. по Парето

В примере $P(X, W) = \{x^1, x^3\}$

проверим $x^1$: рассм. $\{W \in E^s \mid W_i \geq W_i(x^1)\}_{i=1 \dots s}$
(границы включ. в обл.)

**Опр.** $x^0 \in X$ – <u>оптим. по Слейтеру</u>, если

$$\nexists\, x \in X: \quad W_i(x) > W_i(x^0), \quad i = 1, \dots, s$$

<u>$S(X, W)$</u> – мн-во всех стратегий, оптим. по Слейтеру

В примере $S(X, W) = \{x^1, x^3, x^4\}$
(границы исключ. из обл.

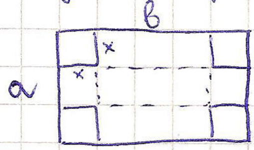
**Утв.** $P(X, W) \subseteq S(X, W)$

Использ. задач многокрит. оптим.:

1) экономика
2) проектир. сложн. технич. объектов

<u>Пример</u>:

(Задача проектир. коробки)



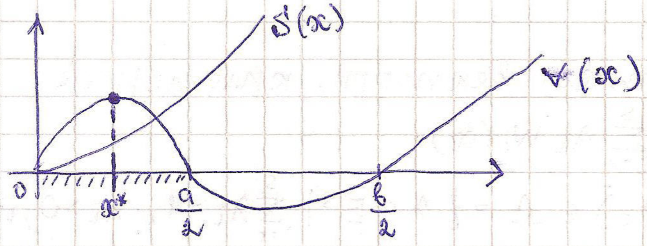

$a < b$

$x \in X = (0, \frac{a}{2})$

1 крит. : $V(x) = x \cdot (a - 2x)(b - 2x)$

2 крит. : $S(x) = 4x^2$ (сэкономлен. материал)

Найдем $P(X, W)$ :




$x^* = \ldots$

если $x < x^*$, то $x \notin P(X, W)$

если $x \geq x^*$, то $x \in P(X, W)$

т.е. $P(X, W) = [x^*, \frac{a}{2})$

$W(x) = (V(x), S(x))$

Реш. з. многокрит. оптим. :

1) $P(X, W)$, $S(X, W)$

2) надо сузить эти мн-ва :

$P' \subset P(X, W)$

$S' \subset S(X, W)$

При каких усл. $P(X, W) \neq \varnothing$ ?

Теорема 3.1

Пусть, $X$ - компакт метрич. пр-ва, $W_i(x)$, $i=1\dots s$ - непр. на $X$.

Тогда, $P(X, W) \neq \emptyset$. $\quad (\Rightarrow S(X, W) \neq \emptyset)$

Док-во:

1) Рассм. свертку векторн. критерия:

$$\underbrace{F_1(\lambda, x)} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x)$$

$$\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_s) \in \Lambda = \{ \lambda \in E^s \mid \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ i=1\dots s\}$$

↑ „важность критерия"

2) Рассм. мн-во:

$$\underbrace{X_1(\lambda)} = \operatorname{Arg}\max_{x \in X} F_1(\lambda, x)$$

Док-ем: $X_1(\lambda) \subseteq P(X, W)$

3) $\exists x' \in X_1(\lambda) \setminus P(X, W)$ ← пусть

$\Downarrow$ $\exists x \in X: \ W_i(x) \geq W_i(x')$, $i = 1 \dots s$
$W(x) \neq W(x')$

$\Downarrow$ $\lambda_i W_i(x) \geq \lambda_i W_i(x')$, $\quad \lambda \in \Lambda$

$\Downarrow \Sigma$ $F_1(\lambda, x) \overset{!}{>} F_1(\lambda, x') \Rightarrow$

$\Rightarrow$ противор. $(x' \in X_1(\lambda)) \Rightarrow$

$\Rightarrow X_1(\lambda) \subseteq P(X, W)$

Т-ма док-на.

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_1(\lambda) \subseteq P(X, W)$$

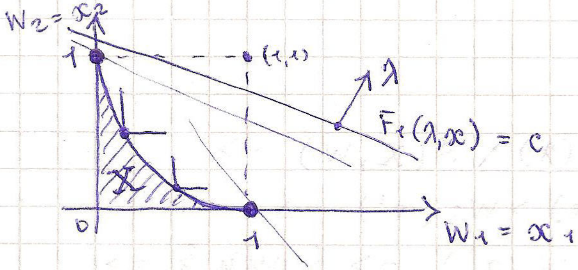
↗ выполнено ли „="?

Если задача невып.;
то = не выполн.
(см. пример)

Пример:

$S = 2, \quad x = (x_1, x_2)$

$W(x) = (W_1(x), W_2(x)) = (x_1, x_2) = x$




(дыра окружн.)

$X$ - невыпуклое

$P(X, W)$ - дыра окружн.

$F_1(\lambda, x) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

$\Downarrow$ $X_1(\lambda) \subseteq \{(1,0), (0,1)\}$

~~~

Рассм. свертку:

$\underline{F_2(\lambda, x)} = \min\limits_{1 \le i \le S} \lambda_i W_i(x)$

$\lambda \in \Lambda$, $W_i(x) > 0$, $\forall x \in X$, $\forall i = 1 \dots S$
(будем считать)

Утв. Если $W_i(x) + \underset{>0}{C_i}$, то нов. вект. критерий $W^1(x)$: $P(X, W) = P(X, W^1)$

(док-ть)

Рассм. мн-во:

$\underline{X_2(\lambda)} = \operatorname{Argmax}\limits_{x \in X} F_2(\lambda, x)$
~~~

## Теорема 3.2

$W_i(x),\ i=1\ldots s$ $\overset{W_i(x)>0}{}$ – непр. на комп. $X$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_2(\lambda) = S(X,W) \qquad (1)$$

### Док-во:

1) ~~$\forall\lambda\in\Lambda$~~

пусть, $\exists x' \in X_2(\lambda) \setminus S(X,W) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in X : W_i(x) > W_i(x') \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_i W_i(x) > \lambda_i W_i(x') \Rightarrow \{\min_i\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \min\limits_{1\le i\le s} \lambda_i W_i(x) > \min\limits_{1\le i\le s} \lambda_i W_i(x') \Rightarrow$

$\Rightarrow F_2(\lambda, x) > F_2(\lambda, x') \Rightarrow$

$\Rightarrow$ противор. $(x' \in X_2(\lambda)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\lambda\in\Lambda : X_2(\lambda) \subseteq S(X,W) \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_2(\lambda) \subseteq S(X,W)$

2) Док-ем: $S(X,W) \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_2(\lambda)$

т.е. $\forall x^0 \in S(X,W)\ \exists \lambda^0 \in \Lambda : x^0 \in X_2(\lambda_0)$

$\Downarrow$

Рассм. $\lambda^0$: $\lambda_i^0 = \dfrac{1}{W_i(x^0)} \cdot \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{1}{W_k(x^0)}} > 0$

Рассм. $\forall x \ne x^0$ $(x\in X)$

$x^0 \in S(X,W) \Rightarrow \exists i_1 : W_{i_1}(x) \le W_{i_1}(x^0)$

$F_2(\lambda^0, x) = \min\limits_{1\le i\le s} \lambda_i^0 W_i(x) \le \lambda_{i_1}^0 W_{i_1}(x) \le$

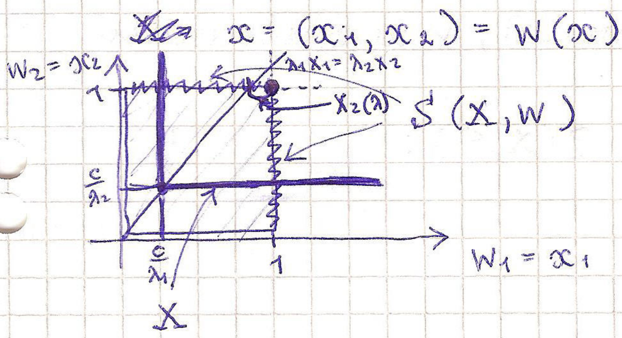
$\le \lambda_{i_1}^0 \cdot W_{i_1}(x^0) = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=1}^{s} \dfrac{1}{W_k(x^0)}} = \min\limits_{1\le i\le s} \lambda_i^0 W_i(x^0) = F_2(\lambda^0, x^0)$ ← не зав. от $i$

$\Rightarrow \underbrace{S(X,W) \subseteq \cup X_2(\lambda)}$

Т-ма док-на.

Может быть: $X_2(\lambda) \notin P(X,W)$

<u>Пример</u>:




$P(X,W) = \{(1,1)\}$

$F_2(\lambda, x) = \min\{\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2\} = C$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

Построим линию уровня

если $\lambda_2 x_2 < \lambda_1 x_1$, то лин. ур. $\lambda_2 x_2 = C$

если $\lambda_2 x_2 > \lambda_1 x_1$, то лин. ур. $\lambda_1 x_1 = C$

~

Исп. еще свертку:

$F_2(\lambda, X) + \alpha F_1(\lambda, x)$, $\alpha > 0$

Как строить $P(X,W)$, $S(X,W)$?

Часто $X$ – конечно

Будем считать, $X = \{x^1 \dots x^n\}$

$x^3$ – „лучше" $x'$, если $W_i(x) \geq W_i(x')$, $i = 1 \dots s$
в смысле $W(x) \neq W(x')$ (1)
Парето

т.е. $x \succsim x'$

„строго лучше" $x \succ x'$

$П$ – мн-во стратегий, $\gamma$ не сравнимы между собой.

Алгоритм нахож. $P(X, S)$:

①. $П := \{x^1\}$

⋮

ⓚ. $П^*$

шаг (k+1). рассм. $x^{k+1}$
сравнив. $x^{k+1}$ со страт. из $П$ =>

а) $\exists x \in П : x^{k+1} \succsim x$ =>
=> отбрас. худшие страт. => $П'$ =>
=> $П := \{x^{k+1}\} \cup П'$

[если $\exists x' \in П' : x' \succsim x^{k+1} \succsim x$ =>
=> $x' \succsim x$ => противор. ($x'$ и $x$ – несравн.)]

б) $\exists x \in П : x \succsim x^{k+1}$ => отбрас. $x^{k+1}$,
мн-во $П$ не меняется

в) $x^{k+1}$ несравнимо с $\forall x \in П$ =>
=> $П := \{x^{k+1}\} \cup П$

и т.д.
шаг ⓝ ...

$\Downarrow$
$P(X, W) = П$ (док-ть)

Этот алгоритм эффективный, т.к. это неполный перебор.

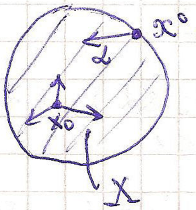
Аналогично для $S(X, W)$, но нер. „$\geq$"

~ часто $X$ – сист. огранич. в евкл. пр-ве

$\Downarrow$ можно ~~то~~ также задать $P(X, W)$

Пусть, $X$ – выпукл. мн-во в евкл. пр-ве
$X \subset E^m$

<u>Опр.</u> $x^0 \in X$, $\alpha \in E^m$
$\alpha$ задает в т. $x^0$ <u>возможн. направление</u>, если $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^0 + \varepsilon \alpha) \in X$




$\alpha$ – $\forall$ напр., ведущ. во внутрь круга, явл. возможн.

$\underbrace{\mathcal{L}(x^0)}$ – мн-во всех возм. напр. в т. $x^0$.

<u>Теорема 3.3.</u>
Пусть, $X$ – выпукл. компакт в евкл. пр-ве, $W_i(x)$ – вогнут. на $X$, непр. диф. в $\overset{\text{откр.}}{D} \supset X$.
Тогда, $x^0 \notin S(X, W) \Leftrightarrow \exists$ ~~...~~ $\alpha \in \mathcal{L}(x^0)$ :

(2) $\quad (W_i'(x^0), \alpha) > 0, \ \forall i = 1 \dots s$

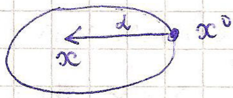
градиент

<u>Док-во</u>:

1) $(\Rightarrow)$ $x^0 \notin S(X, W) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x \in X : W_i(x) > W_i(x^0), \ i = 1 \dots s$

$0 < W_i(x) - W_i(x^0) \underset{\substack{\text{диф.}\\\text{вогнут.}\\\text{ф-ии}}}{\leq} (W_i'(x^0), x - x^0)$

$\alpha = x - x^0 \Leftrightarrow$



$\varepsilon_0 = 1$

$\forall \varepsilon \in (0, 1] \Rightarrow (x^0 + \varepsilon(x - x^0)) =$
$= ((1-\varepsilon)x^0 + \varepsilon x) \in X$

т.к. $X$ – вып.

$\Downarrow$

напр. $\alpha$ явл. возможн.

$\Downarrow$

(2)

2) ($\Leftarrow$) для $x^0 \in X$ вып. (2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathcal{L}(x^0) : (W_i'(x^0), \alpha) > 0$$

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \Rightarrow x^0 + \varepsilon\alpha \in X$$

$$W_i(x^0 + \varepsilon\alpha) - W_i(x^0) \overset{\text{ф-ла Лагранжа}}{=} (W_i'(x^0 + \theta_i \cdot \varepsilon\alpha), \varepsilon\alpha) =$$

$$0 < \theta_i < 1$$

$$= \varepsilon \underbrace{(W_i'(x^0 + \theta_i \cdot \varepsilon\alpha), \alpha)}_{\to (W_i'(x^0), \alpha) > 0} > 0, \quad \forall i = 1 \ldots S$$

$\varepsilon \to 0+$

$$x^0 + \alpha\varepsilon \in X, \quad x^0 + \varepsilon\alpha \succ x^0 \Rightarrow x^0 \notin S(X, W)$$

Т-ма док-на.

<u>Замечание.</u>

Пусть, $W_i(x)$ – строго вогн.

Тогда, $S(X, W) = P(X, W)$

<u>Док-во:</u>

1) $S(X, W) \supseteq P(X, W)$ (из опр.)

2) Пусть, $\exists x' \in S(X, W) \setminus P(X, W) \Rightarrow$

если $\Rightarrow \exists x \in X : W_i(x) \geq W_i(x'), \; i = 1 \ldots S$

$W(x) \neq W(x')$

Рассм. $\frac{x+x'}{2} \in X$

$$W_i\left(\frac{x+x'}{2}\right) \underset{\text{стр. вогн.}}{>} \frac{W_i(x)+W_i(x')}{2} \geqslant W_i(x'),\ \forall i$$

$\Downarrow$

$\frac{x+x'}{2} \succ x'$ => противор. $x' \in S(X,W)$

Зам. док-но.

<u>Пример</u>:

$$X = \{x \in E^m \mid \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \leq 1\}$$

пусть, $K = \{1, \dots, m\}$ | $x^0: \sum_{k=1}^{m} (x_k^0)^2 < 1$

$\forall J \subseteq K$ опр. критерий:

$$W_J(x) = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{m} x_k^2} - \sum_{k \in J} x_k + \sum_{k \notin J} x_k$$

Всего $2^m$ критериев

Найти стратегии, оптим. по Парето.

Док-ем: $\sqrt{1-\Sigma x_k^2}$ - строго вогнут.

...

$$\frac{\partial W_J(x^0)}{\partial x_k} = \frac{-x_k^0}{\sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2}} \pm 1$$

-1, если $k \in J$
+1, если $k \notin J$

$x^0$ - внутр., => $\forall$ напр. явл. возможн.

Рассм. также мн-во возм. напр.:

$$\mathcal{L}(x^0) = \{\alpha \in E^m \mid \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| = 1\}$$

$\exists \alpha \in \mathcal{L}(x^0)$:

$$(W_J'(x^0), \alpha) = \frac{-(x^0, \alpha)}{\sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2}} - \sum_{k \in J}\alpha_k + \sum_{k \notin J}\alpha_k > 0 \quad (2)$$

$\forall J \subseteq K$

Рассм. $J^0 = \{k \mid \alpha_k \geq 0\}$

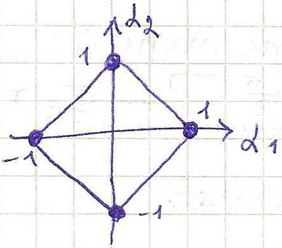
$$\Downarrow \quad -\sum_{k\in J^0}\alpha_k + \sum_{k\notin J^0}\alpha_k = -\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k| = -1$$

$$-\sum_{k\in J}\alpha_k + \sum_{k\in J}\alpha_k \geq -\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k| = -1$$

$$x^0 \notin \overset{P}{S}(X,W) \iff \exists\, \alpha \in \mathcal{L}(x^0):\ -\frac{(x^0,\alpha)}{\sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2}} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x^0,\alpha) > \sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2} \iff \max_{\alpha}\left[-(x^0,\alpha)\right] > \sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2} \qquad (*1)$$

если $m = 2$




$J(x^0) = \{\bullet\}$

$$-(x^0,\alpha) \leq \max_{1\leq j\leq m}|x_j^0| \underbrace{\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k|}_{=1} = \max_{1\leq j\leq m}|x_j^0| \overset{\text{пусть}}{=} |x_l^0|$$

$$\Downarrow \quad -(x^0,\alpha) \leq |x_l^0|,\ \forall \alpha \in \mathcal{L}(x^0)$$

↑достиг. при $\alpha = (0\ldots 0, \underset{\uparrow l}{\pm 1}, 0\ldots 0)$

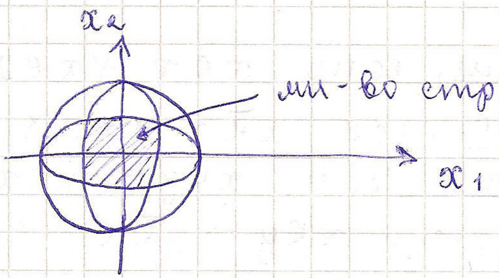
$$(*1) \iff \max_{1\leq j\leq m}|x_j^0| > \sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2}$$ условие непринадл.

$$x^0 \in S(X,W) \iff \max_{1\leq j\leq m}|x_j^0| \leq \sqrt{1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2} \iff$$

$$\Downarrow \iff x^0 \in S(X,W) \iff |x_j^0|^2 \leq 1-\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2,\ \forall j = 1\ldots m$$

система эллипсоидов

$m = 2$

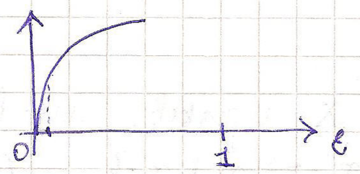



$$\begin{cases} 2(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 \le 1 \\ (x_1^0)^2 + 2(x_2^0)^2 \le 1 \end{cases}$$

$$x^0 : \sum_{k=1}^{m} (x_k^0)^2 = 1$$

Рассм. точки $(1-\varepsilon)x^0$:

$$W_y((1-\varepsilon)x^0) = \sqrt{1 - (1-\varepsilon)^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{m}(x_k^0)^2}_{=1}} + \ldots$$




<u>Общая задача принятия решений</u>:

ЛПР выбир. $x \in X$

<u>Опр.</u> <u>Бинарн. отнош.</u> на $X$ называв. $R \subseteq X \times X$

$(x, x') \in R$ – $x$ либо лучше $x'$,
либо нехуже $x'$

$\downarrow$

$x R x'$

$(x, x') \notin R \iff x \overline{R} x'$

~~Опр. RR нек~~

**Опр.** $R$ называется

а) **рефлексивным**, если $xRx \ \forall x \in X$ $(2 \geq 2)$

б) **антирефлекс.**, если $x\bar{R}x \ \forall x \in X$ $(>$ между чисел.$)$

в) **симметричн.**, если $xRy \Rightarrow yRx$ $(x = y)$

г) **асимметр.**, если $xRy \Rightarrow y\bar{R}x$ („строго лучше")

д) **транзитивн.**, если $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$

е) **ацикличным**, если $\nexists\, x^1, \dots, x^k$ :

$$x^1 R x^2 R \dots R x^k R x^1$$

**Тв.** $R$ – асимм. $\Rightarrow$ $R$ – антирефлекс.

$xRx \Rightarrow x\bar{R}x$ – противор.

**Утв.** $R$ – антирефлекс. и транзит. $\Rightarrow$ $R$ – ацикличн.

(док-ть)

**Опр.** **Ядро** бинар. отн. $R$ на $X$ называется мн-во

$$C(X, R) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\} \qquad (1)$$

Если $R$ – **асим.**, то

$$C(X, R) = \{x' \in X \mid \nexists x : xRx'\} \qquad (2)$$

**Утв.** Если $R$ – асим., то (1) и (2) совпад.

**Док-во:**

1) $x' \in (1)$

пусть, $x' \notin (2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x \in X : xRx' \Rightarrow \{\text{асимм.}\}\ x'\bar{R}x$

$\Downarrow x' \in (1)$

$x'Rx$

$\Downarrow$ противор. $\Rightarrow$ $x' \in (2)$

2) $x' \in (2)$ =>

=> $\nexists x : x R x'$ => в (1) $x R x'$ - ложно =>

=> импликация всегда верна => $x' \in (1)$

Утв. док-но.

Пример:

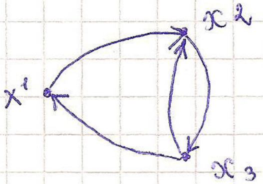
1. $W(x)$

бин. отн. $\succcurlyeq$, $\succ$ - асим., транзит.

$$P(X, W) = C(X, \succcurlyeq)$$

$$S(X, W) = C(X, \succ)$$

2. $X = \{x^1, x^2, x^3\}$



т.е. $x^1 R x^2 \leftrightarrow$

не явл. асимметр. ; т.к. $x^2 R x^3$
$x^3 R x^2$

Исп. опр. (1):

$C(X, R) = \{x^3\}$

?

$x^1 \notin C(X, R)$, т.к.
$x^3 R x^1$, обратн. неверно
т.е. $x^1 \bar{R} x^3$

Упр. $X$ - конечное, $R$ - ~~транзит.~~, ацикличн. =>
=> $C(X, R) \neq \varnothing$

(док-ть)

Приложения задачи:

①. $P' \subset P(X, W)$

Пример:

| | мат. | лит-ра |
|---|---|---|
| $x^1$ | 3 | 5 |
| $x^2$ | 5 | 4 |

1) М равноцен. Л
Как сравнить?

Рассм. гипотет. $x^3 | 4 | 5$ =>

=> $x^2$ учится, как $x^3$
$x^3$ лучше $x_1$ } =>

=> $x^2$ лучше $x_1$

2) Л важнее М

Рассм. гипот. $x^3 | 4 | 5$

$x^3$ лучше $x^2$

сравнение невозм.

3) М важнее Л

$x^2$ лучше $x^3$
$x^3$ лучше $x^1$ } => $x^2$ лучше $x^1$

Опр. $W_i(x)$ и $W_j(x)$ – однородные, если

$$\max_{x \in X} W_i(x) = \max_{x \in X} W_j(x)$$

$$\min_{x \in X} W_i(x) = \min_{x \in X} W_j(x)$$

(т.е. диапазон измен. частн. крит. одинак.)

$\alpha W_j(x) + \beta$, $\alpha > 0$ – если неоднородн., то можно сделать так одно-родн.

$I = \{1, \dots, s\}$

$\underline{A_1}$ - бин. относ.

$r A_1 t$ — $r$ и $t$ критерии равноценны

$A_1$ - симм., транзит.

$\underline{A_2}$ - бин. относ.

$r A_2 t$ — $r$ крит. более важный, чем $t$

$A_2$ - асимм., транзит.

$1 A_1 2 A_2 3 A_1 1$ — содержит противор.

$\Downarrow$ требов. непротиворечивости:

$\underline{\Phi}$ - бин. отн.

$r \Phi t$ — $\exists\, i_0, \dots, i_k ;\ B_1 \dots B_k$ :

$r = i_0 B_1 i_1 \dots B_k i_k = t$

$B_\ell = A_1$ или $A_2$

хотя бы для ~~для~~ одного $B_\ell = A_2$

<u>Усл. непротив.</u> : $\Phi$ - антирефл. $(r \overline{\Phi} r)$

$\boxed{29.10}$

$y = W(x) \in E^s$ — вект. оценка

$Y = W(X)$

Формально будем рассм. не $Y$, а все $E^s$

<u>Опр.</u> $\underline{P} = \{ (y, y') \mid y_i \geq y'_i,\ i = 1 \dots s,\ y \neq y' \}$

$\uparrow$ <u>сравн. по Парето</u> 2-х вект. оценок

$(r, t)$, $r \neq t$, $\underset{\sim}{rA_1t}$.

$y^{rt}$ – оценка, в $y$ $r$-ая и $t$-ая компоненты помен. местами

Опр. $S_{rt}$: $y S_{rt} y' \Leftrightarrow y' = y^{rt}$

$\underset{\sim}{rA_2t}$

Опр. $T_{rt}$: $y T_{rt} y' \Leftrightarrow \begin{cases} y' = y^{rt} \\ y_r > y_t \end{cases}$

Опр. $R$ на $E^S$: $yRy' \Leftrightarrow \exists z^0, z^1, \dots, z^k$:

$y = z^0 H_1 z^1 H_2 \dots H_k z^k = y'$,

$H_l \in \{P, S_{rt} : rA_1t, T_{rt} : rA_2t\}$

не все $H_l$ вида $S_{rt}$

Лемма 1. $R$ – транзит. и ацикличн.

Док-во:

1) $yRy'Ry'' \Rightarrow yRy''$ ← док-ем

$\left.\begin{array}{l} yRy' \text{ – значит } \exists z^0, z^1, \dots z^k \\ y'Ry'' \text{ – значит } \exists z^{k+1}, \dots, z^r \end{array}\right\} \Rightarrow \exists z^0 \dots z^r: yRy''$

2) Пусть, $\exists y, y^1, \dots, y^k, y$ : (т.е. $\exists$ цикл.)

$yRy^1R \dots Ry^kRy \Rightarrow \{\text{транз.}\}\ yRy \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z^0, \dots, z^k: y = z^0 H_1 z^1 \dots H_k z^k = y$

3) пусть, $\exists l: H_l = P \Rightarrow z_{l-1} P z_l \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \sum_{i=1}^{s} z_i^{l-1} > \sum_{i=1}^{s} z_i^l \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} y_i \geq \sum_{i=1}^{s} z_i^1 \geq \dots > \dots \geq \sum_{i=1}^{s} y_i$

$S_{rk}$ – сумма не мен. (?)

4) пусть, нет $P$
но $\exists l : H_l = T_{rt}$ =>

=> $H_1 = T_{rt}$ (можно считать) =>

=> $y T_{rt} z^1$ , $r A_2 t$

5) $H_l = S_{i_l j_l}$ либо $T_{i_l j_l}$, $l = 2 \ldots k$
$i_l A_1 j_1$ $\quad$ $i_l A_2 j_l$

Опред. мн-во:
$I_+ = \{ i \in I \mid i \Phi t \}$,
$r \in I_+$, т.к. $r A_2 t$ – частн. случай $\Phi$
$t \notin I_+$, т.к. $t \overline{\Phi} t$

$\Downarrow$ $(y T_{rt} z^1)$

$$\sum_{i \in I_+} y_i > \sum_{i \in I_+} z_i^1$$

6) $(i_l, j_l)$ : если $j_l \in I_+ \Rightarrow i_l \in I_+$
покажем $\uparrow$ :
$i_l A_1 (A_2) j_l \Phi t \Rightarrow i_l \in I_+ \Rightarrow$

а) $i_l, j_l \in I_+$
б) $i_l, j_l \notin I_+$
в) $i_l \in I_+$, $j_l \notin I_+ \Rightarrow i_l A_2 j_l$
(если $i_l A_1 j_l$, => $j_l A_1 i_l \Phi t \Rightarrow j_l \in I_+ \Rightarrow$
=> противор.)

7) Рассм. $\forall l$ :

$$\underset{\substack{= \text{ в сл. а), б)} \\ > \text{ в случ. в)}}}{\sum_{i \in I_+} z_i^{l-1} \geqslant \sum_{i \in I_+} z_i^l} \quad (\text{т.к. } z^{l-1} \underset{S_{i_l j_l}}{T_{i_l j_l}} z^l)$$

$\Downarrow$

$$\sum_{i \in I_+} y_i > \sum_{i \in I_+} z_i^1 \geqslant \ldots \geqslant \sum_{i \in I_+} y_i \Rightarrow \text{противор.}$$

лемма док-на

$P(X, W) = \{x^1, \dots, x^n\}$

$P(Y) = \{ y^1 = W(x^1), \dots, y^n \in W(x^n)\}$

мн-во вект. оценок

Надо построить ядро $C(P(Y), R)$.

Это ядро $C \neq \emptyset$

$P' = \{x \in P(X, W) \mid W(x) \in C(P(Y), R)\}$

сужение мн-ва $P$

~~Пример:~~ $yRy'$ - ?

$A_1 = I \times I$ (т.е. все частн. крит. равноцен.)
$A_2 = \emptyset$

$y \in E^s$

$\theta(y) = (\theta_1(y), \dots, \theta_s(y))$ : $\theta_1(y) \geq \theta_2(y) \geq \dots \geq \theta_s(y)$

$\theta_1(y) = \max\limits_{1 \leq i \leq s} y_i$

Лемма 2. $yPy' \Rightarrow \theta(y)\, P\, \theta(y')$

Док-во:

1) покажем: $\forall i \Rightarrow \theta_i(y) \geq \theta_i(y')$, $i = 1 \dots s$

2) $\theta_1(y) \geq \theta_1(y')$

Пусть, $\exists k$: $\theta_i(y) \geq \theta_i(y')$, $i = 1 \dots k$ $\Rightarrow$

$\theta_{k+1}(y) < \theta_{k+1}(y') \leq \theta_k(y') \leq \dots \leq \theta_1(y')$

$\Rightarrow$ $(k+1)$ компонента $y' > \theta_{k+1}(y)$

$\left.\begin{array}{l} \theta_{k+1}(y) \geq y'_{i_{k+1}} \\ \vdots \\ \theta_s(y) \geq y'_s \end{array}\right\} \Rightarrow (s-k)$ компон. $y' \leq \theta_{k+1}(y)$

Тогда, $(s-k) + (k+1) = s+1 \Rightarrow$ противор.

Лемма док-на.

Утв. $A_1 = I \times I \Rightarrow y R y' \Leftrightarrow \theta(y) \, P \, \theta(y')$

Док-во:

1) $\Rightarrow$

$y R y' \Rightarrow y H_1 z^1 H_2 \dots H_k z^k = y'$

$H_l = P$ либо $S_{rt}$ ($T_{rt}$ нет, т.к. все критерии равноц.)

если $H_l = P$, то $z^{l-1} P z^l \Rightarrow$ {лемма 2} $\Rightarrow \theta(z^{l-1}) \, P \, \theta(z^l)$

если $H_l = S_{rt}$, то $\theta(z^{l-1}) = \theta(z^l)$

$\Downarrow$ $\theta(y) \, P \, \theta(y')$ (исп. транзит. $P$)

2) $\Leftarrow$

$y S_{i_1 j_1} z^1 \dots z^k \theta(y)$ (исп. только $S$)

$\theta(y) \, P \, \theta(y') \underbrace{S_{i_2 j_2} \dots y'}_{\text{исп. } S \text{ только}} \Rightarrow$

$\Rightarrow y R y'$

Утв. док-но.

Пример:

1. $P(X, W) = \{x^1, \dots, x^5\}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y^1$ | 3 | 5 | 3 |
| $y^2$ | 4 | 4 | 3 |
| $y^3$ | 5 | 3 | 2 |
| $y^4$ | 2 | 3 | 5 |
| $y^5$ | 4 | 2 | 4 |

Выделим группу лучших.

$y^1 R y^3$ (533, 532)

$y^1 R y^4$ (533, 532)

$y^2 R y^5$ (443, 442)

$\theta(y^1) = (5, 3, 3)$
$\theta(y^2) = (4, 4, 3)$ несравнимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y^1, y^2$ – лучшие

2. $P(X, W) = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y^1$ | 5 | 5 | 4 | 4 |
| $y^2$ | 5 | 4 | 5 | 4 |
| $y^3$ | 5 | 4 | 4 | 5 |
| $y^4$ | 4 | 4 | 5 | 5 |

$A_1 = \{(1,3)\}$
т.е. 1 и 3 предметы равноценны

$A_2 = \{(2,4), (2,3)\}$
2 пр. более важен, чем 3 и 4 предметы

Лучший ученик?

1) $y^1 T_{24} y^3$ (т.к. $A_2 = \{\underline{(2,4)}, \dots\}$)
$\Downarrow$
$\underline{y^1 R y^3}$

2) $y^1 T_{23} y^2$ (т.к. $A_2 = \{\dots, \underline{(2,3)}\}$)
$\Downarrow$
$\underline{y^1 R y^2}$

3) $y^3 S_{13} y^4$ (т.к. $A_1 = \{(1,3)\}$)

$y^1 T_{24} y^3 S_{13} y^4 \Rightarrow \underline{y^1 R y^4}$

Ответ: 1-ый ученик учится лучше остальных.

# Сравнение управляемых динамических объектов:

$$(1)\begin{cases} \dot{z} = f(z, u, x), \\ z(t_0) = z^0 \end{cases}$$

$z = (z_1, \dots, z_m)$ – фазов. перем.
$u$ – управление, $u \in U \subset E^2$
$x \in X$ – парам.

$$z \in Z(x) = \{ z \in E^m \mid g_j(z) \le w_j(x),\ j = 1 \dots l \}$$

Задача: есть 2 конструкции $x$, $x^1$
как выбрать?

$H \subset E^m$

$\mathrm{Conv}\, H$ – выпукл. оболочка мн-ва $H$

ConvH

Фикс. $x, z$:

$$G(x,z) = \mathrm{Conv}\underbrace{\{ f \in E^m \mid f = f(z,u,x),\ u \in U \}}_{f(z,U,x)}$$

Пусть, $f(z,u,x)$ – непр. по всем перем.
$U$ – компакт

$\Downarrow$

$G$ – вып. компакт в $E^m$

<u>Опр.</u> $\underbrace{x R x'}$ $\iff G(x,z) \supseteq G(x',z), \quad \forall z \in Z(x') \subseteq Z(x)$

(2)

<u>Св-ва R:</u>
1) R – рефлекс.
2) R – транзит.

$$Z(x') \subseteq Z(x) \iff w_j(x') \le w_j(x), \quad j = 1 \dots l$$

$(\Leftarrow)$ – очевидно
$(\Rightarrow)$ – из предполож.

Рассм. в $E^m$:

$s \in S' = \{ s \in E^m \mid |s| = 1 \}$

<u>Опр.</u> <u>Опорн. ф-ия</u> $\delta(s, x, z) = \max\limits_{f \in G(x,z)} (s, f)$

<u>Утв.</u> $G(x,z) \supseteq G(x',z) \Leftrightarrow \delta(s,x,z) \geq \delta(s,x',z), \quad \forall s \in S'$

<u>Док-во</u>:

1) $\Rightarrow$ очевидно (без док-ва!)

2) $\Leftarrow$ ...

$$\underbrace{x R x'} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \delta(s,x,z) \geq \delta(s,x',z), \ \forall s \in S', \ \forall z \in Z(x') \\ w_j(x) \geq w_j(x'), \quad j = 1 \dots l \end{array} \quad (3)$$

Рассм. ф-ию:

$$\Delta(x, x', z) = \min_{s \in S'} [\delta(s,x,z) - \delta(s,x',z)] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta(s,x,z) \geq \delta(s,x',z)$$

$$\underbrace{x R x'} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \Delta(x, x', z) \geq 0, \quad \forall z \in Z(x') \\ w_j(x) \geq w_j(x'), \quad j = 1 \dots l \end{array} \quad (3)$$

(3), (3) - эквив.

Пример:

Точечн. объект, $\gamma$ перемещ. в пр-ве

$z^1 \in E^3$
$z^2$ - скорость, $\dot{z}^1 = z^2$

$z = (z^1, z^2) \in E^6$

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = z^2 = f_1 \\ \dot{z}^2 = \underbrace{Pu}_{\text{сила тяги}} - \underbrace{kz^2}_{\text{сила сопрот.}} = f_2 \end{cases}$$

$u \in V = \{u \in E^3 \mid |u| \le 1\}$ управление

$P$ - макс. тяга, $\gamma$ может созд. объект

$x = (k, P) \in X$ - констукт. парам.

$X = \{x \mid \underline{k} \le k \le \overline{k}, \underline{P} \le P \le \overline{P}\}$

$\dot{z}^2 = 0$ - скорость тогда max

$\Downarrow$

$Pu - kz^2 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{Pu}{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow |z^2| = \frac{P|u|}{k} \le \frac{P}{k}$ - огранич. на скорость

$z = (z^1, z^2) \in Z(x) = \{z \mid \underset{g_1(z)}{|z^2|} \le \underset{w_1(x)}{\frac{P}{k}}\}$

Выпишем бинарн. отнош.:

опорн. ф-ии:

$f = (f^1, f^2)$

$f^1$ не завис. от $u$, $x$ $\Rightarrow$ выт. обол. стрелки для $f_2$

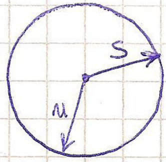
$S' = \{s \in E^3 \mid |s| = 1\}$

$\delta(s, x, z) = \max\limits_{u: |u| \le 1} (s, f^2) =$

$$= \max_{u:|u|\le 1} (s,\ Pu - kz^2) =$$

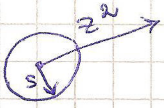
$$= \max_{u:|u|\le 1} \left[ P(s,u) - k(s,z^2) \right] = \underline{P - k(s,z^2)}$$

↑ опорн. ф-ия




$$x' = (k', p') \Rightarrow \underbrace{\delta(s,x',z)} = \underbrace{p' - k'(s,z^2)}$$

$$\underline{\Delta(x,x',z)} = \min_{s\in S} \left[ p - p' - (k-k')(s,z^2) \right] =$$




$$= \underbrace{p - p' - |k-k'|\cdot|z^2|}$$

бин. отнош:

$$xRx' \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta(x,x',z) = p - p' - |k-k'|\cdot|z^2| \ge 0 \\ \forall z:\ \underbrace{|z^2| \le \frac{p'}{k'}}_{Z(x')} \\ \frac{p}{k} \ge \frac{p'}{k'} \end{cases} \qquad (4)$$

$$xRx' \Leftrightarrow \begin{cases} p - p' - |k-k'|\cdot\frac{p'}{k'} \ge 0 \\ \frac{p}{k} \ge \frac{p'}{k'} \end{cases}$$

Постр. ядро по этому ↑ бин. отнош.:

$C(X,R) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\}$
(т.к. в этом случае отнош. рефлекс.)

Покажем: $C(X,R) = \{x \mid p = \bar{p}\}$

Рассм. $x' = (k', p')$: $p' < \bar{p}$

Тогда $x(K, P) : K = K', \quad P = P' + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$

$\Downarrow$

$\frac{P}{K} > \frac{P'}{K'}$ ; ... $> 0$

т.е. $x R x'$, $x' \overline{R} x \Rightarrow x' \notin C(X, R)$

Рассм. $x' = (K', P') : P' = \overline{P}$

Покажем: $x' \in C(X, R)$

$x R x' \Rightarrow P - \overline{P} \leq 0 \Rightarrow K = K', \; P = P' = \overline{P} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x' \Rightarrow x' R x$

## §12. Матем. модель операций.

Опр. Операция - совок. меропр., направл. на достиж. нек целей

Опр. Совок. лиц или 1 лицо, к стремится в опер. к поставл. цели, называв. оперирующей стороной.

Опр. Исследователь операций - созд. мат. модель и дать рекоменд.

Опр. Активн. ср-ва (ресурсы)

Опр. Контролируемый фактор - такие величины, к наход. в распоряж. оперир. стороны и влияют на исход операции

$x \in M_0$

Опр. Неконтрол. факторы - величины, к влияют на исход операции, но оперир. сторона их не выбирает.

неопред.

относит. них известна только область значений, к ф. может принимать

$y \in N$

а) неопр. - стратегии др. субъектов.

б) природн. неопр.

в) неясность цели

случайные

случ. величины, влиющ. на исход операции

$z \in Z$

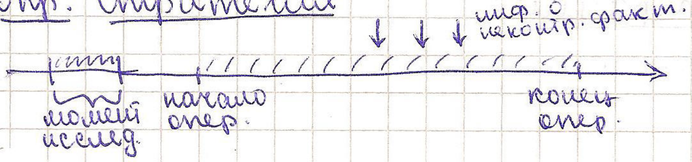
(есть нек закон распред., но может быть точно неизвестен)

$\theta \in \Theta$

Опр. Критерий эффект.: соотв. между исходом и целью

$F(x, y, z)$, опр. на $M_0 \times N \times Z$

**Опр. Стратегия**




**Информац. гипотеза** – точн. описание того, какая и когда информация будет поступать

**Стратегия** – выбор значений контрол. факторов в зависимости от поступ. инф. о неконтр. факт.

$$\tilde{x} : N \times Z \to M_0$$

$\tilde{x} \in M$

1. Не будет информации:

   $\tilde{x} \equiv x \in \underbrace{M_0}$ – мн-во стратегий-констант

2. В начале операции изв. $y$:

   $\underbrace{M_{\text{н}}}$ $\quad \tilde{x} : N \to M_0$

   $\tilde{x}(y)$

3. В начале операции изв. $y$ и $z$:

   $\underbrace{\tilde{M}}$ $\quad \tilde{x} : N \times Z \to M_0$

4. $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j}$ – изв. :

   $\underbrace{M}$ $\quad \tilde{x} = f\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)$

$$M_0 \subset M \subset M_{\text{н}}$$

Мат. модель операции:

1) $x \in M_0$

2) $y \in N \subseteq N_0$

3) $z \in Z$, $\theta \in \Theta$

4) крит. эфф. $F(x, y, z)$, $M_0 \times N \times Z$
задает цель операций

5) инф. гипотеза $M$ : $\tilde{x} : N \times Z \to M_0$

## § 13. Оптимальные стратегии в операции.

$\forall \tilde{x} \in M$ : $W(\tilde{x})$ – оценка эффект. страт. (т.е. гарант. величина критерия)

Стратегии сравн. с помощью $W(\tilde{x})$

<u>Опр.</u> Страт. $\tilde{x}^0 \in M$ – <u>оптим.</u>, если

$$W(\tilde{x}^0) = \max_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) = F_n(M)$$

<u>Опр.</u> Стр. $\tilde{x}^\varepsilon \in M$ – <u>$\varepsilon$-оптим.</u>, если

$$W(\tilde{x}^0) \geq \sup_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) - \varepsilon$$

<u>Предположение</u>:

1) $y$ – либо страт. противника, имеющего противоп. интересы, $F_n(x,y,z) \equiv -F(x,y,z)$ либо природн. неопр.

2) противник не знает реализ. $z$

3) опер. сторона разреш. осреднение по случайности

$$W(\tilde{x}) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \underbrace{\int_Z F(\tilde{x}(y,z), y, z)\, d\theta(z)}_{= \bar{F}(\tilde{x}, y, \theta) \text{ осредненный критерий}} \quad (1)$$

<u>критерий эффективности</u>

если противник знает $z$:

$$W'(\tilde{x}) = \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z \inf_{y \in N} F(\tilde{x}(y,z), y, z)\, d\theta(z)$$

Покажем: $\underline{w(\tilde{x}) \geq w'(\tilde{x})}$

$\forall \theta \in \Theta, \ \forall y \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_Z F(\tilde{x}(y,z), y, z)\, d\theta(z) \geq$

$\inf\limits_{y \in N}$

т.к. $\forall y$ $\quad \geq \int\limits_Z \inf\limits_{y \in N} F(\tilde{x}(y,z), y, z)\, d\theta(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf\limits_{\theta \in \Theta} \ldots \Rightarrow$ ч-во

## § 15. Нех задачи оптимального распределения ресурсов.

26.11

$i = 1, \dots, n$ - пункты

$A$ - ресурсы

$\forall$ пункта : $f_i(t)$ - эффективность вложения ресурсов

$x = (x_1, \dots, x_n)$ - распред. ресурсов

$x \in M_0 = \{ x \in E^n \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \geq 0,\ i = 1 \dots n \}$

Пусть, ресурс бесконечно делим.

$x \in M_0' = \{ x \in M_0 \mid x_i \in \mathbb{Z},\ i = 1 \dots n \}$ - если задача дискретна

Задача 1

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0) \qquad (I)$$

$x^0$ - оптим. распр. ресурсов

Пусть, $f_i(t)$ - непр., возраст. на $[0, A]$

$f_1(0) \leq f_2(0) \leq \dots \leq f_n(0)$ - т.е. 1ый пункт сам. слабый

Теорема 3.8 (Принцип уравнивания) Ю.Б. Гермейер

$x^0$ - оптим. распр. ресурсов в (I). ~~Тогда~~ $\Leftrightarrow$

$\exists k : 1 \leq k \leq n : f_1(x_1^0) = \dots = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0)$, (1)
$x_{k+1}^0 = \dots = x_n^0 = 0$.

Если $f_1(0) = \dots = f_n(0)$, то $k = n$.

Оптим. распр. ресурсов - единств.

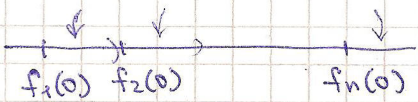
Док-во:

1) $(\Rightarrow)$ $x^0$ - оптим. в (I)

max достиг., т.к. $f$ - непр.

2) $k$ опр. из:

$$f_k(0) \le \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) < f_{k+1}(0) \qquad (2)$$




3) Покажем: $x^0_{k+1} = \ldots = x^0_n = 0$

Пусть, $\exists\, i_1 \ge k+1 : x^0_{i_1} > 0$

Построим распр. $z$: $\quad z_i = \begin{cases} x^0_{i_1} - \varepsilon, & i = i_1 \\ x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}, & i \ne i_1 \end{cases} \quad \varepsilon > 0$

$i \ne i_1 \Rightarrow f_i(z_i) = f_i\left(x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}\right) \overset{\text{монот.}}{\ge} f_i(x_i^0) \ge \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$

$i = i_1 \Rightarrow f_i(z_{i_1}) = f_{i_1}(x^0_{i_1} - \varepsilon) > f_{i_1}(0) \ge f_{k+1}(0) \overset{(2)}{>} \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$

$\Downarrow$ $\forall i \Rightarrow f_i(z_i) \ge \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$

$\Downarrow$

$\min\limits_{1\le i\le n} f_i(z_i) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) \Rightarrow$ противоречие

4) Покажем: $f_i(x_i^0) = \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$, $i = 1 \ldots k$

Пусть, $\exists\, i_1 \le k : f_{i_1}(x^0_{i_1}) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) \overset{(2)}{\ge}$

$\ge f_k(0) \overset{i_1 \le k}{\ge} f_{i_1}(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{i_1} > 0$ (т.к. $f_{i_1}(x^0_{i_1}) > f_{i_1}(0)$, $f$ - возр.)

Постр. распр. $z$ (см. 3))

$i \ne i_1 \Rightarrow \ldots$ (также)

$i = i_1 \Rightarrow f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x^0_{i_1} - \varepsilon) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$

$f$ - непр. ⊕ см. н-во из предпол.

$\Downarrow$ $\ldots \Rightarrow$ противоречие

5) $\Leftarrow$ $x^0$ удовл. усл. (1)

Рассм. $\forall x \in M_0,\ x \neq x^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists j:\ x_j < x_j^0 \Rightarrow x_j^0 > 0 \Rightarrow j \leq k$

$$\min_{1\leq i\leq n} f_i(x_i) \leq f_j(x_j) \overset{\text{монот}}{<} f_j(x_j^0) \overset{(1)}{=} \min_{1\leq i \leq n} f_i(x_i^0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^0$ - оптим. распр.

$\exists!\, x^0$

Т-ма док-на.

Использование т-мы:

Рассм. $k:\ 1 \leq k \leq n$

Решаем: $\begin{cases} f_i(x_i^0) = C, & i = 1 \dots k \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^0 = A \\ C < f_{k+1}(0) \end{cases}$

Перебором по $k$ находим нужное.

Рассм. и такие задачи:

$$\min_{x\in M_0} \max_{1\leq i\leq n} f_i(x_i)$$

$f_i(t)$ - величина остаточного ущерба

$f_i(t)$ - убывающ.

Задача ②

$$\max_{x \in N_0^1} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \qquad (I')$$

$f_i(t)$ - возраст., $t$ - целое

Пусть, $I(x) = \operatorname{Arg} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i)$ - мн-во пунктов, где эффективн. миним.

Теорема 3.9.

Пусть, $x^*$ - оптим. в $(I')$,

$|I(x^*)|$ - минимально среди всех оптим. распр. ресурсов.

Тогда, если $x_j^* > 0$, то $\min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \ge f_j(x_j^* - 1)$ (3)

Если для $x^*$ вып. (3), то $x^*$ - оптим. в $(I')$.

Док-во:

1) Необх.: $x^*$ - оптим. в $(I')$

$|I(x^*)|$ - миним. (т.е. число эл-тов в $I(x^*)$ миним.)

Пусть, (3) не вып. =>

=> $\exists j: x_j^* > 0,\ f_j(x_j^* - 1) > \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) = f_l(x_l^*)$

Постр. распр. $z$:

$$z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \ne j, l \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} & f_j(z_j) = f_j(x_j^* - 1) > \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \\ & f_l(z_l) > \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \\ & f_i(z_i) \ge \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(z_i) \geq \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \Rightarrow$ „=" $\Rightarrow$

$\Rightarrow z$ - тоже оптим.

$I(z) = I(x^*) \setminus \{l\} \Rightarrow$ противоречие опр-нию $x^*$

2) Достат.: вып. (3)

Рассм. $\forall x \in M_0'$, $x \neq x^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists j: x_j < x_j^* \Rightarrow x_j^* > 0$

$x_j^* - 1 \geq x_j$

$$\min_{1 \le i \le n} f_i(x_i) \leq f_j(x_j) \leq f_j(x_j^* - 1) \overset{(3)}{\leq} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$$

$\Downarrow$ $x^*$ - оптим. распр. (I')

Т-ма док-на.

Алгоритм решение (I'):

$\forall$ распр. $x^{(1)}$

$x^{(k)}$ - проверяем (3): $x_j^{(k)} > 0 \Rightarrow \min f_i(x_i^{(k)}) \geq f_j(x_j^{(k)} - 1)$

если (3) не вып., т.е. $\exists j: x_j^{(k)} > 0$, $\min f_i(x_i^{(k)}) < f_j(x_j^{(k)} - 1)$

то строим распр. $x^{(k+1)}$:

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j \\ x_l^{(k)} + 1, & i = l \\ x_i^{(k)}, & i \neq j, l \end{cases}$$

$\Downarrow$

1) если $|I(x^{(k)})| = 1$,

то $\min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k)})$

2) если $|I(x^{(k)})| \geq 2$,

то $\min \ldots = \min \ldots$

$I(x^{(k+1)}) = I(x^{(k)}) \setminus \{l\}$

Через $\forall$ n шагов min возрастет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ алгоритм конечен.

## Пример:

$n = 4$

$A = 10$

$$\max_{x \in N_0^4} \min_{1 \le i \le 4} (i x_i^2)$$

$f_i(t) = i \cdot t^2$

$f_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$

$$k = n \Rightarrow \begin{cases} i (x_i^0)^2 = C, & i = 1, 2, 3, 4 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i^0 = 10 \end{cases}$$

$$x_i^0 = \sqrt{\frac{C}{i}}$$

$$\sqrt{C} = \frac{10}{\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{k}}} \Rightarrow x_i^0 = \frac{10}{\sqrt{i} \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{k}}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1^0 \approx 3.59$

$x_2^0 \approx 2.54$

$x_3^0 \approx 2.07$

$x_4^0 \approx 1.8$

Нач. приближ. $x^{(1)} = (4, 3, 2, 1)$

| $i$ | $x_i^{(1)}$ | $i(x_i^{(1)})^2$ | $i \cdot (x_i^{(1)} - 1)^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 16 | 9 > 4 |
| 2 | 3 | 18 | 8 |
| 3 | 2 | 12 | 3 |
| 4 | 1 | 4 | 0 |

min эффект.

$\Rightarrow$ (3) не вып.

| $x_i^{(2)}$ | $i(x_i^{(2)})^2$ | $i(x_i^{(2)} - 1)^2$ |
|---|---|---|
| 3 | 9 | $4 \le 9$ |
| 3 | 18 | $8 \le 9$ |
| 2 | 12 | $3 < 9$ |
| 2 | 16 | $4 < 9$ |

min эффект.

$\Downarrow$

$x^{(2)}$ — оптим.

Задача (3)

$$\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0) \qquad (\text{II})$$

$f_i$ - прибыль от вложения капитала в $i$-ый проект

$f_i'$ - увеличение прибыли

Пусть, $f_i(t)$ - диф. на $[0, A]$

Теорема 3.10 (лемма Гиббса)

Пусть, $x^0$ - оптим. распр. ресурсов в (II)

Тогда, $\exists \lambda$: $f_i'(x_i^0) = \lambda$, если $x_i^0 > 0$

$f_i'(x_i^0) \leq \lambda$, если $x_i^0 = 0$ (1)

Пусть, $f_i(t)$ - диф., вогн., $\Rightarrow$ (1) - дост. усл. оптим.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Пусть, } f_1'(0) \geq f_2'(0) \geq \ldots \geq f_n'(0) \\ &f_i''(0) < 0, \; i = 1 \ldots n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists l$: $x_i^0 > 0$, $i = 1 \ldots l$

$x_i^0 = 0$, $i \geq l+1$

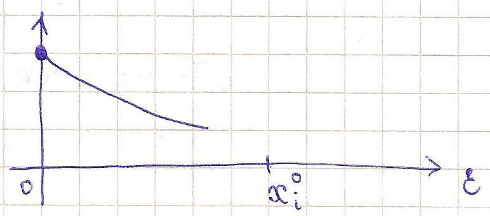
Док-во:

1) Необх.: $x^0$ - оптим. в (II) $\Rightarrow$ (1)

Рассм. $\forall i$: $x_i^0 > 0$

$\forall j \neq i$

$$\varphi(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 + \varepsilon) + \sum_{k \neq i,j} f_k(x_k^0)$$




$\varphi'(0) \leq 0$

$$\varphi'_\varepsilon(0) = f_j'(x_j^0) - f_i'(x_i^0) \leq 0 \Rightarrow f_j'(x_j^0) \leq f_i'(x_i^0) \qquad (2)$$

если $x_j^\circ > 0$, то $\ldots \geq \ldots$

$\Downarrow$

$f_i'(x_i^\circ) = \lambda$, $x_i^\circ > 0$

$f_j'(0) \leq f_i'(x_i^\circ)$, $x_i^\circ = 0$

2) <u>Достат.</u>: $x^\circ$ удовл. (1), $f_i(t)$ - вогнут. $\Rightarrow$ $x^\circ$ - опт.

$\forall x \in M_0$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i^\circ)}= \sum_{i=1}^n [f_i(x_i) - f_i(x_i^\circ)] \overset{\text{вогн.}}{\leq} \sum_{i=1}^n f_i'(x_i^\circ)(x_i - x_i^\circ) =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{если } x_i^\circ = 0, \text{ то } (x_i - x_i^\circ) \geq 0, \text{ исп. } f_i'(0) \leq \lambda \\ \text{если } x_i^\circ > 0, \text{ то } f_i'(x_i^\circ) = \lambda \end{bmatrix} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \lambda (x_i - x_i^\circ) = \lambda(A - A) = \underbrace{0}$$

$\Downarrow$

$x^\circ$ - оптим. распр.

3) $\left.\begin{matrix} f_1'(0) \geq \ldots \geq f_n'(0) \\ f_i''(0) < 0 \end{matrix}\right\}$

$(f_i$ - вогн.$)$

$x^\circ$ - оптим., $\exists x_i^\circ = 0$, $x_{i+1} > 0$

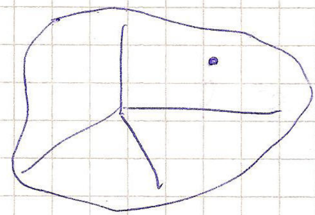
$$f_i'(x_i^\circ) = \underbrace{f_i'(0)} \overset{(1)}{\leq} \lambda \overset{(1)}{=} f_{i+1}'(x_{i+1}) \underbrace{<} f_{i+1}'(0) \leq \underbrace{f_i'(0)}$$

$\Rightarrow$ противоречие

Т-ма док-на.

Пример:

(модель поиска объекта)



$n$ областей

известно $p_i$ - распр. вер.

$A$ - время на поиск

$x_i$ - время для поиска в $i$-ой области

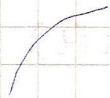
$\sum x_i = A$

$(1 - e^{-\mu_i x_i})$ - вер. обнаружения (условн.) $\quad \mu_i > 0$

Полн. вер.: $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i (1 - e^{-\mu_i x_i}) \longrightarrow \max\limits_{x \in M_0}$

$f_i(t) = p_i (1 - e^{-\mu_i t})$

$f_i'(t) = p_i \mu_i \cdot e^{-\mu_i t} > 0$



$f_i''(t) < 0 \Rightarrow f_i(t)$ - вогн.

~~Пусть~~ $f_i'(0) = p_i \mu_i$

Пусть, $p_1 \mu_1 \geq p_2 \mu_2 \geq \ldots \geq p_n \mu_n > 0$

(1) - вып.

$\exists l: \; x_i^0 > 0, \; i = 1 \ldots l$

$x_i^0 = 0, \; i = l+1, \ldots, n$

$$\begin{cases} f_i'(x_i^0) = p_i \mu_i e^{-\mu_i x_i^0} = \lambda, & i = 1 \ldots l \\ f_{l+1}'(0) = p_{l+1} \mu_{l+1} \leq \lambda \\ \sum\limits_{i=1}^{l} x_i^0 = A \end{cases}$$

$\Downarrow$

$-\mu_i x_i^0 = \ln\lambda - \ln(p_i\mu_i)$ $\qquad x_i^0 > 0$

$\ln(p_{l+1}\mu_{l+1}) \le \ln\lambda$

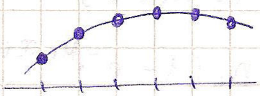
Перебор по $l = 1\dots n$ $\Rightarrow$ нужное $l$

**Задача (4)**

$$\max_{x\in M_0^!} \sum f_i(x_i) = \sum f_i(x_i^*) \qquad (\mathrm{II}')$$

$f_i(t)$ – ф-ие дискр. аргум.

$f_i(t)$ – вогн.



$\Downarrow$ $\qquad (3)$

$$f_i(t) - f_i(t-1) \ge f_i(t+1) - f_i(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2} f_i(t) \ge \frac{f_i(t-1) + f_i(t+1)}{2}$$

**Лемма.**

$f_i(t)$ удовл. усл. (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $t > t^0 \Rightarrow f_i(t) - f_i(t^0) \le (f_i(t^0+1) - f_i(t^0))(t-t^0)$

2) $t < t^0 \Rightarrow f_i(t) - f_i(t^0) \le (f_i(t^0) - f_i(t^0-1))(t-t^0)$

**Док-во:**

1) $t > t^0$

$$f_i(t) - f_i(t^0) = \overbrace{f_i(t) - f_i(t-1) + f_i(t-1) - f_i(t-2) + \dots + f_i(t^0+1) - f_i(t^0)}^{(t-t^0)\text{ штук}} \le (f_i(t^0+1) - f_i(t^0))(t-t^0)$$

2) док-ется аналогично

Лемма док-на.

Теорема 3.11 (Критерий Гросса)

$x^*$ - оптим. в (II') $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1) \geq \underbrace{\max_{1\le i\le n}\left[f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)\right]}_{=\lambda} \quad (4)$$

Док-во:

1) $\Rightarrow$ $x^*$ - оптим.

Пусть, (4) - не верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists j: x_j^* > 0$, но $f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1) < \lambda = f_l(x_l^*+1) - f_l(x_l^*)$

$$\Rightarrow f_j(x_j^*) + f_l(x_l^*) < \underbrace{f_j(x_j^*-1) + f_l(x_l^*+1)}_{\text{эффект. больше}}$$

Опр. $z$:
$$z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \neq j, l \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) < \sum_{i=1}^{n} f_i(z_i^*) \Rightarrow \text{противоречие}$$

2) $\Leftarrow$ для $x^*$ вып. (4)

$\forall x \in M_0'$, покажем: $f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le \lambda(x_i - x_i^*)$ (5)

$i = 1 \ldots n$

а) $x_i > x_i^*$

{лемма} $f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le (f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*))\underbrace{(x_i - x_i^*)}_{>0} \le$

$\le \lambda(x_i - x_i^*)$

б) $0 \le x_i < x_i^*$

$$f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le \underbrace{(f_i(x_i^*) - f_i(x_i^*-1))}_{\geq \lambda \text{ (по (4))}}\underbrace{(x_i - x_i^*)}_{<0} \le$$

$\le \lambda(x_i - x_i^*) \Rightarrow$ (5) док-но

Т-ма док-на.

Алгоритм реш. (II'):

$x^{(1)}$ (реш. непр. зад. $\to x^0 \to$ округление)

$x^{(k)}$ – проверить (4)

если $x_j^{(k)} > 0 \Rightarrow f_j(x_j^{(k)}) - f_j(x_j^{(k)} - 1) < \max[\dots]$

то строим нов. распр. $x^{(k+1)}$:

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \neq j, l \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^{(k)})$$