§15. Некоторые задачи оптимального распределения ресурсов.

n, $i=1\dots n$ — пункт. A – ресурс (скаляр.)

$f_i(t)$ — функция эф-ти вложения ресурса

$x=(x_1,\dots,x_n)$ – распределение ресурсов.

$$x\in M_0=\{x\in E^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = A,\ x_i\ge 0,\ i=1,\dots,n\}.$$

Предп-ся, что ресурс бесконечно делим.

$$x\in M_0'=\{x\in M_0 \mid x_i\in \mathbb{Z},\ i=1\dots n\}.$$

<u>задача</u>: $$\max_{x\in M_0}\min_{1\le i\le n} f_i(x_i)=\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0). \qquad (I)$$

└ задача оптимального расп-е ресурсов.

Будем считать $f_i(t)$ – непр., возрастающие на $[0,A]$,

$$f_1(0)\le f_2(0)\le\dots\le f_n(0).$$

$\boxed{\text{Т3.8}}$ [принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера].

$x^0 \xrightarrow{\text{опт.}} (I) \Leftrightarrow \exists k;\ 1\le k\le n:\ f_1(x_1^0)=\dots=f_k(x_k^0)<f_{k+1}(0),$

$x_{k+1}^0=\dots=x_n^0=0 \quad (1).$

Если $f_1(0)=f_2(0)=\dots=f_n(0) \Rightarrow \underline{k=n}$

Оптимальное расп-е ресурсов (x^0) – единственно.

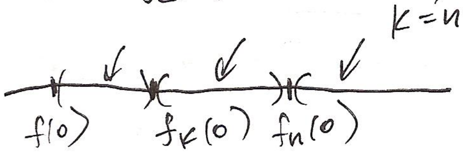
<u>Док-во:</u>

<u>необх.:</u> дано x^0 – опт. расп-е $\overset{(I)}{\Rightarrow}$ (1).

Выберем k из след. соображений:

$$f_k(0)\le\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)<f_{k+1}(0) \qquad (2)$$

$f_1(0)=\dots=f_n(0)$. $k=n$



докажем:

$x^0_{k+1} = \dots = x^0_n = 0$.

предп. противное:

$\exists i_1 \ge k+1 : x_{i_1} > 0$. $\quad z : z_i = \begin{cases} x^0_{i_1} - \varepsilon, & i = i_1 \\ x^0_i + \frac{\varepsilon}{n-1}, & i \ne i_1 \end{cases}$ $\quad \varepsilon > 0$.

Заметим: $i \ne i_1 \to f_i(z_i) = f_i\left(x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}\right) > f_i(x_i^0)$ (из монот-ти) $\ge \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0)$

$i = i_1 \to f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x^0_{i_1} - \varepsilon) > f_i(0) \ge f_{k+1}(0) \overset{(2)}{>} \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0)$.

$\Rightarrow \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(z_i) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0) \Rightarrow$ ✗, т.к. нашли новое распр-е, дающее большее зн-е, чем оптимальное.

докажем: $f_i(x_i^0) = \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0)$, $i = n \dots k$.

предп. противное:

$\exists i_1 \le k : f_{i_1}(x^0_{i_1}) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0) \overset{(2)}{\ge} f_k(0) \ge f_{i_1}(0)$.

$\Rightarrow x^0_{i_1} > 0$.

опред. вектор z:

$i \ne i_1$: $f_i(z_i) = f_i\left(x_i^0 + \frac{\varepsilon}{n-1}\right) > f_i(x_i^0) \ge \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0)$.

$i = i_1$: $f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x^0_{i_1} - \varepsilon) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0)$.

$\Rightarrow \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(z_i) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0)$ ✗.

<u>дост-ть:</u> возьмём $\forall x \in M_0 : x \ne x^0 \Rightarrow \exists j : x_j < x_j^0 \Rightarrow$ (Σ всегда $= A$).

$\Rightarrow x_j^0 > 0 \Rightarrow j \le k$

$\underline{\min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i)} \le f_j(x_j) < f_j(x_j^0) \overset{(1)}{=} \underline{\min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^0$ – опт. распр-е ресурсов

(отсюда же следует единственность в силу строгого нер-ва) ч.т.д.

Алгоритм (I) (нахожд-е опт. распр-е ресурсов).

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = C, \; i = 1 \dots k \\ \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^0 = A \end{cases}, \quad C < f_{k+1}(0) \; (\text{при } k<n)$$

Начинаем решать такие с-мы, до тех пор, пока не б. найдено k, удовл-щее усл-ю

Задача: $\min\limits_{x \in M_0} \max\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i)$

f_i — интерпретируется, как величина остаточного ущерба.

$\boxed{\text{Упр-е:}}$ Сформулир-ть для з-чи ↑ аналог Т.3.8..

Задача: [дискретный максимин]

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \qquad (I')$$

$f_i(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, f_i — возр. ф-ции целого аргумента.

Легко постр-ть пример, в кот. для этой задачи опт. распределение будет неединственно.

$$I(x) = \operatorname{Argmin}_{1 \le i \le n} f_i(x_i)$$

$\boxed{\text{Т.3.9.}}$ Пусть x^* — опт. распр-е для $(I)'$, то для для

$|I(x^*)|$: $x_j^* > 0 \Rightarrow \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \ge f_j(x_j^* - 1)$ (3).

Если для x^* вып-но условие (3), то это — дост. усл-е оптимальности

Док-во:

необх.: x^* $(I)'$ $|I(x^*)| \Rightarrow (3)$.

пусть (3) — не вып-но, т.е. $\exists j : x_j^* > 0$: $f_j(x_j^* - 1) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) = f_l(x_l^*)$

$$z : z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_l^* + 1, & i = l \\ x_i^*, & i \ne j, l \end{cases}$$

$$f_j(z_j) = f_j(x_j^* - 1) > \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*).$$

$$f_e(z_e) > \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$$

$$f_i(z_i) \ge \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$$

$$\Rightarrow \min_{1\le i\le n} f_i(z_i) \ge \min f_i(x_i^*)$$

строгого нер-ва быть не может $\Rightarrow$ только "="

$\Rightarrow$ мн-во $I(z) = I(x^*) \setminus \{e\}$ — содержит на 1 эл-т меньше $\Rightarrow$ Х, т.к. должно уже содержаться min кол-во элементов.

Док-ть: $x^*(3) \Rightarrow x^* \xrightarrow{\text{опт.}} (I)'$

Возьмём $\forall x \in M_0'$, $x \ne x^*$: $\exists j : x_j < x_j^* \Rightarrow$

$x_j^* > 0$: $x_j^* - 1 \ge x_j$

$$\min_{1\le i\le n} f_i(x_i) \le f_j(x_j) \le f_j(x_j^* - 1) \overset{(3)}{\le} \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$$, ч.т.д.

Алгоритм $(I)'$

$x^{(1)}$ $\to \exists$ произв. к-вый шаг $x^{(k)}$

x^0 округл.

проверяется усл-е (3): $x_j^{(k)} > 0 \Rightarrow \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^{(k)}) \ge f_j(x_j^{(k)} - 1)$

если не выполнено:

$$\exists j : x_j^{(k)} > 0 : f_j(x_j^{(k)} - 1) > \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^{(k)})$$

$$x^{(k+1)} : x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1, & i = j \\ x_e^{(k)} + 1, & i = e \\ x_i^{(k)}, & i \ne j, e. \end{cases}$$

2 случая:

1) $|I(x^{(k)})| = 1$, $\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^{(k)})$

2) $|I(x^{(k)})| \ge 2$: $I(x^{(k+1)}) = I(x^{(k)}) \setminus \{e\}$.

алгоритм сойдётся за конечное число шагов.

Пример: алгоритма (I)':

$n=4$, $A=10$. $\max\limits_{x\in M_0'} \min\limits_{1\le i\le n} i x_i^2$

прежде всего, решим непр-ную задачу:

$f_i(t) = it^2$

$f_i(0)=0$, $i=1,2,3,4$, $k=n$

$$\begin{cases} i(x_i^0)^2 = C, \ i=1,2,3,4 \\ \sum\limits_{i=1}^{4} x_i^0 = 10. \end{cases}$$

выражаем: $x_i^0 = \sqrt{\frac{C}{i}}$ и подставляем во второе:

$\sqrt{C} = \dfrac{10}{\sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{k}}}$ → подставляем, получаем ответ:

$$x_i^0 = \frac{10}{\sqrt{i}\sum\limits_{k=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

приближённые значения: $x_1^0 \approx 3.59$, $x_2^0 \approx 2.54$, $x_3^0 \approx 2.07$, $x_4^0 \approx 1.8$.

берём округление →, настр-ем начальное приближение:

$x^{(1)} = (4, 3, 2, 1)$.

i	$x_i^{(1)}$	$i(x_i^{(1)})^2$	$i(x_i^{(1)}-1)^2$	$x_i^{(2)}$	$i(x_i^{(2)})^2$	$i(x_i^{(2)}-1)^2$
1	4	16	9	3	min 9	4
2	3	18	! 8	3	18	8
3	2	12	3	2	12	3
4	1	4 min	0	2	16	4

все $\le 9 \Rightarrow x^{(2)} = x^*$ ответ

Задача:

$$\max_{x\in M_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0) \quad (\text{II})$$

Будем предп-ть $f_i(t)$ — дифф. на $[0, A]$, $f_i(t)$ — не обяз. возраст.

Интерпретация: инвестор с капиталом A пытается распр-ть средства по n проектам, $f_i(t)$ — прибыль.

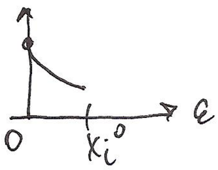
$\boxed{\text{Т 3.10}}$ [Лемма Гиббса] Пусть x^0 – опт. (II), тогда $\exists\ \lambda$, что вып-но: $f_i'(x_i^0) = \lambda$, если $x_i^0 > 0$.
$\le \lambda$, если $x_i^0 = 0$. (1)

Пусть $f_i(t)$ – вогнутые дифф. функции, тогда (1) – достаточное условие оптимальности. Если ~~Пред.~~ $f_1'(0) \ge f_2'(0) \ge \dots \ge f_n'(0)$, $f_i''(0) < 0$, $i = 1, \dots, n$, то $\exists\ l$: $x_i^0 > 0$, $i = 1 \dots l$. и $x_i^0 = 0$, $i \ge l+1$.

Док-во: необх. x^0 опт. (II) $\Rightarrow$ (1).

$\sphericalangle\ i : x_i^0 \ge 0,\ \forall j \ne i$

$\sphericalangle\ \varphi(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 + \varepsilon) + \sum_{k \ne i, j} f_k(x_k^0)$.



если $\varepsilon = 0$, то это просто зн-е max, иначе – меньше.

$\Rightarrow \varphi'(0) \le 0 \Rightarrow \varphi'(0) = f_j'(x_j^0) - f_i'(x_i^0) \le 0$

$f_j'(x_j^0) \le f_i'(x_i^0)$ (2) , $\forall j \ne i$ при $x_i^0 > 0$

если рассм. $x_j^0 > 0 \Rightarrow$ нер-во будет наоборот.

$f_i'(x_i^0) = \lambda$, $\forall x_i^0 > 0$
$f_i'(x_i^0) \le \lambda$, при $x_i^0 = 0$
$\Rightarrow$ усл-е (1) доказано.

дост-ть: x^0 удовл. усл-ю (1), $\frown$ $f_i(t)$ – вогн.

докажем x^0 – опт. распр-е ресурсов в задаче (II).

докажем нер-во: $\forall x \in M_0 : \sum_{i=1}^n f_i(x_i) - \sum_{i=1}^n f_i(x_i^0) \le 0$. $\leftarrow$ н-б.

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n [f_i(x_i) - f_i(x_i^0)] \le \sum_{i=1}^n f_i'(x_i^0)(x_i - x_i^0) \Leftrightarrow$

восп-ся нер-вом для дифф. вогнутых функций:

график вогн. ф-ции лежит под кас-ой к вогн. функции

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_i^0 = 0 : x_i - x_i^0 \ge 0 : f_i'(0) \le \lambda \\ x_i^0 > 0 : f_i'(x_i^0) = \lambda. \end{array}\right] \le \sum_{i=1}^n \lambda(x_i - x_i^{(0)}) =$

$= \lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)}) = \lambda(A - A) = 0$,

если $f_1'(0) \ge \dots \ge f_n'(0)$, $f_i''(0) < 0$, $i = \overline{1, n}$, то

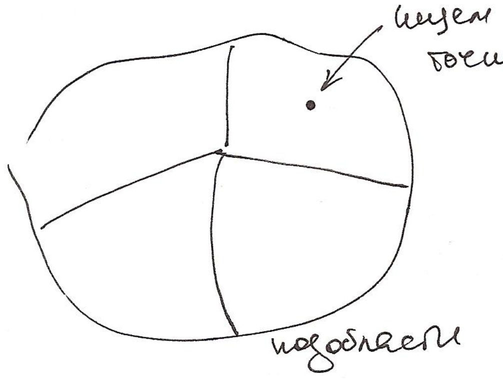
докажем, что ресурс нужно вкладывать в первые l функций: $x^0 : x_i^0 = 0$, $x_{i+1}^0 > 0$.

получим противоречие:

$$f_i'(x_i^0) = \underbrace{f_i'(0)}_{} \overset{(1)}{\le} \lambda \overset{(1)}{=} f_{i+1}'(x_{i+1}^0) < f_{i+1}'(0) \le \underline{\underline{f_i'(0)}} \quad \times\!\!\times$$

ч.т.д.

<u>ПРИМЕР:</u> поиск объектов.



p_i – вер-ть обнаруж-я объекта

A – общее время на поиск

$x_i : \sum_{i=1}^{n} x_i = A$;

└ время поиска в подобласти

$1 - e^{-\mu_i x_i}$ – усл. вер-ть найти точку в подобл-ти (если она там есть)

$\mu_i > 0$.

т.о., задача: $\sum_{i=1}^{n} p_i(1 - e^{-\mu_i x_i}) \to \max\limits_{x \in M_0}$

~~ПРИМЕР:~~ $p_1\mu_1 \ge p_2\mu_2 \ge \dots \ge p_n\mu_n > 0$. (1).

$x_i^0 > 0,\ i = 1, \dots, l$

$x_i^0 = 0,\ i = l+1, \dots, n$.

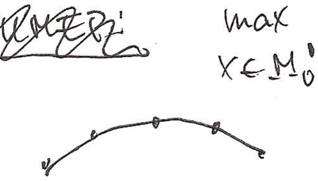
$$\begin{cases} f_i'(x_i^0) = p_i\mu_i e^{-\mu_i x_i^0} = \lambda, \quad i = \overline{1,l} \\ f_{l+1}'(0) = p_{l+1}\mu_{l+1} \le \lambda \\ \sum_{i=1}^{l} x_i^0 = A \end{cases}$$

$-\mu_i x_i^0 = \ln\lambda - \ln(p_i\mu_i)$, $x_i > 0$.

$\ln(p_{l+1}\mu_{l+1}) \le \ln\lambda \longleftarrow$ перебираем с-мы и проверяем нер-во, найдем иск. X.

$\cancel{\max\limits_{x \in M_0'} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) =}$

~~ПРИМЕР:~~ задача: $\max\limits_{x \in M_0'} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*)$ (II)'



– аппр. произв-ой: $f_i'(t) \simeq f_i(t) - f_i(t-1)$.

$$f_i(t) - f_i(t-1) \geq f_i(t+1) - f_i(t). \quad (3)$$

$$f_i(t) \geq \frac{f_i(t-1) + f_i(t+1)}{2}$$

<u>Лемма</u> Пусть $f_i(t)$ удовл. усл-ю (3), тогда для неё справедливо:

1) $t > t_0 \Rightarrow f_i(t) - f_i(t_0) \leq (f_i(t^0+1) - f_i(t^0))(t - t^0)$

дискр. аналог "нах-ся выше ф-ции" для вогн. ф-ции

2) $t < t_0 \Rightarrow f_i(t) - f_i(t^0) \leq (f_i(t^0) - f_i(t^0-1))(t - t^0)$

<u>Док-во:</u>

1) $t > t^0$: $f_i(t) - f_i(t^0) = \overbrace{f_i(t) - f_i(t-1)}^{\circ} + \overbrace{f_i(t-1) - f_i(t-2)}^{\circ} + \ldots +$
$+ \underbrace{f_i(t^0+1) - f_i(t^0)}_{\text{самая большая из разностей}} \leq (f_i(t^0+1) - f_i(t^0))(t - t_0)$.

2) — аналогично (сами проведите), только сумма док-ть нер-во со знаком "минус".

$\boxed{\text{Т.3.11}}$ [Критерий Гросса] Для того, чтобы распр-е x^0 — опт. (II), необх. и дост. вып-е условие:

если $x_j^* > 0 \Rightarrow \underbrace{f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1)}_{} \geq \max\limits_{1 \leq i \leq n} \underbrace{[f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)]}_{\lambda}$. (4).

<u>Док-во:</u>

<u>необх.</u>: x^0 - опт. (II)' $\Rightarrow$ (4)

$\overline{(4)}$: $\exists j : x_j^* > 0$: $f_j(x_j^*) - f_j(x_j^* - 1) < \lambda = f_e(x_e^* + e) - f_e(x_e^*)$.

$$f_j(x_j^*) + f_e(x_e^*) < f_j(x_j^* - 1) + f_e(x_e^* + 1).$$

$$z : z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j \\ x_e^* + 1, & i = e \\ x_i^*, & i \neq j, e \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^n f_i(x_i^*) < \sum_{i=1}^n f_i(z_i).$$

доск.: x^* (4) $\Rightarrow$ x^* - опт. $(\text{II})'$.

$\forall x \in M_0^{!*}$: $f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le \lambda(x_i - x_i^*)$, $i=\overline{1,n}$ (5).

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) \le \lambda(A - A) = 0 .$$

осталось док-ть (5):

1) $x_i > x_i^*$: $f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le (f_i'(x_i^*+1) - f_i'(x_i^*))\overbrace{(x_i - x_i^*)}$ $\le$

$\le \lambda(x_i - x_i^*)$.

2) $x_i < x_i^*$: $f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \le \underbrace{(f_i(x_i^*) - f_i(x_i^*-1))}_{\geq \lambda}\underbrace{(x_i - x_i^*)}_{<0} \le$

$x_i \geq 0 \Rightarrow x_i^* > 0 \Rightarrow$ по условию (4) $\rightarrow$

$\le \lambda(x_i - x_i^*)$ $\Rightarrow$ (5) доказано

ч.т.д.

Алгоритм $(\text{II})'$:

$x^{(1)}$ $x^{(k)}$

x^0

$$x^{(k+1)} : x_i^{(k+1)} = \begin{cases} x_j^{(k)} - 1 \\ x_e^{(k)} + 1 \\ x_i^*, \ i \ne j, e \end{cases}$$

где e - max.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^{(k)}) .$$

Морозов сидит в к. 767.