Вариант 4

① Найдите нижнее и верхнее значение игры, все максиминные и минимаксные стратегии, а также все седловые точки (если $\exists$) матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 5 & 1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 7 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: $W(i) = \min\limits_{1 \le j \le 7} a_{ij} \quad M(j) = \max\limits_{1 \le i \le 5} a_{ij}$

$\underline{V} = \max\limits_{1 \le i \le 5} W(i) \quad \bar{V} = \min\limits_{1 \le j \le 7} M(j)$

$W(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M(j) = (7\ 8\ 9\ 9\ 9\ 8\ 3) \quad \underline{V} = 1 \quad \bar{V} = 3$

$\underline{V} \ne \bar{V} \Rightarrow$ нет с.т.

Ответ: нижнее зн. игры $\underline{V} = 1$, максимин. стр. $X^0 = \{2, 3\}$

верхнее зн. игры: $\bar{V} = 3$, минимакс. стр. $Y^0 = \{7\}$

нет с.т.

② Найти все ситуации равновесия игры на прямоугольнике

$F(xy) = -2x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y \qquad X = [-1, 2]$

$G(xy) = x^2 - 4xy - y^2 - x - y \qquad Y = [-1, 1]$

Решение:

$F_{xx} = -4 < 0 \Rightarrow F$ строго вогн. по x

$G_{yy} = -1 < 0 \Rightarrow G$ строго вогн. по y $\Rightarrow \exists!$ сит. равновесия

$x(y)$: $\max\limits_{-1 \le x \le 2} F(xy)$. $F(xy) = -2x^2 + x(-2y-1) + y^2 - 2y$

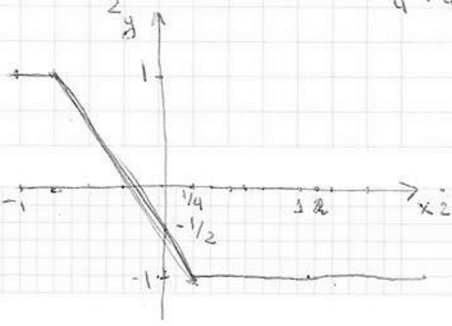
вогн. парабола, $x_в = -\frac{2y+1}{4} \in [-1, 2] \Leftrightarrow y \in [-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}]$ $\Rightarrow$ max. в $x_в$

$x(y) = -\frac{2y+1}{4}$

$y(x)$: $G_y = -4x - 2y - 1 \Rightarrow y = -\frac{4x+1}{2} \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$

$\max\limits_{-1 \le y \le 1} G(xy)$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, -3/4] \\ -\frac{4x+1}{2}, & x \in [-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}] \\ -1, & x \in [1/4, 2] \end{cases}$$



$\Rightarrow$ Линии $x(y)$ и $y(x)$:

Ответ:

ситуации равновесия

$$\begin{cases} y = 2t \\ x = -t + 1/4 \\ t \in [-1/2, 1/2] \end{cases}$$

(3) Решить игру Γ_2 для биматричной Γ:

$$A = \begin{array}{r c} & \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ \max a_{ij} & \begin{matrix} 5 & 7 & 5 & 6 & 8 \end{matrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{r c} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \min b_{ij} & \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{array}$$

Решение:

$$\sigma_2 = \max_{1 \le j \le 5} \min_{1 \le i \le 5} b_{ij} = 1. \quad E = \{1, 3, 4, 5\}$$

$$D = \{(ij) \mid b_{ij} > \sigma_2 = 1\}$$

$$M = \min_{j \in E} \max_{1 \le i \le 5} a_{ij} = 5$$

Вариант 36

① Найти нижн. и верхнее зн-е игры. Все максимин. и минимакси. стратегии, так же С.Т:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 1 & 8 & 8 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & 5 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 9 & 7 & 4 & 8 & 9 & 9 \\ 8 & 9 & 2 & 6 & 5 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение: $W(i) = \min\limits_{1 \le j \le 7} a_{ij}$, $M(j) = \max\limits_{1 \le i \le 5} a_{ij}$, $\underline{v} = \max\limits_{1 \le i \le 5} W(i)$, $\bar{v} = \min\limits_{1 \le j \le 7} M(j)$

$$W(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad M(j) = (9\,9\,9\,7\,8\,9\,9)$$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{v} = 4 \ \text{нижн. зн-е} \quad \bar{v} = 7 \ \text{верхн. зн-е} \\ x^0 = 4 \ \text{максимин стр} \quad y^0 = 4 \ \text{минимакс стр} \quad \text{Ответ} \\ \underline{v} \ne \bar{v} \Rightarrow \text{С.Т нет} \end{array}}$

② Найти все ситуации р-сия игры на промежутке:

$F(xy) = -3x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x \qquad X = [-1\,1]$

$G(xy) = -2x^2 - 5xy - 3y^2 - y \qquad Y = [-1\,1]$

Решение: $F_{xx} = -6 < 0 \Rightarrow F$ строго вогн. пох

$G_{yy} = -6 < 0 \Rightarrow G$ строго вогн. пох $\Rightarrow \exists!$ сит. равновесия.

$x(y)$: $\max\limits_{-1 \le x \le 1} F(xy)$; $F_x = -6x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow x_B = \frac{3y+2}{6}$

$-1 \le \frac{3y+2}{6} \le 1 \Leftrightarrow -8 \le 3y \le 4 \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \le y \le 4/3 \ni [-1,1]$

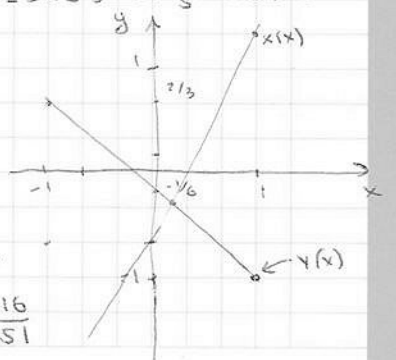
$x(y) = \frac{3y+2}{6}$

$y(x)$: $\max\limits_{-1 \le y \le 1} G(xy)$: $G_y = -6y - 1 - 5x \Rightarrow y_B = -\frac{5x+1}{6}$

$-1 \le -\frac{5x+1}{6} \le 1 \Leftrightarrow -7 \le 5x \le 5 \Leftrightarrow -\frac{7}{5} \le x \le 1 \in [-1,1]$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{5x+1}{6}$

Найдем Пние $x(y)$ и $y(x)$



$3y + 2 = 6x$

$y = \frac{6x-2}{3} = -\frac{5x+1}{6}$

$12x - 4 = -5x - 1$

$17x = 3$

$x = 3/17 \quad y = \frac{6}{17} - \frac{2}{3} =$

$= \frac{18-34}{51} = -\frac{16}{51}$

Ответ: ситуация равновесия: $x^0 = 3/17$
$y^0 = -16/51$

Вариант 15

① Найти все р-сия по Шт. биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$Y(i) = \arg\max_{1 \le j \le 6} b_{ij} \ ; \ W'(i) = \max_{j \in Y(i)} a_{ij}$$

$$(i^0 j^0) : W'(i^0) = \max_{1 \le i \le 5} W'(i) = F'$$

$Y(1) = \{3\}$ $\quad W'(1) = 1$

$Y(2) = \{4, 6\}$ $\quad W'(2) = 2$ $\quad \Rightarrow F' = 4$

$Y(3) = \{1, 4\}$ $\quad W'(3) = 1$ $\quad (i^0 j^0) = (1,1), (2,1), (3,2),$

$Y(4) = \{3\}$ $\quad W'(4) = 0$ $\quad (5,3), (5,5)$ } Ответ

$Y(5) = \{2, 3, 6\}$ $\quad W'(5) = 4$

② Найти решение в см. стр. матричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$<$ - зн. доминир
ст = столбец
стр = строка

Решение Доп. надо найти хотя бы 1 реш-е в см. стр

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{4} & 4 & 3 & \cancel{4} \\ \cancel{8} & 2 & 7 & \cancel{9} \\ \cancel{5} & \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$\qquad q_1 \ q_2$

4 ст > 1 ст ⇒ выч. 4 ст

1 стр > 4 стр ⇒ выч 4 стр

1 ст > 3 ст ⇒ выч 1 ст

$\frac{1}{2}$ 3 стр + $\frac{1}{2}$ 2 стр ≥ 1 стр ⇒ выч 1 стр

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} v = 4p_1 + 2p_2 \\ v = 3p_1 + 7p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v = 4q_1 + 3q_2 \\ v = 2q_1 + 7q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$p_1 = 1 - p_2$ $\quad v = 4 - 4p_2 + 2p_2 = 4 - 2p_2 = 3 - 3p_2 + 7p_2 = 3 + 4p_2$

$6p_2 = 1$ $\quad p_2 = 1/6, \ p_1 = 5/6$ $\quad \hat{p} = (5/6, 1/6)$

$q_1 = 1 - q_2$ $\quad v = 4 - 4q_2 + 3q_2 = 4 - q_2 = 2 - 2q_2 + 7q_2 = 2 + 5q_2$

$6q_2 = 2$ $\quad q_2 = 1/3$ $\quad q_1 = 2/3$ $\quad \hat{q} = (2/3; 1/3)$

$$\boxed{\begin{matrix} p^0 = (0, 5/6, 1/6, 0) & v = 11/3 \\ q^0 = (0, 2/3, 1/3, 0) & \end{matrix}}$$

Ответ

3) Исп. соображения доминирования, найти ситуации равновесия в см. стр. биматричной игры

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & \cancel{5} & \cancel{7} \\ 2 & 3 & \cancel{6} & \cancel{7} \\ 1 & 4 & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & \cancel{5} & \cancel{1} \\ 3 & 4 & \cancel{4} & \cancel{3} \\ 4 & 1 & \cancel{1} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

Решение: A: 2 стр > 4 стр   B: 1 ст > 4 ст

2 ст > 3 ст

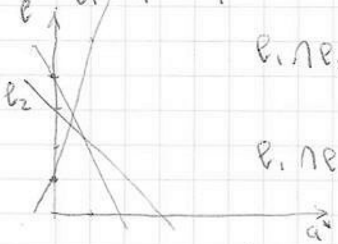
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} p^* \\ 1-p^* \\ \end{matrix}$$

ℓ_1 $\quad q^* \quad 1-q^*$

$\ell_1(q^*) = 4q^* + 1$

$\ell_2(q^*) = 3 - q^*$

$\ell_3(q^*) = 4 - 3q^*$



$\ell_1 \wedge \ell_2$: $5q^* = 2$ $\quad q^* = 2/5$ $\quad \hat{q} = (2/5, 3/5)$

B: $2p^* + 3 - 3p^* = 3 - p^* = v = 4 + 2p^*$

$3p^* = -1 \Rightarrow$ не подх

$\ell_1 \wedge \ell_3$: $3 - q^* = 4 - 3q^* \Rightarrow q^* = 1/2$ $\quad \hat{q} = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2})$

B: $2p^* + 4 - 4p^* = 4 - 2p^* = v = 5p^* + 1$

$7p^* = 3$ $\quad p^* = 3/7$ $\quad \hat{p} = (3/7, 4/7)$

$\ell_2 \wedge \ell_3$: $3 - q^* = 4 - 3q^*$ $\quad q^* = 1/2$ $\quad \hat{q} = (1/2\ 1/2)$

B: $3p^* + 4 - 4p^* = 4 - p^* = v = 1 + 3p^*$, $3 = 4p^*$

$\hat{p} = (3/4, 1/4)$

$\Rightarrow$ ситуации равновесия: (в см. стр)

1. $q^0 = (1/2, 1/2, 0, 0)$ $\quad p^0 = (3/7, 0, 4/7, 0)$
2. $q^0 = (1/2, 1/2, 0, 0)$ $\quad p^0 = (0, 3/4, 1/4, 0)$

} Ответ

WAZNE NOW

Вариант 3

① Найти все равновесия по Штакельбергу биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение: $Y(i) = \underset{1 \le j \le 6}{\arg\max}\, b_{ij}$, $W'(i) = \max\limits_{j \in Y(i)} a_{ij}$

$(i^0 j^0): W'(i^0) = \max\limits_{1 \le i \le 5} W'(i) = F'$

$Y(1) = \{3,5\}$ $\quad W'(1) = 4$

$Y(2) = \{2,5\}$ $\quad W'(2) = 3$

$Y(3) = \{3,6\}$ $\quad W'(3) = 2$ $\quad \Rightarrow F' = 4$

$Y(4) = \{1,3,5\}$ $\quad W'(4) = 4$ $\quad (i^0 j^0) = (1,3), (1,4), (2,4) (3,1),$

$Y(5) = \{6\}$ $\quad W'(5) = 4$ $\quad (4,3), (4,5), (5,1), (5,6)$ $\Big\}$ Ответ

② Найти реш-е в см. стр. матричной игры.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение: Доп. достаточно 1ого реш. в см. стр

4ст > 2ст ⇒ выч 2ст

2стр > 1стр ⇒ выч 1стр

3стр + 4стр > 2стр ⇒ выч 2стр

3ст > 2ст ⇒ выч 3ст

$$\hat{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{cases} v = 3p_1 + 8p_2 \\ v = 6p_1 + 3p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v = 3q_1 + 6q_2 \\ v = 8q_1 + 3q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$3 + 5p_2 = 6 - 3p_2 \Rightarrow p_2 = 3/8$

$3 + 3q_2 = 8 - 5q_2 \Rightarrow q_2 = 5/8$

Ответ: $q^0 = (3/8, 5/8, 0 0)$ $\quad v = 15/8 + 3 = 4\frac{7}{8}$

$p^0 = (0, 0, 5/8, 3/8)$

③ Исп-я соображ. доминир. найти с.р. в см. стр. биматричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение: A: 3стр > 4стр $\quad$ B: 1ст > 4ст

3ст > 1ст

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} p^* \\ 1-p^* \end{array}$$

$\quad q^* \quad 1-q^*$

$\ell_1(q^*) = 1 + 4q^*$

$\ell_2(q^*) = 3 - q^*$

$\ell_3(q^*) = 4 - 3q^*$

$\ell_1 \cap \ell_2$: $q^* = 2/5$ $\quad \hat{q} = (2/5, 3/5)$

B: $3 - p^* = 4 + 2p^*$ $\quad p^* = -1/3$ не подх

$\ell_1 \cap \ell_3$: $q^* = 3/7$ $\quad \hat{q} = (3/7, 4/7)$

B: $4 - 2p^* = 1 + 5p^*$ $\quad \hat{p} = (3/7, 4/7)$

$\ell_2 \cap \ell_3$: $q^* = 1/2$ $\quad \hat{q} = (1/2, 1/2)$

B: $4 - p^* = 1 + 3p^*$ $\quad \hat{p} = (3/4, 1/4)$

Ответ: 1. $p^0 = (3/7, 0, 4/7, 0)$ $q^0 = (0, 3/7, 4/7, 0)$

2. $p^0 = (0, 3/4, 1/4, 0)$ $q^0 = (0, 1/2, 1/2, 0)$

Вариант 14.

① Найдите наилучш. гарант. результат F_1 и все оптимальные стратегии 1ого игрока иерархической игры Γ_1 для биматр. игры Γ:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$Y(i) = \arg\max\limits_{1\le j\le 6} b_{ij}$, $W(i) = \min\limits_{y\in Y(i)} a_{ij}$; $F_1 = \max\limits_{1\le i\le 5}\min\limits_{j\in Y(i)} a_{ij} = \max\limits_{1\le i\le 5} W(i)$

$Y(1) = \{2,5,6\}$ $\quad W(1) = 1$
$Y(2) = \{5\}$ $\quad W(2) = 2$
$Y(3) = \{1,2\}$ $\quad W(3) = 0$
$Y(4) = \{2,4\}$ $\quad W(4) = 0$
$Y(5) = \{3,4\}$ $\quad W(5) = 2$

$$\boxed{\begin{gathered} F_1 = 2 \\ i^\circ = \{2,5\} \end{gathered}}$$

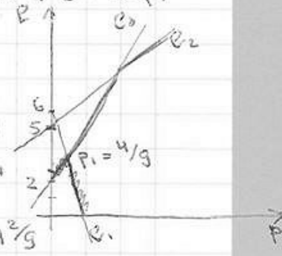
Ответ

② Найти решение в смешанных стратегиях матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & \cancel{8} \\ 6 & 4 & 2 & \cancel{2} \\ \cancel{6} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{6} & \cancel{8} \end{pmatrix}$$

Решение: 4 ст > 3 ст ⇒ выч. 4 ст
2 стр > 3 стр ⇒ выч 3 стр
1 стр > 4 стр ⇒ выч 4 стр

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 \\ 1-p_1 \end{matrix}$$



$\ell_1(p_1) = 2p_1 + 6 - 6p_1 = 6 - 4p_1$ $\qquad \ell_1 \cap \ell_2$: $p_1 = 1/5$
$\ell_2(p_1) = 5 + p_1$ $\qquad \ell_1 \cap \ell_3$: $p_1 = 4/9$
$\ell_3(p_1) = 2 + 5p_1$ $\qquad \ell_2 \cap \ell_3$: $p_1 = 3/4$

$v = \max\limits_{0\le p_1\le 1} \min\limits_{1\le j\le n} \ell_j(p_1)$ ⇒ ищем максимум нижней огибающей

$p_1 = 4/9$ $\quad p^\circ = (4/9, 5/9)$ $\quad v = 6 - 16/9 = 6 - 1\frac{7}{9} = 4\frac{2}{9}$

$\ell_1 \cap \ell_3 \Rightarrow \ell_1(p_1) = 4\frac{2}{9} = \ell_2(p_1)$

$\ell_j(p_1) = a_{1j}p_1 + a_{2j}(1-p_1)$ $\qquad k_1 = 2-6 = -4;\ k_3 = 7-2 = 5$

$k_j = a_{1j} - a_{2j}$ $\qquad \Rightarrow (-4)q^* + 5(1-q^*) = 0$

ищем q^* из $k_{j_1}q^* + k_{j_2}(1-q^*) = 0$ $\qquad 5 - 9q^* = 0;\ q^* = 5/9$

Ответ: $p^\circ = (4/9, 5/9, 0, 0)$
$q^\circ = (5/9, 0, 4/9, 0)$
$v = 4\frac{2}{9}$

③ Найдите минимакс и минимаксную стратегию игры на прямоугольнике!

$$F(x,y) = -3x^2 + 3xy - 3y^2 - x + y\ ;\ X = [-1,1]$$
$$Y = [-1,1]$$

<u>Решение:</u> $\bar{v} = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} F(xy)$; $M(y) = \sup\limits_{x \in X} F(xy)$

X, Y - компакты

$F_x = -6x + 3y - 1$, $F_{xx} = -6 < 0$

$F_y = 3x - 6y + 1$, $F_{xy} = -6 < 0$

Найдем $M(y)$: $F(xy) = -3x^2 + x(3y-1) - 3y^2 + y$ - относ x это парабола, выпуклая $\Rightarrow$ максимум т.б в вершине

при этом верш. в $x = \frac{1-3y}{6}$

поскольку $-1 \le x \le 1 \iff$ (вершина внутри инт) $-5/3 \le y \le 7/3$

$\Rightarrow$ вершина внутри Δного интервала $\Rightarrow$ sup. достигается в вершине : $x = \frac{1-3y}{6}$

$$M(y) = F\left(\frac{1-3y}{6}, y\right) = -\cancel{3}\left(\frac{1-3y}{\cancel{36}\,12}\right)^2 + \frac{(1-3y)(3y-1)}{6} - (3y-1)y =$$

$$= (1-3y)\left(\frac{3y-1}{12} + \frac{3y-1}{6} + y\right) = \frac{1-3y}{12}(9y - 3 + 12y) =$$

$$= \frac{1-3y}{12}(21y-3) = \frac{1-3y}{4}(7y-1) = \frac{1}{4}(7y - 21y^2 - 1 + 3y) =$$
$$= \frac{1}{4}(-21y^2 + 10y - 1) = M(y) -$$

- это парабола, выпуклая. Ее вершина $y = \frac{5}{21}$ $\cancel{\frac{7}{4}}$ - находится в пределе компакта $\to$ минимум достигается на границе.

$$\bar{v} = \min[M(-1), M(1)] = \min[-8, -3] = -8$$
$$M(-1) = \frac{1}{4}(-21 - 10 - 1) = \frac{1}{4}(-32) = -8$$
$$M(1) = \frac{1}{4}(-21 + 10 - 1) = \frac{1}{4}(-12) = -3$$

<u>Ответ</u>: минимаксная стратегия: $y^0 = \frac{5}{21}$

минимакс: $\bar{v} = -8$

Вариант 38

① Найти наилучш. гарант. р-т F_1 и все опт. стр. 1ого игрока Γ_1 для биматр. игры Γ:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение: $Y(i) = \arg\max\limits_{1\le j\le 6} b_{ij}$, $W(i) = \min\limits_{j\in Y(i)} a_{ij}$, $F_1 = \max\limits_{1\le i\le 5} W(i)$

$Y(1) = \{6\}$ $\quad W(1) = 2$

$Y(2) = \{2\}$ $\quad W(2) = 0$

$Y(3) = \{1,2,4,6\}$ $\quad W(3) = 0$

$Y(4) = \{3\}$ $\quad W(4) = 1$

$Y(5) = \{2\}$ $\quad W(5) = 4$

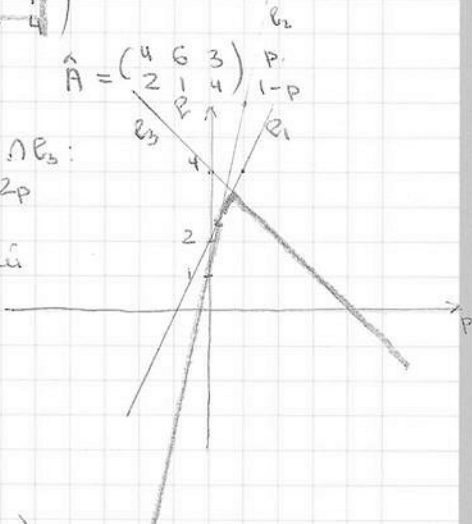
$\Rightarrow \boxed{F_1 = 4 \quad i^0 = 5}$ Ответ

② Найти реш. в см. стр. матричной игры:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{1} \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix}$$

Решение: 4 ст > 1 ст
1 стр > 4 стр
2 стр > 3 стр

$$\hat{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} p \\ 1-p \end{array}$$



$\ell_1(p) = 2+2p$ $\quad \Rightarrow$ опт. в $\ell_1 \cap \ell_3$:

$\ell_2(p) = 1+5p$ $\quad 4-p = 2+2p$

$\ell_3(p) = 4-p$ $\quad p = 2/3$

(тк ищем макс. нижней огибающей)

$\hat{p} = (2/3 \;\; 1/3)$ $\quad v = 3\,1/3$

$4q + 3(1-q) = 2q + 4(1-q)$

$3 + q = 4 - 2q$ $\quad q = 1/3$

$\hat{q} = (1/3 \;\; 2/3)$

Ответ: $p^0 = (2/3 \;\; 1/3 \;\; 0 \;\; 0)$

$q^0 = (1/3 \;\; 0 \;\; 2/3 \;\; 0)$

$v = 3\,1/3$

(3) Найти минимакс и минимаксную стр. игры на прямоугольнике:

$$F(x,y) = 3x^2 + 5xy - y^2 - 2x - y, \quad X = [-1,2], \quad Y = [-2,1]$$

Решение: $\bar{v} = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x,y)$ $\qquad M(y) = \sup_{x \in X} F(x,y)$

X, Y - компакты.

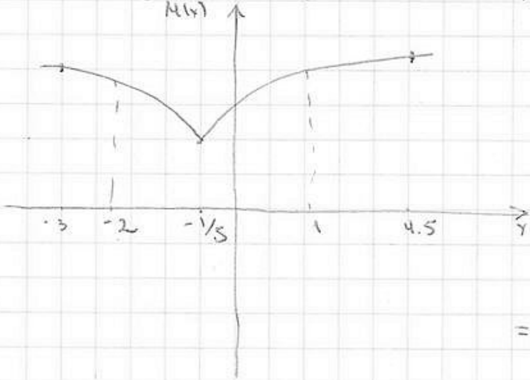
$F_x = 6x + 5y - 2 \qquad F_{xx} = 6 > 0$

$F_y = 5x - 2y - 1 \qquad F_{yy} = -2 < 0$

$F(xy)$ - относ. x парабола, вет $\Rightarrow$ sup находится в вершине

$F(-1,y) = 3 - 5y - y^2 + 2 - y = -y^2 - 6y + 5 \qquad y_В = -3$

$F(2,y) = 12 + 10y - y^2 - 4 - y = -y^2 + 9y + 8 \qquad y_В = 4.5$



Пнес:

$-y^2 - 6y + 5 = -y^2 + 9y + 8$

$15y = -3$

$y = -1/5$

$\Rightarrow$ min $M(y)$ достиг. в т. $y = -1/5$

$$\bar{v} = -\frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 5 = \frac{-1 + 30 + 125}{25} = \frac{154}{25} = 6\frac{4}{25}$$

Ответ: минимакс $\bar{v} = 6\frac{4}{25}$

мин. стратегия $y^0 = -1/5$